ユニタリー行列をエルミート行列で表す

山田龍

2020 年 8 月 3 日

1

ほとんどの議論が EMAN によるユニタリー行列の定義

$$U^\dagger U = 1 \tag{1}$$

$U^\dagger = U^{-1}$ が同様に成り立つ。ユニタリ行列は別にユニタリ行列で必ず対角化できる。同時に対角化された行列もユニタリ行列である。

$$\begin{aligned} U'^\dagger U &= (V^{-1}UV)^\dagger (V^{-1}UV) && (2)\\ &= (V^\dagger U^\dagger (V^{-1})^\dagger)(V^{-1}UV) && (3)\\ &= (V^\dagger U^\dagger V)(V^{-1}UV) && (4)\\ &= 1 && (5) \end{aligned}$$

この変換されたユニタリー行列は対角行列だが、各成分のノルムが 1 に等しいことがすぐにわかる。

$$U_i i = e^{i\theta_i} \tag{6}$$

と定義できる。これをテイラー展開すれば

$$U_i i = 1 + i\theta_i + \frac{1}{2}(i\theta_i)^2 + \cdots \tag{7}$$

行列全体で見れば、

$$U' = e^{iH'} \tag{8}$$

$$H' = \begin{pmatrix} \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix} \tag{9}$$

これがエルミートになっていることを見る。U' を U に戻す。

$$\begin{aligned} U &= VU'V^{-1} && (10)\\ &= Ve^{iH'}V^{-1} && (11)\\ &= e^{iVH'V^{-1}} && (12)\\ &= e^{iH} && (13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H^\dagger &= (VH'V^{-1})^\dagger && (14)\\ &= VH'V^{-1} \qquad = H && (15) \end{aligned}$$

H' の成分は実数。V はユニタリーであることを使った。

1.1 traceless なユニタリー行列

行列式が 1 ならば traceless なユニタリー行列で有ることを見る。

$$detU = det(VU'V^{-1}) = det(V)det(U')det(V^{-1}) = det(U') \tag{16}$$

つまり対角化した行列の行列式も等しいことになる。

$$detU' = e^{i\theta_1}e^{i\theta_2}\cdots = 1 \tag{17}$$

よって、

$$\sum \theta_i = 0 \tag{18}$$

であり、

$$tr(H') = 0 \tag{19}$$

ここで

$$tr(AB) = tr(BA) \tag{20}$$

を使うと、

$$tr(H') = tr(V^{-1}HV) = tr(V^{-1}VH) = tr(H) \tag{21}$$

から H もトレースレスであることがわかった。例えば二行に列ならこれは SU(2) に当たり、パウリ行列が出てくる。