# 线性代数

## 一、基本知识

1. 本书中所有的向量都是列向量的形式：

   $$\vec{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

   本书中所有的矩阵 $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 都表示为：

   $$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,n} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m,1} & x_{m,2} & \cdots & x_{m,n} \end{bmatrix}$$

   简写为：$(x_{i,j})_{m\times n}$ 或者 $[x_{i,j}]_{m\times n}$ 。

2. 矩阵的`F`范数：设矩阵 $\mathbf{A} = (a_{i,j})_{m\times n}$，则其`F` 范数为：$||\mathbf{A}||_F = \sqrt{\sum_{i,j} a_{i,j}^2}$ 。

   它是向量的 $L_2$ 范数的推广。

3. 矩阵的迹：设矩阵 $\mathbf{A} = (a_{i,j})_{m\times n}$，则$\mathbf{A}$的迹为： $tr(\mathbf{A}) = \sum_i a_{i,i}$。

   迹的性质有：

   - $\mathbf{A}$ 的`F` 范数等于$\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ 的迹的平方根：$||\mathbf{A}||_F = \sqrt{tr(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)}$ 。
   - $\mathbf{A}$ 的迹等于$\mathbf{A}^T$ 的迹：$tr(\mathbf{A}) = tr(\mathbf{A}^T)$ 。
   - 交换律：假设 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}$，则有：$tr(\mathbf{AB}) = tr(\mathbf{BA})$ 。
   - 结合律：$tr(\mathbf{ABC}) = tr(\mathbf{CAB}) = tr(\mathbf{BCA})$ 。

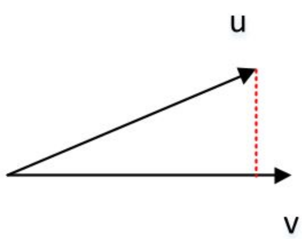
## 二、向量操作

1. 一组向量 $\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2, \cdots, \vec{\mathbf{v}}_n$ 是线性相关的：指存在一组不全为零的实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，使得： $\sum_{i=1}^n a_i \vec{\mathbf{v}}_i = \vec{\mathbf{0}}$ 。

   一组向量 $\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2, \cdots, \vec{\mathbf{v}}_n$ 是线性无关的，当且仅当 $a_i = 0, i = 1, 2, \cdots, n$ 时，才有：$\sum_{i=1}^n a_i \vec{\mathbf{v}}_i = \vec{\mathbf{0}}$ 。

2. 一个向量空间所包含的最大线性无关向量的数目，称作该向量空间的维数。

3. 三维向量的点积：$\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z = |\vec{\mathbf{u}}||\vec{\mathbf{v}}| \cos(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}})$ 。



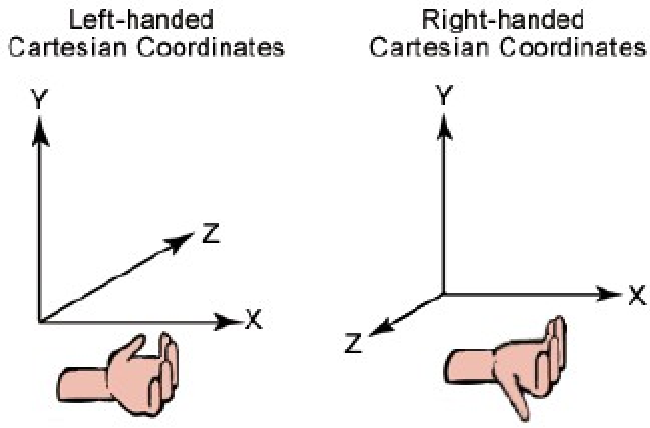
4. 三维向量的叉积：

$$\vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{bmatrix}$$

   其中 $\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}$ 分别为 $x, y, z$ 轴的单位向量。

$$\vec{\mathbf{u}} = u_x \vec{\mathbf{i}} + u_y \vec{\mathbf{j}} + u_z \vec{\mathbf{k}}, \quad \vec{\mathbf{v}} = v_x \vec{\mathbf{i}} + v_y \vec{\mathbf{j}} + v_z \vec{\mathbf{k}}$$

