

# 一様な楕円体のつくる内部のポテンシャル

山田龍

2020 年 6 月 8 日

1

楕円体の表面が、

$$\sum_{i=1}^3 \frac{x_i^2}{a_i^2} = 1 \quad (1)$$

で表される楕円体を考える。楕円体内部の点  $x_i$  をとってこの点から立体角  $d\omega$  を見込む領域を楕円体から切り取って、切り取られた高さ  $R_1, R_2$  の 2 つの三角錐のつくるポテンシャル  $d\phi$  は、万有引力定数  $k$ 、密度を  $\rho$  として

$$d\phi = -k\rho \int_0^{R_1} r dr d\omega + k\rho \int_0^{R_2} r dr d\omega \quad (2)$$

$$= -\frac{1}{2}k\rho(R_1^2 + R_2^2)d\omega \quad (3)$$

これを立体角で積分すれば、求めたいポテンシャルの式は、

$$\phi = -\frac{1}{4}k\rho \int_S (R_1^2 + R_2^2) d\omega \quad (4)$$

この積分を実行するためには、準備が必要である。 $l_i = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$  という表記を導入すれば、 $R = R_1, R_2$  に対して

$$\sum_{i=1}^3 \left( \frac{x_i + R l_i}{a_i} \right) = 1 \quad (5)$$

のようにかける。逆にこの方程式の解が  $R_1, R_2$  である。楕円体の表面の方程式を書き直して、

$$\sum_{i=1}^3 \frac{r^2 l_i^2}{a_i^2} = 1 \quad (6)$$

$$\sum_{i=1}^3 \frac{l_i^2}{a_i^2} = r^2 \quad (7)$$

すると  $R$  についての方程式は、

$$\frac{R^2}{r^2} + 2R \sum_{i=1}^3 \frac{x_i l_i}{a_i} + \sum_{i=1}^3 \frac{x_i^2}{a_i^2} - 1 \quad (8)$$

解と係数の関係を考えて、

$$R_1^2 + R_2^2 = 4r^4 \left( \sum_{i=1}^3 \frac{x_i l_i}{a_i} \right) + 2r^2 \left( 1 - \sum_{i=1}^3 \frac{x_i^2}{a_i^2} \right) \quad (9)$$

(4) に代入できて、

$$\phi = -\frac{1}{2}k\rho \int_S \left[ 2r^4 \left( \sum_{i=1}^3 \frac{x_i l_i}{a_i} \right) + r^2 \left( 1 - \sum_{i=1}^3 \frac{x_i^2}{a_i^2} \right) \right] \quad (10)$$

ここからいくつかの補助定理を証明する。定理：

$$\int_S r^2 d\omega = 2\pi a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty \frac{du}{\Delta} \quad (11)$$

$$\Delta = \sqrt{(a_1^2 + u)(a_2^2 + u)(a_3^2 + u)}$$

Proof: 極座標表示では、楕円体の表面の式は

$$\frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2 \theta}{a_3^2} + \sin^2 \theta \left( \frac{\cos^2 \phi}{a_1^2} + \frac{\sin^2 \phi}{a_2^2} \right) \quad (12)$$

定理の左辺に代入して、

$$\int_S r^2 d\omega = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta d\theta d\phi}{\frac{\cos^2 \theta}{a_3^2} + \sin^2 \theta \left( \frac{\cos^2 \phi}{a_1^2} + \frac{\sin^2 \phi}{a_2^2} \right)} \quad (13)$$

$$= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \theta d\theta d\phi}{\frac{\cos^2 \theta}{a_3^2} + \sin^2 \theta \left( \frac{\cos^2 \phi}{a_1^2} + \frac{\sin^2 \phi}{a_2^2} \right)} \quad (14)$$

