GIỚI THIỆU VỀ HÀM SINH

1. **Định nghĩa.** Cho $\{a_r\}_{r\geq 0}$ là một dãy số thực. Khi đó chuỗi lũy thừa hình thức

$$G(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... = \sum_{r\geq 0} a_rx^r$$

được gọi là ***hàm sinh*** của dãy $\{a_r\}_{r\geq 0}$.

Ví dụ. Hàm sinh của dãy 1,1,1,1,1,1 là

$$G(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$$

Hàm sinh của dãy 3, 2, 1, 0, 0, 0,…. là

$$G(x) = 3 + 2.x + 1.x^2 + 0.x^3 + 0.x^4 + ... = x^2 + 2x + 3$$

Ví dụ. Tìm hàm sinh của dãy $\{a_r\}_{r\geq 0}$ với a_r là số cách chọn r viên bi từ 5 viên bi

Giải. Ta có a_0 là số cách chọn 0 viên bi từ 5 viên bi. Do đó $a_0 = 1$. Tiếp theo, a_1 là số cách chọn 1 viên bi từ 5 viên bi. Do đó $a_1 = 5$. Tương tự như vậy ta có thể tính được $a_2 = 10, a_3 = 10, a_4 = 5, a_5 = 1$.

Do đó hàm sinh cần tìm là $G(x) = 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5$.

2. Hệ số hàm sinh

Trong phần này chúng ta sẽ sử dụng các kỹ thuật đại số để tính toán các hệ số trong hàm sinh. Phương pháp chủ yếu là đưa một hàm sinh phức tạp về hàm sinh kiểu nhị thức hoặc tích của các hàm sinh kiểu nhị thức. Để làm điều đó chúng ta cần sử dụng những công thức sau:

$$(1)\ \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n$$

$$(2)\ \frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ...$$

$$(3)\ (1 + x)^n = 1 + C_n^1x + C_n^2x^2 + ... + C_n^nx^n$$

$$(4)\ (1 - x^m)^n = 1 - C_n^1x^m + C_n^2x^{2m} + ... + (-1)^rC_n^rx^{rm} + ... + (-1)^nC_n^nx^{nm}$$

$$(5)\ \frac{1}{(1 - x)^n} = 1 + C_{1+n-1}^1x + C_{2+n-1}^2x^2 + ... + C_{r+n-1}^rx^r + ...$$

Ví dụ. Tìm hệ số của x^{16} trong khai triển $(x^2 + x^3 + x^4 + ...)^5$.

Giải. Ta có $(x^2 + x^3 + x^4 + ...)^5 = [(x^2(1 + x + x^2 + ...)]^5 = x^{10}(1 + x + x^2 + ...)^5 = x^{10}\dfrac{1}{(1- x)^5}$.

Như vậy để tìm hệ số của x^{16} trong $(x^2 + x^3 + x^4 + ...)^5$, ta đi tìm hệ số của x^6 trong $\dfrac{1}{(1- x)^5}$. Theo công thức (5) ta có hệ số của x^6 trong $\dfrac{1}{(1- x)^5}$ là $C_{10}^6 = 210$.