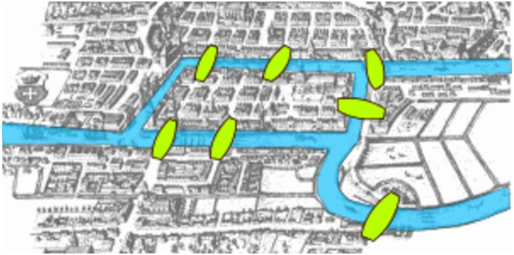
Nội dung

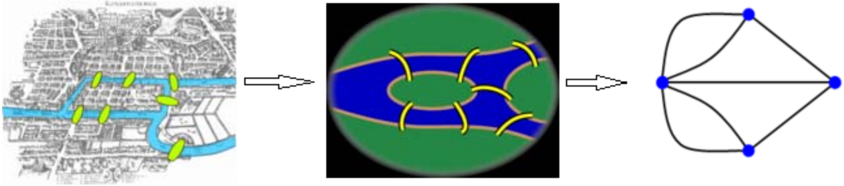
1. Giới thiệu
2. Các khái niệm cơ bản
3. Biểu diễn đồ thị
4. Đẳng cấu đồ thị
5. Đường đi, chu trình

1. Giới thiệu

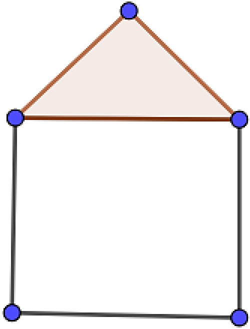


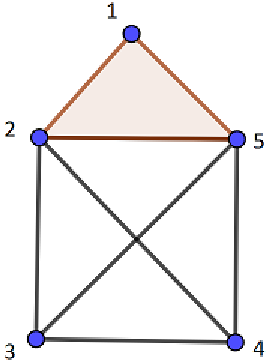
Bài toán. Thành phố Königsberg, Đức (cũ) nằm trên một con sông, có hai hòn đảo lớn nối với nhau và với đất liền bởi bảy cây cầu. Bài toán đặt ra là có thể đi theo một tuyến đường mà đi qua mỗi cây cầu đúng một lần rồi quay lại điểm xuất phát hay không?

Năm 1736, nhà toán học Leonhard Euler đã chứng minh rằng điều đó là không thể được.

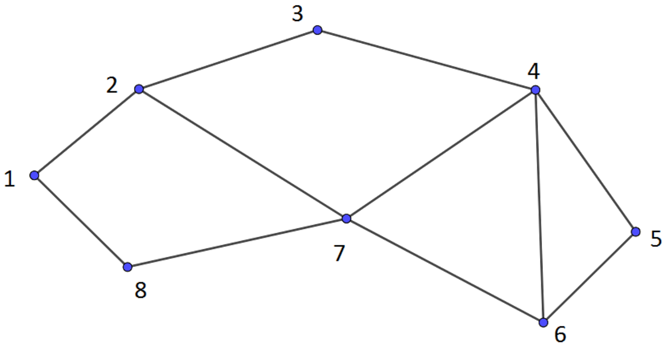


Bài toán 1. Có thể vẽ hình phong bì thư bởi một nét bút hay không? Nếu có hãy chỉ ra tuần tự các nét vẽ.

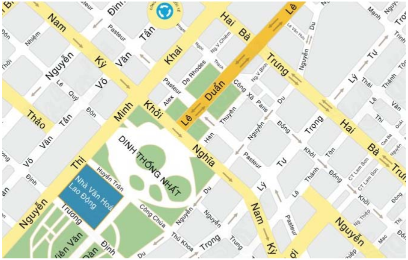


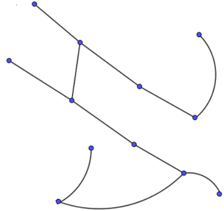


Bài toán 2. Một đoàn kiểm tra chất lượng các con đường. Để tiết kiệm thời gian, đoàn kiểm tra muốn đi qua mỗi con đường đúng 1 lần. Kiểm tra xem có cách đi như vậy không?



