

原始星形成の 1 次元数値計算

山田龍

2021 年 2 月 5 日

目次

1	Introduction	2
1.1	星形成の概要	2
1.2	課題	2
2	Related Work	2
3	基礎理論	2
3.1	基礎方程式	2
3.2	定性的な議論	5
3.3	ペリアル定理	5
3.4	重力不安定性	7
3.5	Lane-Emden 方程式	10
3.6	放射	12
3.7	第一コアの形成	12
3.8	解離と電離の効果	13
3.9	2nd	14
4	衝撃波	15
4.1	衝撃波	15
4.2	衝撃波の性質	15
4.3	エントロピージャンプ	15
4.4	衝撃波の大きさ	15
5	計算手法	15
5.1	差分方程式についての一般論	15
5.2	クーラン条件	15
5.3	人工粘性	16
5.4	一次元球対称ラグランジュ座標	17
5.5	基礎方程式の差分化	17

5.6	陰的計算	18
5.7	初期条件	19
6	結果	19
6.1	等温過程における崩壊	19
6.2	断熱過程におけるコアの形成	19
6.3	輻射の効果を入れてエネルギー方程式を解く	19
6.4	解離の効果による第一コアの崩壊と第二コアの形成	19
7	結論	19

1 Introduction

1.1 星形成の概要

星形成領域には Rho Ophiuchi, Taurus Molecular Cloud, Orion Nebula などがある。(写真は) 星形成領域はフィラメントのような構造をしていることもある。原始星(質量が有意に増えつつある星)が形成されると、原始星への降着は数万年程度続く。質量が $1M_{\odot}$ に達すると、質量降着が止まる。質量降着が終わると、 $1M_{\odot}$ の星は林トラックに乗ったあと、ヘニエトラックに沿って進化する。そして、主系列星に至る。

1.2 課題

星形成の過程は、暗く冷たいガスの中で進むので直接観測することできない。具体的には、崩壊の過程において内部が暴走的に収縮をするので中心の進化が外から見えない。一般に原始星の形成には数十万年かかる。分子雲の中の重力崩壊を数値的に計算する研究が行われてきた。とくに一次元での計算は Larson(1969) や MasunagaInutsuka(2000) による仕事がある。まず、その仕事を再現する。初期条件と観測される星のあいだのシナリオを検証する。

2 Related Work

3 基礎理論

このレポートでは、一次元において Larson 1969[1] の行った計算を再現する。Larson の計算とは、ガス球が等温崩壊して第一コアを形成作り熱せられた第一コアが水素の解離反応によって崩壊して第二コア、つまり原始星に至るまでの計算である。ここでは、ガス雲からの星形成について理論的な理解を示した上で、数値計算への実装方法をまとめる。

3.1 基礎方程式

自己重力と放射の効果を入れた連続の式、運動方程式、エネルギー方程式を解くことを考える。自己重力とは、流体に働く重力のうちの流体自身の作る重力のことである。自己重力と外場として与えられる重力を合わせたものが重力である。支配方程式は以下である:

連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \quad (3.1)$$

運動方程式は単位質量あたりの重力ポテンシャルを Φ として、

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \Phi \quad (3.2)$$

エネルギー方程式は単位質量あたりの内部エネルギーを e 、加熱率を Γ 、冷却率を λ として、

$$\frac{De}{Dt} = -\frac{p}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{v} + \Gamma - \lambda \quad (3.3)$$

ここで、ラグランジュ微分は、流れに沿った微分で

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \quad (3.4)$$

である。また、重力ポテンシャルは重力定数を G として、ポアソン方程式の解として与えられる。

$$\Delta \Phi = 4\pi G \rho \quad (3.5)$$

3.1.1 連続の式の導出

微小体積要素 $\delta V = \delta x \delta y \delta z$ を取ると、流れに沿って質量が保存する。

$$\frac{D}{Dt}(\rho \delta V) = 0 \quad (3.6)$$

質量保存則 (3.6) より、

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\frac{\rho}{\delta V} \frac{D}{Dt} \delta V \quad (3.7)$$

$$= -\rho \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \quad (3.9)$$

(3.9) が連続の式である。また、非圧縮性流体では $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ であるから、連続の式は

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (3.10)$$

となる。

3.1.2 運動方程式の導出

微小体積要素に働く力は、重力ポテンシャルによる力と応力を考えて、

$$\frac{D(\rho \delta V \mathbf{v})}{Dt} = -(\nabla p) \delta V - p \delta V \nabla \Phi \quad (3.11)$$

とかける。左辺に質量保存則 (3.6) を用いれば、運動方程式が導かれる。

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \Phi \quad (3.12)$$

3.1.3 運動エネルギーの保存則

運動方程式の両辺に $\rho \mathbf{v}$ をかける

$$\rho \mathbf{v} \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\mathbf{v} \cdot \nabla p - \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \Phi \quad (3.13)$$

左辺は

$$\rho \mathbf{v} \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\rho}{2} \frac{D(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})}{Dt} = \frac{\rho}{2} \frac{Dv^2}{Dt} \quad (3.14)$$

と書き直されるので、

$$\frac{\rho}{2} \frac{Dv^2}{Dt} = -\mathbf{v} \cdot \nabla p - \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \Phi \quad (3.15)$$

3.1.4 TheRaynoldsTransportTheorem

3.1.5 エネルギー方程式の導出

理想気体で断熱を仮定して外力は重力のみであるとする。エネルギー保存則

$$\frac{D}{Dt} \int \rho \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) dV = - \int \nabla \Phi \cdot \mathbf{v} dV - \int p \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \quad (3.16)$$

から出発する。左辺は内部エネルギーと運動エネルギーの和の変化率で右辺第一項は外力のする仕事率、第二項は表面で圧力のする仕事率である。TheRaynoldsTransportTheorem を使って、

$$\frac{D}{Dt} \int \rho \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) dV = \int \rho \frac{D}{Dt} \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) dV \quad (3.17)$$