   - $\vec{\mathbf{u}}$ 和 $\vec{\mathbf{v}}$ 的叉积垂直于 $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}$ 构成的平面，其方向符合右手规则。
   - 叉积的模等于 $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}$ 构成的平行四边形的面积
   - $\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}} = -\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{u}}$
   - $\vec{\mathbf{u}} \times (\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}}) = (\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{w}})\vec{\mathbf{v}} - (\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}})\vec{\mathbf{w}}$




5. 三维向量的混合积：

$$[\vec{\mathbf{u}}\ \vec{\mathbf{v}}\ \vec{\mathbf{w}}] = (\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}) \cdot \vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{u}} \cdot (\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}})$$
$$= \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{vmatrix}$$

   其物理意义为：以 $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}$ 为三个棱边所围成的平行六面体的体积。 当 $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}$ 构成右手系时，该平行六面体的体积为正号。

6. 两个向量的并矢：给定两个向量 $\vec{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T, \vec{\mathbf{y}} = (y_1, y_2, \cdots, y_m)^T$ ，则向量的并矢记作：

$$\vec{\mathbf{x}}\vec{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_m \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \cdots & x_2y_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & x_ny_m \end{bmatrix}$$

   也记作 $\vec{\mathbf{x}} \otimes \vec{\mathbf{y}}$ 或者 $\vec{\mathbf{x}}\vec{\mathbf{y}}^T$。

# 三、矩阵运算

1. 给定两个矩阵 $\mathbf{A} = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{m \times n}, \mathbf{B} = (b_{i,j}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ，定义：
   - 阿达马积 `Hadamard product` （又称作逐元素积）：

$$\mathbf{A}\circ\mathbf{B}=\begin{bmatrix} a_{1,1}b_{1,1} & a_{1,2}b_{1,2} & \cdots & a_{1,n}b_{1,n} \\ a_{2,1}b_{2,1} & a_{2,2}b_{2,2} & \cdots & a_{2,n}b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1}b_{m,1} & a_{m,2}b_{m,2} & \cdots & a_{m,n}b_{m,n} \end{bmatrix}$$

- 克罗内积`Kronnecker product`：

$$\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}=\begin{bmatrix} a_{1,1}\mathbf{B} & a_{1,2}\mathbf{B} & \cdots & a_{1,n}\mathbf{B} \\ a_{2,1}\mathbf{B} & a_{2,2}\mathbf{B} & \cdots & a_{2,n}\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1}\mathbf{B} & a_{m,2}\mathbf{B} & \cdots & a_{m,n}\mathbf{B} \end{bmatrix}$$

2. 设 $\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}},\vec{\mathbf{c}}$ 为 $n$ 阶向量， $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{X}$ 为 $n$ 阶方阵，则有：

$$\frac{\partial(\vec{\mathbf{a}}^T\vec{\mathbf{x}})}{\partial\vec{\mathbf{x}}}=\frac{\partial(\vec{\mathbf{x}}^T\vec{\mathbf{a}})}{\partial\vec{\mathbf{x}}}=\vec{\mathbf{a}}$$

$$\frac{\partial(\vec{\mathbf{a}}^T\mathbf{X}\vec{\mathbf{b}})}{\partial\mathbf{X}}=\vec{\mathbf{a}}\vec{\mathbf{b}}^T=\vec{\mathbf{a}}\otimes\vec{\mathbf{b}}\in\mathbb{R}^{n\times n}$$

$$\frac{\partial(\vec{\mathbf{a}}^T\mathbf{X}^T\vec{\mathbf{b}})}{\partial\mathbf{X}}=\vec{\mathbf{b}}\vec{\mathbf{a}}^T=\vec{\mathbf{b}}\otimes\vec{\mathbf{a}}\in\mathbb{R}^{n\times n}$$

$$\frac{\partial(\vec{\mathbf{a}}^T\mathbf{X}\vec{\mathbf{a}})}{\partial\mathbf{X}}=\frac{\partial(\vec{\mathbf{a}}^T\mathbf{X}^T\vec{\mathbf{a}})}{\partial\mathbf{X}}=\vec{\mathbf{a}}\otimes\vec{\mathbf{a}}$$

$$\frac{\partial(\vec{\mathbf{a}}^T\mathbf{X}^T\mathbf{X}\vec{\mathbf{b}})}{\partial\mathbf{X}}=\mathbf{X}(\vec{\mathbf{a}}\otimes\vec{\mathbf{b}}+\vec{\mathbf{b}}\otimes\vec{\mathbf{a}})$$

