山田龍

2020 年 12 月 25 日

1　課題 1

1.1　ケース 1

まず、関数 $f(t)$ が、

$$\begin{cases} -1 + 2t/\pi(0 \leq t \leq \pi) & (1) \\ 3 - 2t/\pi(\pi \leq t \leq 2\pi) & (2) \end{cases}$$

と与えられるとき、フーリエ係数を解析的に求める。フーリエ係数は、

$$c_k = \frac{1}{T}\int f(t)e^{-i\frac{2\pi kt}{T}}dt \tag{3}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(-1 + 2t/\pi)e^{-ikt}dt + \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi}(3 - 2t/\pi)e^{-ikt}dt \tag{4}$$

$$\tag{5}$$

いま、te^{-ikt} の不定積分が

$$\int te^{-ikt} = \left[-\frac{te^{-ikt}}{ik}\right] + \int \frac{1}{ik}e^{-ikt}dt + C \tag{6}$$

$$= \left[-\frac{te^{-ikt}}{ik}\right] + \frac{1}{k^2}\left[e^{-ikt}\right] + C \tag{7}$$

$$\tag{8}$$

であることを使えば、

$$2\pi c_k = \left[\frac{e^{-ikt}}{ik}\right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi}\left[-\frac{te^{-ikt}}{ik}\right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi}\frac{1}{k^2}\left[e^{-ikt}\right]_0^{\pi} - 3\left[\frac{e^{-ikt}}{ik}\right]_{\pi}^{2\pi} + \frac{2}{\pi}\left[\frac{te^{-ikt}}{ik}\right]_{\pi}^{2\pi} - \frac{2}{\pi}\frac{1}{k^2}\left[e^{-ikt}\right]_{\pi}^{2\pi} \tag{9}$$

$$= \frac{e^{-ik\pi} - 1}{ik} - \frac{2}{\pi}\frac{\pi e^{-ik\pi}}{ik} + \frac{2}{\pi}\frac{e^{-ik\pi} - 1}{k^2} - 3\frac{e^{-ik2\pi} - e^{-ik\pi}}{ik} + \frac{2}{\pi}\frac{2\pi e^{-ik2\pi} - \pi e^{-ik\pi}}{ik} - \frac{2}{\pi}\frac{e^{-ik2\pi} - e^{-ik\pi}}{k^2} \tag{10}$$

$$= \frac{(-1)^k - 1}{ik} - 2\frac{(-1)^k}{ik} + \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^k - 1}{k^2} - 3\frac{1 - (-1)^k}{ik} + 2\frac{2 - (-1)^k}{ik} - \frac{2}{\pi}\frac{1 - (-1)^k}{k^2} \tag{11}$$

$$= \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^k - 1}{k^2} - \frac{2}{\pi}\frac{1 - (-1)^k}{k^2} \tag{12}$$

$$= \frac{2}{\pi k^2}((-1)^k - 1 - 1 + (-1)^k) \tag{13}$$

$$= \frac{4}{\pi k^2}((-1)^k - 1) \tag{14}$$

$$\therefore c_k = \frac{2}{\pi^2 k^2}((-1)^k - 1) \tag{15}$$

解析解が求められた。次に

$$f_N(t) = \sum_{-N}^{N} c_k e^{ikt} \tag{16}$$

を使って f_N を計算した結果を図示すると図 1 のようになる。また、誤差 $f(t) - f_N(t)$ の N 依存性は図 2 の

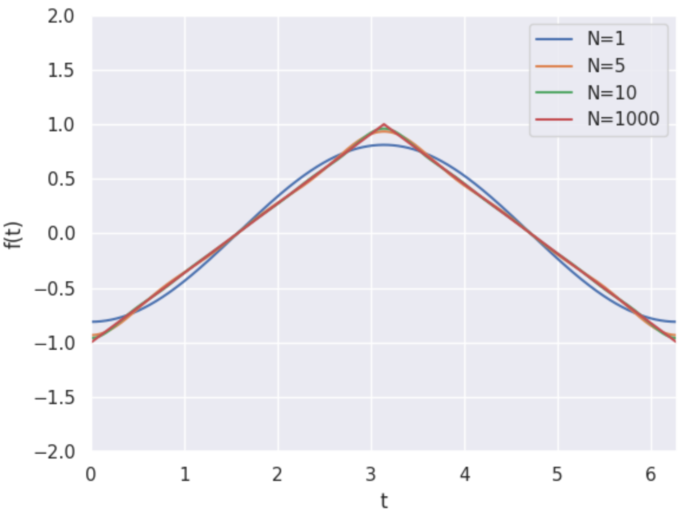

図 1　f_N が $f(t)$ の分布に近づく様子

ようになる。この図から、誤差は N の増大とともに急激に消えることがわかる。右側のプロットは両対数グラフであるが、傾きから $f(t) - f_N(T) \propto N^{-2}$ であることがわかる。