Bài toán 3. Một sinh viên muốn đi từ nhà đến trường thì phải đi như thế nào? Cách đi nào là ngắn nhất?



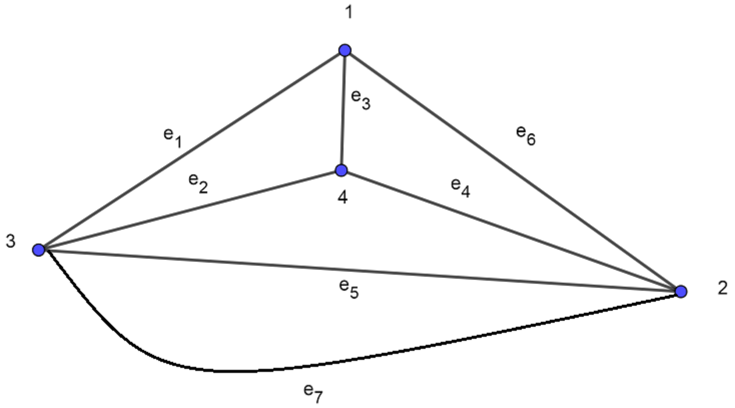


2. Các khái niệm cơ bản

Định nghĩa

Một *đồ thị vô hướng* (undirected graph) G=(V, E) được định nghĩa bởi:

- Tập hợp $V \neq \emptyset$ được gọi là tập các đỉnh (vertex) và n $=$ $|$V$|$ gọi là cấp của đồ thị;
- Tập hợp E là tập các cạnh (edge) của đồ thị; Mỗi cạnh $e \in E$ được liên kết với một cặp đỉnh $\{i, j\}$, không phân biệt thứ tự.


1
e_3
e_1
e_6
e_2
4
e_4
3
2
e_5
e_7

Đỉnh kề

Định nghĩa

Trên đồ thị vô hướng, xét cạnh e được liên kết với cặp đỉnh $\{i, j\}$:

- Cạnh e kề với đỉnh A và đỉnh B (hay đỉnh A và đỉnh B kề với cạnh e); có thể viết tắt e=AB.
- Đỉnh A và đỉnh B được gọi là 2 đỉnh kề nhau (hay đỉnh A kề với đỉnh B và ngược lại, đỉnh B kề với đỉnh).
- Hai cạnh nối cùng một cặp đỉnh gọi là hai cạnh song song.
- Cạnh có hai đỉnh trùng nhau gọi là một khuyên.

Đỉnh kề

Tập các đỉnh kề với đỉnh v được viết là

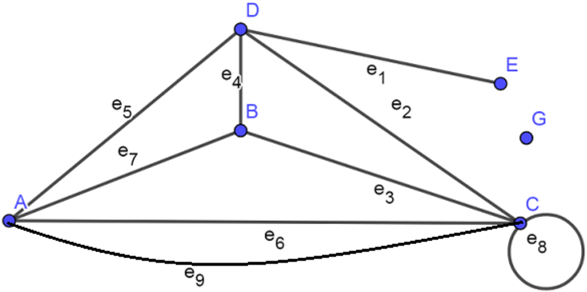
$$\Gamma(v) = \{u \in V : (v, u) \in E\}$$

