一様な楕円体のつくる内部のポテンシャル

山田龍

2020 年 7 月 2 日

1

この資料は [1] の議論に沿っている。楕円体の表面が、

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{x_i^2}{a_i^2}=1 \tag{1}$$

で表される楕円体を考える。楕円体内部の点 x_i をとってこの点から立体角 $d\omega$ を見込む領域を楕円体から切り取って、切り取られた高さ R_1, R_2 の 2 つの三角錐のつくるポテンシャル $d\phi$ は、万有引力定数 k、密度を ρ として

$$d\phi = -k\rho\int_0^{R_1} rdrd\omega + k\rho\int_0^{R_2} rdrd\omega \tag{2}$$

$$= -\frac{1}{2}k\rho(R_1^2+R_2^2)d\omega \tag{3}$$

これを立体角で積分すれば、求めたいポテンシャルの式は、

$$\phi = -\frac{1}{4}k\rho\int_S (R_1^2+R_2^2)d\omega \tag{4}$$

この積分を実行するためには、準備が必要である。$l_i = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$ という表記を導入すれば、$R = R_1, R_2$ に対して

$$\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{x_i+Rl_i}{a_i}\right)=1 \tag{5}$$

のようにかける。逆にこの方程式の解が R_1, R_2 である。楕円体の表面の方程式を書き直して、

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{r^2l_i^2}{a_i^2}=1 \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{l_i^2}{a_i^2}=r^2 \tag{7}$$

すると R についての方程式は、

$$\frac{R^2}{r^2}+2R\sum_{i=1}^{3}\frac{x_il_i}{a_i}+\sum_{i=1}^{3}\frac{x_i^2}{a_i^2}-1 \tag{8}$$

解と係数の関係を考えて、

$$R_1^2 + R_2^2 = 4r^4 \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{x_i l_i}{a_i} \right) + 2r^2 \left(1 - \sum_{i=1}^{3} \frac{x_i^2}{a_i^2} \right) \tag{9}$$

(4) に代入できて、

$$\phi = -\frac{1}{2} k\rho \int_S \left[2r^4 \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{x_i l_i}{a_i} \right) + r^2 \left(1 - \sum_{i=1}^{3} \frac{x_i^2}{a_i^2} \right) \right] \tag{10}$$

ここからいくつかの補助定理を証明する。定理：

$$\int_S r^2 d\omega = 2\pi a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty \frac{du}{\Delta} \tag{11}$$

$\Delta = \sqrt{(a_1^2 + u)(a_2^2 + u)(a_3^2 + u)}$

Proof: 極座標表示では、楕円体の表面の式は

$$\frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2 \theta}{a_3^2} + \sin^2 \theta \left(\frac{\cos^2 \phi}{a_1^2} + \frac{\sin^2 \phi}{a_2^2} \right) \tag{12}$$

定理の左辺に代入して、

$$\int_S r^2 d\omega = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta d\theta d\phi}{\frac{\cos^2 \theta}{a_3^2} + \sin^2 \theta \left(\frac{\cos^2 \phi}{a_1^2} + \frac{\sin^2 \phi}{a_2^2} \right)} \tag{13}$$

$$= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \theta d\theta d\phi}{\frac{\cos^2 \theta}{a_3^2} + \sin^2 \theta \left(\frac{\cos^2 \phi}{a_1^2} + \frac{\sin^2 \phi}{a_2^2} \right)} \tag{14}$$

$$= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty \frac{\sin \theta d\theta dt}{\frac{\cos^2 \theta}{a_3^2} + \frac{\sin^2 \theta}{a_1^2} + t^2 \left(\frac{\cos^2 \theta}{a_3^2} + \frac{\sin^2 \theta}{a_2^2} \right)} \tag{15}$$

$$= 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{\frac{\cos^2 \theta}{a_3^2} + \frac{\sin^2 \theta}{a_1^2}} \sqrt{\frac{\cos^2 \theta}{a_3^2} + \frac{\sin^2 \theta}{a_2^2}}} \tag{16}$$

$$= 4\pi a_1 a_2 a_3^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 \theta \sin \theta d\theta}{\sqrt{a_3^2 + a_1^2 \tan^2 \theta} \sqrt{a_3^2 + a_2^2 \tan^2 \theta}} \tag{17}$$

途中で、

$$\int_0^\infty \frac{dt}{1 + t^2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{2} \tag{18}$$

を使った。ここで、$u = a_3^2 \tan^2 \theta, du = 2a_3^2 \sin \theta \sec^3 \theta d\theta$ の置き換えを考えて、

$$\int_S r^2 d\omega = 2\pi a_1 a_2 \int_0^\infty \frac{\cos \theta du}{\sqrt{a_1^2 + u} \sqrt{a_2^2 + u}} \tag{19}$$

$$= 2\pi a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty \frac{du}{\Delta} \tag{20}$$

$$= 2\pi I \tag{21}$$

次に、

$$A_i = a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty \frac{du}{\Delta (a_i^2 + u)} \tag{22}$$

という記号を定義する。定理：

$$\int_S r^2 l_i^2 = 2\pi a_i^2 A_i \tag{23}$$

Proof: $i=3$ の場合を考える。

$$\begin{aligned}
\int_S r^2 l_3^2 &= \int_S r^2 \cos^2\theta && (24)\\
&= 2\pi a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty \frac{\cos^2\theta}{\Delta} du && (25)\\
&= 2\pi a_3^2 A_3 && (26)\\
& && (27)
\end{aligned}$$

対称性から他の場合も示される。適切な置き換えによって同じ証明になる。
I, A の定義から、

$$A_i = \frac{I}{a_i} - \frac{1}{a_i}\frac{\partial I}{\partial a_i} \tag{28}$$

は右辺を実行すれば直ちに得られる。
定理：

$$\int_S r^4 l_i^2 = \pi a_i^3 \frac{\partial I}{\partial a_i} \tag{29}$$

Proof:

$$\int_s r^2 d\omega = 2\pi I \tag{30}$$

両辺微分して、

$$\int_S r \frac{\partial r}{\partial a_i} d\omega = \pi \frac{\partial I}{\partial a_i} \tag{31}$$

一方、

$$\frac{1}{r^2} = \sum_{i=1}^{3} \frac{l_i^2}{a_i^2} \tag{32}$$

微分して

$$\frac{1}{r^3}\frac{\partial r}{\partial a_i} = \sum_{i=1}^{3} \frac{l_i^2}{a_i^3} \tag{33}$$

この式を、(31) へ代入すると、定理の式を得る。ここまでで、(10) を計算する準備は整った。

$$\begin{aligned}
\phi &= -\frac{1}{2}k\rho \int_S \left[2r^4 \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{x_i l_i}{a_i}\right) + r^2 \left(1 - \sum_{i=1}^{3} \frac{x_i^2}{a_i^2}\right)\right] && (34)\\
&= -k\rho\pi \left[\sum_{i=1}^{3} x_i^2 \left(\frac{1}{a_i}\frac{\partial I}{\partial a_i} - \frac{I}{a_i^2}\right) + I\right] && (35)\\
&= -k\rho\pi \left(I - \sum_{i=1}^{3} A_i x_i^2\right) && (36)\\
&= -k\rho\pi a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty \left(1 - \sum_{i=1}^{3} \frac{x_i^2}{a_i^2 + u}\right) \frac{du}{\Delta} && (37)
\end{aligned}$$

参考文献

[1] Subrahmanyan Chandrasekhar. Ellipsoidal figures of equilibrium. 1969.