平行移動演算子

山田龍

2020 年 6 月 30 日

1　平行移動

微小平行移動を考える。演算子 $J(dx)$ が変換を行うとする。

$$J(dx)\left|x\right\rangle = \left|x+dx\right\rangle \tag{1}$$

任意の状態ケットに対して、

$$J(dx)\left|\alpha\right\rangle = \int \left|x+dx\right\rangle \left\langle x|\alpha\right\rangle = \int \left|x\right\rangle \left\langle x-dx|\alpha\right\rangle \tag{2}$$

この演算子に、規格化条件、和則、逆変換の存在、dx の 0 極限で恒等変換を要求する。これは、

$$J(dx) = 1 - iK\cdot dx \tag{3}$$

と於けば満たされる。以下でその確認をする。K をエルミート演算子であるとする。また、K の次元は長さの逆数であるから波数の次元。

$$J^\dagger J = (1+iK^\dagger\cdot dx)(1-iK\cdot dx) \tag{4}$$

$$= 1 + i(K^\dagger - K)\cdot dx + O(dx^2) \tag{5}$$

$$\sim 1 \tag{6}$$

dx の二次の精度で規格化されていることがわかった。明らかに逆変換が存在する。dx の 0 極限での振る舞いも明らか。

$$J(dx+dx') = 1 - iK\cdot(dx+dx') = J(dx)J(dx') \tag{7}$$

最後の等式も dx の二次の精度で成立。

$$\hat{x}J(dx)\left|x\right\rangle = \hat{x}\left|x+dx\right\rangle = x+dx\left|x+dx\right\rangle \tag{8}$$

$$J(dx)\hat{x}\left|x\right\rangle = x\left|x+dx\right\rangle \tag{9}$$

引いて、

$$[\hat{x}, J(dx)]\left|x\right\rangle = dx\left|x\right\rangle \tag{10}$$

J に具体的な式を入れて計算すれば、

$$[\hat{x}, \hat{K}] = i \tag{11}$$

ドブロイ仮説を持ち込んで、

$$\hat{p} = \frac{\hat{K}}{\hbar} \tag{12}$$

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \tag{13}$$

2 参考文献

JJ サクライ量子力学