Larson の計算の再現

山田龍

2020 年 12 月 15 日

1　アルゴリズム

[1] の議論に沿っている。

一次元の球対称ラグランジアン流体計算において、独立変数は M_r である。ここで M_r は半径 r の内部にある質量で定義され、媒質を外向きに大きくなる量である。（疑似粘性の選択は注意が必要である。）いま、解くべき方程式は

$$\frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{D}t} = -\frac{GM_r}{r^2} - 4\pi r^2 \frac{\partial(p+Q)}{\partial M_r} \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{D}r}{\mathrm{D}t} = v \tag{2}$$

$$V = \frac{1}{\rho} = \frac{4}{3}\frac{\partial r^3}{\partial M_r} \tag{3}$$

$$Q = \frac{4}{3}\rho l^2 (\frac{\partial v}{\partial r})^2 \tag{4}$$

方程式は $\{M_i\}\,; i = 1, ..., I+1$ によって離散化される。i 番目の球殻の中の質量は

$$\Delta M_{i+\frac{1}{2}} = M_{i+1} - M_i \tag{5}$$

陽的な差分方程式は、

$$\frac{v_i^{n+\frac{1}{2}} - v_i^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t^n} = -\frac{GM_i}{(r_i^{n+\lambda})^2} - 4\pi (r_i^{n+\lambda})^2 \frac{p_{i+\frac{1}{2}}^{n+\lambda} - p_{i-\frac{1}{2}}^{n+\lambda} + Q_{i+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - Q_{i-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta M_i} \tag{6}$$

$$r_i^{n+1} = r_i^n + v_i^{n+\frac{1}{2}} \Delta t^{n+\frac{1}{2}} \tag{7}$$

$$V_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} = \frac{1}{\rho_{i+\frac{1}{2}}^{n+1}} = \frac{4}{3}\frac{(r_{i+1}^{n+1})^3 - (r_i^{n+1})^3}{\Delta M_{i+\frac{1}{2}}} \tag{8}$$

$$\tag{9}$$

途中で、

$$r_i^{n+\lambda} = r_i^n + \frac{1}{4}(\Delta t^{n+\frac{1}{2}} - \Delta t^{n-\frac{1}{2}}) v_i^{n-\frac{1}{2}} \tag{10}$$

$$p_{i+\frac{1}{2}}^{n+\lambda} = p_{i+\frac{1}{2}}^n + \frac{1}{4}(\Delta t^{n+\frac{1}{2}} - \Delta t^{n-\frac{1}{2}}) \frac{p_{i+\frac{1}{2}}^n - p_{i+\frac{1}{2}}^{n-1}}{\Delta t^{i-\frac{1}{2}}} \tag{11}$$

しかし、(4) を疑似粘性に使うのは、例えば星形成の降着流の計算で重大な問題を引き起こすことがある。特に、半径が 0 に近づく場合に内部への物質の流れはたとえ $\frac{\partial v}{\partial r} > 0$ であっても圧縮されることがある。？この物質は粘性による圧力によって支配されるべきだが、(4) によれば $Q = 0$ となってしまう。？ todo:なんとかする

これらの困難は tensor artificial viscosity を使うことで解決される。$T = -pl + Q$ と書く。

中略

運動方程式は、

$$\frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{D}t} = -\frac{GM_r}{r^2} - 4\pi r^2 \frac{\partial p}{\partial M_r} - \frac{4\pi}{r}\frac{\partial r^3 Q}{\partial M_r} \tag{12}$$

差分化すれば、

$$\frac{v_i^{n+\frac{1}{2}} - v_i^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t^n} = -\frac{GM_i}{(r_i^{n+\lambda})^2} - 4\pi(r_i^{n+\lambda})^2 \frac{p_{i+\frac{1}{2}}^{n+\lambda} - p_{i-\frac{1}{2}}^{n+\lambda}}{\Delta M_i} - \frac{4\pi}{r_i^n}\frac{(r_{i+\frac{1}{2}}^n)^3 Q_{i+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - (r_{i-\frac{1}{2}}^n)^3 Q_{i-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta M_i} \tag{13}$$

ここで、$r_{i+\frac{1}{2}}$ は質量を半分持つように選ばれる。

$$r_{i+\frac{1}{2}} = (r_i^3 + r_{i+1}^3)^{\frac{1}{3}} \tag{14}$$

Q の更新は、

$$Q_{i+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} = -2(\mu_Q)_{i+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \left[\frac{v_{i+1}^{n-\frac{1}{2}} - v_i^{n-\frac{1}{2}}}{r_{i+1}^{n-\frac{1}{2}} - r_i^{n-\frac{1}{2}}} + \frac{1}{3}\frac{\ln \rho_{i+\frac{1}{2}}^n - \ln \rho_{i+\frac{1}{2}}^{n-1}}{\Delta t^{n+\frac{1}{2}}} \right] \tag{15}$$

粘性係数は、

$$(\mu_Q)_{i+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} = l^2 \frac{\left[\rho_{i+\frac{1}{2}}^n - \rho_{i+\frac{1}{2}}^{n-1}\right]}{\Delta t^{n+\frac{1}{2}}} \tag{16}$$

ここで、l は

$$l = k_q \Delta r \tag{17}$$

2 Saha の式

3 エネルギー方程式

等温の仮定を外してエネルギーを計算入れる。放射による効果は、

$$l = 4\pi r^2 F \tag{18}$$

$$F = -\frac{4ac}{3}\frac{T^3}{\kappa\rho}\frac{\partial T}{\partial r} \tag{19}$$

エネルギー方程式は、

$$\frac{\mathrm{D}e}{\mathrm{D}t} + p\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\frac{1}{\rho}) = \dot{q} + \Phi \tag{20}$$

$$\frac{\mathrm{D}e}{\mathrm{D}t} + p\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\frac{1}{\rho}) = -\frac{1}{4\pi\rho r^2}\frac{\partial l}{\partial r} + \Phi \tag{21}$$

エネルギーを使って圧力と温度を更新すると、

$$p = (\gamma - 1)\rho e \tag{22}$$

$$e = \frac{5}{2} k_b T \tag{23}$$

参考文献

[1] Barbara Weibel-Mihalas Dimitri Mihhalas. Radiation hydrodynamics. 1984.