山田龍

1　86 節 クリストッフェル記号と計量テンソル

1.1　計量テンソルの共変導関数

計量テンソルの共変導関数が 0 であることを示す。
DA^k はベクトルであるので、

$$DA_i = g_{ik} DA^k \tag{1}$$

また、$A_i = g_{ik}A^k$ を DA_i に直接代入すると、

$$\begin{aligned} DA_i &= D(g_{ik}A^k) \\ &= A^k Dg_{ik} + g_{ik} DA^k \end{aligned} \tag{2}$$

式 (1) と式 (2) を比べて、A^k は任意のベクトルなので計量テンソル g_{ik} の共変微分について：

$$Dg_{ik} = 0 \tag{3}$$

また、$g_{ik}g^{ik} = g_{ik}g^{ki} = \delta^i_i = 4$ より、

$$0 = D(g_{ik}g^{ik}) \tag{4}$$

$$= g_{ik}Dg^{ik} + g^{ik}Dg_{ik} \tag{5}$$

(3) より、

$$Dg^{ik} = 0 \tag{6}$$

共変導関数についても、

$$g_{ik;l} = 0 \tag{7}$$

$$g^{ik}_{;l} = 0 \tag{8}$$

1.2　クリストッフェル記号の計量テンソルによる表示

(7) をクリストッフェル記号を使って展開する。85 節の共変テンソルの導関数の一般的な形式から、

$$g_{ik;l} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - \Gamma^m_{il} g_{mk} - \Gamma^m_{kl} g_{im} \tag{9}$$

$$= 0 \tag{10}$$

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} = \Gamma^m_{il} g_{mk} + \Gamma^m_{kl} g_{im} \tag{11}$$

$$= \Gamma_{k,il} + \Gamma_{i,kl} \tag{12}$$

$$\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} = \Gamma_{k,li} + \Gamma_{l,ki} \tag{13}$$

$$\frac{\partial g_{li}}{\partial x^k} = \Gamma_{l,ik} + \Gamma_{i,lk} \tag{14}$$

クリストッフェル記号の添字の先頭は、$(i,k)(k,l)(l,i)$ であるので、(12) + (14) - (13) を計算して、

$$\Gamma_{i,kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^i}\right) \tag{15}$$

$$\Gamma^i_{kl} = g^{im}\Gamma_{m,kl} \tag{16}$$

$$= \frac{1}{2}g^{im}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^m}\right) \tag{17}$$

1.3 縮約されたクリストッフェル記号

(例えば、この章のテンソルの発散や、リッチテンソルの対称性の部分で使われる。)
(17) から、

$$\Gamma^i_{ki} = \frac{1}{2}g^{im}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m}\right) \tag{18}$$

右辺だけに注目して、(i,m) の入れ替えを考えると第 1 項と第 3 項は打ち消し合う。

$$\Gamma^i_{ki} = \frac{1}{2}g^{im}\frac{\partial g_{im}}{\partial x^k} \tag{19}$$

ここで、行列式の微分について考える。正方行列 $A = (a_{ij})$ の逆行列を $A^{-1} = (b_{ij})$、余因子を $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij}) = (\triangle_{ji})$ と書く。$A\tilde{A} = (detA)E$ について、$A\tilde{A} = (c_{ij})$ と書くと：

$$c_{ij} = \sum_k a_{ik}\tilde{A}_{kj} \tag{20}$$

$$= \sum_k a_{ik}\triangle_{jk} \tag{21}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j-1,1} & \cdots & a_{j-1,n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ a_{j+1,1} & \cdots & a_{j+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{22}$$

$$= (detA)\delta_{ij} \tag{23}$$

$$\therefore A\tilde{A} = (detA)E \tag{24}$$

$$A^{-1} = \frac{\tilde{A}}{detA} \tag{25}$$

(22) から (23) で、同じ行があると行列式が 0 になることを用いた。

$$|A| = \sum_j a_{ij} \triangle_{ji} \tag{26}$$

$$= \sum_j a_{ij} \tilde{a}_{ij} \tag{27}$$

$$\frac{\partial |A|}{\partial a_{ij}} = \tilde{a}_{ij} \tag{28}$$

$$= |A| b_{ij} \tag{29}$$

$$\frac{\partial |A|}{\partial a_{ij}} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x} = |A| b_{ij} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x} \tag{30}$$

$$\frac{\partial |A|}{\partial x} = |A| b_{ij} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x} \tag{31}$$

ここで A を計量テンソルにして、

$$\frac{\partial g}{\partial x} = g g^{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x} \tag{32}$$

また、$g_{ik} g^{ik} = 4$ より、$g^{ik} dg_{ik} = -g_{ik} dg^{ik}$ であることから、

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -g g_{ij} \frac{\partial g^{ij}}{\partial x} \tag{33}$$

