山田龍

2020 年 12 月 24 日

1　課題 1

まず、関数 $f(t)$ が、

$$\begin{cases} -1+2t/\pi(0\leq t\leq \pi) & (1)\\ 3-2t/\pi(\pi\leq t\leq 2\pi) & (2)\end{cases}$$

と与えられるとき、フーリエ係数を解析的に求める。フーリエ係数は、

$$c_k = \frac{1}{T}\int f(t)e^{-i\frac{2\pi kt}{T}}dt \tag{3}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi(-1+2t/\pi)e^{-ikt}dt + \frac{1}{2\pi}\int_\pi^{2\pi}(3-2t/\pi)e^{-ikt}dt \tag{4}$$

$$\tag{5}$$

いま、te^{-ikt} の不定積分が

$$\int te^{-ikt} = \left[-\frac{te^{-ikt}}{ik}\right] + \int \frac{1}{ik}e^{-ikt}dt + C \tag{6}$$

$$= \left[-\frac{te^{-ikt}}{ik}\right] + \frac{1}{k^2}\left[e^{-ikt}\right] + C \tag{7}$$

$$\tag{8}$$

であることを使えば、

$$2\pi c_k = \left[\frac{e^{-ikt}}{ik}\right]_0^\pi + \frac{2}{\pi}\left[-\frac{te^{-ikt}}{ik}\right]_0^\pi + \frac{2}{\pi}\frac{1}{k^2}\left[e^{-ikt}\right]_0^\pi - 3\left[\frac{e^{-ikt}}{ik}\right]_\pi^{2\pi} + \frac{2}{\pi}\left[\frac{te^{-ikt}}{ik}\right]_\pi^{2\pi} - \frac{2}{\pi}\frac{1}{k^2}\left[e^{-ikt}\right]_\pi^{2\pi} \tag{9}$$

$$= \frac{e^{-ik\pi}-1}{ik} - \frac{2}{\pi}\frac{\pi e^{-ik\pi}}{ik} + \frac{2}{\pi}\frac{e^{-ik\pi}-1}{k^2} - 3\frac{e^{-ik2\pi}-e^{-ik\pi}}{ik} + \frac{2}{\pi}\frac{2\pi e^{-ik2\pi}-\pi e^{-ik\pi}}{ik} - \frac{2}{\pi}\frac{e^{-ik2\pi}-e^{-ik\pi}}{k^2} \tag{10}$$

$$= \frac{(-1)^k-1}{ik} - 2\frac{(-1)^k}{ik} + \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^k-1}{k^2} - 3\frac{1-(-1)^k}{ik} + 2\frac{2-(-1)^k}{ik} - \frac{2}{\pi}\frac{1-(-1)^k}{k^2} \tag{11}$$

$$= \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^k-1}{k^2} - \frac{2}{\pi}\frac{1-(-1)^k}{k^2} \tag{12}$$

$$= \frac{2}{\pi k^2}((-1)^k-1-1+(-1)^k) \tag{13}$$

$$= \frac{4}{\pi k^2}((-1)^k-1) \tag{14}$$

$$\therefore c_k = \frac{2}{\pi^2k^2}((-1)^k-1) \tag{15}$$

解析解が求められた。次に

$$f_N(t) = \sum_{-N}^{N} c_k e^{ikt} \tag{16}$$

を使って f_N を計算した結果を図示すると以下 1 のようになる。また、誤差 $f(t) - f_N(t)$ の N 依存性は以下

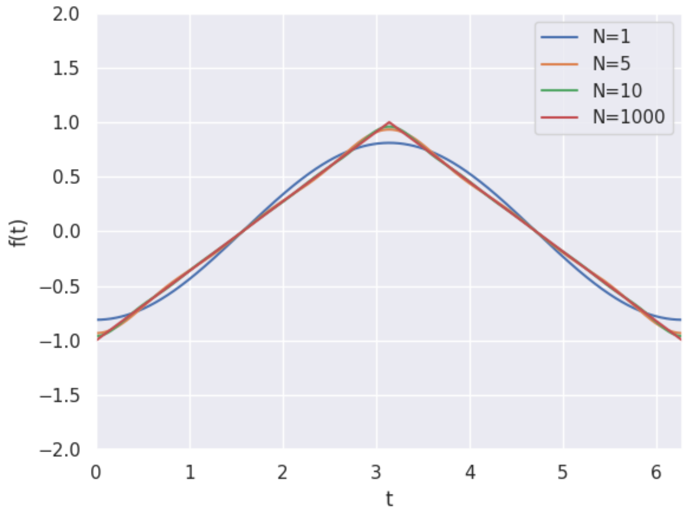

図 1　f_N が $f(t)$ の分布に近づく様子

1 のようになる。この図から、誤差は N の増大とともに急激に消えることがわかる。右側のプロットは両対数グラフであるが、傾きから $f(t) - f_N(T) \propto N^{-2}$ であることがわかる。

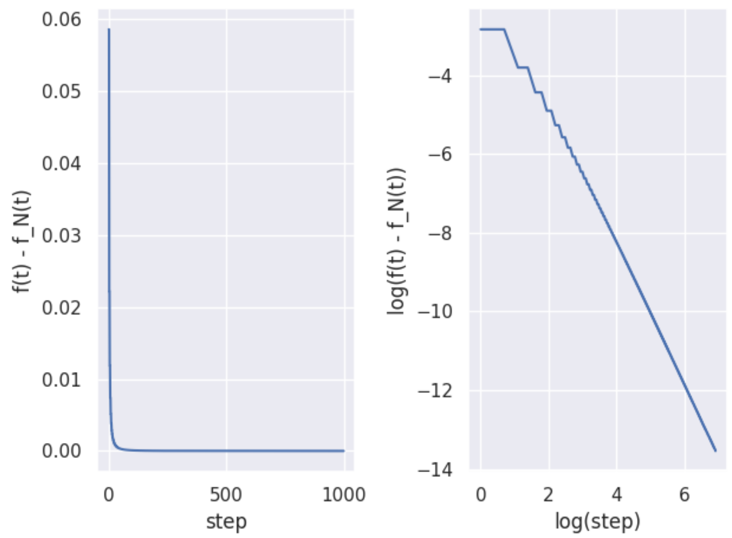

図 2　誤差

参考文献