SYSTÈMES LINÉAIRES

I) Définition d'un système linéaire

Définition 1 : Soient n et p deux entiers naturels non nuls. On appelle système d'équations linéaires de n équations aux p inconnues x_1, x_2, ... , x_p le système :

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$ où a_{ij} et b_i sont des réels pour tous $i = 1, \ldots, n$ et $j = 1, \ldots, p$.

Vocabulaire :

- lorsque $n = p$, le système (S) est dit "carré"
- une solution de (S) est un p-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ vérifiant les n équations de (S). Résoudre un système, c'est trouver tous les p-uplets solutions.
- lorsque tous les coefficients situés sous la diagonale $\begin{matrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & a_{33} & \\ & & & \ddots \end{matrix}$ sont nuls, le système est dit "triangulaire supérieur".

Définition 2 : Deux systèmes d'équations linéaires de même taille (S_1) et (S_2) sont dits équivalents lorsqu'ils ont le même ensemble de solutions.

Notons ici, que la résolution d'un système par des méthodes de combinaisons linéaires simultanées est, certes parfois rapide, mais ne fonctionne pas toujours par équivalence. C'est pourquoi il est indispensable, lorsqu'on utilise cette méthode de vérifier les solutions.

Exemple où l'on transforme un système en un système non équivalent :

On considère le système : $$(S)\begin{cases} x - y = 0 & L_1 \\ y - z = 1 & L_2 \\ -x + z = 0 & L_3 \end{cases}$$

Formons un nouveau système (S') avec les combinaisons :

$$L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \;;\; L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \text{ et } L_3 \leftarrow L_3 + L_1 :$$

$$(S')\begin{cases} x - z = 1 \\ x + y - 2z = 1 \\ -y + z = 0 \end{cases}$$

Le problème ci-contre, provient du fait que l'on effectue trois opérations simultanément sur le système.

On remarque alors que le triplet (1 ; 0 ; 0) est solution de (S') mais pas de (S). Ces systèmes ne sont donc pas équivalents.

II) Opérations élémentaires sur les lignes

Notons $L_1, L_2, \ldots, L_n$ les n lignes d'un système (S).

<u>Définition</u> : On appelle <u>opération élémentaire</u> sur les lignes l'une des trois opérations suivantes :

1. Échange de deux lignes : $L_i \leftrightarrow L_j$
2. Multiplication d'une ligne par un réel $\alpha \neq 0$: $L_i \leftarrow \alpha L_i$
3. Addition à une ligne d'un multiple d'une autre ligne : $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ ($\lambda \in \mathbb{R}$)

Les autres lignes non concernées doivent être réécrites dans le système sans modification.

<u>Théorème 1</u> : Soit (S) un système d'équations linéaires. Le système (S') obtenu en effectuant des opérations élémentaires sur (S) est équivalent à (S).

<u>Démonstration</u> :

- Opération $L_i \leftrightarrow L_j$: évident
- Opération $L_i \leftarrow \alpha L_i$: soit (S') le système obtenu en multipliant L_i par $\alpha \neq 0$.

  Soit $(s_1, \ldots, s_p)$ un p-uplet solution de (S) (s'il y en a).

  On a donc, en particulier : $a_{i1}s_1 + a_{i2}s_2 + \ldots + a_{ip}s_p = b_i \quad (L_i)$

  Et en multipliant par α : $(\alpha a_{i1})s_1 + (\alpha a_{i2})s_2 + \ldots + (\alpha a_{ip})s_p = \alpha b_i$

  Donc $(s_1, \ldots, s_p)$ est solution de (S').

  Réciproquement, si $(s_1, \ldots, s_p)$ est solution de (S'), on a en particulier :

  $$(\alpha a_{i1})s_1 + (\alpha a_{i2})s_2 + \ldots + (\alpha a_{ip})s_p = \alpha b_i$$

  Et puisque $\alpha \neq 0$: $a_{i1}s_1 + a_{i2}s_2 + \ldots + a_{ip}s_p = b_i$

  Donc $(s_1, \ldots, s_p)$ est solution de (S).

- Opération $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$: soit (S') le système obtenu en ajoutant λL_j à L_i.