右辺第二項の表面積分を体積分に直して、

$$\int p \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \int \nabla \cdot (p \mathbf{v}) dV \quad (3.18)$$

である。したがってエネルギー保存の式 (3.16) は

$$\int \rho \frac{D}{Dt} \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) dV = - \int \nabla \Phi \cdot \mathbf{v} dV - \int \nabla \cdot (p \mathbf{v}) dV \quad (3.19)$$

積分をまとめると、

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) + \nabla \cdot (p \mathbf{v}) = -\mathbf{v} \cdot \nabla \Phi \quad (3.20)$$

ここから運動エネルギーの保存則 (3.15)

$$\frac{\rho}{2} \frac{D}{Dt} v^2 = -\mathbf{v} \cdot \nabla \Phi - (\mathbf{v} \cdot \nabla) p \quad (3.21)$$

を引いて

$$\rho \frac{D}{Dt} e + p(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0 \quad (3.22)$$

を得る。

3.2 定性的な議論

3.3 ビリアル定理

重力と圧力勾配がつりあっていて、力学平衡にある系において、系の全重力エネルギー W とそして全内部エネルギー E_{th} には簡単な関係があり (3.23) と表される。この関係はビリアル定理と呼ばれる。

$$2E_{th} + W = 0 \quad (3.23)$$

ここでは、流体の自己重力系における力学平衡とは系の力学的性質が変化するタイムスケールが系の特徴的な時間である自由落下時間に比べて大きいときに系を力学的平衡にあるという。

3.3.1 ビリアル定理の導出

運動方程式 (3.2) の両辺に ρ をかけて整理すると、

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = -\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j) - \frac{\partial p}{\partial x_i} - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \quad (3.25)$$

両辺に x_k をかけて体積積分すれば、

$$\int d^3x x_k \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = -\int d^3x x_k \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j) - \int d^3x x_k \frac{\partial p}{\partial x_i} - \int d^3x x_k \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \quad (3.26)$$

$$= \int d^3x \delta_{jk} \rho v_i v_j + \int d^3x \delta_{ik} p - \int d^3x \rho x_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \quad (3.27)$$

$$= 2T_{ik} + \Pi_{ik} + W_{ik} \quad (3.28)$$

途中でガウスの発散定理を使って、境界での圧力が 0 であるとした。また、最後の式で

$$T_{ik} = \frac{1}{2} \int d^3x \delta_{jk} \rho v_i v_j \quad (3.29)$$

$$\Pi_{ik} = \int d^3x \delta_{ik} p \quad (3.30)$$

と定義した。 K_{ik} を

$$K_{ik} = T_{ik} + \frac{1}{2} \Pi_{ik} \quad (3.31)$$

と定義すれば、 K_{ik} は運動エネルギーテンソルであり、 $K = K_{ii}$ は系の全運動エネルギーである。そして、慣性モーメントテンソル

$$I_{ik} = \int d^3x \rho x_i x_k \quad (3.32)$$

を導入して、時間微分すれば

$$\frac{dI_{ik}}{dt} = \int d^3x \frac{\partial \rho}{\partial t} x_i x_k \quad (3.33)$$

$$= -\int d^3x \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_j} x_i x_k \quad (3.34)$$

$$= \int d^3x \rho (v_i x_k + x_i v_k) \quad (3.35)$$

もう一度微分すれば、テンソルビリアル定理

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 I_{ik}}{dt^2} = 2T_{ik} + \Pi_{ik} + W_{ik} \quad (3.36)$$

を得る。このトレースはスカラービリアル定理呼ばれる。

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 I}{dt^2} = 2T + \Pi + W = 2K + W \quad (3.37)$$

特に、星の内部で静水圧平衡にあり $v = 0$ とみなせる状況を考えると、 $T \sim 0$ である。ここで Π は全内部エネルギーを使って

$$\Pi = \sum \Pi_{ii} \quad (3.38)$$

$$= 3 \int p d^3 x \quad (3.39)$$

$$= 3 \int (\gamma - 1) \rho e d^3 x \quad (3.40)$$

$$= 3(\gamma - 1) E_{th} \quad (3.41)$$

と書けるから、系の全エネルギー $K = T + \frac{\Pi}{2}$ は系の全内部エネルギーを使って近似できる。すると重力エネルギーと熱エネルギーの関係式 (3.42) を得る。静水圧平衡にある系のビリアル定理である。

$$3(\gamma - 1) E_{th} + W = 0 \quad (3.42)$$

内部自由度がないとみなして、単原子分子の比熱比 $\gamma = \frac{5}{3}$ を代入すれば、

$$2E_{th} + W = 0 \quad (3.43)$$

3.3.2 境界での圧力が無視できないとき

(3.27) で境界の圧力が 0 であるとしたが、系の境界での圧力が無視できないときのビリアル定理を考える。星形成においては、星形成領域である分子雲の外側の高温ガスの圧力が無視できない場合に相当する。テンソルビリアル定理は、

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 I_{ik}}{dt^2} = 2T_{ik} + \Pi_{ik} + W_{ik} - \delta_{ik} p_{eq} \int d^3 x \quad (3.44)$$

となって、定常状態では

$$3p_{ex} V = 2T + 3(\gamma - 1) E_{th} + W \quad (3.45)$$

これは状態方程式に補正が入った式だとも捉えられる。

3.3.3 負の比熱

力学平衡にある系がエネルギーを失ったときに起こる特徴的な現象がある。内部エネルギー E_{th} と重力エネルギー W の関係はビリアル定理から

$$W = -3(\gamma - 1) E_{th} \quad (3.46)$$

と書ける。系の全エネルギー $E = E_{th} + W$ が ΔE だけ変化するとき、この関係を使って

$$\Delta E = \Delta E_{th} + \Delta W = -3(\gamma - 1) \Delta E_{th} \quad (3.47)$$

