n 次元級の体積とガンマ関数についての計算

山田龍

2020 年 5 月 30 日

1　n 次元球体の体積

n 次元空間を考える。今、V_n, S_n をそれぞれ体積、表面積とする。一般に、$V_n = c_n r^n$ と書いて、

$$\frac{\mathrm{d}V_n}{\mathrm{d}r} = S_n = nc_n r^{n-1} \tag{1}$$

であるとこを認める。ここで、

$$I_n = \int \exp(-(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots))dx_1 dx_2 \cdots dx_n \tag{2}$$

$$= \pi^{\frac{n}{2}} \tag{3}$$

r を使って計算しなおせば、

$$I_n = \int S_n \exp(-r^2)dr \tag{4}$$

$$= nc_n \int r^{n-1} \exp(-r^2)dr \tag{5}$$

$$= \frac{1}{2}nc_n \int t^{\frac{n}{2}-1} \exp(-t)dt \tag{6}$$

$$= \frac{1}{2}nc_n \Gamma(\frac{n}{2}) \tag{7}$$

$$= c_n \Gamma(\frac{n}{2} + 1) \tag{8}$$

したがって、

$$c_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} \tag{9}$$

2　$\Gamma(\frac{1}{2})$ と $\Gamma(\frac{3}{2})$

ガンマ関数の定義は、

$$\Gamma(n) = \int x^{n-1} \exp(-x)dx \tag{10}$$

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int x^{-\frac{1}{2}} \exp(-x)dx \tag{11}$$

$$= \int u^{-1} \exp(-u^2)2udu \tag{12}$$

$$= \sqrt{\pi} \tag{13}$$

$$\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \tag{14}$$