$$\frac{\partial[(\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}+\vec{\mathbf{a}})^T\mathbf{C}(\mathbf{B}\vec{\mathbf{x}}+\vec{\mathbf{b}})]}{\partial\vec{\mathbf{x}}}=\mathbf{A}^T\mathbf{C}(\mathbf{B}\vec{\mathbf{x}}+\vec{\mathbf{b}})+\mathbf{B}^T\mathbf{C}(\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}+\vec{\mathbf{a}})$$

$$\frac{\partial(\vec{\mathbf{x}}^T\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}})}{\partial\vec{\mathbf{x}}}=(\mathbf{A}+\mathbf{A}^T)\vec{\mathbf{x}}$$

$$\frac{\partial[(\mathbf{X}\vec{\mathbf{b}}+\vec{\mathbf{c}})^T\mathbf{A}(\mathbf{X}\vec{\mathbf{b}}+\vec{\mathbf{c}})]}{\partial\mathbf{X}}=(\mathbf{A}+\mathbf{A}^T)(\mathbf{X}\vec{\mathbf{b}}+\vec{\mathbf{c}})\vec{\mathbf{b}}^T$$

$$\frac{\partial(\vec{\mathbf{b}}^T\mathbf{X}^T\mathbf{A}\mathbf{X}\vec{\mathbf{c}})}{\partial\mathbf{X}}=\mathbf{A}^T\mathbf{X}\vec{\mathbf{b}}\vec{\mathbf{c}}^T+\mathbf{A}\mathbf{X}\vec{\mathbf{c}}\vec{\mathbf{b}}^T$$

3. 如果 $f$ 是一元函数，则：

- 其逐元向量函数为：$f(\vec{\mathbf{x}})=(f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_n))^T$ 。
- 其逐矩阵函数为：

$$f(\mathbf{X})=\begin{bmatrix} f(x_{1,1}) & f(x_{1,2}) & \cdots & f(x_{1,n}) \\ f(x_{2,1}) & f(x_{2,2}) & \cdots & f(x_{2,n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(x_{m,1}) & f(x_{m,2}) & \cdots & f(x_{m,n}) \end{bmatrix}$$

- 其逐元导数分别为：

$$f'(\vec{\mathbf{x}})=(f'(x1),f'(x2),\cdots,f'(x_n))^T$$
$$f'(\mathbf{X})=\begin{bmatrix} f'(x_{1,1}) & f'(x_{1,2}) & \cdots & f'(x_{1,n}) \\ f'(x_{2,1}) & f'(x_{2,2}) & \cdots & f'(x_{2,n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f'(x_{m,1}) & f'(x_{m,2}) & \cdots & f'(x_{m,n}) \end{bmatrix}$$

4. 各种类型的偏导数：
   - 标量对标量的偏导数：$\frac{\partial u}{\partial v}$ 。
   - 标量对向量（$n$ 维向量）的偏导数：$\frac{\partial u}{\partial \vec{\mathbf{v}}}=(\frac{\partial u}{\partial v_1},\frac{\partial u}{\partial v_2},\cdots,\frac{\partial u}{\partial v_n})^T$ 。
   - 标量对矩阵($m\times n$ 阶矩阵)的偏导数：

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{V}}=\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial V_{1,1}} & \frac{\partial u}{\partial V_{1,2}} & \cdots & \frac{\partial u}{\partial V_{1,n}} \\ \frac{\partial u}{\partial V_{2,1}} & \frac{\partial u}{\partial V_{2,2}} & \cdots & \frac{\partial u}{\partial V_{2,n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u}{\partial V_{m,1}} & \frac{\partial u}{\partial V_{m,2}} & \cdots & \frac{\partial u}{\partial V_{m,n}} \end{bmatrix}$$

