山田龍

2020 年 11 月 21 日

1 Gauss の消去法

2 Gauss-Seidel 法

$$A = D + L + U \tag{1}$$

の順番で対角成分、下三角成分、上三角成分を定義する。解くべき連立方程式は、

$$(D + L + U)\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{2}$$
$$\mathbf{x} = -D^{-1}(L + U)\mathbf{x} + D^{-1}\mathbf{b} \tag{3}$$

ヤコビ法では、以下の漸化式が成立すれば $x^{(k)}$ は連立方程式の解である。

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = -D^{-1}L\mathbf{x}^{(k)} - D^{-1}U\mathbf{x}^{(k)} + D^{-1}\mathbf{b} \tag{4}$$

Gauss-Seidel 法では、以下の漸化式が成立すれば $x^{(k)}$ は連立方程式の解である。

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = -D^{-1}L\mathbf{x}^{(k+1)} - D^{-1}U\mathbf{x}^{(k)} + D^{-1}\mathbf{b} \tag{5}$$
$$= -D^{-1}(L + U)\mathbf{x}^{(k)} + D^{-1}\mathbf{b} \tag{6}$$

反復の計算は、

$$\begin{aligned}
(E + D^{-1}L)\mathbf{x}^{(k+1)} &= -D^{-1}U\mathbf{x}^{(k)} + D^{-1}\mathbf{b} \\
(D + L)D^{-1}\mathbf{x}^{(k+1)} &= -D^{-1}U\mathbf{x}^{(k)} + D^{-1}\mathbf{b} \\
\mathbf{x}^{(k+1)} &= -(D + L)^{-1}U\mathbf{x}^{(k)} + (D + L)^{-1}\mathbf{b}
\end{aligned}$$

ここで、$\mathbf{d}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}$ を定義する。

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}^{(k+1)} &= -\left[(D + L)^{-1}U + E\right]\mathbf{x}^{(k)} + (D + L)^{-1}\mathbf{b} \\
&= -\left[(D + L)^{-1}U - D^{-1}U + D^{-1}U + E\right]\mathbf{x}^{(k)} \\
&+ \left[(D + L)^{-1} - D^{-1} + D^{-1}\right]\mathbf{b} \\
&= -\left[-L(D + L)^{-1}D^{-1}U + D^{-1}U + E\right]\mathbf{x}^{(k)} \\
&+ \left[-L(D + L)^{-1}D^{-1} + D^{-1}\right]\mathbf{b} \\
&= -D^{-1}L\mathbf{x}^{(k+1)} - \left(D^{-1}U + E\right)\mathbf{x}^{(k)} + D^{-1}\mathbf{b}
\end{aligned}$$

更に変形する。

$$\begin{aligned}
&(E + D^{-1}L)\mathbf{d}^{(k+1)} \\
&= -D^{-1}L(-D^{-1}U\mathbf{x}^{(k)} + D^{-1}\mathbf{b}) \\
&- \left(D^{-1}U + E\right)(-D^{-1}U\mathbf{x}^{(k-1)} + D^{-1}\mathbf{b}) \\
&+ (D^{-1} + D^{-1}LD^{-1})\mathbf{b} \\
&= -D^{-1}LD^{-1}U\mathbf{x}^{(k)} - D^{-1}LD^{-1}\mathbf{b} \\
&+ \left(D^{-1}UD^{-1}U + D^{-1}U\right)\mathbf{x}^{(k-1)} \\
&- (D^{-1}UD^{-1} + D^{-1})\mathbf{b} \\
&+ (D^{-1} + D^{-1}LD^{-1})\mathbf{b}
\end{aligned}$$

両辺変形して、

$$\begin{aligned}
D^{-1}(D + L)\mathbf{d}^{(k+1)} &= D^{-1}[-LD^{-1}U\mathbf{x}^{(k)} - LD^{-1}\mathbf{b} \\
&+ \left(UD^{-1}U + U\right)\mathbf{x}^{(k-1)} \\
&+ (-UD^{-1} + LD^{-1})\mathbf{b}] \\
(D + L)\mathbf{d}^{(k+1)} &= -LD^{-1}U\mathbf{x}^{(k)} - LD^{-1}\mathbf{b} \\
&+ \left(UD^{-1}U + U\right)\mathbf{x}^{(k-1)} \\
&+ (-UD^{-1} + LD^{-1})\mathbf{b}
\end{aligned}$$

左辺の係数の逆行列を両辺にかけて、

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}^{(k+1)} &= (D + L)^{-1}U[-LD^{-1}\mathbf{x}^{(k)} + \left(D^{-1}U + E\right)\mathbf{x}^{(k-1)} - D^{-1}\mathbf{b}] \\
&= (D + L)^{-1}U\mathbf{d}^{(k)}
\end{aligned}$$

よって Gauss-Seidel 法において解が収束する条件は、

$$||(D + L)^{-1}U||_2 < 1 \tag{7}$$

反復すべき式は、

$$D\mathbf{x}^{(k+1)} = -L\mathbf{x}^{(k+1)} - U\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b} \tag{8}$$

$$a_{ii}\mathbf{x}_i^{(k+1)} = -\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\mathbf{x}_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\mathbf{x}_j^{(k+1)} + \mathbf{b}_i \tag{9}$$

3　SOR 法

Gauss-Seidel 法において、緩和係数 ω を持ち込んで改良した解法を SOR 法という。Gauss-Seidel 法の計算式を変形する。

$$(E + D^{-1}L)\mathbf{x}^{(k+1)} = -D^{-1}U\mathbf{x}^{(k)} + D^{-1}\mathbf{b} \tag{10}$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - D^{-1}L\mathbf{x}^{(k+1)} - (D^{-1}U + E)\mathbf{x}^{(k)} + D^{-1}\mathbf{b} \tag{11}$$

SOR 法では緩和係数 ω を導入する。

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \omega\left[-D^{-1}L\mathbf{x}^{(k+1)} - (D^{-1}U + E)\mathbf{x}^{(k)} + D^{-1}\mathbf{b}\right] \tag{12}$$

$$(E + \omega D^{-1}L)\mathbf{x}^{(k+1)} = \left[E - \omega(D^{-1}U + E)\right]\mathbf{x}^{(k)} + \omega D^{-1}\mathbf{b} \tag{13}$$

反復すべき式は、

$$D\mathbf{x}^{(k+1)} = D\mathbf{x}^{(k)} + \omega\left[-L\mathbf{x}^{(k+1)} - (U + D)\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}\right] \tag{14}$$

$$D\mathbf{x}^{(k+1)} = -\omega L\mathbf{x}^{(k+1)} + [D - \omega(U + D)]\,\mathbf{x}^{(k)} + \omega\mathbf{b} \tag{15}$$

成分表示すれば、

$$a_{ii}\mathbf{x}_i^{(k+1)} = -\omega\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\mathbf{x}_j^{(k+1)} + (1-\omega)a_{ii}\mathbf{x}_i^{(k)} - \omega\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\mathbf{x}_j^{(k)} + \omega\mathbf{b}_i \tag{16}$$

緩和係数は問題に応じて選択される。