

山田龍

2020 年 12 月 25 日

1 課題 1

1.1 ケース 1

まず、関数 $f(t)$ が、

$$\begin{cases} -1 + 2t/\pi (0 \leq t \leq \pi) \\ 3 - 2t/\pi (\pi \leq t \leq 2\pi) \end{cases} \quad (1)$$

(2)

と与えられるとき、フーリエ係数を解析的に求める。フーリエ係数は、

$$c_k = \frac{1}{T} \int f(t) e^{-i \frac{2\pi k t}{T}} dt \quad (3)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (-1 + 2t/\pi) e^{-ikt} dt + \frac{1}{2\pi} \int_\pi^{2\pi} (3 - 2t/\pi) e^{-ikt} dt \quad (4)$$

(5)

いま、 te^{-ikt} の不定積分が

$$\int te^{-ikt} = \left[-\frac{te^{-ikt}}{ik} \right] + \int \frac{1}{ik} e^{-ikt} dt + C \quad (6)$$

$$= \left[-\frac{te^{-ikt}}{ik} \right] + \frac{1}{k^2} [e^{-ikt}] + C \quad (7)$$

(8)

であることを使えば、

$$2\pi c_k = \left[\frac{e^{-ikt}}{ik} \right]_0^\pi + \frac{2}{\pi} \left[-\frac{te^{-ikt}}{ik} \right]_0^\pi + \frac{2}{\pi} \frac{1}{k^2} [e^{-ikt}]_0^\pi - 3 \left[\frac{e^{-ikt}}{ik} \right]_\pi^{2\pi} + \frac{2}{\pi} \left[\frac{te^{-ikt}}{ik} \right]_\pi^{2\pi} - \frac{2}{\pi} \frac{1}{k^2} [e^{-ikt}]_\pi^{2\pi} \quad (9)$$

$$= \frac{e^{-ik\pi} - 1}{ik} - \frac{2}{\pi} \frac{\pi e^{-ik\pi}}{ik} + \frac{2}{\pi} \frac{e^{-ik\pi} - 1}{k^2} - 3 \frac{e^{-ik2\pi} - e^{-ik\pi}}{ik} + \frac{2}{\pi} \frac{2\pi e^{-ik2\pi} - \pi e^{-ik\pi}}{ik} - \frac{2}{\pi} \frac{e^{-ik2\pi} - e^{-ik\pi}}{k^2} \quad (10)$$

$$= \frac{(-1)^k - 1}{ik} - 2 \frac{(-1)^k}{ik} + \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^k - 1}{k^2} - 3 \frac{1 - (-1)^k}{ik} + 2 \frac{2 - (-1)^k}{ik} - \frac{2}{\pi} \frac{1 - (-1)^k}{k^2} \quad (11)$$

$$= \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^k - 1}{k^2} - \frac{2}{\pi} \frac{1 - (-1)^k}{k^2} \quad (12)$$

