Kerr 解の導出

山田龍

2020 年 7 月 2 日

1　一般相対論内山より

1.1　アインシュタイン方程式

計量を

$$g_{ij} = \eta_{ij} + al_i l_j \tag{1}$$

とかく。η はミンコフスキー計量。いま、

$$\eta^{ij} l_i l_j = 0 \tag{2}$$

を条件として課す。l がヌルベクトルであることを表す。いま

$$l^i = \eta^{ij} l_j \tag{3}$$

が添字を上付きにすると定義しよう。ヌルベクトルであることが確認される。

$$l^i l_j = 0 \tag{4}$$

反変計量テンソルは、

$$g^{ij} = \eta^{ij} - al^i l^j \tag{5}$$

これは

$$g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k \tag{6}$$

$$g^{ij} = \eta^{ij} + bl^i l^j \tag{7}$$

$$(\eta^{ij} + bl^i l^j)(\eta_{jk} + bl_j l_k) = \delta^i_k + (a+b) l^i l_k + abl^u l^j l_j l_k \tag{8}$$

より $b = -a$ がわかることから得た。(2) より空間の計量を使って

$$l^i = g^{ij} l_j \tag{9}$$

計量からクリストッフェル記号を計算したいので、l の微分について考える。

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mj}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{km}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^m} \right) \tag{10}$$

から、

$$\Gamma^i_{jk} l^k = \frac{g^{im}}{2} \left(\frac{\partial g_{mj}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{km}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^m} \right) l^k \tag{11}$$

$$= \frac{ag^{im}}{2} ((l_m l_j)_{,k} + (l_k l_m)_{,j} - (l_j l_k)_{,m}) l^k \tag{12}$$

$$= \frac{a}{2} (l^i l_j)_{,k} l^k \tag{13}$$