

## 1 86 節 クリストッフエル記号と計量テンソル

### 1.1 計量テンソルの共変導関数

計量テンソルの共変導関数が 0 であることを示す。

$DA^k$  はベクトルであるので、

$$DA_i = g_{ik} DA^k \quad (1)$$

ここで、 $A_i = g_{ik} A^k$  を直接用いて、

$$\begin{aligned} DA_i &= D(g_{ik} A^k) \\ &= A^k Dg_{ik} + g_{ik} DA^k \end{aligned} \quad (2)$$

式 (1) と式 (2) を比べて、 $A^k$  は任意のベクトルなので計量テンソル  $g_{ik}$  の共変微分について：

$$Dg_{ik} = 0 \quad (3)$$

また、 $g_{ik} g^{ik} = g_{ik} g^{ki} = \delta_i^i = 4$  より、

$$0 = D(g_{ik} g^{ik}) \quad (4)$$

$$= g_{ik} Dg^{ik} + g^{ik} Dg_{ik} \quad (5)$$

(3) より、

$$Dg^{ik} = 0 \quad (6)$$

共変導関数についても、

$$g_{ik;l} = 0 \quad (7)$$

$$g_{;l}^{ik} = 0 \quad (8)$$

### 1.2 クリストッフエル記号の計量テンソルによる表示

(7) をクリストッフエル記号を使って展開する。85 節の共変テンソルの導関数から、

$$g_{ik;l} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - \Gamma_{il}^m g_{mk} - \Gamma_{kl}^m g_{im} \quad (9)$$

$$= 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} = \Gamma_{il}^m g_{mk} + \Gamma_{kl}^m g_{im} \quad (11)$$

$$= \Gamma_{k,il} + \Gamma_{i,kl} \quad (12)$$

$$\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} = \Gamma_{k,li} + \Gamma_{l,ki} \quad (13)$$

$$\frac{\partial g_{li}}{\partial x^k} = \Gamma_{l,ik} + \Gamma_{i,lk} \quad (14)$$

クリストッフェル記号の添字の先頭は、 $(i, k)(k, l)(l, i)$  であるので、(12) + (14) - (13) を計算して、

$$\Gamma_{i,kl} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^i} \right) \quad (15)$$

$$\Gamma_{kl}^i = g^{im} \Gamma_{m,kl} \quad (16)$$

$$= \frac{1}{2} g^{im} \left( \frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^m} \right) \quad (17)$$

### 1.3 縮約されたクリストッフェル記号

例えば、この章のテンソルの発散や、リッチテンソルの対称性の部分で使われる。

(17) から、

$$\Gamma_{ki}^i = \frac{1}{2} g^{im} \left( \frac{\partial g_{mk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m} \right) \quad (18)$$

右辺だけに注目して、 $(i, m)$  の入れ替えを考えると第 1 項と第 3 項は打ち消し合う。このとき、左辺に  $i$  があることは影響しない。

$$\Gamma_{ki}^i = \frac{1}{2} g^{im} \frac{\partial g_{im}}{\partial x^k} \quad (19)$$

ここで、行列式の微分について考える。正方行列  $A = (a_{ij})$  の逆行列を  $A^{-1} = (b_{ij})$ 、余因子を  $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij}) = (\Delta_{ji})$  と書く。 $A\tilde{A} = (\det A)E$  について、 $A\tilde{A} = (c_{ij})$  と書くと：

$$c_{ij} = \sum_k a_{ik} \tilde{A}_{kj} \quad (20)$$

$$= \sum_k a_{ik} \Delta_{jk} \quad (21)$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{j-1,1} & \dots & a_{j-1,n} \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ a_{j+1,1} & \dots & a_{j+1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (22)$$

$$= (\det A) \delta_{ij} \quad (23)$$

$$\therefore A\tilde{A} = (\det A)E \quad (24)$$

$$A^{-1} = \frac{\tilde{A}}{\det A} \quad (25)$$

(22) から (23) で、同じ行があると行列式が 0 になることを用いた。

$$|A| = \sum_j a_{ij} \Delta_{ji} \quad (26)$$

$$= \sum_j a_{ij} \tilde{a}_{ij} \quad (27)$$

$$\frac{\partial |A|}{\partial a_{ij}} = \tilde{a}_{ji} \quad (28)$$

$$= |A| b_{ji} \quad (29)$$

$$\frac{\partial |A|}{\partial a_{ij}} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x} = |A| b_{ji} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x} \quad (30)$$

$$\frac{\partial |A|}{\partial x} = |A| b_{ji} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x} \quad (31)$$

ここで  $A$  を計量テンソルにして、

$$\frac{\partial g}{\partial x} = g g^{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x} \quad (32)$$

また、 $g_{ik} g^{ik} = 4$  より、 $g^{ik} dg_{ik} = -g_{ik} dg^{ik}$  であることから、

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -g g_{ij} \frac{\partial g^{ij}}{\partial x} \quad (33)$$