$$= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty \frac{\sin \theta d\theta dt}{\frac{\cos^2 \theta}{a_3^2} + \frac{\sin^2 \theta}{a_1^2} + t^2 \left( \frac{\cos^2 \theta}{a_3^2} + \frac{\sin^2 \theta}{a_2^2} \right)} \quad (15)$$

$$= 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{\frac{\cos^2 \theta}{a_3^2} + \frac{\sin^2 \theta}{a_1^2}} \sqrt{\frac{\cos^2 \theta}{a_3^2} + \frac{\sin^2 \theta}{a_2^2}}} \quad (16)$$

$$= 4\pi a_1 a_2 a_3^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 \theta \sin \theta d\theta}{\sqrt{a_3^2 + a_1^2 \tan^2 \theta} \sqrt{a_3^2 + a_2^2 \tan^2 \theta}} \quad (17)$$

途中で、

$$\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{2} \quad (18)$$

を使った。ここで、 $u = a_3^2 \tan^2 \theta$ ,  $du = 2a_3^2 \sin \theta \sec^3 \theta d\theta$  の置き換えを考えて、

$$\int_S r^2 d\omega = 2\pi a_1 a_2 \int_0^\infty \frac{\cos \theta du}{\sqrt{a_1^2 + u} \sqrt{a_2^2 + u}} \quad (19)$$

$$= 2\pi a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty \frac{du}{\Delta} \quad (20)$$

$$= 2\pi I \quad (21)$$

次に、

$$A_i = a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty \frac{du}{\Delta(a_i^2 + u)} \quad (22)$$

という記号を定義する。定理：

$$\int_S r^2 l_i^2 = 2\pi a_i^2 A_i \quad (23)$$

Proof:  $i = 3$  の場合を考える。

$$\int_S r^2 l_3^2 = \int_S r^2 \cos^2 \theta \quad (24)$$

$$= 2\pi a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty \frac{\cos^2 \theta}{\Delta} du \quad (25)$$

$$= 2\pi a_3^2 A_3 \quad (26)$$

$$(27)$$

対称性から他の場合も示される。適切な置き換えによって同じ証明になる。

$I, A$  の定義から、

$$A_i = \frac{I}{a_i} - \frac{1}{a_i} \frac{\partial I}{\partial a_i} \quad (28)$$

は右辺を実行すれば直ちに得られる。

定理：

$$\int_S r^4 l_i^2 = \pi a_i^3 \frac{\partial I}{\partial a_i} \quad (29)$$

Proof:

$$\int_s r^2 d\omega = 2\pi I \quad (30)$$

両辺微分して、

$$\int_S r \frac{\partial r}{\partial a_i} d\omega = \pi \frac{\partial I}{\partial a_i} \quad (31)$$

一方、

$$\frac{1}{r^2} = \sum_{i=1}^3 \frac{l_i^2}{a_i^2} \quad (32)$$

微分して

$$\frac{1}{r^3} \frac{\partial r}{\partial a_i} = \sum_{i=1}^3 \frac{l_i^2}{a_i^3} \quad (33)$$

この式を、(31) へ代入すると、定理の式を得る。ここまでで、(10) を計算する準備は整った。

$$\phi = -\frac{1}{2} k \rho \int_S \left[ 2r^4 \left( \sum_{i=1}^3 \frac{x_i l_i}{a_i} \right) + r^2 \left( 1 - \sum_{i=1}^3 \frac{x_i^2}{a_i^2} \right) \right] \quad (34)$$

$$= -k \rho \pi \left[ \sum_{i=1}^3 x_i^2 \left( \frac{1}{a_i} \frac{\partial I}{\partial a_i} - \frac{I}{a_i^2} \right) + I \right] \quad (35)$$

$$= -k \rho \pi \left( I - \sum_{i=1}^3 A_i x_i^2 \right) \quad (36)$$

$$= -k \rho \pi a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty \left( 1 - \sum_{i=1}^3 \frac{x_i^2}{a_i^2 + u} \right) \frac{du}{\Delta} \quad (37)$$