99-101

山田龍

2020 年 6 月 8 日

1　99 ニュートンの法則

1.1　万有引力の法則

§87 で見たニュートン近似の下で計量テンソルは、

$$g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2}, g_{0\alpha} = 0, g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \tag{1}$$

巨視的な運動も遅いと近似しているので 4 元速度は、$u^\alpha = 0, u^0 = u_0 = 1$ となり、巨視的物体のエネルギー運動量テンソルは、質量密度を $\mu = \sum_a m\delta(r - r_a)$ と書いて、

$$T_i^k = \mu c^2 u_i u^k \tag{2}$$

$$T_0^0 = \mu c^2 \tag{3}$$

$$T = T_i^i = T_0^0 = \mu c^2 \tag{4}$$

アインシュタイン方程式は、

$$R_i^k = \frac{8\pi k}{c^4}(T_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k T) \tag{5}$$

であった。R_0^0 は、

$$R_0^0 = \frac{8\pi k}{c^4}(T_0^0 - \frac{1}{2}T) \tag{6}$$

$$= \frac{4\pi k}{c^2}\mu \tag{7}$$

$i \neq k$ のとき、R_i^k は

$$R_i^k = 0 \tag{8}$$

リッチテンソルを計算する。まず、リッチテンソルの式 (92.7)

$$R_{ik} = \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{il}^l}{\partial x^k} + \Gamma_{ik}^l \Gamma_{lm}^m - \Gamma_{il}^m \Gamma_{km}^l \tag{9}$$

後ろの 2 つの項は、ϕ についての二次の項なので、一次までの精度では落とせる。

$$R_{ik} = \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^l_{il}}{\partial x^k} \tag{10}$$

$$= \frac{1}{2} g^{lt} \left(\frac{\partial}{\partial x^l} (\frac{\partial g_{kt}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{it}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^t}) - \frac{\partial}{\partial x^k} (\frac{\partial g_{lt}}{\partial x^i}) \right) \tag{11}$$

$$= \frac{1}{2} g^{lt} \left(\frac{\partial^2 g_{kt}}{\partial x^l \partial x^i} + \frac{\partial^2 g_{it}}{\partial x^l \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^l \partial x^t} - \frac{\partial^2 g_{lt}}{\partial x^k \partial x^i} \right) \tag{12}$$

$$R_{00} = \frac{1}{2} g^{lt} \left(\frac{\partial^2 g_{0t}}{\partial x^l \partial x^0} + \frac{\partial^2 g_{0t}}{\partial x^l \partial x^0} - \frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^l \partial x^t} - \frac{\partial^2 g_{lt}}{\partial x^0 \partial x^0} \right) \tag{13}$$

$$\sim \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (-\frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}) \tag{14}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{00}}{\partial {x^\alpha}^2} \tag{15}$$

$$= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial {x^\alpha}^2} \tag{16}$$

$$R^0_0 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial {x^\alpha}^2} = \frac{4\pi k}{c^2} \mu \tag{17}$$

重力ポテンシャルは、ポアソン方程式をみたす。

$$\Delta \phi = 4\pi k \mu \tag{18}$$

この解は、

$$\phi = -k \int \frac{\mu dV}{R} \tag{19}$$

粒子が一つのときに、もう一つの粒子に働く力は、質量をそれぞれ m, m' として

$$\phi = -\frac{km}{R} \tag{20}$$

$$F = -m' \frac{\partial \phi}{\partial R} \tag{21}$$

$$= -m \frac{kmm'}{R^2} \tag{22}$$

ニュートンの万有引力の法則を得た。質量密度を使ってポテンシャルエネルギーを、

$$U = \frac{1}{2} \int \mu \phi dV \tag{23}$$

と書く。

1.2 ポテンシャルの多重極展開

不変な重力場では、質量が正であるから双極子モーメントを 0 にする座標系を取ることができる。したがって、すべての質量が位置 R_0 につくるポテンシャルは、R_0 が質点の位置よりも十分大きいとして、

$$\phi = -k \int dV \left(\frac{\mu}{R_0} + \frac{1}{2} \mu x_\alpha x_\beta \frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} (\frac{1}{R_0}) + \cdots \right) \tag{24}$$

