

# Spin

山田龍

2020 年 6 月 30 日

## 1 生成子

回転並進変換を考える。

$$r_i \rightarrow Mr_i + a \quad (1)$$

演算子に対して

$$\hat{r}_i \rightarrow M\hat{r}_i + a \quad (2)$$

とするようなユニタリー変換を考えたい。

$$U^\dagger \hat{r} U = M\hat{r} + a \quad (3)$$

$$U^\dagger \hat{p} U = M\hat{p} \quad (4)$$

$$(5)$$

となる  $U$  を導入すれば、ユニタリー変換された状態ベクトル  $U|\psi\rangle$  について期待値は古典の場合と同じように変換される。ここで、具体的にユニタリー変換を構成する。無限小回転を

$$M(\theta) = \mathbf{x} + \mathbf{x} \times \theta \quad (6)$$

ユニタリー演算子を以下のように書けば、

$$U(M, \epsilon) = 1 + \frac{1}{i\hbar} \theta \cdot \hat{J} + \frac{1}{i\hbar} \epsilon \cdot \hat{P} \quad (7)$$

$\hat{J}, \hat{P}$  が満たすべき関係式は

$$\frac{1}{i\hbar} [\hat{r}, \theta \cdot \hat{J}] = \theta \times \mathbf{r} \quad (8)$$

$$\frac{1}{i\hbar} [\hat{p}, \theta \cdot \hat{J}] = \theta \times \mathbf{p} \quad (9)$$

$$\frac{1}{i\hbar} [\hat{r}, \epsilon \cdot \hat{P}] = \epsilon \quad (10)$$

$$\frac{1}{i\hbar} [\hat{p}, \epsilon \cdot \hat{P}] = 0 \quad (11)$$

$$(12)$$

実際には系を記述する変数は更にスピン自由度がある。ここでは系が  $\hat{r}, \hat{p}$  で全てかけられるとして、

$$\hat{P} = \sum \hat{p} \quad (13)$$

$$\hat{J} = \sum \hat{r} \times \hat{p} \quad (14)$$

最後に  $\hat{J}, \hat{P}$  の交換関係について、

$$[J^a, J^b] = i\hbar \sum \epsilon_{abc} J^c \quad (15)$$

$$[J^a, P^b] = i\hbar \sum \epsilon_{abc} P^c \quad (16)$$

$$[P^a, P^b] = 0 \quad (17)$$

## 2 角運動量の固有状態

以下では bold 体の肩についている数字はべきを表す。それ以外は要素。角運動量演算子を因子化して、

$$\hat{J} = \hbar \hat{j} \quad (18)$$

$$[\hat{j}^a, \hat{j}^b] = \sum \epsilon_{abc} \hat{j}^c \quad (19)$$

$\hat{j}$  はエルミートである。 $\hat{j}$  の成分は交換しないので、全てを同時に対角化することはできない。 $\hat{j}^3$  について対角化する。まず、

$$\hat{j}^\pm = \hat{j}^1 \pm i\hat{j}^2 \quad (20)$$

のように、 $\hat{j}^{1,2}$  を書き換える。これらははしご演算子と呼ばれる非エルミート演算子である。すると、

$$[\hat{j}^2, \hat{j}^3] = 0 \quad (21)$$

から、同時対角化できることがわかる。 $\hat{j}^\pm, \hat{j}^3$  の交換関係を計算する。

$$[\hat{j}^3, \hat{j}^+] = \hat{j}^+ \quad (22)$$

$$[\hat{j}^3, \hat{j}^-] = -\hat{j}^- \quad (23)$$

$$[\hat{j}^+, \hat{j}^-] = 3\hat{j}^3 \quad (24)$$

また、

$$\hat{j}^2 = \frac{1}{2}(\hat{j}^+\hat{j}^- + \hat{j}^-\hat{j}^+) + (\hat{j}^3)^2 = \hat{j}^-\hat{j}^+ + (\hat{j}^3)^2 + \hat{j}^3 \quad (25)$$

がわかる。ここから、同時対角化する基底を使って  $\hat{j}^3$  の固有値を  $j$  とおく。

$$(\hat{j}^3)^2 |\psi\rangle = j(j+1) |\psi\rangle \quad (26)$$

## 3 スピン