Nhận xét. Đồ thị G hoàn toàn được xác định nếu chúng ta biết

$$\Gamma(v), \forall v \in V$$

nên đồ thị G cũng có thể định nghĩa như sau

$$G = (V, \Gamma)$$



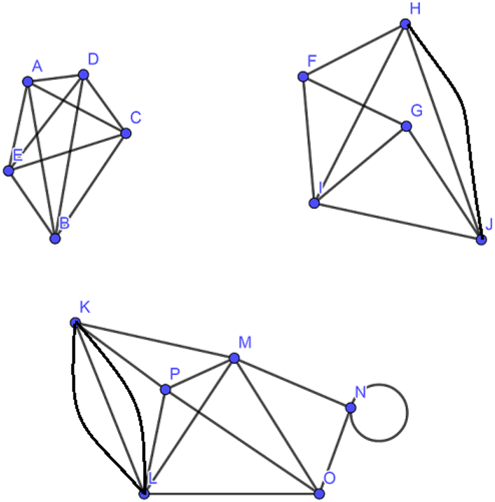
- Cạnh song song: e_6, e_9
- Khuyên: e_8
- Đỉnh treo: E
- Đỉnh cô lập: G
- $\Gamma(B) = \{A, C, D\}$

Một số loại đồ thị vô hướng

Định nghĩa

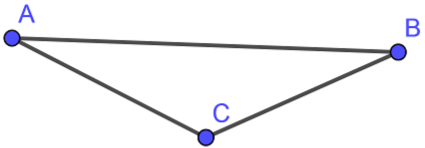
Cho G là đồ thị vô hướng. Khi đó G được gọi là:

1. đơn đồ thị (hay đồ thị đơn) nếu G không có khuyên và không có cạnh song song.
2. đa đồ thị nếu G không có khuyên, cho phép có cạnh song song.
3. giả đồ thị nếu G cho phép có cạnh song song và có khuyên.

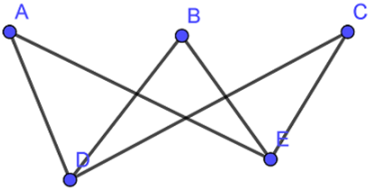

A
D
C
E
B
H
F
G
I
J
K
M
P
N
L
O

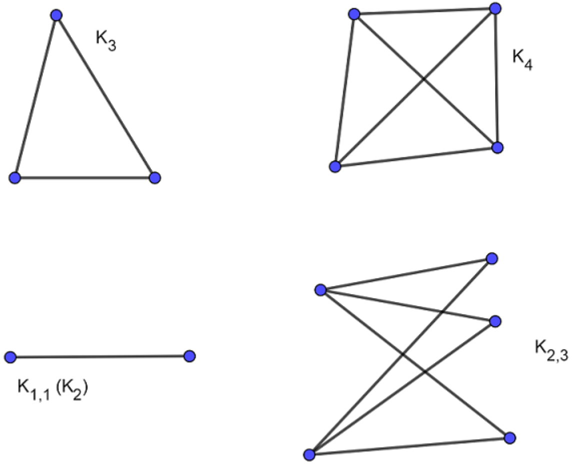
Các dạng đồ thị

- Đồ thị rỗng: tập cạnh là tập rỗng.
- Đồ thị đủ: đồ thị vô hướng, đơn, giữa hai đỉnh bất kỳ đều có đúng một cạnh
  - Đồ thị đủ n đỉnh ký hiệu là K_n .
  - K_n có $\frac{n(n-1)}{2}$ cạnh.
- Đồ thị k-đềulà đồ thị mà mọi đỉnh đều kề với đúng k đỉnh khác.



- Đồ thị lưỡng phân: là đồ thị vô hướng G=(V, E) có tập V được chia thành hai tập V_1 và V_2 thỏa:
  - V_1 và V_2 phân hoạch V;
  - Cạnh chỉ nối giữa V_1 và V_2 .
- Đồ thị lưỡng phân đủ: là đồ thị lưỡng phân thỏa điều kiện mỗi đỉnh trong V_1 kề với mọi đỉnh trong V_2 . Nếu $|V_1| = n$ và $|V_2| = m$, ta ký hiệu $K_{n,m}$.