ここで、

$$\Delta \frac{1}{R_0} = \delta_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta \frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} (\frac{1}{R_0}) = 0 \tag{25}$$

から、$\phi^{(2)}$ は $x_\alpha x_\beta$ の自由度を一つ減じて

$$\phi^{(2)} = -k\int dV\mu(x_\alpha x_\beta - \frac{1}{3}r^2\delta_{\alpha\beta})\frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta}(\frac{1}{R_0}) \tag{26}$$

$$= -k\int dV\frac{1}{6}D_{\alpha\beta}\frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta}(\frac{1}{R_0}) \tag{27}$$

質量４重極モーメントテンソルとして、

$$D_{\alpha\beta} = \int dV\mu(3x_\alpha x_\beta - r^2\delta_{\alpha\beta}) \tag{28}$$

これは慣性モーメントテンソル

$$J_{\alpha\beta} = \int \mu(r^2\delta_{\alpha\beta} - x_\alpha x_\beta) \tag{29}$$

$$J_{\gamma\gamma} = \int 2\mu r^2 dV \tag{30}$$

より、慣性モーメントテンソルで記述される。

$$D_{\alpha\beta} = J_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta} - 3J_{\alpha\beta} \tag{31}$$

1.3 一様な楕円体の作るポテンシャル

一様な楕円体を考える。質量密度を μ とする。楕円体の表面は、

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{x^2} = 1 \tag{32}$$

楕円体の外部のポテンシャルは、

$$\phi = -\mu abck\pi\int_\xi^\infty \left(1 - \frac{x^2}{a^2+s} - \frac{y^2}{b^2+s} - \frac{z^2}{c^2+s}\right)\frac{ds}{\Delta} \tag{33}$$

内部のポテンシャルは、

$$\phi = -\mu abck\pi\int_0^\infty \left(1 - \frac{x^2}{a^2+s} - \frac{y^2}{b^2+s} - \frac{z^2}{c^2+s}\right)\frac{ds}{\Delta} \tag{34}$$

物体の重力エネルギーは、楕円体の全領域積分 $U = \frac{1}{2}\int \mu\phi dV$ であったので計算すると、

$$U = \frac{1}{2}\int \mu\phi dV \tag{35}$$

$$= -\frac{1}{2}\mu^2 abck\pi\int dV\int_0^\infty \left(1 - \frac{x^2}{a^2+s} - \frac{y^2}{b^2+s} - \frac{z^2}{c^2+s}\right)\frac{ds}{\Delta} \tag{36}$$

$$= \frac{1}{2}\mu^2 abck\pi\int dV\int_0^\infty \left(\frac{x^2}{a^2+s} + \frac{y^2}{b^2+s} + \frac{z^2}{c^2+s} - 1\right)\frac{ds}{\Delta} \tag{37}$$

$$\tag{38}$$

$x = ax', y = by', z = cz'$ と変数変換して x_i' を x_i に書き換える。球体の体積積分に書き換えられて、

$$U = \frac{1}{2}\mu^2 a^2 b^2 c^2 k\pi \int\int\int r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi \int_0^\infty \left(\frac{a^2x^2}{a^2+s} + \frac{b^2y^2}{b^2+s} + \frac{c^2z^2}{c^2+s} - 1\right)\frac{ds}{\Delta} \tag{39}$$

$$= \frac{1}{2}\mu^2 a^2 b^2 c^2 k\pi \int\int\int \sin\theta dr d\theta d\phi \int_0^\infty \left(\frac{a^2r^4\sin^2\theta\cos^2\phi}{a^2+s} + \frac{b^2r^4\sin^2\theta\sin^2\phi}{b^2+s} + \frac{c^2r^4\cos^2\theta}{c^2+s} - r^2\right)\frac{ds}{\Delta} \tag{40}$$