となる。安定な星では $\gamma > \frac{4}{3}$ であるから、たとえば輻射の効果で星がエネルギーを失ったとき、内部エネルギーは増える結果となる。これは負の比熱とよばれる。この負のフィードバックによって、原始星では輻射によってエネルギーを失った結果コアの温度が上昇し熱核反応に至る。

3.4 重力不安定性

3.4.1 ジーンズ不安定性

まず、無限一様に広がって制しているガスを考える。密度と温度は至るところで均一であるとする。このとき、重力ポテンシャル Φ もいたるところ一定でなくてはならないが、そのためにはポアソン方程式 $\Delta\Phi = 4\pi G\rho$ によると $\rho = 0$ にならなくてはならない。したがってこれは適切な設定ではない。しかし、適切な設定のもとで考える結果とほとんど変わらない結果を簡単な設定のもとで得られるという意味で有用である。一定の圧力を p_0 、密度を ρ_0 、重力ポテンシャルを Φ_0 とする。静止しているから媒質の速度は至るところ 0 である。ここで、この媒質にゆらぎを加える。 $p = p_0 + p_1, \rho = \rho_0 + \rho_1, \Phi = \Phi_0 + \Phi_1, v = v_1$ として連続の式と運動方程式を考える。

連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (3.48)$$

運動方程式

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \Phi \quad (3.49)$$

これを線形化して、

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v}_1 = 0 \quad (3.50)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p_1 - \nabla \Phi_1 \quad (3.51)$$

を得る。理想気体の状態方程式より R_{gas} を気体定数、 μ を平均分子量、 c_s を音速であるとして、

$$P = \frac{R_{gas}}{\mu} \rho T = c_s^2 \rho \quad (3.52)$$

であるから、線形化された運動方程式 (3.49) は音速を使って書き直される。

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} = -\frac{c_s^2}{\rho_0} \nabla \rho_1 - \nabla \Phi_1 \quad (3.53)$$

さらにポアソン方程式 $\Delta\Phi_1 = 4\pi G\rho_1$ を使って、線形化された連続の式 (3.48) の時間微分を整理すると、

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} = -\rho_0 \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} \quad (3.54)$$

$$= \rho_0 \nabla \cdot \left(\frac{c_s^2}{\rho_0} \nabla \rho_1 + \nabla \Phi \right) \quad (3.55)$$

$$= \nabla \cdot (c_s^2 \nabla \rho_1 + \rho_0 \nabla \Phi) \quad (3.56)$$

$$= c_s^2 \Delta \rho_1 + 4\pi G \rho_0 \rho_1 \quad (3.57)$$

ここで一次元平面波を考えて、解が $\exp(kx - \omega t)$ の形であるとする、分散関係は

$$\omega^2 = c_s^2 k^2 - 4\pi G \rho_0 \quad (3.58)$$

となる。 $k^2 < 4\pi G\rho_0/c_s^2$ のとき、 ξ を実数として $\omega = \pm i\xi$ の形の純虚数になって摂動が $\exp(\pm \xi t)$ となるのでゆらぎが時間とともに発達することがわかる。この特徴的な波数を k_J とすれば、

$$k_J^2 = \frac{4\pi G\rho_0}{c_s^2} \quad (3.59)$$

と書ける。これを波長に直すと、

$$\lambda_J = \frac{2\pi}{k_J} = \left(\frac{\pi}{G\rho_0} \right)^{\frac{1}{2}} c_s \quad (3.60)$$

となる。これジーンズ波長と呼び、この波長より波長の長いゆらぎは発達し重力収縮を起こす。この波長を半径とする級の内部の質量をジーンズ質量といい、

$$M_J = \frac{4}{3}\pi\lambda_J^3 \quad (3.61)$$

と書く。

3.4.2 等温球の重力不安定性

等温球の重力不安定性について考える。外圧 P_{ex} の下に置かれた半径 R で等温の球対称ガス球を考える。ガス球の全質量を M とする。ガス球の内部構造は Lane-Emden 方程式によって決まる。外圧が無視できないときのビリアル定理より、

$$P_{ex}V = (\gamma - 1)E_{th} + \frac{W}{3} \quad (3.62)$$

$V = \frac{4}{3}\pi R^3$ であるので、

$$P_{ex} = (\gamma - 1)\frac{E_{th}}{\frac{4}{3}\pi R^3} + \frac{W}{4\pi R^3} \quad (3.63)$$

質量あたりの定積比熱 c_v を定義して $E_{th} = c_v MT$ 、重力エネルギーの表式 $W = -\Theta \frac{GM^2}{R}$ を使って

$$P_{ex} = \frac{c_v MT}{2\pi R^3} - \frac{\Theta GM^2}{4\pi R^4} \quad (3.64)$$

と書き換えられる。今球対称を考えているので $\Theta = \frac{5}{3}$ である。この式を $\tilde{R} = \frac{\Theta GM}{2\pi R^3}$, $\tilde{P} = \frac{c_v MT}{2\pi R^3}$ で無次元化する。 $R = x\tilde{R}$, $P = y\tilde{P}$ として、(3.64) は

