

山田龍

2020 年 11 月 16 日

## 1 Gauss の消去法

## 2 Gauss-Seidel 法

$$A = D + L + U \quad (1)$$

の順番で対角成分、下三角成分、上三角成分を定義する。解くべき連立方程式は、

$$(D + L + U)\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (2)$$

$$\mathbf{x} = -D^{-1}(L + U)\mathbf{x} + D^{-1}\mathbf{b} \quad (3)$$

ヤコビ法では、以下の漸化式が成立すれば  $\mathbf{x}^{(k)}$  は連立方程式の解である。

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = -D^{-1}L\mathbf{x}^{(k)} - D^{-1}U\mathbf{x}^{(k)} + D^{-1}\mathbf{b} \quad (4)$$

Gauss-Seidel 法では、以下の漸化式が成立すれば  $\mathbf{x}^{(k)}$  は連立方程式の解である。

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = -D^{-1}L\mathbf{x}^{(k+1)} - D^{-1}U\mathbf{x}^{(k)} + D^{-1}\mathbf{b} \quad (5)$$

$$= -D^{-1}(L + U)\mathbf{x}^{(k)} + D^{-1}\mathbf{b} \quad (6)$$

反復の計算は、

$$(E + D^{-1}L)\mathbf{x}^{(k+1)} = -D^{-1}U\mathbf{x}^{(k)} + D^{-1}\mathbf{b}$$

$$(D + L)D^{-1}\mathbf{x}^{(k+1)} = -D^{-1}U\mathbf{x}^{(k)} + D^{-1}\mathbf{b}$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = -(D + L)^{-1}U\mathbf{x}^{(k)} + (D + L)^{-1}\mathbf{b}$$

ここで、 $\mathbf{d}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}$  を定義する。

$$\begin{aligned} \mathbf{d}^{(k+1)} &= -[(D + L)^{-1}U + E]\mathbf{x}^{(k)} + (D + L)^{-1}\mathbf{b} \\ &= -[(D + L)^{-1}U - D^{-1}U + D^{-1}U + E]\mathbf{x}^{(k)} \\ &\quad + [(D + L)^{-1} - D^{-1} + D^{-1}]\mathbf{b} \\ &= -[-L(D + L)^{-1}D^{-1}U + D^{-1}U + E]\mathbf{x}^{(k)} \\ &\quad + [-L(D + L)^{-1}D^{-1} + D^{-1}]\mathbf{b} \\ &= -D^{-1}L\mathbf{x}^{(k+1)} - (D^{-1}U + E)\mathbf{x}^{(k)} + D^{-1}\mathbf{b} \end{aligned}$$

更に変形する。

$$(E + D^{-1}L)\mathbf{d}^{(k+1)}$$

$$\begin{aligned} &= -D^{-1}L(-D^{-1}U\mathbf{x}^{(k)} + D^{-1}\mathbf{b}) \\ &\quad - (D^{-1}U + E)(-D^{-1}U\mathbf{x}^{(k-1)} + D^{-1}\mathbf{b}) \\ &\quad + (D^{-1} + D^{-1}LD^{-1})\mathbf{b} \\ &= -D^{-1}LD^{-1}U\mathbf{x}^{(k)} - D^{-1}LD^{-1}\mathbf{b} \\ &\quad + (D^{-1}UD^{-1}U + D^{-1}U)\mathbf{x}^{(k-1)} \\ &\quad - (D^{-1}UD^{-1} + D^{-1})\mathbf{b} \\ &\quad + (D^{-1} + D^{-1}LD^{-1})\mathbf{b} \end{aligned}$$

両辺変形して、

$$\begin{aligned} D^{-1}(D + L)\mathbf{d}^{(k+1)} &= D^{-1}[-LD^{-1}U\mathbf{x}^{(k)} - LD^{-1}\mathbf{b} \\ &\quad + (UD^{-1}U + U)\mathbf{x}^{(k-1)} \\ &\quad + (-UD^{-1} + LD^{-1})\mathbf{b}] \\ (D + L)\mathbf{d}^{(k+1)} &= -LD^{-1}U\mathbf{x}^{(k)} - LD^{-1}\mathbf{b} \\ &\quad + (UD^{-1}U + U)\mathbf{x}^{(k-1)} \\ &\quad + (-UD^{-1} + LD^{-1})\mathbf{b} \end{aligned}$$

左辺の係数の逆行列を両辺にかけて、

$$\begin{aligned} \mathbf{d}^{(k+1)} &= (D + L)^{-1}U[-LD^{-1}\mathbf{x}^{(k)} + (D^{-1}U + E)\mathbf{x}^{(k-1)} - D^{-1}\mathbf{b}] \\ &= (D + L)^{-1}U\mathbf{d}^{(k)} \end{aligned}$$

よって Gauss-Seidel 法において解が収束する条件は、

$$\|(D + L)^{-1}U\|_2 < 1 \quad (7)$$

反復すべき式は、

$$D\mathbf{x}^{(k+1)} = -L\mathbf{x}^{(k+1)} - U\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b} \quad (8)$$

$$a_{ii}\mathbf{x}_i^{(k+1)} = -\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\mathbf{x}_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}\mathbf{x}_j^{(k+1)} + \mathbf{b}_i \quad (9)$$

### 3 SOR 法

Gauss-Seidel 法において、緩和係数  $\omega$  を持ち込んで改良した解法を SOR 法という。Gauss-Seidel 法の計算式を変形する。

$$(E + D^{-1}L)\mathbf{x}^{(k+1)} = -D^{-1}U\mathbf{x}^{(k)} + D^{-1}\mathbf{b} \quad (10)$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - D^{-1}L\mathbf{x}^{(k+1)} - (D^{-1}U + E)\mathbf{x}^{(k)} + D^{-1}\mathbf{b} \quad (11)$$

SOR 法では緩和係数  $\omega$  を導入する。

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \omega \left[ -D^{-1}L\mathbf{x}^{(k+1)} - (D^{-1}U + E)\mathbf{x}^{(k)} + D^{-1}\mathbf{b} \right]$$