   - 向量（$m$ 维向量）对标量的偏导数：$\frac{\partial \vec{\mathbf{u}}}{\partial v}=(\frac{\partial u_1}{\partial v},\frac{\partial u_2}{\partial v},\cdots,\frac{\partial u_m}{\partial v})^T$ 。
   - 向量（$m$ 维向量）对向量 ($n$ 维向量) 的偏导数（雅可比矩阵，行优先）

$$\frac{\partial \vec{\mathbf{u}}}{\partial \vec{\mathbf{v}}}=\begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial v_1} & \frac{\partial u_1}{\partial v_2} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial v_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial v_1} & \frac{\partial u_2}{\partial v_2} & \cdots & \frac{\partial u_2}{\partial v_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u_m}{\partial v_1} & \frac{\partial u_m}{\partial v_2} & \cdots & \frac{\partial u_m}{\partial v_n} \end{bmatrix}$$

     如果为列优先，则为上面矩阵的转置。
   - 矩阵($m\times n$ 阶矩阵)对标量的偏导数

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial v}=\begin{bmatrix} \frac{\partial U_{1,1}}{\partial v} & \frac{\partial U_{1,2}}{\partial v} & \cdots & \frac{\partial U_{1,n}}{\partial v} \\ \frac{\partial U_{2,1}}{\partial v} & \frac{\partial U_{2,2}}{\partial v} & \cdots & \frac{\partial U_{2,n}}{\partial v} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial U_{m,1}}{\partial v} & \frac{\partial U_{m,2}}{\partial v} & \cdots & \frac{\partial U_{m,n}}{\partial v} \end{bmatrix}$$

5. 对于矩阵的迹，有下列偏导数成立：

$$\frac{\partial[tr(f(\mathbf{X}))]}{\partial \mathbf{X}} = (f'(\mathbf{X}))^T$$

$$\frac{\partial[tr(\mathbf{AXB})]}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{A}^T\mathbf{B}^T$$

$$\frac{\partial[tr(\mathbf{AX}^T\mathbf{B})]}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{BA}$$

$$\frac{\partial[tr(\mathbf{A}\otimes\mathbf{X})]}{\partial \mathbf{X}} = tr(\mathbf{A})\mathbf{I}$$

$$\frac{\partial[tr(\mathbf{AXBX})]}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{A}^T\mathbf{X}^T\mathbf{B}^T + \mathbf{B}^T\mathbf{X}\mathbf{A}^T$$

$$\frac{\partial[tr(\mathbf{X}^T\mathbf{BXC})]}{\partial \mathbf{X}} = (\mathbf{B}^T + \mathbf{B})\mathbf{XCC}^T$$

$$\frac{\partial[tr(\mathbf{C}^T\mathbf{X}^T\mathbf{BXC})]}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{BXC} + \mathbf{B}^T\mathbf{XC}^T$$

$$\frac{\partial[tr(\mathbf{AXBX}^T\mathbf{C})]}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{A}^T\mathbf{C}^T\mathbf{XB}^T + \mathbf{CAXB}$$

$$\frac{\partial[tr((\mathbf{AXB}+\mathbf{C})(\mathbf{AXB}+\mathbf{C}))]}{\partial \mathbf{X}} = 2\mathbf{A}^T(\mathbf{AXB}+\mathbf{C})\mathbf{B}^T$$

6. 假设 $\mathbf{U} = f(\mathbf{X})$ 是关于 $\mathbf{X}$ 的矩阵值函数（$f:\mathbb{R}^{m\times n}\rightarrow\mathbb{R}^{m\times n}$），且 $g(\mathbf{U})$ 是关于 $\mathbf{U}$ 的实值函数（$g:\mathbb{R}^{m\times n}\rightarrow\mathbb{R}$），则下面链式法则成立：

$$\frac{\partial g(\mathbf{U})}{\partial \mathbf{X}} = \left(\frac{\partial g(\mathbf{U})}{\partial x_{i,j}}\right)_{m\times n} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g(\mathbf{U})}{\partial x_{1,1}} & \frac{\partial g(\mathbf{U})}{\partial x_{1,2}} & \cdots & \frac{\partial g(\mathbf{U})}{\partial x_{1,n}} \\ \frac{\partial g(\mathbf{U})}{\partial x_{2,1}} & \frac{\partial g(\mathbf{U})}{\partial x_{2,2}} & \cdots & \frac{\partial g(\mathbf{U})}{\partial x_{2,n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g(\mathbf{U})}{\partial x_{m,1}} & \frac{\partial g(\mathbf{U})}{\partial x_{m,2}} & \cdots & \frac{\partial g(\mathbf{U})}{\partial x_{m,n}} \end{bmatrix}$$
$$= \left(\sum_k\sum_l \frac{\partial g(\mathbf{U})}{\partial u_{k,l}}\frac{\partial u_{k,l}}{\partial x_{i,j}}\right)_{m\times n} = \left(tr\left[\left(\frac{\partial g(\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}}\right)^T \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_{i,j}}\right]\right)_{m\times n}$$

