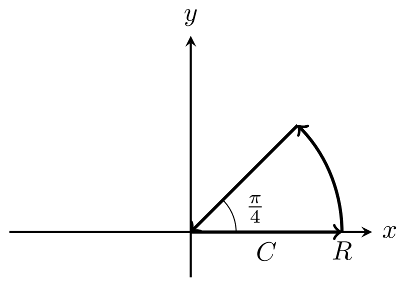
フレネル積分

山田龍

2020 年 7 月 29 日

Statement 1.

$$\int_0^\infty \cos x^2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \tag{1}$$



e^{-z^2} について考える。積分区間を $\frac{\pi}{4}$ の扇形一周に取る。積分経路は x 軸に垂直な辺を持つ三角形でも良い。3 つの領域で、$z = x, z = Re^{i\theta}, z = e^{i\frac{\pi}{4}}x$ とできる。(加筆必要)

$$\int_C e^{-z^2} = \int_0^\infty e^{-x^2}dx + \int e^{-R^2e^{2i\theta}}Re^{i\theta}d\theta + \int_0^\infty (\frac{1+i}{\sqrt{2}})e^{-\frac{(1+i)^2}{2}x^2}dx \tag{2}$$

と書き換える。ここで、積分経路で囲まれた領域に特異点がないから、つまりどの点でもコーシーリーマンの関係式を満たすので左辺は 0 である。右辺第一項は、ガウス積分から

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{3}$$

右辺第二項は、

$$\int e^{-R^2e^{2i\theta}}Re^{i\theta}d\theta \leq \int |e^{-R^2e^{2\theta}}||Re^{i\theta}|d\theta \tag{4}$$

$e^{i\theta}$ の絶対値は 1 であるので、これは R 無限大極限で 0 で抑えられる。右辺第 3 項について、

$$\int_0^\infty (\frac{1+i}{\sqrt{2}})e^{-\frac{(1+i)^2}{2}x^2}dx = \int_0^\infty (\frac{1+i}{\sqrt{2}})e^{-ix^2}dx \tag{5}$$

$$= \int_0^\infty (\frac{1+i}{\sqrt{2}})(\cos x^2 - i\sin x^2)dx \tag{6}$$

これと第一項を比べる。虚部が 0 になることから、$\int \sin x^2 dx = \int \cos x^2 dx$ がわかる。したがって、

$$\int_0^\infty \sin x^2 = \int_0^\infty \cos x^2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \tag{7}$$