113

山田龍

2020 年 7 月 20 日

1 開いた等方モデル

$$ds^2 = c^2dt^2 - a^2(t)\{d\chi^2 + \sinh^2\chi(d^2\theta + \sin^2\theta\phi^2)\} \tag{1}$$

$cdt = ad\eta$ とパラメータを置き換える。

$$ds^2 = a^2(\eta)\{d^2\eta - d\chi^2 - \sinh^2\chi(d^2\theta + \sin^2\theta\phi^2)\} \tag{2}$$

閉じたモデルのときと代数は同じであるので結果は変数の置き換えで形式的に得られる。$\eta \to i\eta, \chi \to i\chi, a \to ia$ と置き換える。熱力学関係式から、エントロピーを一定とみなして

$$3\ln a = -\int \frac{d\epsilon}{\epsilon + p} + const \tag{3}$$

アインシュタイン方程式の 00 の方程式から、

$$\frac{8\pi k}{c^4}\epsilon = \frac{3}{a^4}(a'^2 - a^2) \tag{4}$$

(4) から η を求める手順を踏めば、

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\eta} = \pm a\sqrt{\frac{8\pi k}{3c^4}\epsilon a^2 + 1} \tag{5}$$

$$\eta = \pm\int \frac{da}{a\sqrt{\frac{8\pi k}{3c^4}\epsilon a^2 + 1}} \tag{6}$$

塵状物体の状態方程式

$$\epsilon = \mu c^2, p = 0 \tag{7}$$

を (3) に使って、

$$\mu a^3 = const = \frac{3c^2}{4\pi k}a_0 \tag{8}$$

を得る。(7) を計算する。

$$\eta = \pm \int \frac{da}{a\sqrt{\frac{8\pi k}{3c^4}\epsilon a^2 + 1}} \tag{9}$$
$$= \pm \int \frac{da}{\sqrt{\frac{8\pi k}{3c^4}\epsilon a^4 + a^2}} \tag{10}$$
$$= \pm \int \frac{da}{\sqrt{(a-a_0)^2 - a_0^2}} \tag{11}$$
$$= \cosh^{-1}(\frac{a+a_0}{a_0}) \tag{12}$$

これから、

$$a = a_0(\cosh\eta - 1) \tag{13}$$

$cdt = ad\eta$ より、

$$dt = \frac{a_0}{c}(\cosh\eta - 1)d\eta \tag{14}$$

$$t = \frac{a_0}{c}(\sinh\eta - \eta) \tag{15}$$

塵状物質に対しても式を得た。閉じたモデルでは $t \propto \eta - \sin\eta$ であった。$\eta \ll 1$ での物質の密度は、

$$a \sim \frac{1}{2}a_0\eta^2 \tag{16}$$
$$t \sim \frac{a_0}{6c}\eta^3 \tag{17}$$
$$a \sim (\frac{9a_0c^2}{2})^{\frac{1}{3}}t^{\frac{2}{3}} \tag{18}$$
$$\mu \sim \frac{a_0}{a^3}\frac{3c^2}{4\pi k} = \frac{1}{6\pi kt} \tag{19}$$

1.1

大きな密度では

$$p = \frac{\epsilon}{3} \tag{20}$$

から (3) を計算して、

$$\epsilon a^4 = const = \frac{3c^4a_1^2}{8\pi k} \tag{21}$$

a, t は、(7) より、

$$a = a_1\sinh\eta, \tag{22}$$

$$t = \frac{a_1}{c}(\cosh\eta - 1) \tag{23}$$

$\eta \ll 1$ のもとでは、

$$a \sim a_1\eta \tag{24}$$
$$t \sim \frac{a_1}{c}\frac{\eta^2}{2} \tag{25}$$
$$a = \sqrt{2ca_1t} \tag{26}$$

1.2

曲率半径無限大の場合を考えることができる。

$$ds^2 = c^2dt^2 - b^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \tag{27}$$

この形に ds^2 を書けば、b,t の関係を定めるために解くべき式は

$$\frac{8\pi k}{c^2} = \frac{3}{b^2}(\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t})^2 \tag{28}$$

$$3\ln b = -\int \frac{d\epsilon}{p+\epsilon} + const \tag{29}$$

圧力が小さいとして解けば、

$$\mu b^3 = const \tag{30}$$

$$b = const t^{\frac{2}{3}} \tag{31}$$

t を小さくすれば圧力は無視できなくなるので、$p = \frac{\epsilon}{3}$ を考えて、

$$\epsilon b^4 = const \tag{32}$$

$$b = const\sqrt{t} \tag{33}$$

$t = 0$ に特異点がある。