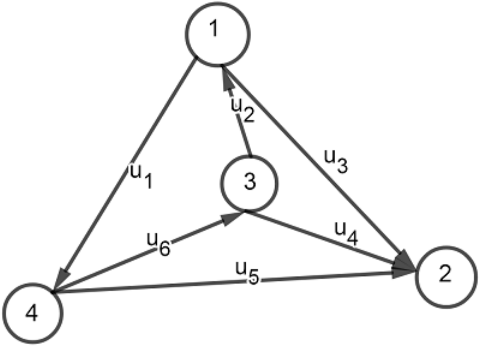

K_3
K_4
$K_{1,1}$ (K_2)
$K_{2,3}$

Đồ thị có hướng

Định nghĩa

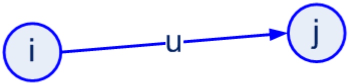
Một đồ thị có hướng (directed graph) G=(V, U) được định nghĩa bởi:

- Tập hợp $V \neq \emptyset$ được gọi là tập các đỉnh.
- Tập hợp U là tập các cạnh (cung) của đồ thị; mỗi cạnh $u \in U$ được liên kết với một cặp đỉnh $(i, j) \in V^2$. Ký hiệu u=(i,j) hoặc u=ij.


1
2
3
4
u1
u2
u3
u4
u5
u6

Đỉnh kề

Trên đồ thị có hướng, xét cạnh u được liên kết với cặp đỉnh (i,j):



- i được gọi là đỉnh đầu, j được gọi là đỉnh cuối.
- Cạnh u kề với đỉnh i và đỉnh j (hay đỉnh i và đỉnh j kề với cạnh u); có thể viết tắt u=(i, j). Cạnh u đi ra khỏi đỉnh i và đi vào đỉnh j.

Định nghĩa

Cho đồ thị có hướng G=(V, E) và e=(u,v)∈E • v là đỉnh sau của u

- u là đỉnh trước của v
- Tập hợp các đỉnh sau và đỉnh trước của v lần lượt là

$$\Gamma(v), \Gamma^{-}(v)$$

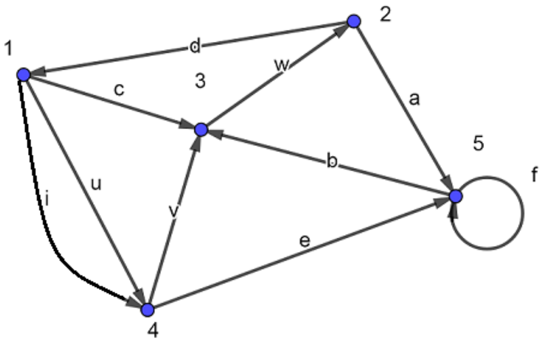
Nhận xét. Đồ thị G hoàn toàn được xác định nếu chúng ta biết

$$\Gamma(v), \forall v \in V$$

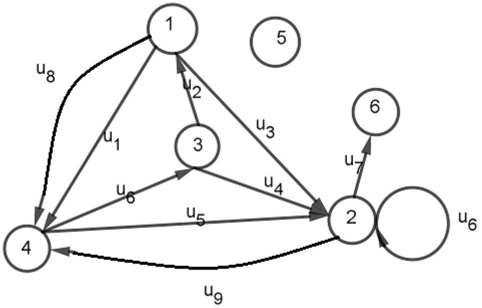
nên đồ thị G cũng có thể định nghĩa như sau

$$G = (V, \Gamma)$$

Đỉnh kề



v	$\Gamma(v)$	$\Gamma^{-}(v)$
1		
2		
3		
4		
5		



- cạnh song song:
  - u_1, u_8 cùng chiều
  - u_5, u_9 ngược chiều
- khuyên: u_6
- đỉnh treo: 6
- đỉnh cô lập: 5

Đồ thị huữ hạn

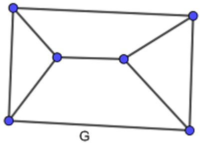
- Đồ thị có tập đỉnh và tập cạnh hữu hạn được gọi là đồ thị hữu hạn.
- Trong học phần này ta chỉ làm việc với các đồ thị hữu hạn. Để ngắn gọn chúng ta chỉ dùng thuật ngữ ĐỒ THỊ và hiểu ngầm đó là đồ thị hữu hạn.

