

2次元調和振動子のエネルギー

1次元調和振動子

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 x^2$$

$$E = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right)$$

$$Z = \sum \exp \left( -\beta \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right) \right)$$

$$= \exp \left( -\frac{\beta \hbar\omega}{2} \right) \frac{1}{1 - e^{-\beta \hbar\omega}}$$

$$\begin{aligned} E &= -\frac{2}{\partial \beta} \ln Z = - \left( -\frac{\hbar\omega}{2} - \frac{\hbar\omega e^{-\beta \hbar\omega}}{1 - e^{-\beta \hbar\omega}} \right) \\ &= \hbar\omega \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\beta \hbar\omega} - 1} \right) \end{aligned}$$

$\beta \hbar\omega \ll 1$  (高温領域) (エネルギーの平均値は  $\frac{1}{2} \hbar\omega$  になる)

$$\begin{aligned} E &\sim \hbar\omega \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\beta \hbar\omega + \frac{1}{2}(\beta \hbar\omega)^2} \right) \\ &= \hbar\omega \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\beta \hbar\omega} \left( 1 - \frac{1}{2}(\beta \hbar\omega) \right) \right) \\ &= k_B T \end{aligned}$$



$\beta \hbar\omega \gg 1$  (低温領域)

$$C = \frac{dE}{dT} = (\hbar\omega)^2 \frac{e^{\beta \hbar\omega}}{(e^{\beta \hbar\omega} - 1)^2} \sim \frac{(\hbar\omega)^2}{k_B T^2} e^{-\beta \hbar\omega}$$