統計学

6月1日（火）
第6回

兵庫県立大学 社会情報科学部

山本 岳洋

t.yamamoto@sis.u-hyogo.ac.jp

2021年度前期・火曜3限　神戸商科キャンパス 全学共通科目

- 今日はまず正規分布の導入の講義を行い,そのままミニ演習をします.

- **教科書か参考書を用意しておいてください**
  - ミニ演習で使います

本日の内容

- **正規分布の導入 + ミニ演習**
  - 教科書か参考書を
    手元に用意しておいてください.
- **課題その5の解説・コメントへの返信**
- **今週の課題はありません**
- **中間レポートについて予告**

講義資料「正規分布」の導入 + ミニ演習

6月1日ミニ演習

- **Google Formsから提出すること**
  - URLはteamsに掲載
  - 締め切り: **6月1日中**
    - この時間中に終える想定です
  - 正答率は評価対象としませんので,
    まじめに取り組んでください
    - 資料や教科書・ウェブなど自由に調べてOK

先週の課題の解説

問1

- **離散型の確率変数 X が 1, 2, ⋯, n という n 個の値をとるとする．いま，X が離散一様分布に従うとき（つまり，それぞれの値を取る確率が $1/n$ で等しいとき），X の期待値 $E(X)$ と分散V(X)をそれぞれ求めよ．なお，必要があれば以下を用いてもよい．**

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1),\quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),\quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}\left(n(n+1)\right)^2$$

- **ねらい**
  - 離散型の確率変数の期待値と分散の定義から E(X)とV(X)を求められるか？

問1の確率分布を表で表すと

X	1	2	…	n
確率	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	…	$\frac{1}{n}$

サイコロが出る目（$n=6$）の一般化

期待値 E(X)

$$E(X) = \sum_{i=n}^{n} x_i p_i$$

$$= \sum_{i=n}^{n} i \cdot \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=n}^{n} i$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2} n(n+1)$$

$$= \frac{n+1}{2}$$

よって，$n = 8$の時　$E(X) = \frac{9}{2}$

分散 $V(X)$

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$を使った方が計算が楽

※ 分散の定義式から直接 $V(X)$ を求めてももちろん正解にたどりつきます

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{i=n}^{n} x_i^2 p_i \\
&= \sum_{i=n}^{n} i^2 \cdot \frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=n}^{n} i^2 \\
&= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \\
&= \frac{(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}
$$

分散 $V(X)$

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$より

$$= \frac{1}{6}(n+1)(2n+1) - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{12}(n+1)\{4n+2-3(n+1)\}$$

$$= \frac{1}{12}(n+1)(n-1)$$

$$= \frac{n^2-1}{12}$$

よって，$n = 8$の時　$V(X) = \frac{21}{4}$

問2

- **表と裏がでる確率が等しいコインを10回投げる試行を考える．このとき，<u>表が7回以上</u>でる確率を求めよ．なお，必要があれば，確率変数 X が二項分布 $B(10, 0.5)$ に従うとき，$P(X=1)=0.01, P(X=3)=0.12,\ P(X \leq 7)=0.95$ となることを用いても良い．**
  - ヒント: 表と裏が出る確率が等しいので，コインを10回振ったときに表が3回出る確率と表が〇〇回出る確率は等しい．

- **ねらい**
  - 確率が与えられたときに，欲しい確率がそこから導けるか？
  - 今週からの正規分布においても出てくる考え方
- **答え**
  - 0.17

解答例

表が7回以上でる確率 ＝ 1- 表が6回以下出る確率 なので

$$P(7 \leq X) = 1 - P(X \leq 6)$$

表が6回以下出る確率 ＝ 表が7回以下出る確率 – 表が7回出る確率

$$P(X \leq 6) = P(X \leq 7) - P(X = 7)$$

表が7回出る確率 ＝ 表が3回出る確率（∵表と裏がでる確率が等しい）

$$P(X \leq 6) = P(X \leq 7) - P(X = 3)$$

$$= 0.95 - 0.12$$

$$= 0.83$$

$$P(7 \leq X) = 1 - P(X \leq 6)$$

$$= 1 - 0.83$$

$$= 0.17$$

問3

- **連続型の確率変数 X が区間 $0 \leq X \leq 1$ の連続一様分布に従っているとする．このとき，この確率変数の確率密度関数$f(x)$は以下で与えられる．X について以下の問いに答えよ**

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (0 \leq x \leq 1) \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