$$= \frac{1}{2}\mu^2 a^2 b^2 c^2 k\pi \int\int \sin\theta d\theta d\phi \int_0^\infty \left(\frac{1}{5}\left(\frac{a^2\sin^2\theta\cos^2\phi}{a^2+s} + \frac{b^2\sin^2\theta\sin^2\phi}{b^2+s} + \frac{c^2\cos^2\theta}{c^2+s}\right) - \frac{1}{3}\right)\frac{ds}{\Delta} \tag{41}$$

$$= \frac{2}{3}\mu^2 a^2 b^2 c^2 k\pi^2 \int_0^\infty \left(\frac{1}{5}\left(\frac{a^2}{a^2+s} + \frac{b^2}{b^2+s} + \frac{c^2}{c^2+s}\right) - 1\right)\frac{ds}{\Delta} \tag{42}$$

$$= \frac{3km^2}{8}\int_0^\infty \left[\frac{1}{5}\left(\frac{a^2(b^2+s)(c^2+s) + (a^2+s)b^2(c^2+s) + (a^2+s)(b^2+s)c^2}{\Delta^2} - 3\right) - \frac{2}{5}\right]\frac{ds}{\Delta} \tag{43}$$

$$= \frac{3km^2}{8}\int_0^\infty \left[\frac{1}{5}\left(-s\frac{(b^2+s)(c^2+s) + (a^2+s)(c^2+s) + (a^2+s)(b^2+s)}{\Delta^2}\right) - \frac{2}{5}\right]\frac{ds}{\Delta} \tag{44}$$

$$= \frac{3km^2}{8}\int_0^\infty \left[\frac{1}{5}\left(-s\frac{2\Delta\Delta'}{\Delta^2}\right) - \frac{2}{5}\right]\frac{ds}{\Delta} \tag{45}$$

$$= \frac{3km^2}{8}\int_0^\infty \left[\frac{2s}{5}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\frac{1}{\Delta}) - \frac{2}{5}\frac{1}{\Delta}\right] ds \tag{46}$$

$$= \frac{3km^2}{8}\int_0^\infty \left[-\frac{2}{5}\frac{1}{\Delta} - \frac{2}{5}\frac{1}{\Delta}\right] ds \tag{47}$$

$$= -\frac{3km^2}{10}\int_0^\infty \frac{1}{\Delta}ds \tag{48}$$

この楕円積分は、$a = b > c$ の扁平な回転楕円体では、

$$U = -\frac{3km}{5\sqrt{a^2-c^2}}\cos^{-1}\frac{c}{a} \tag{49}$$

$a > b = c$ の縦長の回転楕円体では、

$$U = -\frac{3km^2}{5\sqrt{a^2-c^2}} cosh^{-1}\frac{a}{c} \tag{50}$$

$a = b = c$ の球体のときは、

$$U = -\frac{3km^2}{10}\int_0^\infty \frac{1}{\Delta}ds \tag{51}$$

$$= -\frac{3km^2}{10}\int_0^\infty (a^2+s)^{-\frac{3}{2}}ds \tag{52}$$

$$= -\frac{3km^2}{5a} \tag{53}$$

2　100

球対称な系を考える。まず、ガリレイ的な空間では

$$ds^2 = cdt^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{54}$$

球面上の曲線の長さから立体角を定義する。$dt = dr = 0$ を考えて、

$$dl^2 = r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \equiv r^2 d\Omega^2 \tag{55}$$