$$= \frac{2}{\pi k^2} ((-1)^k - 1 - 1 + (-1)^k) \quad (13)$$

$$= \frac{4}{\pi k^2} ((-1)^k - 1) \quad (14)$$

$$\therefore c_k = \frac{2}{\pi^2 k^2} ((-1)^k - 1) \quad (15)$$

解析解が求められた。次に

$$f_N(t) = \sum_{-N}^N c_k e^{ikt} \quad (16)$$

を使って f_N を計算した結果を図示すると図 1 のようになる。また、誤差 $f(t) - f_N(t)$ の N 依存性は図 2 の

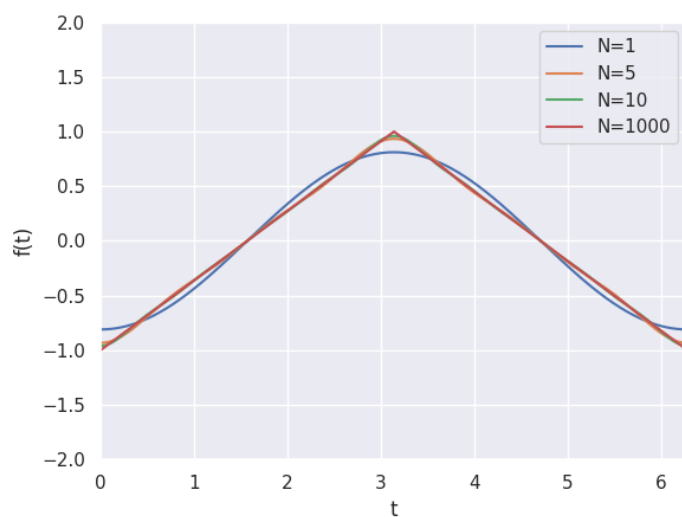


図 1 f_N が $f(t)$ の分布に近づく様子

ようになる。この図から、誤差は N の増大とともに急激に消えることがわかる。右側のプロットは両対数グラフであるが、傾きから $f(t) - f_N(T) \propto N^{-2}$ であることがわかる。

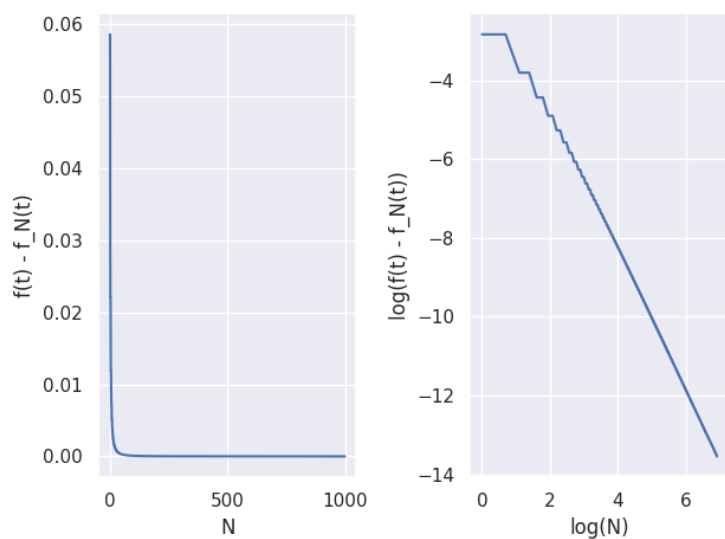


図 2 誤差

1.2 ケース 2

次に、関数 $f(t)$ が、

$$\begin{cases} 1(0 \leq t \leq \pi) \\ -1(\pi \leq t \leq 2\pi) \end{cases} \quad (17)$$

$$(18)$$

と与えられるとき、フーリエ係数を解析的に求める。フーリエ係数は、

$$c_k = \frac{1}{T} \int f(t) e^{-i \frac{2\pi k t}{T}} dt \quad (19)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi e^{-ikt} dt + \frac{1}{2\pi} \int_\pi^{2\pi} -e^{-ikt} dt \quad (20)$$

$$(21)$$

$$2\pi c_k = - \left[\frac{e^{-ikt}}{ik} \right]_0^\pi + \left[\frac{e^{-ikt}}{ik} \right]_\pi^{2\pi} \quad (22)$$