$$y = \frac{1}{x^3} \left(1 - \frac{1}{x} \right) \quad (3.65)$$

となる。この式を図示すると図 1 のようになる。

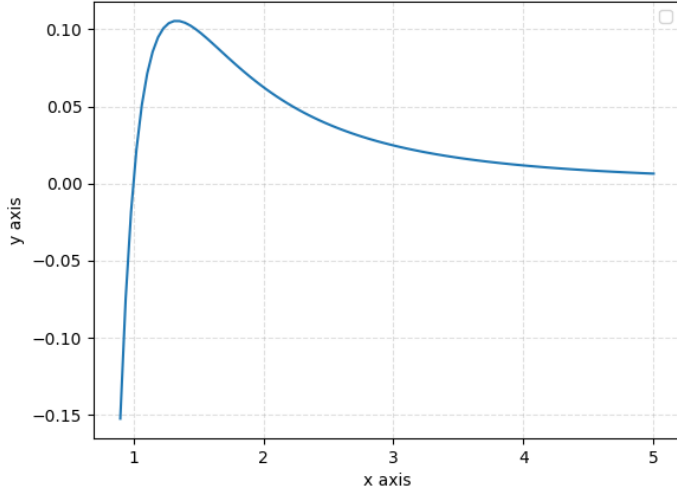


図 1

この式はピークを持ち、

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{x^4} \left(1 - \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^5} \quad (3.66)$$

$$= \frac{1}{x^5} (x - 3x) \quad (3.67)$$

より $x = \frac{4}{3}$ のところにピークがある。この点は R の式に代入すると、

$$R_m = \frac{4}{3} \tilde{R} = \frac{4\Theta}{9} \frac{G\mu M}{R_{gas}T} \quad (3.68)$$

に対応する。ここで、外圧 P_{ex} に等温球が置かれていて外圧と球の境界での圧力 P が釣り合っていたとする。 $R < R_m$ の場合、球が何らかの理由で微小に圧縮され $P < P_{ex}$ になったとすると R はすでにピークである R_m より小さいので、半径 R を小さくすると圧力 P も下がってしまい外圧と釣り合わせることができずに収縮を続ける。一方で $R > R_m$ の場合は、 $P < P_{ex}$ となるような微小な圧縮に対して R を小さくすると圧力 P を増やすことができるので P_{ex} と釣り合わせることができる。したがって、 $R > R_m$ のときは球は安定であることがわかる。次に、ジーンズ質量を求めるために $M = \frac{4\pi R_m^3 \rho}{3}$ を (3.68) へ代入して、

$$R_m^2 = \frac{27}{16\pi\Theta} \frac{R_{gas}T}{G\mu\rho} \quad (3.69)$$

得られた R_m の質量によらない表式を $M = \frac{4\pi R_m^3 \rho}{3}$ へ代入して、ジーンズ質量

$$M_J \quad (3.70)$$

を得る。ジーンズ質量より大きな質量を持つ球に対しては外圧との釣り合いが取れる半径がないので不安定である。そして、ここへ実際のガス雲の代表的な数値を入れると、

$$M_J = 1.1 M_{sun} \quad (3.71)$$

となる。ガス雲が太陽質量程度の総質量があれば重力不安定性が起こる。

3.4.3 自由落下時間

ジーンズ不安定性によって崩壊が始まると、圧力勾配の上昇に比べて重力による収縮の効果が支配的になる。一様球の崩壊において半径 r の球殻の崩壊について考える。半径 r の球殻の内部に m の質量があるとするれば、球殻の運動方程式は

$$\ddot{r} = -\frac{Gm}{r^2} \quad (3.72)$$

と書ける。初期条件において球殻の半径が r_0 で、一様球の密度が ρ_0 であったとすれば $m = \frac{4\pi r_0^3}{3}\rho_0$ であるので、運動方程式は、

$$\ddot{r} = -\frac{4\pi G r_0^3 \rho_0}{3r^2} \quad (3.73)$$

\dot{r} をかけて積分すれば、初期条件において球殻が静止していたとして、

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 = \frac{4\pi r_0^3}{3}G\rho_0 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \quad (3.74)$$

整理すると

$$\frac{\dot{r}}{r_0} = \left[\frac{8\pi}{3}G\rho_0 \left(\frac{r_0}{r} - 1 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.75)$$

$\cos^2 \xi = \frac{r}{r_0}$ と置き換えれば、

$$2\dot{\xi} \cos^2 \xi = \left(\frac{8\pi G \rho_0}{3} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.76)$$

を得る。

$$2\dot{\xi} \cos^2 \xi = \frac{d}{dt} \left(\xi + \frac{1}{2} \sin 2\xi \right) \quad (3.77)$$

を使って、積分すれば

$$\xi + \frac{1}{2} \sin 2\xi = \left(\frac{8\pi G \rho_0}{3} \right)^{\frac{1}{2}} t \quad (3.78)$$

$\xi = \frac{\pi}{2}$ において球殻が中心に達するので、

$$t_{ff} = \left(\frac{3\pi}{32\pi G \rho_0} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.79)$$

3.5 Lane-Emden 方程式

星は主系列星への進化の過程で星全体での対流を経るので、星の内部の組成は主系列星に至った際には一様である。また、星間ガスから自己重力収縮している過程も内部の組成は一様である。そこで、ここでは組成が一様な星の内部構造を調べる。まず、星が静水圧平衡にあり、ポアソン方程式が成り立つとする。

$$\frac{dp}{dr} = -\rho \frac{d\Phi}{dr} \quad (3.80)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) = 4\pi G \rho \quad (3.81)$$

力学平衡をここまで考えたが、星の内部での電離状態を考えるには温度が必要である。温度を与えるために、ここではエネルギー保存やエネルギー輸送の効果を考えずに、系の力学的平衡状態の性質を調べるためにポリトロップ関係式を用いる。 $K = R_{gas}T/\mu$ として、

$$P = K\rho^\gamma = K\rho^{1+1/n} \quad (3.82)$$

と書く。 γ をポリトロップ指数、 n をポリトロップ数と呼び、等温過程では $\gamma = 1, n = \infty$ 、断熱過程では $\gamma = \frac{5}{3}, n = \frac{3}{2}$ である。また、ポリトロップ指数は気体の比熱比 γ_{ad} と必ずしも同じではない。静水圧平衡の式 (3.80) にポリトロップ関係式を代入して、

$$\frac{d\Phi}{dr} = -\gamma K\rho^{\gamma-2} \frac{d\rho}{dr} \quad (3.83)$$

3.5.1 non isothermal

$\gamma \neq 1, n \neq \infty$ のときに (3.83) を積分して、

$$\Phi = \rho^{\gamma-1} \left(-\frac{\gamma}{\gamma-1} K \right) \quad (3.84)$$

$$\rho = \left(-\frac{1}{n+1} \frac{\Phi}{K} \right)^n \quad (3.85)$$

を得る。 $\rho = 0$ となるような表面では $\Phi = 0$ 、星の内部では $\Phi < 0$ であるとした。この式を、(3.81) に代入して

