1 compton

コンプトン散乱について。

1.1 四元運動量

四元運動量を以下のように定義する。

$$p = m\vec{U} = (E/c, p_x, p_y, p_z) \tag{1}$$

$$|p|^2 = \frac{E^2}{c^2} - |\vec{p}|^2 \tag{2}$$
$$|p|^2 = m^2|\vec{U}|^2 = m^2c^2 \tag{3}$$
$$\frac{E^2}{c^2} = m^2c^2 + |\vec{p}|^2 \tag{4}$$
$$\frac{E}{c} = mc\sqrt{1 + \frac{|\vec{p}|}{m^2c^2}} \tag{5}$$
$$E = mc^2 + \frac{|\vec{p}|^2}{2m} \tag{6}$$
$$\tag{7}$$

ここで、$\vec{U}$ は MCRF であるので、瞬間的共動慣性系ではその成分は $(c, 0, 0, 0)$ であることをつかった。
余談だが、MCRF から我々が見ている系への変換は、粒子が速度 v で動いていたとしたら-v のローレンツ変換を行えば良い。

1.2 compton

コンプトン散乱の四元運動量保存則から、

$$(E/c, \vec{p}) + (mc, 0) = (E', p') + (E^e, p'_e) \tag{8}$$
$$(E/c, \vec{p}) - (E'/c, p') + (mc, 0) = (E^e, p'_e) \tag{9}$$
$$\frac{EE'}{c^2} - |\vec{p}||\vec{p'}|cos\theta + mE - mE' + m^2c^2 = m^2c^2 \tag{10}$$
$$E'(m + \frac{E(1 - cos\theta)}{c^2}) = mE \tag{11}$$
$$E' = \frac{E}{1 + \frac{E(1-cos\theta)}{mc^2}} \tag{12}$$
$$\lambda' = \lambda + hc(\frac{1 - cos\theta}{mc^2}) \tag{13}$$
$$\lambda' = \lambda + \frac{h}{mc}(1 - cos\theta) \tag{14}$$

$\frac{h}{mc}$ はコンプトン波長と呼ばれる。

1.3 反跳電子のエネルギー

コンプトン散乱によって電子が得たエネルギーは、ガンマ線が失ったエネルギーに等しい。またそのエネルギーは電子の運動エネルギーに等しいので、電子の運動エネルギー T:

$$
\begin{aligned}
T &= E - E' && (15)\\
&= \frac{\frac{E(1-cos\theta)}{mc^2}}{1+\frac{E(1-cos\theta)}{mc^2}} && (16)\\
&= \frac{E(1-cos\theta)}{mc^2+E(1-cos\theta)} && (17)
\end{aligned}
$$