105

山田龍

2020 年 7 月 17 日

1　物体から離れた場所での重力場

重力場から十分離れた場所では計量はガリレイ的な計量に対して小さな補正が付いた形にかけることを予想する。

$$g_{ik} = g^{(0)}_{ik} + h_{ik} \tag{1}$$

という形に書いて、h のメトリックがガリレイ的なメトリックであることを要請する。いま、反変計量テンソルは 2 次の精度で

$$g_{ik}g^{kl} = \delta^l_i \tag{2}$$

から定義されて、

$$g^{ik} = g^{(0)ik}(1 + h + \frac{1}{2}h^2 - \frac{1}{2}h^i_k h^k_l) \tag{3}$$

導出：todo:1 h_{ik} が小さいという要請をしたが、

$$x'^i \to x^i + \xi^i \tag{4}$$

というような任意の ξ の変換が入る余地があることに注意する。座標変換に対するテンソルの変換は、

$$h'_{ik} = h_{ik} - \frac{\partial \xi_i}{\partial x^k} - \frac{\partial \xi_k}{\partial x^i} \tag{5}$$

∵ 計量の変換、

$$g'^{ik}(x'^l) = g^{lm}(x^l)\frac{\partial x'^i}{\partial x^l}\frac{\partial x'^k}{\partial x^m} \tag{6}$$

$$= g^{lm}(x^l)(\delta^i_l + \frac{\partial \xi^i}{\partial x^l})(\delta^k_m + \frac{\partial \xi^k}{\partial x^m}) \tag{7}$$

$$\sim g^{ik}(x^l) + g^{im}\frac{\partial \xi^k}{\partial x^m} + g^{lk}\frac{\partial \xi^i}{\partial x^l} \tag{8}$$

ここで、

$$g'^{ik}(x'^l) = g'^{ik}(x^l + \xi^l) = g'^{ik}(x^l) + \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}\xi^l \tag{9}$$

から、

$$g'^{ik}(x'^l) = g^{ik}(x^l) - \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}\xi^l + g^{im}\frac{\partial \xi^k}{\partial x^m} + g^{lk}\frac{\partial \xi^i}{\partial x^l} \tag{10}$$

この後ろの 3 つの項は

$$\xi^{i;k} + \xi^{k;i} \tag{11}$$

と書かれる。したがって、

$$\delta g^{ik} = \xi^{i;k} + \xi^{k;i} \tag{12}$$

$$g'^{ik} = g^{ik} + \delta g^{ik} \tag{13}$$

もしキリング方程式が満たされるなら、計量はその座標変換について形を変えない。

2　近似

原点から遠く離れた場所でのシュヴァルツシルト計量は

$$ds^2 = ds^{02} - \frac{2km}{c^2 r}(dr^2 + c^2dt^2) \tag{14}$$

であったから、

$$dr = n_\alpha dx^\alpha \tag{15}$$

$$dr^2 = n_\alpha n_\beta dx^\alpha dx^\beta \tag{16}$$

とデカルト座標に直して

$$h^{(1)}_{00} = -\frac{r_g}{r}, h^{(1)}_{\alpha\beta} = -\frac{r_g}{r}n_\alpha n_\beta, h^{(1)}_{0\alpha} = 0 \tag{17}$$

これが 1 次近似。

2.1　2 次近似

todo:2