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) = 4\pi G \left(-\frac{1}{n+1} \frac{\Phi}{K} \right)^n \quad (3.86)$$

ρ_c, Φ_c を中心密度、中心での重力ポテンシャルとして、

$$\rho = \rho_c \theta^n = \rho_c \left(\frac{\Phi}{\Phi_c} \right)^n \quad (3.87)$$

$$r = a\xi, a = \left(\frac{4\pi G}{(n+1)^n K^n} (-\Phi_c)^{n-1} \right)^{1/2} \quad (3.88)$$

を使って無次元化すれば、Lane-Emden 方程式 (3.89) を得る。

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -\theta^n \quad (3.89)$$

この方程式の解は Emden 解と呼ばれ、 $\theta(\xi)$ を与える。この解は一般には初等的には求められないが、 $n = 5$ の場合には

$$\theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{3}\xi^2}} \quad (3.90)$$

の形の解が知られている。このとき密度は

$$\rho = \frac{\rho_c}{\left(1 + \frac{1}{3}\xi^2\right)^{\frac{5}{2}}} \quad (3.91)$$

となり、これをプラマーモデルという。

3.5.2 isothermal

$\gamma = 1, n = \infty$ の等温の場合 (3.83) を $\Phi = 0$ での密度を ρ_c として積分する。

$$-\frac{\Phi}{K} = \ln \rho - \ln \rho_c \quad (3.92)$$

$$\rho = \rho_c e^{-\Phi/K} \quad (3.93)$$

これをポアソン方程式 (3.81) に代入すれば、

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) = 4\pi G \rho_c e^{-\Phi/K} \quad (3.94)$$

$$\xi = ar, a = \left(\frac{4\pi G \rho_c}{K} \right)^{1/2}, \theta = \frac{\Phi}{K} \quad (3.95)$$

と無次元化すると等温過程の Lane-Emden 方程式を得る。

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = e^{-\theta} \quad (3.96)$$

中心で密度が有限で、圧力勾配が 0 になるから、境界条件を例えば

$$\theta(0) = 0, \theta'(0) = 0 \quad (3.97)$$

とおけば、Lane-Emden 方程式は解ける。

3.6 放射

3.6.1 Fock の法則

3.6.2 輻射輸送

3.7 第一コアの形成

重力不安定性によって重力収縮を起こしている分子雲について考える。分子雲は崩壊を起こす前は $T = 10K$ で分子雲全体が等温で、かつ光学的に薄い状態である。これは分子雲のガス粒子はダスト粒子と衝突していて、ダストの熱放射で冷却されている状態である。この様な分子雲が重力不安定性によって崩壊するとき、崩壊の中心部の密度が小さくダスト冷却が効く間は崩壊はほとんど $10K$ の等温で進化する。そして、中心部の密度が大きくなり $10^{-13} gcm^{-3}$ に達すると中心部は不透明になる。中心部では輻射によってエネルギーが抜けず断熱的になる。落下の重力エネルギーを放射することができないので急速に温度が上昇する。また、温度の上昇とともに圧力も上昇する。輻射でエネルギーが抜けなくなった中心部のことをコアと呼ぶことにする。コアの高密度部分の進化が暴走的に進む一方で、それを取り囲むエンベロープは一定のままである。これは、エンベロープが中心部に質量を供給した分だけ崩壊している領域の境界からエンベロープに対しても質量の流れがあることによって起きる見かけの効果とも言える。コアの密度が上がると、自由落下時間は短くなると同時にジーンズ質量は小さくなるのでコアの質量は小さくなる。また、コアの大きさはジーンズ長程度のまま収縮するので密度の上昇とともにエンベロープに取り残された質量の分布がわかる。ジーンズ長が $\lambda_J \propto \rho^{-1/2}$ であるから、エンベロープの質量分布は $\rho \propto r^{-2}$ となる。

3.8 解離と電離の効果

形成された第一コアは不透明で輻射によってエネルギーが抜けない。しかし、エンベロープからの質量降着は続くのでその重力エネルギーはコアの内部エネルギーに変換されコアの内部の温度と圧力は上がり続ける。温度が $2000K$ に達すると、水素分子の解離の効果が現れる。水素原子と分子の関係は Saha の式によって与えられる。

3.8.1 Saha の式

原子の励起状態には様々あるが、基底状態と励起状態間の数密度の関係を考えるとき、熱平衡にあるガスを考えるのが良い。ガスの中では様々な状態の原子が分布していると考えられる。ここでは s 番目の励起状態の統計的重みを g_s 、状態 s にある原子の数密度を n_s 、基底状態からのエネルギーを ψ_s と書くこととする。統計的重みは、エネルギー準位における縮退度を表す。すると