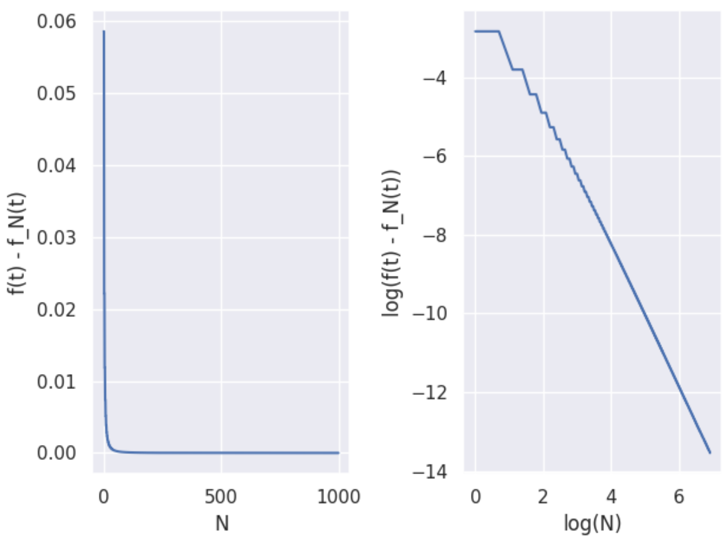

図 2　誤差

1.2　ケース 2

次に、関数 $f(t)$ が、

$$\begin{cases} 1(0 \leq t \leq \pi) & (17) \\ -1(\pi \leq t \leq 2\pi) & (18) \end{cases}$$

と与えられるとき、フーリエ係数を解析的に求める。フーリエ係数は、

$$c_k = \frac{1}{T}\int f(t)e^{-i\frac{2\pi kt}{T}}dt \tag{19}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} e^{-ikt}dt + \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi} -e^{-ikt}dt \tag{20}$$

$$\tag{21}$$

$$2\pi c_k = -\left[\frac{e^{-ikt}}{ik}\right]_0^{\pi} + \left[\frac{e^{-ikt}}{ik}\right]_{\pi}^{2\pi} \tag{22}$$

$$= \frac{2}{ik}(-(-1)^k + 1) \tag{23}$$

$$\therefore c_k = \frac{1}{i\pi k}(-(-1)^k + 1) \tag{24}$$

解析解が求められた。次に

$$f_N(t) = \sum_{-N}^{N} c_k e^{ikt} \tag{25}$$

を使って f_N を計算した結果を図示すると図 3 のようになる。$t = 0$ 付近でギブス不連続が見られる。また、

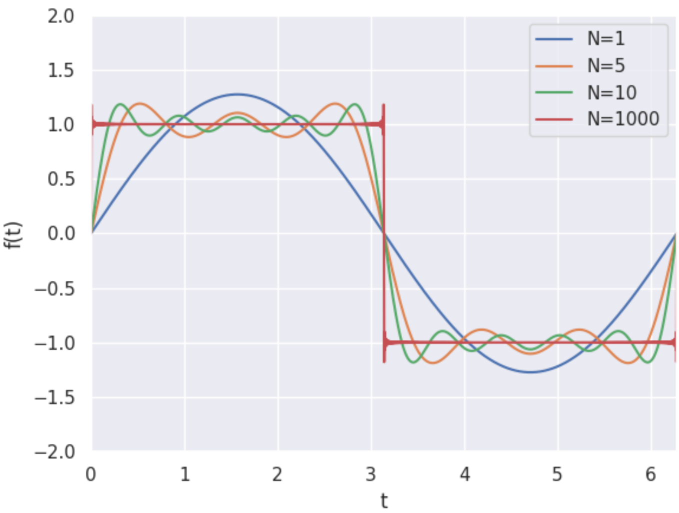

図 3　f_N が $f(t)$ の分布に近づく様子

誤差 $f(t) - f_N(t)$ の N 依存性は図 4 のようになる。この図から、誤差は N の増大とともに急激に消えることがわかる。右側のプロットは両対数グラフであるが、傾きから $f(t) - f_N(T) \propto N^{-1}$ であることがわかる。