$$= \frac{2}{ik} (-(-1)^k + 1) \quad (23)$$

$$\therefore c_k = \frac{1}{i\pi k} (-(-1)^k + 1) \quad (24)$$

解析解が求められた。次に

$$f_N(t) = \sum_{-N}^N c_k e^{ikt} \quad (25)$$

を使って f_N を計算した結果を図 3 のようになる。 $t = 0$ 付近でギブス不連続が見られる。また、

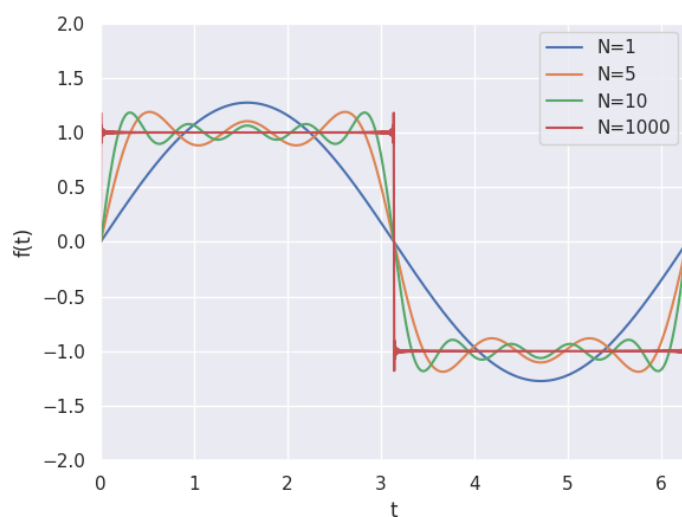


図 3 f_N が $f(t)$ の分布に近づく様子

誤差 $f(t) - f_N(t)$ の N 依存性は図 4 のようになる。この図から、誤差は N の増大とともに急激に消えることがわかる。右側のプロットは両対数グラフであるが、傾きから $f(t) - f_N(T) \propto N^{-1}$ であることがわかる。

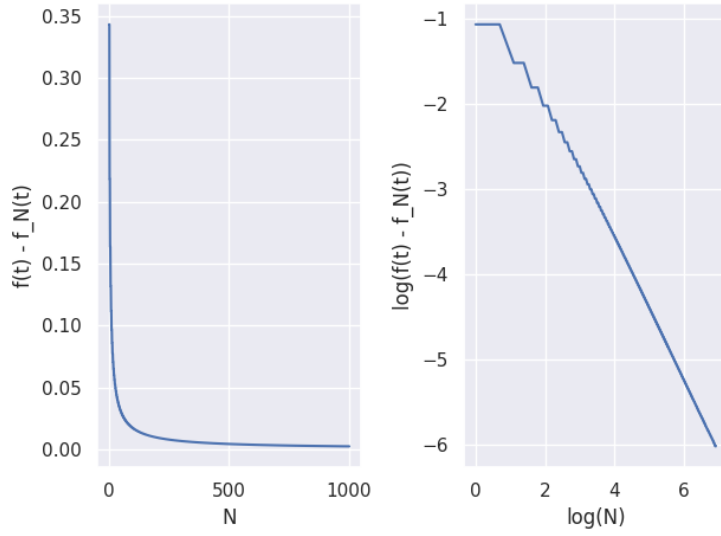


図 4 誤差

2 課題 2

作成したプログラムでは

$$\hat{c}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-i2\pi kn/N} \quad (26)$$

を使ってフーリエ係数計算し、

$$f_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{c}_k e^{-i2\pi kn/N} \quad (27)$$

よりデータ列を復元した。関数 $f(t)$

$$\begin{cases} -1 + 2t/\pi (0 \leq t \leq \pi) \\ 3 - 2t/\pi (\pi \leq t \leq 2\pi) \end{cases} \quad (28)$$

$$(29)$$

が与えられたとき、フーリエ係数の解析解は (15) であることがわかる。ここで解析解と計算によって得た係数の誤差は、図 5 となる。また、離散フーリエ変換にかかる時間を計測した結果が図 6 となる。 $t = O(N^2)$ であることが傾きからわかる。

3 課題 3

$$f(t) = \sin(t) + \sin(\sqrt{2}t) \quad (30)$$

からデータ列を作成して、離散フーリエ変換を実行したあとパワースペクトルを計算する。結果は図 7 のようになる。サンプリング数を増やすとピークが鋭くなり、裾が小さくなる。