$$\frac{n_s}{n_0} = \frac{g_s}{g_0} e^{-\psi_s/kT} \quad (3.98)$$

が成り立つ。分配関数 u を

$$u = \sum g_s e^{-\psi_s/kT} \quad (3.99)$$

として、数密度 n を

$$n = \sum n_s \quad (3.100)$$

と定義すれば、ボルツマン公式 (3.98) は分配関数を使って書き直される。

$$\frac{n_s}{n} = \frac{g_s}{u} e^{-\psi_s/kT} \quad (3.101)$$

中性原子が r 個の原子を失った状態を r 階電離原子と呼ぶ。基底状態の r 階電離原子がさらに電子を一つ失って $(r+1)$ 階電離原子になるのに必要な最小のエネルギーを χ_r とする。電離した電子が運動量 p_e を持っているとき、電離した電子のエネルギーは $E = \chi_r + \frac{p_e^2}{2m_e}$ となる。ここで、 r 階電離原子と自由電子が $[p_e, p_e + dp_e]$ の間の運動量を持つ $r+1$ 階電離原子との関係を考える。数密度はそれぞれ、 n_r, dn_{r+1} と書く。統計的重みは、 $g_r, g_{r+1} dg(p_e)$ となる。ここで $dg(p_e)$ は、スピンの自由度 \times 相空間での体積 $/h^3$ であるから

$$dg(p_e) = \frac{2dV d^3p_e}{h^3} \quad (3.102)$$

と書かれる。したがって、ボルツマン公式は

$$\frac{dn_{r+1}}{n_r} = \frac{g_{r+1} dg(p_e)}{g_r} \exp \left(-\frac{\chi_r + \frac{p_e^2}{2m_e}}{kT} \right) \quad (3.103)$$

また、 $dV = \frac{1}{n_e}$ であること、 $[p_e, p_e + dp_e]$ の空間 $d^3p_e = 4\pi p_e^2 dp_e$ を使って

$$dg(p_e) = \frac{8\pi p_e^2 dp_e}{n_e h^3} \quad (3.104)$$

と書けるので、

$$\frac{dn_{r+1}}{n_r} = \frac{g_{r+1}}{g_r} \frac{8\pi p_e^2 dp_e}{n_e h^3} \exp \left(-\frac{\chi_r + \frac{p_e^2}{2m_e}}{kT} \right) \quad (3.105)$$

p_e について積分すれば

$$\frac{n_{r+1}}{n_r} n_e = \frac{g_{r+1}}{g_r} f_r(T) \quad (3.106)$$

ただし、

$$f_r(T) = 2 \frac{(2\pi m_e kT)^{\frac{3}{2}}}{h^3} e^{-\chi_r/kT} \quad (3.107)$$

この式は r 階電離原子と $r+1$ 階電離原子の数密度の関係を与えるが、これは原子がすべて基底状態であるとしたときの表式である。 r 階電離原子が第 s 励起状態にあるとき、 $g_{r,s}$ と添字をつけると約束すれば (3.106) を正確に記すと、

$$\frac{n_{r+1,0}}{n_{r,0}} n_e = \frac{g_{r+1,0}}{g_{r,0}} f_r(T) \quad (3.108)$$

となる。 r 階電離原子のすべての励起状態の数密度を足して、

$$n_r = \sum n_{r,s} \quad (3.109)$$

を定義する。ここにボルツマン公式

$$\frac{n_{r,s}}{n_{r,0}} = \frac{g_{r,s}}{g_{r,0}} e^{-\psi_s/kT} \quad (3.110)$$

を使って、

$$\frac{n_r}{n_{r,0}} = \frac{1}{g_{r,0}} \left(g_{r,0} + g_{r,1} e^{\psi_1/kT} + g_{r,2} e^{\psi_2/kT} + \dots \right) \quad (3.111)$$

$$= \frac{u}{g_{r,0}} \quad (3.112)$$

の関係を得る。この関係を (3.108) へ使えば、

$$\frac{n_{r+1}}{n_r} n_e = \frac{u_{r+1}}{u_r} f_r(T) \quad (3.113)$$

すべての励起状態を考慮した Saha の式を得る。

3.9 2nd

質量降着の続く第一コアは加熱され続ける。 $10K$ ではガスの水素はすべて分子の状態であるとみなせるが、 $2000K$ では解離が起きる。このとき、分子と原子と水素の関係は Saha の式 (3.113) によって得られる。

$$H^2 = H + H \quad (3.114)$$

解離が始まると、コアに入ってくるエネルギーの一部が吸熱反応に使われるようになる。この反応によって比熱比 γ が下がり、 $\gamma < \frac{4}{3}$ になると第一コアの崩壊が起こる。解離による吸熱反応がなくなると、水素分子の比熱比が $\gamma = \frac{7}{5}$ で水素分子の比熱比が $\gamma = \frac{5}{3}$ であるから比熱比は高くなるので崩壊は止まる。

4 衝撃波

4.1 衝撃波

4.1.1 ランキンユゴニオ

4.2 衝撃波の性質

4.3 エントロピージャンプ

4.4 衝撃波の大きさ

5 計算手法

5.1 差分方程式についての一般論

5.2 クーラン条件

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (5.1)$$

波の伝播を表す線形移流方程式について考える。移流速度を c として方程式は (5.1) のようになる。この方程式の解は、 $u = f(x - ct)$ の形で得られ、 $c > 0$ ならば x の正の方向に、 $c < 0$ ならば x の負の方向に伝播する解になる。この方程式を $c > 0$ のときに風上差分法で差分化して数値的に解くことを考える。上付き添字を時刻、下付き添字を座標に関するインデックスとおいて、

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = -c \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} \quad (5.2)$$

と書ける。したがって、 u は時間方向において

$$u_j^{n+1} = u_j^n - c \Delta t \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} \quad (5.3)$$

と更新される。時刻 n での情報のみから次のステップでの物理量を計算する陽的な解法では、1 ステップの情報の伝達距離が格子幅を超えないという条件が課される。したがって、情報が伝播する速さは $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ で、波の速さが c であるから条件は

