Spin

山田龍

2020 年 7 月 1 日

1　生成子

回転並進変換を考える。

$$r_i \to Mr_i + a \tag{1}$$

演算子に対して

$$\hat{r}_i \to M\hat{r}_i + a \tag{2}$$

とするようなユニタリー変換を考えたい。

$$U^\dagger \hat{r} U = Mr + a \tag{3}$$
$$U^\dagger \hat{p} U = Mp \tag{4}$$
$$\tag{5}$$

となる U を導入すれば、ユニタリー変換された状態ベクトル $U|\psi\rangle$ について期待値は古典の場合と同じように変換される。ここで、具体的にユニタリー変換を構成する。無限小回転を

$$M(\theta) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x} \times \theta \tag{6}$$

ユニタリー演算子を以下のように書けば、

$$U(M, \epsilon) = 1 + \frac{1}{i\hbar}\theta \cdot \hat{J} + \frac{1}{i\hbar}\epsilon \cdot \hat{P} \tag{7}$$

$\hat{J}, \hat{P}$ が満たすべき関係式は

$$\frac{1}{i\hbar}[\hat{r}, \theta \cdot \hat{J}] = \theta \times \boldsymbol{r} \tag{8}$$
$$\frac{1}{i\hbar}[\hat{p}, \theta \cdot \hat{J}] = \theta \times \boldsymbol{p} \tag{9}$$
$$\frac{1}{i\hbar}[\hat{r}, \epsilon \cdot \hat{P}] = \epsilon \tag{10}$$
$$\frac{1}{i\hbar}[\hat{p}, \epsilon \cdot \hat{P}] = 0 \tag{11}$$
$$\tag{12}$$

実際には系を記述する変数は更にスピン自由度がある。ここでは系が $\hat{r}, \hat{p}$ で全てかかれるとして、

$$\hat{P} = \sum \hat{p} \tag{13}$$
$$\hat{J} = \sum \hat{r} \times \hat{p} \tag{14}$$

最後に $\hat{J}, \hat{P}$ の交換関係について、

$$[J^a, J^b] = ih\sum \epsilon_{abc}J^c \tag{15}$$
$$[J^a, P^b] = ih\sum \epsilon_{abc}P^c \tag{16}$$
$$[P^a, P^b] = 0 \tag{17}$$

2 角運動量の固有状態

以下では bold 体の肩についている数字はべきを表す。それ以外は要素。角運動量演算子を因子化して、

$$\hat{J} = \hbar\hat{\boldsymbol{j}} \tag{18}$$
$$[\hat{j}^a, \hat{j}^b] = \sum \epsilon_{abc}\hat{j}^c \tag{19}$$

$\hat{\boldsymbol{j}}$ はエルミートである。$\hat{\boldsymbol{j}}$ の成分は交換しないので、全てを同時に対角化することはできない。$\hat{j}^3$ について対角化する。まず、

$$\hat{j}^{\pm} = \hat{j}^1 \pm i\hat{j}^2 \tag{20}$$

のように、$\hat{j}^{1,2}$ を書き換える。これらははしご演算子と呼ばれる非エルミート演算子である。すると、

$$[\hat{\boldsymbol{j}}^{\boldsymbol{2}}, \hat{j}^3] = 0 \tag{21}$$

から、同時対角化できることがわかる。$\hat{j}^{\pm}, \hat{j}^3$ の交換関係を計算する。

$$[\hat{j}^3, \hat{j}^+] = \hat{j}^+ \tag{22}$$
$$[\hat{j}^3, \hat{j}^-] = -\hat{j}^- \tag{23}$$
$$[\hat{j}^+, \hat{j}^-] = 2\hat{j}^3 \tag{24}$$

また、

$$\hat{\boldsymbol{j}}^{\boldsymbol{2}} = \frac{1}{2}(\hat{j}^+\hat{j}^- + \hat{j}^-\hat{j}^+) + (\hat{j}^3)^2 = \hat{j}^-\hat{j}^+ + (\hat{j}^3)^2 + \hat{j}^3 \tag{25}$$

がわかる。ここから、同時対角化する基底を使って $\hat{j}^3$ の固有値を j とおく。

$$(\hat{\boldsymbol{j}})^2 \left|\psi\right\rangle = j(j+1)\left|\psi\right\rangle \tag{26}$$

3 スピン

4 角運動量合成

5 電子のスピン合成