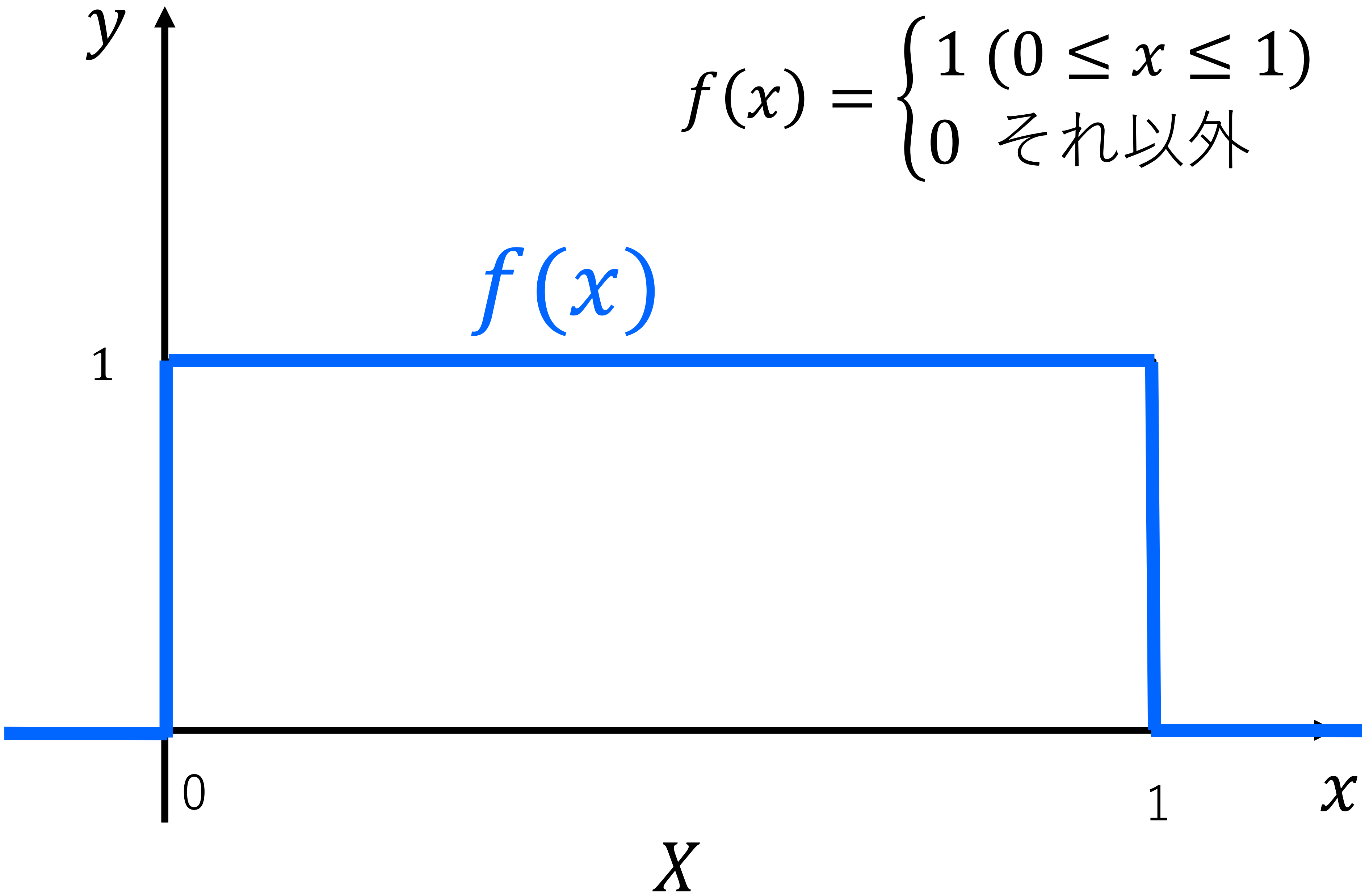
- **ねらい**
  - 連続型の確率変数の定義が理解できているか？

連続型の確率変数における定義

$P(a \leq X \leq b)$	$\int_a^b f(x)dx$
期待値 **E(X)**	$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$
分散 **V(X)**	$\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx$

問3: 確率密度関数の図示

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (0 \leq x \leq 1) \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$



a. $P\left(0 \leq X \leq \frac{1}{3}\right)$

$$P\left(0 \leq X \leq \frac{1}{3}\right) = \int_0^{\frac{1}{3}} f(x)dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{3}} 1 \cdot dx$$

$$= \frac{1}{3}$$

b. 期待値 $E(X)$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

$$= \int_{0}^{1} x \cdot dx$$

$$= \frac{1}{2}$$

分散 V(X)

分散の定義から直接

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx$$

$$= \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{12}$$

$\boldsymbol{V(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2}$ **を利用**

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx$$

$$= \int_0^1 x^2 dx$$

$$= \frac{1}{3}$$

$$V(X) = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{12}$$

質問・コメント返信

- $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$ **や** $E(aX+b)=aE(X)+b$**の使い道**
  - 本講義の後半（推測統計）で重要な性質を導出するときに使います
- **Excelについて**
  - 来週，ExcelやGoogle スプレッドシートを使った確率分布の確率計算について補足します.
  - 中間レポートでもExcelかGoogleスプレッドシートを使って確率計算してもらいます

中間レポートについて

中間レポートについて

- **今週は課題はありません**
- **中間レポートを次週の講義で案内する予定です**
  - 範囲： 正規分布まで
- **中間レポートの締切**
  - **6月25日（金）21:00**
- **来週の講義は中間レポートに関する補足をします**
  - レポートの提出方法
  - レポートの書き方
  - Excel（Googleスプレッドシート）の使い方