中心対称な重力場での二次元球について考える。場が中心対称ということは、線要素が

$$dl^2 = f(r,t)d\Omega^2 \tag{56}$$

のように書かれ、このとき球面の面積は $4\pi f(r,t)$ である。動径ベクトルを $f(r,t) \equiv r'^2$ と書き換えると、球面の面積は $4\pi r'^2$ になる。いま、(r,t) から (r',t') への変換をした。この変換では球対称性は失わない。ここで、(r',t') を (r,t) に書き換える。（空間は、r の割り付けられた二次元球面を t=一定の三次元空間に張り巡らせたもの。各二次元球面の中心はその二次元球面上にはない。）
世界間隔は、

$$ds^2 = l(r,t)dt^2 - r^2 d\Omega^2 + h(r,t)dr^2 + a(r,t)drdt \tag{57}$$

$d\phi, d\theta$ の一次の項は、$\phi \to -\phi$、$\theta \to \pi - \theta$ の角度反転の対称性から消えた。$a(r,t)$ は静的な重力場であることを要請して、$t \to -t$ で計量が不変であることを考えると消える。そうでなくても、(r',t') の変換の任意性から消すことができる。（キーワード：積分因子？）

$$\begin{aligned} ds^2 &= l(r,t)dt^2 - r^2 d\Omega^2 + h(r,t)dr^2 \qquad (58) \\ &= e^\nu c^2 dt^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) - e^\lambda dr^2 \qquad (59) \end{aligned}$$

計量テンソルの 0 でない成分は、

$$\begin{aligned} g_{00} = e^\nu \ , g_{11} = -e^\lambda \ , g_{22} = -r^2 \ , g_{33} = -r^2\sin^2\theta \qquad (60) \\ g^{00} = e^{-\nu} \ , g^{11} = -e^{-\lambda} \ , g^{22} = -r^{-2} \ , g^{33} = -r^{-2}\sin^{-2}\theta \qquad (61) \\ \qquad (62) \end{aligned}$$

クリストッフェル記号の成分を計算すると、$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2}g^{it}(\frac{\partial g_{kt}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{tl}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^t})$ から、0 でない項は、

$$\Gamma^0_{00} = \frac{1}{2}g^{0t}(\frac{\partial g_{0t}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{t0}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^t}) = \frac{1}{2}g^{00}(\frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^0}) = \frac{\dot{\nu}}{2} \tag{63}$$

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}g^{1t}(\frac{\partial g_{1t}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{t1}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^t}) = \frac{1}{2}g^{11}(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}) = \frac{\lambda'}{2} \tag{64}$$

$$\Gamma^0_{10} = \frac{1}{2}g^{0t}(\frac{\partial g_{1t}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{t0}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{10}}{\partial x^t}) = \frac{1}{2}g^{00}(\frac{\partial g_{10}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{10}}{\partial x^0}) = \frac{\nu'}{2} \tag{65}$$

$$\Gamma^0_{11} = \frac{1}{2}g^{0t}(\frac{\partial g_{1t}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{t1}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^t}) = \frac{1}{2}g^{00}(\frac{\partial g_{10}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{01}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^0}) = \frac{\dot{\lambda}}{2}e^{\lambda-\nu} \tag{66}$$

$$\Gamma^1_{10} = \frac{1}{2}g^{1t}(\frac{\partial g_{1t}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{t0}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{10}}{\partial x^t}) = \frac{1}{2}g^{11}(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{10}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{10}}{\partial x^1}) = \frac{\dot{\lambda}}{2} \tag{67}$$

$$\Gamma^1_{00} = \frac{1}{2}g^{1t}(\frac{\partial g_{0t}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{t0}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^t}) = \frac{1}{2}g^{11}(\frac{\partial g_{01}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{10}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^1}) = \frac{\nu'}{2}e^{\nu-\lambda} \tag{68}$$

$$\Gamma^1_{22} = \frac{1}{2}g^{1t}(\frac{\partial g_{2t}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{t2}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^t}) = \frac{1}{2}g^{11}(\frac{\partial g_{21}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}) = -re^{-\lambda} \tag{69}$$

$$\Gamma^1_{33} = \frac{1}{2}g^{1t}(\frac{\partial g_{3t}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{t3}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{33}}{\partial x^t}) = \frac{1}{2}g^{11}(\frac{\partial g_{31}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{13}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{33}}{\partial x^1}) = -r\sin^2\theta e^{-\lambda} \tag{70}$$