# 四、特殊函数

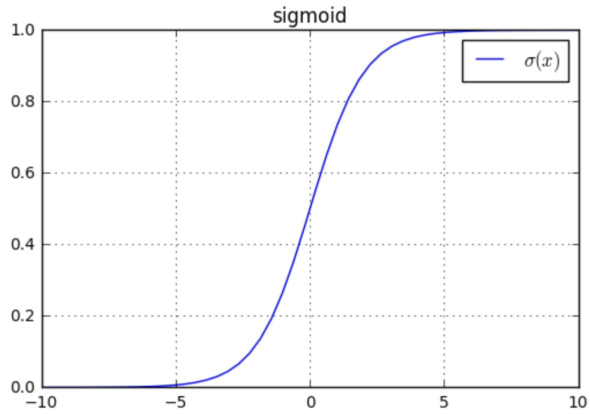
1. 这里给出机器学习中用到的一些特殊函数。

## 4.1 sigmoid 函数

1. `sigmoid`函数：

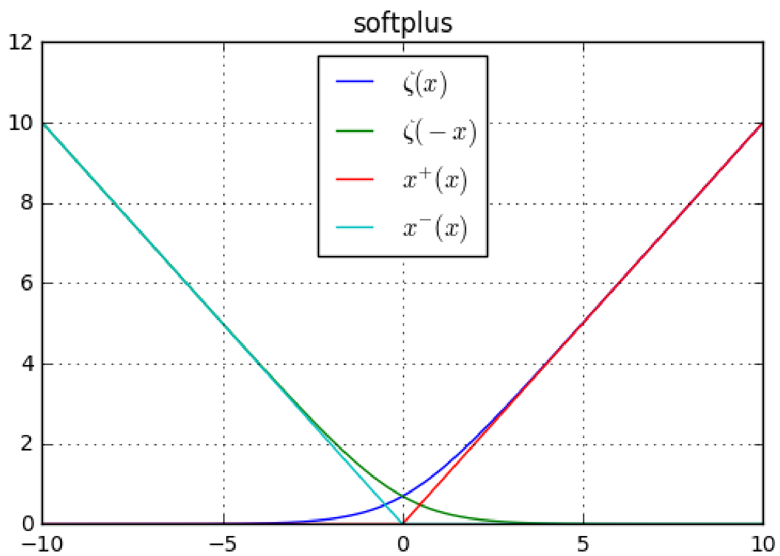
$$\sigma(x) = \frac{1}{1+\exp(-x)}$$

- 该函数可以用于生成二项分布的 $\phi$ 参数。
- 当 $x$ 很大或者很小时，该函数处于饱和状态。此时函数的曲线非常平坦，并且自变量的一个较大的变化只能带来函数值的一个微小的变化，即：导数很小。




## 4.2 softplus 函数

1. `softplus` 函数：$\zeta(x) = \log(1+\exp(x))$ 。
   - 该函数可以生成正态分布的 $\sigma^2$ 参数。
   - 它之所以称作 `softplus`，因为它是下面函数的一个光滑逼近：$x^+ = \max(0,x)$ 。