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \geq c \quad (5.4)$$

これはクーラン条件と呼ばれ、Courant-Friedrichs-Lewy 条件の略称として CFL 条件と書かれることもある。クーラン数が 1 より小さい条件 $c \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$ とも言える。例えば 4 次中心差分法ではクーラン条件は

$$c \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 2 \quad (5.5)$$

となることからわかるように、条件は必ずしも 1 ではないが 1 を使えば十分である。

5.2.1 フォン・ノイマンの安定性解析

クーラン条件が満たされていることは、数値計算が安定であることを保障しない。風上差分法において、安定性を考える。 $u_j (j = 0, \dots, N)$ に対してそのフーリエ級数展開を考える。

$$u_j^n = \sum_k \xi_k^n e^{ikj\Delta x} \quad (5.6)$$

ここで ξ_k は増幅係数で、フーリエ級数の k 番目の級数の時刻 n における増幅率を表す。すべてのモード k で $\|\xi_k\| \leq 1$ を満たすとき、数値計算が安定であるという。方程式を差分化したものを考えて、

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = -c \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} \quad (5.7)$$

ここに、(5.6) の波数 k のモード $u_j^n(k) = \xi_k^n e^{ikj\Delta x}$ のみを代入してみる。すると方程式は、

$$(\xi_k - 1) \frac{u_j^n(k)}{\Delta t} = -\frac{c}{\Delta x} \xi_k^n (e^{ikj\Delta x} - e^{ik(j-1)\Delta x}) \quad (5.8)$$

$$= -\frac{c}{\Delta x} u_j^n(k) e^{ikj\Delta x} (1 - e^{-ik\Delta x}) \quad (5.9)$$

となり、これを ξ_k について解くと、 $\alpha = \frac{c\Delta t}{\Delta x}$ と書いて、

$$\xi_k = 1 - \alpha(1 - e^{-ik\Delta x}) \quad (5.10)$$

$$= 1 - \alpha(1 - \cos(k\Delta x) + i \sin(k\Delta x)) \quad (5.11)$$

$$\|\xi_k\|^2 = (1 + \alpha(\cos(k\Delta x) - 1))^2 + \alpha^2 \sin^2(k\Delta x) \quad (5.12)$$

$$= 1 + 2\alpha(1 - \alpha)(\cos(k\Delta x) - 1) \quad (5.13)$$

これは、 $0 \leq \alpha \leq 1$ のとき安定 $\alpha > 1$ のとき不安定である。したがってクーラン条件が満たされるときのみ安定なスキームであるとわかった。

5.3 人工粘性

圧縮性流体の数値計算では衝撃波の取り扱いが必要である。衝撃波面は数学的には2価関数が現れる不連続な現象であるが、物理的には平均自由行程程度の厚みを持つ遷移層であるためにその前後で保存則が成り立つ。数値計算で衝撃波を正しく取り扱わなければ、衝撃波面の前後での不連続性から保存則が成り立たず、物理的な結果を得ることができない。そこで1950年に von Neumann と Richtmyer 人工粘性を導入した。人工粘性は計算に圧縮されたときのみ働く非線形な粘性で、平均自由行程程度の大きさの衝撃波の厚みを格子の幅程度にまで大きくすることによって衝撃波を数値計算で捉えられるようにする。人工粘性係数は $\frac{D\rho}{Dt} > 0$ のとき、

$$\mu_Q = l^2 \frac{D\rho}{Dt} \quad (5.14)$$

それ以外のとき $\mu_Q = 0$ として、本当の粘性と同じ形で運動方程式とエネルギー方程式へ組み込めば良い。エネルギー方程式への組み込みで運動エネルギーを熱エネルギーへ変換する役割も果たす。つまり、粘性圧を

$$Q = -\frac{4}{3} \mu_Q \frac{\partial v}{\partial z} \quad (5.15)$$

として、運動方程式、エネルギー方程式に粘性圧の項を付け足せば良い。それぞれ

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = f - \frac{\partial}{\partial z}(P + Q) \quad (5.16)$$

$$\frac{De}{Dt} + (p + Q) \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) = 0 \quad (5.17)$$

となる。

5.4 一次元球対称ラグランジュ座標

星形成のシミュレーションでは、計算に必要な密度と長さの桁のレンジが大きい。例えば長さのスケールについて考えると、初期条件では $1000 AU$ 程度の分布が第 2 コアでは $1 R_{sun}$ 程度の領域の計算が必要になる。ここには 6 桁の違いがある。密度は初期条件では $10^{-19} g/cc$ であるが、最終的には $10^{-2} g/cc$ に至る。17 桁のレンジがある。長さのスケールだけを考えても、空間を格子によって均等に切るだけでは計算量が膨大になってうまく計算できないことがわかる。そこで、一次元球対称ラグランジアン座標を導入する。それは、半径ではなく質量について座標を切る方法である。計算の過程で最初に分割された媒質の質量は変わらずに媒質の空間座標が時間によって変化することでコアの密度が上がると媒質が中央に集まって計算が細かくなるという利点がある。

5.5 基礎方程式の差分化

一次元の球対称ラグランジアン流体計算において、独立変数は M_r である。ここで M_r は半径 r の内部にある質量で定義され、媒質を外向きに大きくなる量である。(疑似粘性の選択は注意が必要である。) いま、解くべき方程式は

$$\frac{Dv}{Dt} = -\frac{GM_r}{r^2} - 4\pi r^2 \frac{\partial(p+Q)}{\partial M_r} \quad (5.18)$$

$$\frac{Dr}{Dt} = v \quad (5.19)$$

$$V = \frac{1}{\rho} = \frac{4}{3} \frac{\partial r^3}{\partial M_r} \quad (5.20)$$

$$Q = \frac{4}{3} \rho l^2 \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 \quad (5.21)$$

