# Spin

山田龍

2020 年 7 月 1 日

## 1 生成子

回転並進変換を考える。

$$r_i \to Mr_i + a \tag{1}$$

演算子に対して

$$\hat{r}_i \to M\hat{r}_i + a \tag{2}$$

とするようなユニタリー変換を考えたい。

$$U^\dagger \hat{r} U = Mr + a \tag{3}$$
$$U^\dagger \hat{p} U = Mp \tag{4}$$
$$\tag{5}$$

となる $U$ を導入すれば、ユニタリー変換された状態ベクトル $U|\psi\rangle$ について期待値は古典の場合と同じように変換される。ここで、具体的にユニタリー変換を構成する。無限小回転を

$$M(\theta) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x} \times \theta \tag{6}$$

ユニタリー演算子を以下のように書けば、

$$U(M, \epsilon) = 1 + \frac{1}{i\hbar}\theta \cdot \hat{J} + \frac{1}{i\hbar}\epsilon \cdot \hat{P} \tag{7}$$

$\hat{J}, \hat{P}$ が満たすべき関係式は

$$\frac{1}{i\hbar}[\hat{r}, \theta \cdot \hat{J}] = \theta \times \boldsymbol{r} \tag{8}$$
$$\frac{1}{i\hbar}[\hat{p}, \theta \cdot \hat{J}] = \theta \times \boldsymbol{p} \tag{9}$$
$$\frac{1}{i\hbar}[\hat{r}, \epsilon \cdot \hat{P}] = \epsilon \tag{10}$$
$$\frac{1}{i\hbar}[\hat{p}, \epsilon \cdot \hat{P}] = 0 \tag{11}$$
$$\tag{12}$$

実際には系を記述する変数は更にスピン自由度がある。ここでは系が $\hat{r}, \hat{p}$ で全てかかれるとして、

$$\hat{P} = \sum \hat{p} \tag{13}$$
$$\hat{J} = \sum \hat{r} \times \hat{p} \tag{14}$$

最後に $\hat{J}, \hat{P}$ の交換関係について、

$$[J^a, J^b] = ih\sum \epsilon_{abc}J^c \tag{15}$$
$$[J^a, P^b] = ih\sum \epsilon_{abc}P^c \tag{16}$$
$$[P^a, P^b] = 0 \tag{17}$$

## 2　角運動量の固有状態

以下では bold 体の肩についている数字はべきを表す。それ以外は要素。角運動量演算子を因子化して、

$$\hat{J} = \hbar\hat{\boldsymbol{j}} \tag{18}$$
$$[\hat{j}^a, \hat{j}^b] = \sum \epsilon_{abc}\hat{j}^c \tag{19}$$

$\hat{\boldsymbol{j}}$ はエルミートである。$\hat{\boldsymbol{j}}$ の成分は交換しないので、全てを同時に対角化することはできない。$\hat{j}^3$ について対角化する。まず、

$$\hat{j}^{\pm} = \hat{j}^1 \pm i\hat{j}^2 \tag{20}$$

のように、$\hat{j}^{1,2}$ を書き換える。これらははしご演算子と呼ばれる非エルミート演算子である。すると、

$$[\hat{\boldsymbol{j}^2}, \hat{j}^3] = 0 \tag{21}$$

から、同時対角化できることがわかる。$\hat{j}^{\pm}, \hat{j}^3$ の交換関係を計算する。

$$[\hat{j}^3, \hat{j}^+] = \hat{j}^+ \tag{22}$$
$$[\hat{j}^3, \hat{j}^-] = -\hat{j}^- \tag{23}$$
$$[\hat{j}^+, \hat{j}^-] = 2\hat{j}^3 \tag{24}$$

また、

$$\hat{\boldsymbol{j}^2} = \frac{1}{2}(\hat{j}^+\hat{j}^- + \hat{j}^-\hat{j}^+) + (\hat{j}^3)^2 = \hat{j}^-\hat{j}^+ + (\hat{j}^3)^2 + \hat{j}^3 \tag{25}$$

がわかる。ここから、同時対角化する基底を使って $\hat{j}^3$ の固有値を $j$ とおく。固有状態のうち最も $\hat{j}^3$ の固有値が大きい固有状態を使えば、

$$(\hat{\boldsymbol{j}})^2 \left|\psi\right\rangle = j(j+1)\left|\psi\right\rangle \tag{26}$$

$\hat{\boldsymbol{j}^2}$ が全ての成分と可換であるから、$\hat{j}^-$ が $\hat{j}^3$ の固有値のみを 1 つ下げることがわかる。

$$\hat{\boldsymbol{j}^2} = \frac{1}{2}(\hat{j}^+\hat{j}^- + \hat{j}^-\hat{j}^+) + (\hat{j}^3)^2 \tag{27}$$

を見ると第一項がノルムの形になるので常に 0 以上であるから、$\hat{j}^3$ の固有値にも下限が生じる。その下限の固有状態を

$$\left|j, j-k+1\right\rangle \tag{28}$$

と書けば

$$\hat{j}^- \left|j, j-k+1\right\rangle = 0 \tag{29}$$

となる。$k$ を求める。$\hat{\boldsymbol{j}}^{\mathbf{2}}$ を $\hat{j}^+\hat{j}^-$ の形にして基底状態のケットにかけて

$$j(j+1) = (j-k)(j-k+1) \tag{30}$$

よって

$$k = 2j+1 \tag{31}$$

が得られる。つまり、$\hat{j}^3$ の固有値は $j, ...-j$ の $2j+1$ 個の値を取る。$j$ が整数であれば奇数個、半整数ならば偶数個の値を取ることがわかる。シュテルンゲルラッハの実験に関連する。次に $\hat{j}^\pm$ がケットにかかったときの係数を考える。

$$\hat{j}^- \left|j,m\right\rangle = c_m \left|j,m\right\rangle \tag{32}$$

と考えてノルムを取れば求まる。

$$\langle j,m|\hat{j}^+\hat{j}^-|j,m\rangle = \langle j,m|\hat{\boldsymbol{j}}^{\mathbf{2}} - \hat{j}^3(\hat{j}^3-1)|j,m\rangle = |c_m|^2 \tag{33}$$

$$c_m = \sqrt{j(j+1)-m(m-1)} \tag{34}$$

# 3 スピン

# 4 角運動量合成

# 5 電子のスピン合成