(19) は書き換えることができて、

$$\Gamma^i_{ki} = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^k} \tag{34}$$

$$= \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^k} \tag{35}$$

となる。また、$g^{kl} \Gamma^i_{kl}$ について、

$$g^{kl} \Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2} g^{kl} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^m} \right) \tag{36}$$

$$= g^{kl} g^{im} \left(\frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^m} \right) \tag{37}$$

$$= g^{kl} g^{im} \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{1}{2} g^{kl} g^{im} \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^m} \tag{38}$$

$$= g^{kl} \left(-\frac{\partial g^{im}}{\partial x^k} g_{ml} \right) + \frac{1}{2} g^{im} g_{kl} \frac{\partial g^{kl}}{\partial x^m} \tag{39}$$

$$= -\delta^k_m \frac{\partial g^{im}}{\partial x^k} + \frac{1}{2} g^{ik} g_{ml} \frac{\partial g^{ml}}{\partial x^k} \quad (k \leftrightarrow m) \tag{40}$$

$$= -\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^k} - \frac{1}{2g} g^{ik} \frac{\partial g}{\partial x^k} \tag{41}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g} g^{ik}}{\partial x^k} \tag{42}$$

(38) から (39) で、

$$g_{ik} g^{kl} = \delta^l_i \tag{43}$$

から、

$$g_{ik} \frac{\partial g^{kl}}{\partial x} = -g^{kl} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x} \tag{44}$$

という関係を使った。

1.4 曲線座標における発散

曲線座標におけるベクトルの発散を考える。

$$A^i_{;i} = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + \Gamma^i_{ki} A^k \tag{45}$$

$$= \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + A^k \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^k} \tag{46}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g} A^i}{\partial x^i} \tag{47}$$

1.5 曲線座標におけるテンソルの発散

$A^{ik} = -A^{ki}$ と書かれた反対称テンソルを考える。準備として $\Gamma^i_{mk} A^{km}$ について、単に $k \leftrightarrow m$ 添字の入れ替えを考えると、

$$\Gamma^i_{mk} A^{km} = \Gamma^i_{km} A^{mk} \tag{48}$$

A^{km} が反対称テンソルであることに注目すると、

$$\Gamma^i_{mk} A^{km} = -\Gamma^i_{mk} A^{mk} \tag{49}$$

$$= -\Gamma^i_{km} A^{mk} \tag{50}$$

(48)(50) より、

$$\Gamma^i_{mk} A^{km} = 0 \tag{51}$$

反対称テンソルの発散：

$$A^{ik}_{;k} = \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^k} + \Gamma^i_{mk} A^{mk} + \Gamma^k_{mk} A^{im} \tag{52}$$

$$= \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^k} - \Gamma^i_{mk} A^{km} + \Gamma^k_{mk} A^{im} \tag{53}$$

$$= \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^k} + \Gamma^k_{mk} A^{im} \tag{54}$$

$$= \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^k} + A^{im} \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^m} \tag{55}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g} A^{ik}}{\partial x^k} \tag{56}$$

を得た。
次に、対称テンソル A_{ik} をとり、混合成分の発散 $A^k_{i;k}$ を計算する。

$$
\begin{aligned}
A^k_{i;k} &= \frac{\partial A^k_i}{\partial x^k} + \Gamma^k_{mk} A^m_i - \Gamma^m_{ik} A^k_m && (57)\\
&= \frac{\partial A^k_i}{\partial x^k} + A^m_i \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^m} - \Gamma^m_{ik} A^k_m && (58)\\
&= \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g} A^k_i}{\partial x^k} - \Gamma^m_{ik} A^k_m && (59)\\
&= \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g} A^k_i}{\partial x^k} - \frac{1}{2} g^{ml} \left(\frac{\partial g_{lk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} \right) A^k_m && (60)\\
&= \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g} A^k_i}{\partial x^k} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{lk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} \right) A^{kl} && (61)\\
& && (62)
\end{aligned}
$$

A^{kl} が対称であるから、第二項で $k \leftrightarrow l$ の入れ替えを考えると、

$$
A^k_{i;k} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g} A^k_i}{\partial x^k} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^i} A^{kl} \tag{63}
$$

を得る。
曲線座標におけるラプラシアンについて、スカラー ϕ を考える。

$$
\phi_{;i} = \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \tag{64}
$$

添字を上げて、

$$
\phi^{;i} = g^{ik} \frac{\partial \phi}{\partial x^k} \tag{65}
$$

(47) を使って発散を取ると、

$$
\phi^{;i}_{;i} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{-g} g^{ik} \frac{\partial \phi}{x^k} \right) \tag{66}
$$

1.6 ガウスの定理

ベクトルの発散 (47) を使って、曲線座標のガウスの定理は以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
\int A^i_{;i} \sqrt{-g} d\Omega &= \int \frac{\partial \sqrt{-g} A^i}{\partial x^i} d\Omega && (67)\\
&= \oint \sqrt{-g} A^i dS_i && (68)
\end{aligned}
$$

2 補足

内積が平行移動で変わらないことを要請すると、反変ベクトル V^i, W^k を考えて、この 2 つのベクトルが平行移動されたとする。$(DV^i = 0, DW^i = 0)$

$$
\begin{aligned}
D(g_{ik} V^i W^k) &= 0 && (69)\\
V^i W^k D g_{ik} &= 0 && (70)
\end{aligned}
$$

V^i, W^k は任意に取れるので、

$$Dg_{ik} = 0 \tag{71}$$