  Soit $(s_1, \ldots, s_p)$ un p-uplet solution de (S) (s'il y en a).

  On a donc, en particulier : $\begin{cases} a_{i1}s_1 + a_{i2}s_2 + \ldots + a_{ip}s_p = b_i & (L_i) \\ a_{j1}s_1 + a_{j2}s_2 + \ldots + a_{jp}s_p = b_j & (L_j) \end{cases}$

  Et en formant $L_i + \lambda L_j$: $(a_{i1} + \lambda a_{j1})s_1 + (a_{i2} + \lambda a_{j2})s_2 + \ldots + (a_{ip} + \lambda a_{jp})s_p = b_i + \lambda b_j$

  Donc $(s_1, \ldots, s_p)$ est solution de (S').

  Réciproquement, si $(s_1, \ldots, s_p)$ est solution de (S'), on a en particulier :

  $$(a_{i1} + \lambda a_{j1})s_1 + (a_{i2} + \lambda a_{j2})s_2 + \ldots + (a_{ip} + \lambda a_{jp})s_p = b_i + \lambda b_j$$

  $$(a_{i1}s_1 + a_{i2}s_2 + \ldots + a_{ip}s_p) + \lambda(\underbrace{a_{j1}s_1 + a_{j2}s_2 + \ldots + a_{jp}s_p}_{b_j}) = b_i + \lambda b_j$$

  $$a_{i1}s_1 + a_{i2}s_2 + \ldots + a_{ip}s_p = b_i$$

  Donc $(s_1, \ldots, s_p)$ est solution de (S).

<u>Exemple</u> : reprenons le système précédent qui avait été traîté par une méthode incorrecte :

On considère le système : $(S)\begin{cases} x - y = 0 & L_1 \\ y - z = 1 & L_2 \\ -x + z = 0 & L_3 \end{cases}$

Effectuons l'opération élémentaire : $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$

On obtient un nouveau système (S') équivalent :

$$(S')\begin{cases} x - y = 0 \\ y - z = 1 \\ -y + z = 0 \end{cases}$$

En observant les deux dernières lignes de ce système, on constate qu'il n'existe pas de réels y et z qui vérifient les conditions $y - z = 1$ **et** $-y + z = 0$. Il n'y a donc pas de solution au système (S'), ni au système (S).

III) Méthode du pivot de Gauss

Elle a pour but de transformer un système (S) en un système (S') équivalent (en utilisant les opérations élémentaires sur les lignes) et **triangulaire supérieur**.

Dans ce qui suit, on considère le système (S) $\begin{cases} 2x - y + z = 7 & L_1 \\ x + 2y - z = 6 & L_2 \\ -x + y + 2z = 11 & L_3 \end{cases}$

EXPOSÉ DE LA MÉTHODE	EXEMPLE DE MISE EN ŒUVRE
1. On place en L_1 une ligne dont le coefficient est non nul. (Ce coefficient est appelé "le pivot"). Conseil : choisir, si possible un pivot égal à ± 1.	$L_1 \leftrightarrow L_2$ $\begin{cases} \boxed{1}\,x + 2y - z = 6 & L_1 \\ 2x - y + z = 7 & L_2 \\ -x + y + 2z = 11 & L_3 \end{cases}$
2. On élimine la première inconnue dans L_2, L_3, ... , L_n par l'opération élémentaire : $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_1$ $(\lambda = -\dfrac{a_{i1}}{a_{11}})$	$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$; $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$ $\begin{cases} x + 2y - z = 6 & L_1 \\ 0\,\boxed{-5}\,y + 3z = -5 & L_2 \\ 0 + 3y + z = 17 & L_3 \end{cases}$
3. On choisit parmi L_2, ... L_n une ligne ou le coefficient de l'inconnue suivante est non nul et l'on utilise ce coefficient comme nouveau pivot.	$L_3 \leftarrow L_3 + \dfrac{3}{5}L_2$
4. On recommence l'étape 2 à la ligne adéquate jusqu'à obtenir un système triangulaire supérieur.	$\begin{cases} x + 2y - z = 6 & L_1 \\ -5y + 3z = -5 & L_2 \\ \dfrac{14}{5}z = 14 & L_3 \end{cases}$
Les solutions du systèmes s'obtiennent par résolution d'équations de proche en proche.	$z = 5$; $y = 4$; $x = 3$

Notre système (S) admet un unique triplet solution : $S = \{(3 ; 4 ; 5)\}$

Note : on peut être amené à permuter des colonnes (ou des inconnues) afin de se ramener à des pivots plus simples.