$$\Gamma^2_{33} = \frac{1}{2}g^{2t}(\frac{\partial g_{3t}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{t3}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{33}}{\partial x^t}) = \frac{1}{2}g^{22}(\frac{\partial g_{32}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{23}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{33}}{\partial x^2}) = -\sin\theta\cos\theta \tag{71}$$

$$\Gamma^3_{23} = \frac{1}{2}g^{3t}(\frac{\partial g_{2t}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{t3}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{23}}{\partial x^t}) = \frac{1}{2}g^{33}(\frac{\partial g_{23}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{23}}{\partial x^3}) = -\cot\theta \tag{72}$$

$$\Gamma^2_{12} = \frac{1}{2}g^{2t}(\frac{\partial g_{1t}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{t2}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial x^t}) = \frac{1}{2}g^{22}(\frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial x^2}) = \frac{1}{r} \tag{73}$$

$$\Gamma^3_{13} = \frac{1}{2}g^{3t}(\frac{\partial g_{1t}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{t3}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{13}}{\partial x^t}) = \frac{1}{2}g^{33}(\frac{\partial g_{13}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{13}}{\partial x^3}) = \frac{1}{r} \tag{74}$$

$$\tag{75}$$

リッチテンソルの成分を計算すると、

$$R_{ik} = \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^l_{il}}{\partial x^k} + \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm} - \Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km} \tag{76}$$

$$R_{00} = \frac{\partial \Gamma^l_{00}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^l_{0l}}{\partial x^0} + \Gamma^l_{00}\Gamma^m_{lm} - \Gamma^m_{0l}\Gamma^l_{0m} \tag{77}$$

$$\frac{\partial \Gamma^l_{00}}{\partial x^l} = \frac{\partial \Gamma^0_{00}}{\partial x^0} + \frac{\partial \Gamma^1_{00}}{\partial x^1} \tag{78}$$

$$= \frac{\partial \frac{\dot\nu}{2}}{\partial x^0} + \frac{\partial \frac{\nu'}{2} e^{\nu-\lambda}}{\partial x^1} \tag{79}$$

$$= \frac{\partial \frac{\dot\nu}{2}}{\partial x^0} + \frac{\nu'}{2}\frac{\partial e^{\nu-\lambda}}{\partial x^1} + e^{\nu-\lambda}\frac{\partial \frac{\nu'}{2}}{\partial x^1} \tag{80}$$

$$= \frac{\partial \frac{\dot\nu}{2}}{\partial x^0} + \frac{\nu'}{2}(\nu' - \lambda')e^{\nu-\lambda} + e^{\nu-\lambda}\frac{\nu''}{2} \tag{81}$$

$$\frac{\partial \Gamma^l_{0l}}{\partial x^0} = \frac{\partial \Gamma^0_{00}}{\partial x^0} + \frac{\partial \Gamma^1_{01}}{\partial x^0} \tag{82}$$

$$= \frac{\partial \frac{\dot\nu}{2}}{\partial x^0} + \frac{\partial \frac{\dot\lambda}{2}}{\partial x^0} \tag{83}$$

$$\Gamma^l_{00}\Gamma^m_{lm} = \Gamma^0_{00}\Gamma^0_{00} + \Gamma^0_{00}\Gamma^0_{11} + \Gamma^1_{00}\Gamma^0_{10} + \Gamma^1_{00}\Gamma^0_{10} + \Gamma^1_{00}\Gamma^2_{12} + \Gamma^1_{00}\Gamma^3_{13} \tag{84}$$

$$= (\frac{\dot\nu}{2})^2 + \frac{\dot\nu}{2}\frac{\dot\lambda}{2} + \frac{\nu'}{2}e^{\nu-\lambda}\frac{\nu'}{2} + \frac{\nu'}{2}e^{\nu-\lambda}\frac{\dot\lambda}{2} + \frac{\nu'}{2}e^{\nu-\lambda}\frac{1}{r} + \frac{\nu'}{2}e^{\nu-\lambda}\frac{1}{r} \tag{85}$$

