アインシュタインモデル

1つあたり

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 x^2$$

$$E = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

$$Z = \sum \exp\left(-\beta\hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)\right)$$

$$= \exp\left(-\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right) \frac{1}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}}$$

$$E = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z = -\left(-\frac{\hbar\omega}{2} - \frac{\hbar\omega e^{-\beta\hbar\omega}}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}}\right)$$

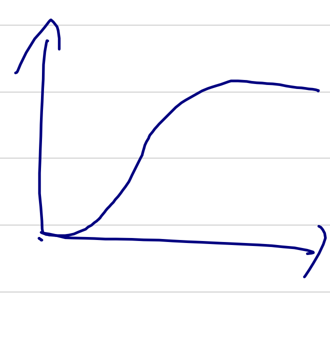
$$= \hbar\omega\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}\right)$$

$\beta\hbar\omega \ll 1$ (高温のとき) (もしくは$\hbar$が小さいとみてもいい

$$E \sim \hbar\omega\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\beta\hbar\omega + \frac{1}{2}(\beta\hbar\omega)^2}\right)$$

$$= \hbar\omega\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\beta\hbar\omega}\left(1 - \frac{1}{2}(\beta\hbar\omega)\right)\right)$$

$$= k_B T$$



$\beta\hbar\omega \gg 1$ のとき

$$C = \frac{dE}{dT} = (\hbar\omega)^2 \frac{e^{\beta\hbar\omega}}{(e^{\beta\hbar\omega} - 1)^2} \sim \frac{(\hbar\omega)^2}{kT^2} e^{-\beta\hbar\omega}$$