Exercices : résoudre les systèmes suivants :

$$\begin{cases} x+2y+3z=14 \\ 4x+5y+6z=32 \\ 7x+8y+10z=53 \end{cases}$$ (Réponse : $S = \{(1 ; 2 ; 3)\}$)

$$\begin{cases} x+y+z+t=4 \\ 2x-y+z+2t=4 \\ 3x-2y+5z-2t=4 \\ x+y+2z=4 \end{cases}$$ (Réponse : $S = \{(1 ; 1 ; 1 ; 1\}$)

IV) Nombre de solutions d'un système d'équations linéaires

Théorème 2 : Un système (S) d'équations linéaires admet soit aucune solution, soit une unique solution, soit une infinité de solutions.

Vocabulaire : un système (S) admettant une unique solution est dit de "Cramer".

Exemples :
$$\begin{cases} x+y=1 & L_1 \\ 2x+ay=b & L_2 \end{cases}$$

Effectuons $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$. On obtient :
$$\begin{cases} x+y=1 & L_1 \\ (a-2)y=b-2 & L_2 \end{cases}$$

- Si $a \neq 2$, alors y se détermine de manière unique : $y = \dfrac{b-2}{a-2}$ d'où $x = 1 - y = \dfrac{a-b}{a-2}$.

  Le système admet alors un unique couple solution :

  $$S = \left\{\left(\frac{a-b}{a-2} ; \frac{b-2}{a-2}\right)\right\}$$

- Si $a = 2$, alors on a : $0 \times y = b - 2$

  Distinguons deux sous-cas :

  - Si $b \neq 2$, alors l'égalité $0 \times y = b - 2$ est impossible. Le système n'a pas de solutions.
  - Si $b = 2$, alors l'égalité $0 \times y = b - 2$ est réalisée quelque soit la valeur de y.

    Le système admet alors une infinité de solutions :

    $$S = \{(1 - y ; y) \text{ où } y \in \mathbb{R}\}$$

Démonstration du théorème 2 :

Notons (S) $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$ où a_{ij} et b_i sont des réels pour tous $i = 1, \ldots , n$ et $j = 1, \ldots , p$.

Nous avons déjà vu dans les exemples, qu'il existe des systèmes sans solution, d'autres avec une unique solution et d'autres avec une infinité de solutions. Il s'agit de montrer qu'il n'y a pas d'autres cas possibles.

Nous allons donc montrer que si le système (S) admet deux solutions distinctes alors il en admet une infinité.

Soient $(x_1, x_2, \ldots , x_p)$ et $(y_1, y_2, \ldots , y_p)$ deux p-uplets distincts solutions de de (S)

On a donc : $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$ et $\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1p}y_p = b_1 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2p}y_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{np}y_p = b_n \end{cases}$

Par soustraction, on se ramène à un système homogène :

Considérons les p-uplet $(z_1, z_2, \ldots , z_p)$ définis par : $z_k = tx_k + (1 - t)y_k$ $(1 \leqslant k \leqslant p)$ pour tout $t \in]0 ; 1[$.

(Remarquons que comme les les p-uplets $(x_1, x_2, \ldots , x_p)$ et $(y_1, y_2, \ldots , y_p)$ sont distincts, il existe au moins un indice k tel que $x_k \neq y_k$. Le réel z_k défini par $z_k = tx_k + (1 - t)y_k$ est alors bien distinct de x_k et y_k quelque soit $t \in]0 ; 1[$. En effet $z_k = x_k$ entraîne $(1 - t)x_k = (1 - t)y_k$ d'où, (comme $t \neq 1$), $x_k = y_k$ ce qui est contradictoire. De même, $z_k = y_k$ entraîne $tx_k = ty_k$ d'où, (comme $t \neq 0$), $x_k = y_k$ ce qui est aussi contradictoire.)