$$\Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km} = \Gamma^0_{00}\Gamma^0_{00} + \Gamma^1_{00}\Gamma^0_{01} + \Gamma^0_{01}\Gamma^1_{00} \tag{86}$$

$$= (\frac{\dot\nu}{2})^2 + \frac{\nu'}{2}e^{\nu-\lambda}\frac{\nu'}{2} + \frac{\nu'}{2}\frac{\nu'}{2}e^{\nu-\lambda} + (\frac{\dot\lambda}{2})^2 \tag{87}$$

$$R_{00} = \frac{\nu''}{2}e^{\nu-\lambda} + \frac{\nu'}{2}e^{\nu-\lambda}(\nu' - \lambda') - \frac{\ddot\lambda}{2} + \frac{\dot\nu}{2}\frac{\dot\lambda}{2} + \frac{\nu'}{2}e^{\nu-\lambda}\frac{\lambda'}{2} + \frac{\nu'}{2}e^{\nu-\lambda}\frac{2}{r} - (\frac{\nu'}{2})^2 e^{\nu-\lambda} - (\frac{\dot\lambda}{2})^2 \tag{88}$$

同じ手順を繰り返せば、

$$R_{11} = R_{22} \qquad = R_{33} = R_{01} \qquad = \tag{89}$$

スカラー曲率は、

$$R = g^{00}R_{00} + g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} + g^{22}R_{33} \tag{90}$$

$$= -\lambda'' + \nu'' + 2\frac{\nu'}{r}e^{-\lambda} - \frac{2}{r^2} - \frac{2\lambda'}{r}e^{-\lambda} + \frac{\nu'}{2}e^{-\lambda}(\nu' - \lambda') - \frac{\dot\lambda}{2}e^{-\nu}(\dot\lambda - \dot\nu) + \frac{2}{r^2}e^{-\lambda} \tag{91}$$

$$\tag{92}$$

重力場の方程式は、

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R = \frac{8\pi k}{c^4}T_{ik} \tag{93}$$

を計算して、

$$\frac{8\pi k}{c^4}T^0_0 = R^0_0 - \frac{R}{2} = (\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2})e^{-\lambda} + \frac{1}{r^2} \tag{94}$$

$$\frac{8\pi k}{c^4}T^1_1 = -(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2})e^{-\lambda} + \frac{1}{r^2} \tag{95}$$

$$\frac{8\pi k}{c^4}T^1_0 = -e^{-\lambda}\frac{\dot\lambda}{r} \tag{96}$$

この方程式は、質量の外側の中心対称な場を考えると質量の外側ではエネルギー運動量テンソルが 0 になることから、

$$(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2})e^{-\lambda} + \frac{1}{r^2} = 0 \tag{97}$$

$$-(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2})e^{-\lambda} + \frac{1}{r^2} = 0 \tag{98}$$

$$-e^{-\lambda}\frac{\dot{\lambda}}{r} = 0 \tag{99}$$

(99) は、

$$\dot{\lambda} = 0 \tag{100}$$

と書き換えられ、$\lambda = \lambda(r)$ と時間に依らない形に書ける。(94)(95) から、

$$\lambda' + \nu' = 0 \tag{101}$$

記号の肩の ′ は r での微分であったので、

$$\lambda + \nu = f(t) \tag{102}$$

$t = f(t')$ の変換を $\lambda + \nu = 0$ が満たされるように行って、ν も t によらない形なるので、真空中の中心対称な重力場は静的な場になる。(98) を積分する。両辺に r^2 をかけて、

$$r\lambda' e^{-\lambda} - e^{-\lambda} + 1 = 0 \tag{103}$$

$$1 = (re^{-\lambda})' \tag{104}$$

$$re^{-\lambda} = r + C \tag{105}$$

$$e^{-\lambda} = e^{\nu} = 1 + \frac{const}{r} \tag{106}$$

無限遠で、万有引力の法則が成り立っていることを要請すると、r が大きい場合に

$$g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2} \tag{107}$$

となることを要請することと同じなので、

$$const = -\frac{2km}{c^2} \tag{108}$$

世界間隔は、

$$ds^2 = (1 - \frac{r_g}{r})c^2dt^2 - r^2(\sin^2\theta d\phi^2 + d\theta^2) - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} \tag{109}$$

