Spin

山田龍

2020 年 6 月 30 日

1　生成子

回転並進変換を考える。

$$r_i \to Mr_i + a \tag{1}$$

演算子に対して

$$\hat{r_i} \to M\hat{r_i} + a \tag{2}$$

とするようなユニタリー変換を考えたい。

$$U^\dagger \hat{r} U = Mr + a \tag{3}$$

$$U^\dagger \hat{p} U = Mp \tag{4}$$

$$\tag{5}$$

となる U を導入すれば、ユニタリー変換された状態ベクトル $U\left|\psi\right\rangle$ について期待値は古典の場合と同じように変換される。ここで、具体的にユニタリー変換を構成する。無限小回転を

$$M(\theta) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x} \times \theta \tag{6}$$

ユニタリー演算子を以下のように書けば、

$$U(M, \epsilon) = 1 + \frac{1}{i\hbar}\theta \cdot \hat{J} + \frac{1}{i\hbar}\epsilon \cdot \hat{P} \tag{7}$$

$\hat{J}, \hat{P}$ が満たすべき関係式は

$$\frac{1}{i\hbar}[\hat{r}, \theta \cdot \hat{J}] = \theta \times \boldsymbol{r} \tag{8}$$

$$\frac{1}{i\hbar}[\hat{p}, \theta \cdot \hat{J}] = \theta \times \boldsymbol{p} \tag{9}$$

$$\frac{1}{i\hbar}[\hat{r}, \epsilon \cdot \hat{P}] = \epsilon \tag{10}$$

$$\frac{1}{i\hbar}[\hat{p}, \epsilon \cdot \hat{P}] = 0 \tag{11}$$

$$\tag{12}$$

実際には系を記述する変数は更にスピン自由度がある。ここでは系が $\hat{r}, \hat{p}$ で全てかかれるとして、

$$\hat{P} = \sum \hat{p} \tag{13}$$

$$\hat{J} = \sum \hat{r} \times \hat{p} \tag{14}$$

最後に $\hat{J},\hat{P}$ の交換関係について、

$$[J^a, J^b] = ih\sum \epsilon_{abc}J^c \tag{15}$$

$$[J^a, P^b] = ih\sum \epsilon_{abc}P^c \tag{16}$$

$$[P^a, P^b] = 0 \tag{17}$$

2　角運動量の固有状態

角運動量演算子を因子化して、

$$\hat{J} = \hbar\hat{j} \tag{18}$$

$$[\hat{j}^a, \hat{j}^b] = \sum \epsilon_{abc}\hat{j}^c \tag{19}$$

3　スピン