On a donc bien construit une infinité de p-uplets $(z_1, z_2, \ldots , z_p)$ distincts de $(x_1, x_2, \ldots , x_p)$ et $(y_1, y_2, \ldots , y_p)$.

Montrons maintenant que tous ces p-uplets $(z_1, z_2, \ldots , z_p)$ sont solutions de (S) :

On a : $\begin{cases} a_{11}z_1 + a_{12}z_2 + \ldots + a_{1p}z_p = a_{11}(tx_1 + (1-t)y_1) + a_{12}(tx_2 + (1-t)y_2) + \ldots + a_{1p}(tx_p + (1-t)y_p) \\ a_{21}z_1 + a_{22}z_2 + \ldots + a_{2p}z_p = a_{21}(tx_1 + (1-t)y_1) + a_{22}(tx_2 + (1-t)y_2) + \ldots + a_{2p}(tx_p + (1-t)y_p) \\ \vdots \\ a_{n1}z_1 + a_{n2}z_2 + \ldots + a_{np}z_p = a_{n1}(tx_1 + (1-t)y_1) + a_{n2}(tx_2 + (1-t)y_2) + \ldots + a_{np}(tx_p + (1-t)y_p) \end{cases}$

$$\begin{cases} a_{11}z_1 + a_{12}z_2 + \ldots + a_{1p}z_p = t(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p) + (1-t)(a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1p}y_p) = tb_1 + (1-t)b_1 = b_1 \\ a_{21}z_1 + a_{22}z_2 + \ldots + a_{2p}z_p = t(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p) + (1-t)(a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2p}y_p) = tb_2 + (1-t)b_2 = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}z_1 + a_{n2}z_2 + \ldots + a_{np}z_p = t(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{np}x_p) + (1-t)(a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{np}y_p) = tb_n + (1-t)b_n = b_n \end{cases}$$

Donc les p-uplet $(z_1, z_2, \ldots , z_p)$ sont bien solutions de (S).

Le système (S) admet alors une infinité de solutions.

D'où le théorème 2.

<u>Interprétation graphique du théorème 2 pour les systèmes de deux équations linéaires à deux inconnues</u> :

Dans ce cas, chaque équation correspond à une équation de droite dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Résoudre le système revient à trouver les coordonnées des points d'intersection de ces deux droites. Or, deux droites du plan sont soit sécantes (unique solution) soit parallèles (infinité de solutions si les droites sont confondues, aucune solution si les droites sont strictement parallèles).

<u>Condition pour qu'un système de deux équations linéaires à deux inconnues soit de "Cramer"</u> :

Considérons le système : $(S)\begin{cases} ax + by = c & D_1 \\ a'x + b'y = c' & D_2 \end{cases}$

Un vecteur directeur de la droite D_1 est : $\vec{u}\,(-b ; a)$

Un vecteur directeur de la droite D_2 est : $\vec{v}\,(-b' ; a')$

Les deux droites D_1 et D_2 sont sécantes si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires.

On peut donc énoncer :

<u>**Le système (S) est de "Cramer" si et seulement si $ab' - a'b \neq 0$**</u>

Remarque : Le théorème 2 est faux si l'on considère des systèmes d'équations non linéaires !

Considérons, par exemple, le système (S) suivant :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 - y^2 = 3 \end{cases}$$

En posant $X = x^2$ et $Y = y^2$, on se ramène immédiatement à un système linéaire (d'inconnues X et Y) ayant un unique couple solution $(X ; Y) = (4 ; 1)$.

En résolvant maintenant chacune des petites équations $x^2 = 4$, et $y^2 = 1$, il apparaît que le système proposé admet quatre couples solutions :

$$S = \{(-2 ; -1) ; (-2 ; 1) ; (2 ; -1) ; (2 ; 1)\}$$

Autre exemple de système non linéaire (à résoudre par substitution)

$$\begin{cases} 2x + y^2 = 0 \\ 2(x+1)y = 0 \end{cases}$$

On trouve trois solutions : $S = \{(0 ; 0) ; (-1; \sqrt{2}) ; (-1 ; -\sqrt{2})\}$