2. 如果定义两个函数：

$$x^+ = \max(0,x)$$
$$x^- = \max(0,-x)$$

   则它们分布获取了 $y=x$ 的正部分和负部分。

   根据定义有：$x = x^+ - x^-$ 。而 $\zeta(x)$ 逼近的是 $x^+$， $\zeta(-x)$ 逼近的是 $x^-$，于是有：

$$\zeta(x) - \zeta(-x) = x$$

3. `sigmoid` 和 `softplus` 函数的性质：

$$\sigma(x) = \frac{\exp(x)}{\exp(x) + \exp(0)}$$

$$\frac{d}{dx}\sigma(x) = \sigma(x)(1 - \sigma(x))$$

$$1 - \sigma(x) = \sigma(-x)$$

$$\log \sigma(x) = -\zeta(-x)$$

$$\frac{d}{dx}\zeta(x) = \sigma(x)$$

$$\forall x \in (0, 1), \sigma^{-1}(x) = \log(\frac{x}{1 - x})$$

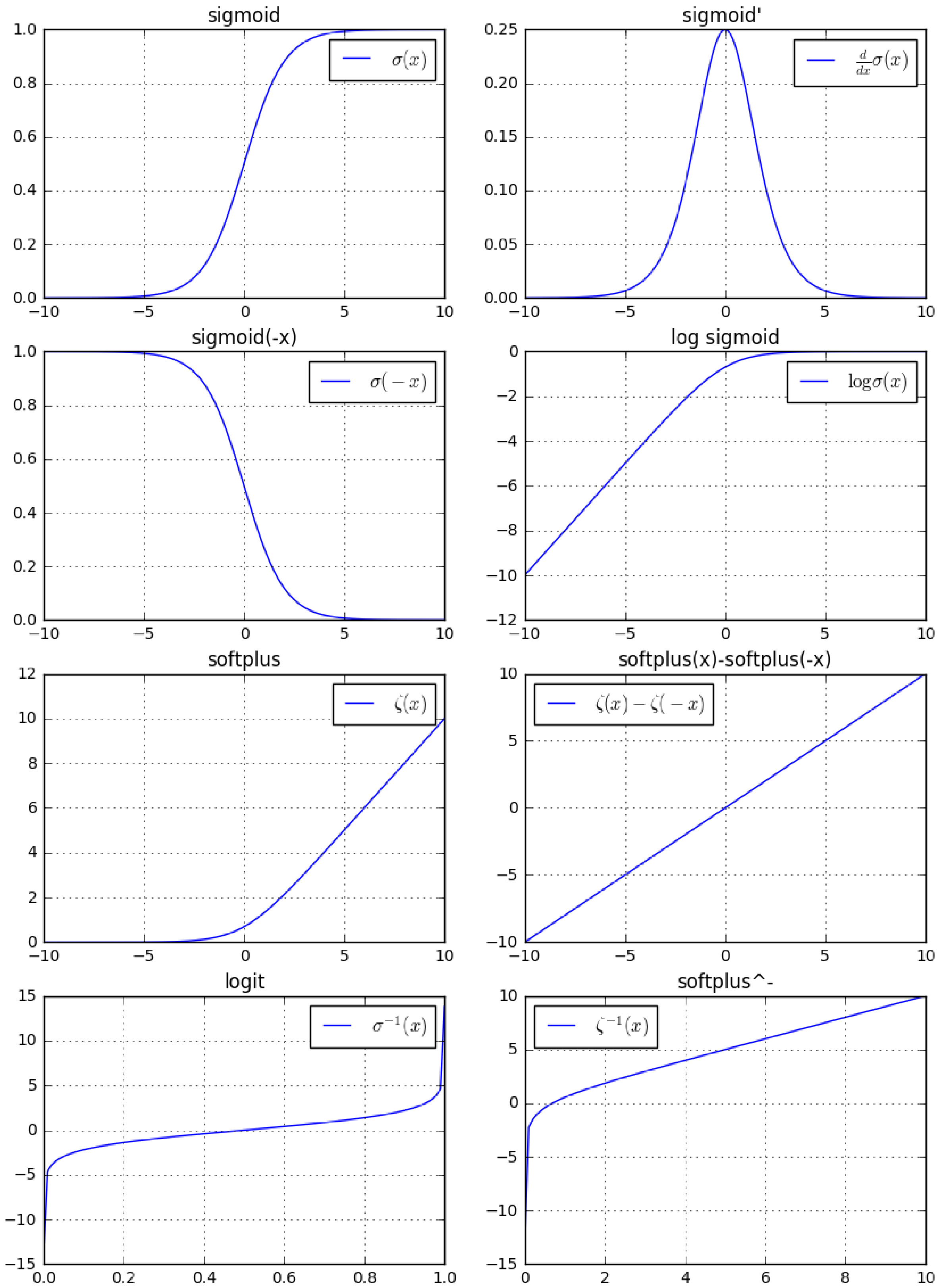
$$\forall x > 0, \zeta^{-1}(x) = \log(\exp(x) - 1)$$