$r_g = \frac{2km}{c^2}$ はシュヴァルツシルト半径または重力半径という。アインシュタイン方程式のこの解をシュヴァルツシルト解という。任意の中心対称な質量分布に対して、質量が静止していなくても、真空中の重量場を与える。空間的計量は、

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} + r^2(\sin^2 d\phi^2 + d\theta^2) \tag{110}$$

r は円周が $2\pi r$ 円の面積は $4\pi r^2$ になるようとった座標である。同じ半径上の、二次元円の表面に垂直に定義された動径ベクトルに沿った積分は、$r > r_g$ で

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{r_g}{r}}} > r_2 - r_1 \tag{111}$$

また、$g_{00} = 1 - \frac{r_g}{r} \leq 1$ がわかる。真の時間は、

$$d\tau = \sqrt{g_{00}}dt \leq dt \tag{112}$$

等号成立は $r \to \infty$、これは無限遠の観測者から見ると重力場の中の時計が遅れることを意味する。十分離れたところでは、

$$ds^2 = (1 - \frac{r_g}{r})c^2dt^2 - r^2(\sin^2\theta d\phi^2 + d\theta^2) - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} \tag{113}$$

$$= c^2dt^2 - dr^2 - r^2d\Omega^2 - \frac{r_g}{r}(c^2dt^2 + dr^2) \tag{114}$$

$$= ds_0^2 - \frac{r_g}{r}(c^2dt^2 + dr^2) \tag{115}$$

ds_0^2 はガリレイの計量を意味する。
質量の内部の様子について考える。$r \to 0$ での、重力場の方程式

$$\frac{8\pi k}{c^4}T_0^0 = (\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2})e^{-\lambda} + \frac{1}{r^2} \tag{116}$$

$$\frac{8\pi k}{c^4}T_1^1 = -(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2})e^{-\lambda} + \frac{1}{r^2} \tag{117}$$

を見ると、(116) から T_0^0 が $r = 0$ で特異点を持たないためには、λ が 0 に向かうことがわかる。

$$\frac{8\pi k}{c^4}T_0^0r^2 = (r\lambda' - 1)e^{-\lambda} + 1 \tag{118}$$

$$\frac{8\pi k}{c^4}\int_0^r T_0^0r^2 = \int_0^r (r\lambda' - 1)e^{-\lambda} + 1 \tag{119}$$

$$= [-re^{-\lambda}]_0^r + r = -re^{-\lambda} + r = r(1 - e^{-\lambda}) \tag{120}$$

$$\lambda = -ln\left(1 - \frac{8\pi k}{c^4}\frac{1}{r}\int_0^r T_0^0\right) \tag{121}$$

T_0^0 の符号は一般的には決まった符号ではないが、ここでは

$$T_0^0 = g^{0i}T_{0i} = g^{00}T_{00} = e^{-\nu}T_{00} \geq 0 \tag{122}$$

λ の式 (121) を見ると $1 - \frac{8\pi k}{c^4}\frac{1}{r}\int_0^r T_0^0 \geq 1$ より、

$$\lambda \geq 0 \tag{123}$$

$$e^\lambda \geq 1 \tag{124}$$

(116) - (117) は、

$$\frac{e^{-\lambda}}{r}(\nu' + \lambda') = \frac{8\pi k}{c^4}(T_0^0 - T_1^1) = \frac{8\pi k}{c^4}\frac{(\epsilon + p)(1 + \frac{v^2}{c^2})}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \geq 0 \tag{125}$$

よって、$\nu' + \lambda' \geq 0$ で、

3　101