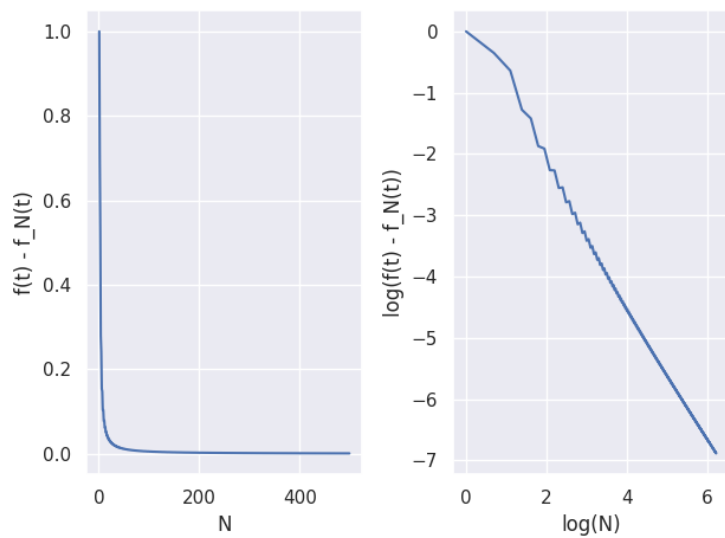


図5 DFT の誤差

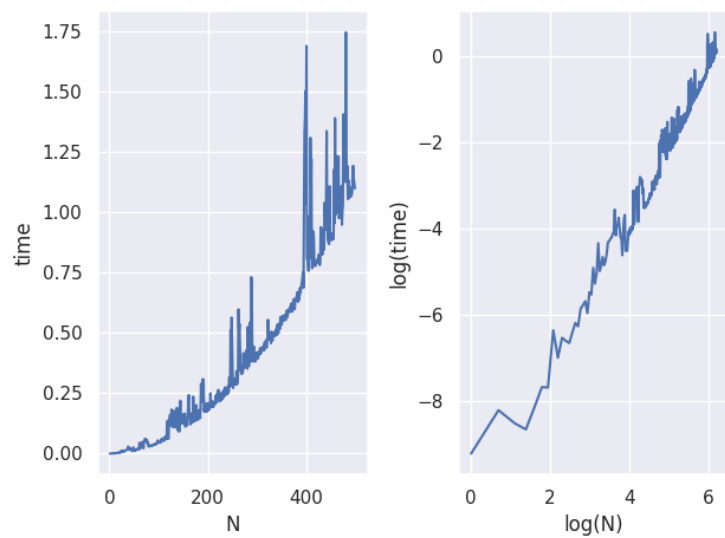


図6 DFT の処理時間

4 プログラム

ソースコードを添付しますが、全て <https://github.com/tychy/NumericalAnalysisPlayground> にあります。

ソースコード 1 gauss の消去法

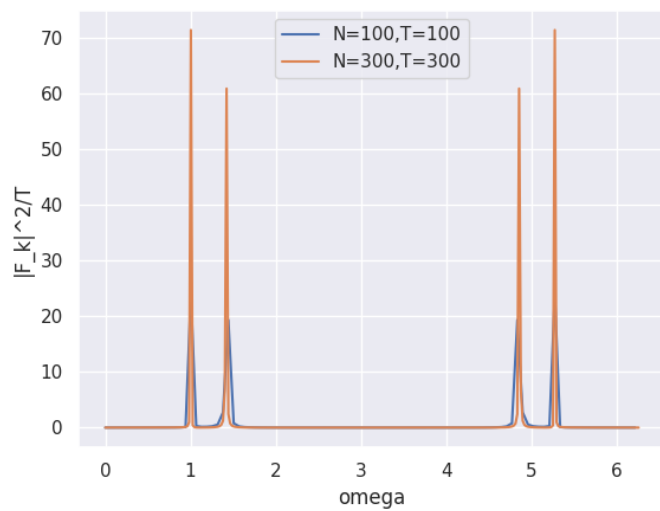


图 7 Power Spectral

参考文献