$$\zeta(x) = \int_{-\infty}^{x} \sigma(y) dy$$

$$\zeta(x) - \zeta(-x) = x$$

其中 $f^{-1}(\cdot)$ 为反函数。

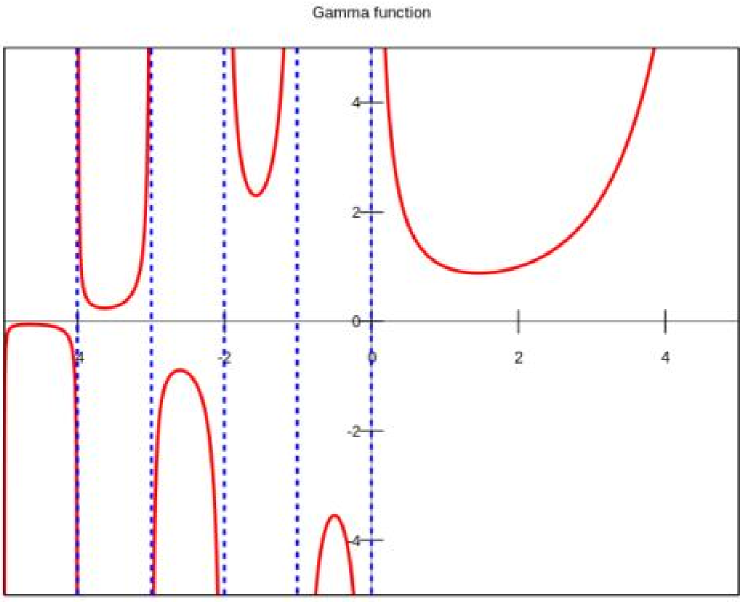
$\sigma^{-1}(x)$ 也称作 `logit` 函数。




## 4.3 伽马函数

1. 伽马函数定义为：

$$
\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt \quad ,x\in\mathbb{R}
$$
$$
or.\quad \Gamma(z)=\int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt \quad ,z\in\mathbb{Z}
$$




性质为：

- 对于正整数 $n$ 有：$\Gamma(n)=(n-1)!$ 。
- $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ ，因此伽马函数是阶乘在实数域上的扩展。
- 与贝塔函数的关系：

$$
B(m,n)=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}
$$

- 对于 $x\in(0,1)$ 有：

$$
\Gamma(1-x)\Gamma(x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}
$$

  则可以推导出重要公式：$\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$ 。
- 对于 $x>0$，伽马函数是严格凹函数。

2. 当 $x$ 足够大时，可以用 `Stirling` 公式来计算 `Gamma` 函数值：$\Gamma(x)\sim\sqrt{2\pi}e^{-x}x^{x+1/2}$ 。

## 4.4 贝塔函数

1. 对于任意实数 $m,n>0$ ，定义贝塔函数：

$$
B(m,n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx
$$

其它形式的定义：

$$B(m,n)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m-1}(x)\cos^{2n-1}(x)dx$$
$$B(m,n)=\int_0^{+\infty}\frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}}dx$$
$$B(m,n)=\int_0^{1}\frac{x^{m-1}+x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}}dx$$

2. 性质：
   - 连续性：贝塔函数在定义域 $m>0,n>0$ 内连续。
   - 对称性：$B(m,n)=B(n,m)$ 。
   - 递个公式：

$$B(m,n)=\frac{n-1}{m+n-1}B(m,n-1),\quad m>0,n>1$$
$$B(m,n)=\frac{m-1}{m+n-1}B(m-1,n),\quad m>1,n>0$$
$$B(m,n)=\frac{(m-1)(n-1)}{(m+n-1)(m+n-2)}B(m-1,n-1),\quad m>1,n>1$$

   - 当 $m,n$ 较大时，有近似公式：

$$B(m,n)=\frac{\sqrt{(2\pi)m^{m-1/2}n^{n-1/2}}}{(m+n)^{m+n-1/2}}$$

   - 与伽马函数关系：
     - 对于任意正实数 $m,n$ ，有：

$$B(m,n)=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

     - $B(m,1-m)=\Gamma(m)\Gamma(1-m)$ 。