Kerr 解の導出

山田龍

2020 年 7 月 23 日

1　一般相対論内山より

1.1　アインシュタイン方程式

計量を

$$g_{ij} = \eta_{ij} + a l_i l_j \tag{1}$$

とかく。η はミンコフスキー計量とする。

$$\eta^{ij} l_i l_j = 0 \tag{2}$$

を条件として課す。l がヌルベクトルであることを表す。いま

$$l^i = \eta^{ij} l_j \tag{3}$$

が添字を上付きにすると定義しよう。このようにしてもヌルベクトルであることが確認される。

$$l^i l_j = 0 \tag{4}$$

反変計量テンソルは、

$$g^{ij} = \eta^{ij} - a l^i l^j \tag{5}$$

これは

$$g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k \tag{6}$$

$$g^{ij} = \eta^{ij} + b l^i l^j \tag{7}$$

$$(\eta^{ij} + b l^i l^j)(\eta_{jk} + a l_j l_k) = \delta^i_k + (a+b) l^i l_k + ab l^i l^j l_j l_k \tag{8}$$

$$= \delta^i_k + (a+b) l^i l_k \tag{9}$$

と展開すれば反変計量テンソルの定義が成り立つためには $b = -a$ となることから得た。この反変計量テンソルについて、(2) より空間の計量を使って

$$l^i = g^{ij} l_j \tag{10}$$

$$= (\eta^{ij} - a l^i l^j) l_j \tag{11}$$

$$= \eta^{ij} l_j \tag{12}$$

計量からクリストッフェル記号を計算したいので、l の微分について考える。

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mj}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{km}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^m} \right) \tag{13}$$

から、

$$\Gamma^i_{jk} l^k = \frac{g^{im}}{2} \left(\frac{\partial g_{mj}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{km}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^m} \right) l^k \tag{14}$$

$$= \frac{a g^{im}}{2} ((l_m l_j)_{,k} + (l_k l_m)_{,j} - (l_j l_k)_{,m}) l^k \tag{15}$$

$$= \frac{a g^{im}}{2} ((l_m l_j)_{,k} + (l_{k,j} l_m) + (l_k l_{m,j}) - (l_{j,m} l_k) - (l_j l_{k,m})) l^k \tag{16}$$

$$= \frac{a}{2} (l^i l_j)_{,k} l^k \tag{17}$$

途中で以下の関係を使った。

$$\partial_i (l^j l_j) = 2 l^j_{,i} l_j = 2 l^j l_{j,i} = 0 \tag{18}$$

共変微分が偏微分と一致することを確認する。書く行列式が回転に対して不変であることを使って、あるベクトル l を考えて計算すれば回転に対してかわらないアインシュタイン方程式が得られる。リーマンテンソル、クリストッフェル記号を a のべきの形で書いて、アインシュタイン方程式が a によらないことから方程式を 4 つ得る。

参考文献