方程式は $\{M_i\}; i = 1, \dots, I+1$ によって離散化される。 i 番目の球殻の中の質量は

$$\Delta M_{i+\frac{1}{2}} = M_{i+1} - M_i \quad (5.22)$$

陽的な差分方程式は、

$$\frac{v_i^{n+\frac{1}{2}} - v_i^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t^n} = -\frac{GM_i}{(r_i^{n+\lambda})^2} - 4\pi (r_i^{n+\lambda})^2 \frac{p_{i+\frac{1}{2}}^{n+\lambda} - p_{i-\frac{1}{2}}^{n+\lambda} + Q_{i+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - Q_{i-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta M_i} \quad (5.23)$$

$$r_i^{n+1} = r_i^n + v_i^{n+\frac{1}{2}} \Delta t^{n+\frac{1}{2}} \quad (5.24)$$

$$V_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} = \frac{1}{\rho_{i+\frac{1}{2}}^{n+1}} = \frac{4}{3} \frac{(r_{i+1}^{n+1})^3 - (r_i^{n+1})^3}{\Delta M_{i+\frac{1}{2}}} \quad (5.25)$$

$$(5.26)$$

途中で、

$$r_i^{n+\lambda} = r_i^n + \frac{1}{4}(\Delta t^{n+\frac{1}{2}} - \Delta t^{n-\frac{1}{2}})v_i^{n-\frac{1}{2}} \quad (5.27)$$

$$p_{i+\frac{1}{2}}^{n+\lambda} = p_{i+\frac{1}{2}}^n + \frac{1}{4}(\Delta t^{n+\frac{1}{2}} - \Delta t^{n-\frac{1}{2}})\frac{p_{i+\frac{1}{2}}^n - p_{i+\frac{1}{2}}^{n-1}}{\Delta t^{i-\frac{1}{2}}} \quad (5.28)$$

運動方程式は、

$$\frac{Dv}{Dt} = -\frac{GM_r}{r^2} - 4\pi r^2 \frac{\partial p}{\partial M_r} - \frac{4\pi}{r} \frac{\partial r^3 Q}{\partial M_r} \quad (5.29)$$

差分化すれば、

$$\frac{v_i^{n+\frac{1}{2}} - v_i^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t^n} = -\frac{GM_i}{(r_i^{n+\lambda})^2} - 4\pi(r_i^{n+\lambda})^2 \frac{p_{i+\frac{1}{2}}^{n+\lambda} - p_{i-\frac{1}{2}}^{n+\lambda}}{\Delta M_i} - \frac{4\pi}{r_i^n} \frac{(r_{i+\frac{1}{2}}^n)^3 Q_{i+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - (r_{i-\frac{1}{2}}^n)^3 Q_{i-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta M_i} \quad (5.30)$$

ここで、 $r_{i+\frac{1}{2}}$ は質量を半分持つように選ばれる。

$$r_{i+\frac{1}{2}} = (r_i^3 + r_{i+1}^3)^{\frac{1}{3}} \quad (5.31)$$

Q の更新は、

$$Q_{i+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} = -2(\mu_Q)_{i+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \left[\frac{v_{i+1}^{n-\frac{1}{2}} - v_i^{n-\frac{1}{2}}}{r_{i+1}^{n-\frac{1}{2}} - r_i^{n-\frac{1}{2}}} + \frac{1}{3} \frac{\ln \rho_{i+\frac{1}{2}}^n - \ln \rho_{i+\frac{1}{2}}^{n-1}}{\Delta t^{n+\frac{1}{2}}} \right] \quad (5.32)$$

粘性係数は、

$$(\mu_Q)_{i+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} = l^2 \frac{[\rho_{i+\frac{1}{2}}^n - \rho_{i+\frac{1}{2}}^{n-1}]}{\Delta t^{n+\frac{1}{2}}} \quad (5.33)$$

ここで、 l は

$$l = k_q \Delta r \quad (5.34)$$

5.6 陰的計算

等温の仮定を外してエネルギーを計算入れる。放射による効果は、

$$l = 4\pi r^2 F \quad (5.35)$$

$$F = -\frac{4ac}{3} \frac{T^3}{\kappa \rho} \frac{\partial T}{\partial r} \quad (5.36)$$

より、エネルギー方程式は、人工粘性による散逸項を Φ と書いて、

$$\frac{De}{Dt} + p \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) = -\frac{1}{4\pi \rho r^2} \frac{\partial l}{\partial r} + \Phi \quad (5.37)$$

$$= \frac{4a}{3k\rho r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{\partial T^4}{\partial r} \right) + \Phi \quad (5.38)$$

ここで、エネルギー方程式を差分化することを考えるが、単に差分化すると2階微分が入っているのでクーラン条件が $\Delta t < \frac{\Delta x^2}{c}$ となる。時間とともに格子の幅が変化してゆく1次元ラグランジュ法を採用しているから、この Δx は崩壊が進むとともに中心部ではジーンズ長程度まで小さくなる。したがって、クーラン条件は崩壊の経過とともに一層厳しい条件となってしまう。そこで、この問題を解決するために陰的な手法を導入す

る。陰的な手法では、クーラン条件についての考えなくて良いのでエネルギー方程式に関するクーラン条件の問題が解決される。

$$\frac{De}{Dt} + p \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) = \frac{4a}{3k\rho r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{\partial T^4}{\partial r} \right) + \Phi \quad (5.39)$$

$$e^{n+1} - e^n + \frac{1}{2}(p^n + p^{n+1})(V^{n+1} - V^n) = \Delta t^n \dot{q}^{n+\frac{1}{2}} + \Delta t^n \Phi^{n+\frac{1}{2}} \quad (5.40)$$

いま、 \dot{q} を放射による効果として以下のように差分化する。

$$\dot{q} = \frac{4a}{3k} \frac{1}{\rho(r_j)^2} \quad (5.41)$$

5.7 初期条件

6 結果

6.1 等温過程における崩壊

6.2 断熱過程におけるコアの形成

6.3 輻射の効果を入れてエネルギー方程式を解く

6.4 解離の効果による第一コアの崩壊と第二コアの形成

7 結論

参考文献

- [1] Richard B. Larson. Numerical calculations of the dynamics of a collapsing proto-star*. 1969.