1　86 節 クリストッフェル記号と計量テンソル

1.1　計量テンソルの共変導関数

計量テンソルの共変導関数が 0 であることを示す。
DA^k はベクトルであるので、

$$DA_i = g_{ik} DA^k \tag{1}$$

ここで、$A_i = g_{ik} A^k$ を直接用いて、

$$\begin{aligned} DA_i &= D(g_{ik} A^k) \\ &= A^k Dg_{ik} + g_{ik} DA^k \end{aligned} \tag{2}$$

式 (1) と式 (2) を比べて、A^k は任意のベクトルなので計量テンソル g_{ik} の共変微分について：

$$Dg_{ik} = 0 \tag{3}$$

また、$g_{ik} g^{ik} = g_{ik} g^{ki} = \delta^i_i = 4$ より、

$$0 = D(g_{ik} g^{ik}) \tag{4}$$

$$= g_{ik} Dg^{ik} + g^{ik} Dg_{ik} \tag{5}$$

(3) より、

$$Dg^{ik} = 0 \tag{6}$$

共変導関数についても、

$$g_{ik;l} = 0 \tag{7}$$

$$g^{ik}_{;l} = 0 \tag{8}$$

1.2　クリストッフェル記号の計量テンソルによる表示

(7) をクリストッフェル記号を使って展開する。85 節の共変テンソルの導関数から、

$$g_{ik;l} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - \Gamma^m_{il} g_{mk} - \Gamma^m_{kl} g_{im} \tag{9}$$

$$= 0 \tag{10}$$

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} = \Gamma^m_{il} g_{mk} + \Gamma^m_{kl} g_{im} \tag{11}$$

$$= \Gamma_{k,il} + \Gamma_{i,kl} \tag{12}$$

$$\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} = \Gamma_{k,li} + \Gamma_{l,ki} \tag{13}$$

$$\frac{\partial g_{li}}{\partial x^k} = \Gamma_{l,ik} + \Gamma_{i,lk} \tag{14}$$

クリストッフェル記号の添字の先頭は、$(i,k)(k,l)(l,i)$ であるので、(12) + (14) - (13) を計算して、

$$\Gamma_{i,kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^i}\right) \tag{15}$$

$$\Gamma^i_{kl} = g^{im}\Gamma_{m,kl} \tag{16}$$

$$= \frac{1}{2}g^{im}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^m}\right) \tag{17}$$

1.3　縮約されたクリストッフェル記号

例えば、この章のテンソルの発散や、リッチテンソルの対称性の部分で使われる。
(17) から、

$$\Gamma^i_{ki} = \frac{1}{2}g^{im}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m}\right) \tag{18}$$

右辺だけに注目して、(i,m) の入れ替えを考えると第 1 項と第 3 項は打ち消し合う。このとき、左辺に i があることは影響しない。

$$\Gamma^i_{ki} = \frac{1}{2}g^{im}\frac{\partial g_{im}}{\partial x^k} \tag{19}$$

ここで、行列式の微分について考える。正方行列 $A = (a_{ij})$ の逆行列を $A^{-1} = (b_{ij})$、余因子を $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij}) = (\triangle_{ji})$ と書く。$A\tilde{A} = (detA)E$ について、$A\tilde{A} = (c_{ij})$ と書くと：

$$c_{ij} = \sum_k a_{ik}\tilde{A}_{kj} \tag{20}$$

$$= \sum_k a_{ik}\triangle_{jk} \tag{21}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j-1,1} & \cdots & a_{j-1,n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ a_{j+1,1} & \cdots & a_{j+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{22}$$

$$= (detA)\delta_{ij} \tag{23}$$

$$\therefore A\tilde{A} = (detA)E \tag{24}$$

$$A^{-1} = \frac{\tilde{A}}{detA} \tag{25}$$

(22) から (23) で、同じ行があると行列式が 0 になることを用いた。

$$|A| = \sum_j a_{ij} \triangle_{ji} \tag{26}$$
$$= \sum_j a_{ij} \tilde{a}_{ij} \tag{27}$$
$$\frac{\partial |A|}{\partial a_{ij}} = \tilde{a}_{ji} \tag{28}$$
$$= |A| b_{ji} \tag{29}$$
$$\frac{\partial |A|}{\partial a_{ij}} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x} = |A| b_{ji} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x} \tag{30}$$
$$\frac{\partial |A|}{\partial x} = |A| b_{ji} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x} \tag{31}$$

ここで A を計量テンソルにして、

$$\frac{\partial g}{\partial x} = g g^{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x} \tag{32}$$

また、$g_{ik} g^{ik} = 4$ より、$g^{ik} dg_{ik} = -g_{ik} dg^{ik}$ であることから、

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -g g_{ij} \frac{\partial g^{ij}}{\partial x} \tag{33}$$

(19) は書き換えることができて、

$$\Gamma^i_{ki} = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^k} \tag{34}$$
$$= \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^k} \tag{35}$$

となる。補足として $g^{kl} \Gamma^i_{kl}$ について、

$$g^{kl} \Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2} g^{kl} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^m} \right) \tag{36}$$
$$= g^{kl} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^m} \right) \tag{37}$$
$$= \tag{38}$$

1.4 曲線座標におけるベクトルの発散

$$A^i_{;i} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g} A^i}{\partial x^i} \tag{39}$$

曲線座標におけるテンソルの発散

曲線座標におけるラプラシアン

$$\phi^{;i}_{;i} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{-g} g^{ik} \frac{\partial \phi}{x^k} \right) \tag{40}$$

ガウスの定理

3