(19) は書き換えることができ、

$$\Gamma_{ki}^i = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^k} \quad (34)$$

$$= \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^k} \quad (35)$$

となる。また、 $g^{kl} \Gamma_{kl}^i$  について、

$$g^{kl} \Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2} g^{kl} g^{im} \left( \frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^m} \right) \quad (36)$$

$$= g^{kl} g^{im} \left( \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^m} \right) \quad (37)$$

$$= g^{kl} g^{im} \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{1}{2} g^{kl} g^{im} \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^m} \quad (38)$$

$$= g^{kl} \left( -\frac{\partial g^{im}}{\partial x^k} g_{ml} \right) + \frac{1}{2} g^{im} g_{kl} \frac{\partial g^{kl}}{\partial x^m} \quad (39)$$

$$= -\delta_m^k \frac{\partial g^{im}}{\partial x^k} + \frac{1}{2} g^{ik} g_{ml} \frac{\partial g^{ml}}{\partial x^k} \quad (k \leftrightarrow m) \quad (40)$$

$$= -\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^k} - \frac{1}{2g} g^{ik} \frac{\partial g}{\partial x^k} \quad (41)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g} g^{ik}}{\partial x^k} \quad (42)$$

(38) から (39) で、

$$g_{ik} g^{kl} = \delta_i^l \quad (43)$$

から、

$$g_{ik} \frac{\partial g^{kl}}{\partial x} = -g^{kl} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x} \quad (44)$$

という関係を使った。

#### 1.4 曲線座標における発散

曲線座標におけるベクトルの発散を考える。

$$A^i_{;i} = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + \Gamma^i_{ki} A^k \quad (45)$$

$$= \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + A^k \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^k} \quad (46)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g} A^i}{\partial x^i} \quad (47)$$

#### 1.5 曲線座標におけるテンソルの発散

$A^{ik} = -A^{ki}$  と書かれた反対称テンソルを考える。準備として  $\Gamma^i_{mk} A^{km}$  について、単に  $k \leftrightarrow m$  添字の入れ替えを考えると、

$$\Gamma^i_{mk} A^{km} = \Gamma^i_{km} A^{mk} \quad (48)$$

$A^{km}$  が反対称テンソルであることに注目すると、

$$\Gamma^i_{mk} A^{km} = -\Gamma^i_{mk} A^{mk} \quad (49)$$

$$= -\Gamma^i_{km} A^{mk} \quad (50)$$

(48)(50) より、

$$\Gamma^i_{mk} A^{km} = 0 \quad (51)$$

反対称テンソルの発散：

$$A^{ik}_{;k} = \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^k} + \Gamma^i_{mk} A^{mk} + \Gamma^k_{mk} A^{im} \quad (52)$$

$$= \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^k} - \Gamma^i_{mk} A^{km} + \Gamma^k_{mk} A^{im} \quad (53)$$

$$= \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^k} + \Gamma^k_{mk} A^{im} \quad (54)$$

$$= \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^k} + A^{im} \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^m} \quad (55)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g} A^{ik}}{\partial x^k} \quad (56)$$

を得た。

次に、対称テンソル  $A_{ik}$  をとり、混合成分の発散  $A_{i;k}^k$  を計算する。

$$A_{i;k}^k = \frac{\partial A_i^k}{\partial x^k} + \Gamma_{mk}^k A_i^m - \Gamma_{ik}^m A_m^k \quad (57)$$

$$= \frac{\partial A_i^k}{\partial x^k} + A_i^m \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^m} - \Gamma_{ik}^m A_m^k \quad (58)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g} A_i^k}{\partial x^k} - \Gamma_{ik}^m A_m^k \quad (59)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g} A_i^k}{\partial x^k} - \frac{1}{2} g^{ml} \left( \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} \right) A_m^k \quad (60)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g} A_i^k}{\partial x^k} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} \right) A^{kl} \quad (61)$$

$$(62)$$

$A^{kl}$  が対称であるから、第二項で  $k \leftrightarrow l$  の入れ替えを考えると、

$$A_{i;k}^k = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g} A_i^k}{\partial x^k} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^i} A^{kl} \quad (63)$$

を得る。

曲線座標におけるラプラシアンについて、スカラー  $\phi$  を考える。

$$\phi_{;i} = \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \quad (64)$$

添字を上げて、

$$\phi^{;i} = g^{ik} \frac{\partial \phi}{\partial x^k} \quad (65)$$

(47) を使って発散を取ると、

$$\phi^{;i}_{;i} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \sqrt{-g} g^{ik} \frac{\partial \phi}{\partial x^k} \right) \quad (66)$$

## 1.6 ガウスの定理

ベクトルの発散 (47) を使って、曲線座標のガウスの定理は以下ようになる。

$$\int A^i_{;i} \sqrt{-g} d\Omega = \int \frac{\partial \sqrt{-g} A^i}{\partial x^i} d\Omega \quad (67)$$

$$= \oint \sqrt{-g} A^i dS_i \quad (68)$$