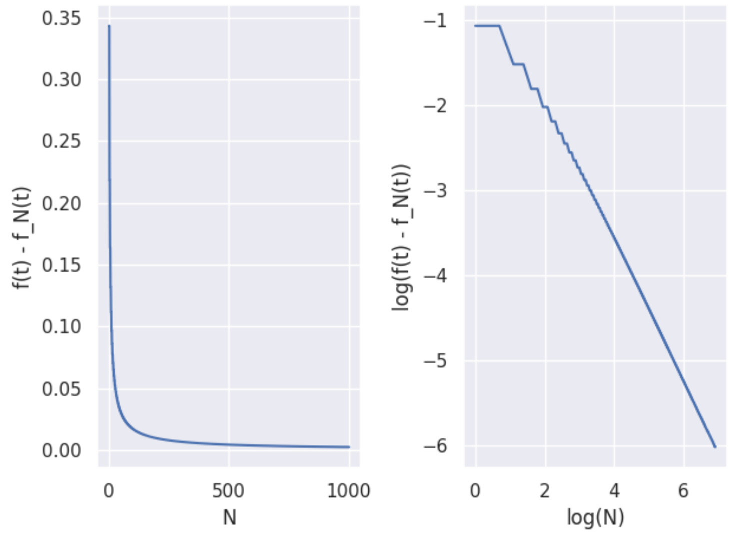

図 4　誤差

2　課題 2

作成したプログラムでは

$$\hat{c}_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-i2\pi kn/N} \tag{26}$$

を使ってフーリエ係数計算し、

$$f_n = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \hat{c}_k e^{-i2\pi kn/N} \tag{27}$$

よりデータ列を復元した。関数 $f(t)$

$$\begin{cases} -1 + 2t/\pi (0 \leq t \leq \pi) & (28) \\ 3 - 2t/\pi (\pi \leq t \leq 2\pi) & (29) \end{cases}$$

が与えられたとき、フーリエ係数の解析解は (15) であることがわかる。ここで解析解と計算によって得た係数の誤差は、図 5 となる。また、離散フーリエ変換にかかる時間を計測した結果が図 6 となる。$t = O(N^2)$ であることが傾きからわかる。

3　課題 3

$$f(t) = \sin(t) + \sin(\sqrt{2}t) \tag{30}$$

からデータ列を作成して、離散フーリエ変換を実行したあとパワースペクトルを計算する。

参考文献

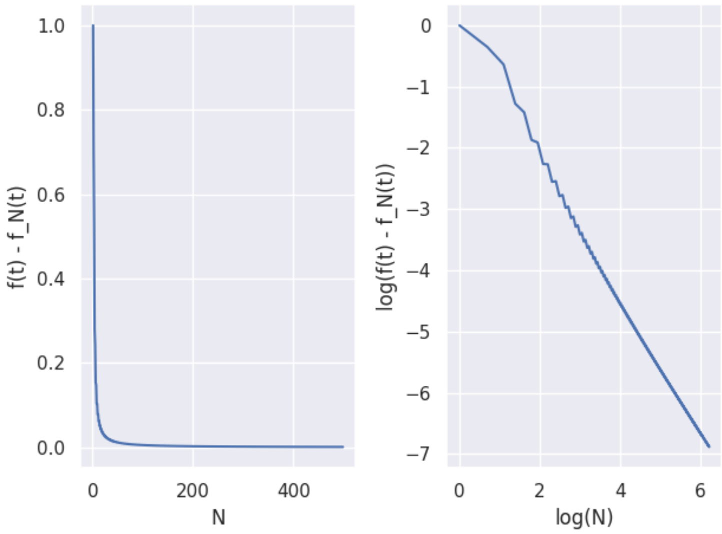

図 5　DFT の誤差

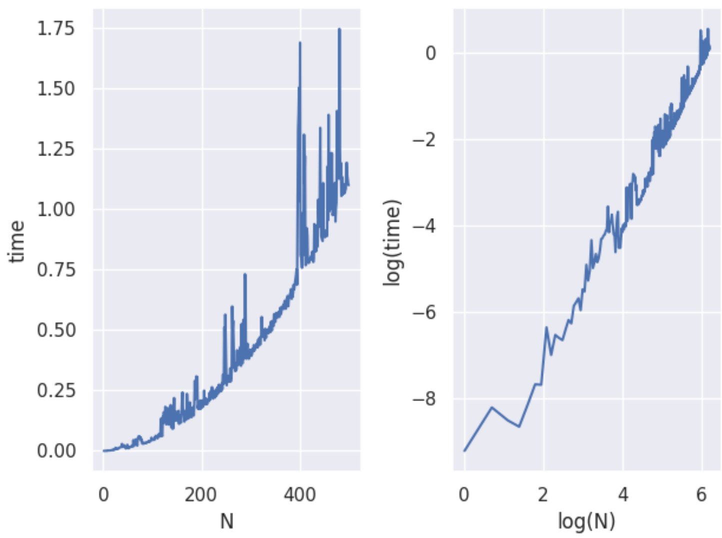

図 6　DFT の処理時間