Đồ thị con

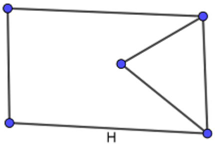
Định nghĩa

Cho hai đồ thị G = (V,E) và G' = (V',E') (cùng vô hướng hoặc cùng có hướng).

- G' được gọi là đồ thị con của G, ký hiệu $G' \leq G$, nếu $V' \subset V$ và $E' \subset E$.
- Nếu V'= V và $E' \leq E$ thì G' được gọi là đồ thị con khung của G.

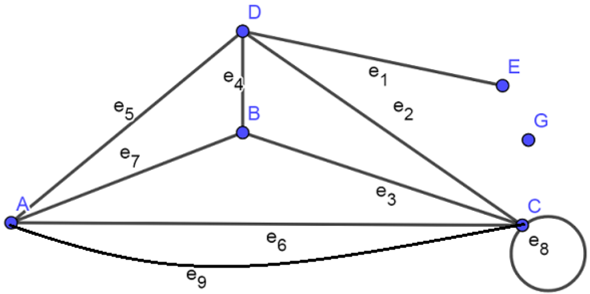


G



H

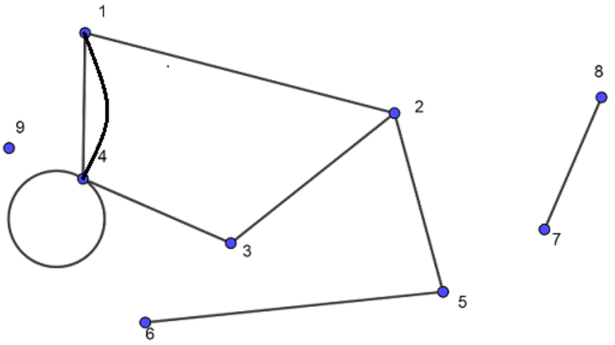
Bậc của đỉnh



Định nghĩa

Xét đồ thị vô hướng G, bậc của đỉnh x trong đồ thị G là số các cạnh kề với đỉnh x, mỗi khuyên được tính hai lần, ký hiệu là $deg_G(x)$ (hay deg(x) nếu đang xét một đồ thị nào đó).

Bậc của đỉnh



i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Deg(i)									

Ví dụ

H là đơn đồ thị vô hướng có n đỉnh ($n \geq 2$).
a) Mỗi đỉnh của H có bậc tối đa là bao nhiêu? H có tối đa bao nhiêu cạnh ?
b) Chứng minh rằng H có ít nhất 2 đỉnh cùng bậc.

Giải. a) Vì H là đồ thị đơn vô hướng nên mỗi đỉnh của H không có khuyên và chỉ có thể nối với các đỉnh khác không quá một cạnh, nghĩa là mỗi đỉnh của H có bậc tối đa là (n-1). Suy ra H có tối đa là n(n - 1) / 2 cạnh.
b) Giả sử bậc của các đỉnh của H đều khác nhau. Khi đó bậc của n đỉnh của H lần lượt là 0, 1, . . . , (n -1), nghĩa là H phải có đỉnh bậc 0. Do H có đỉnh bậc 0 nên các đỉnh khác của H có bậc tối đa là (n - 2) mâu thuẫn. Vậy có ít nhất 2 đỉnh của H có cùng bậc.

Ví dụ

Hãy vẽ một đồ thị đơn vô hướng (nếu có) gồm 6 đỉnh với bậc các đỉnh lần lượt là:
a) 2, 2, 3, 3, 3, 3
b) 1, 1, 2, 2, 3, 4

Câu b) không tồn tại đồ thị

Định nghĩa

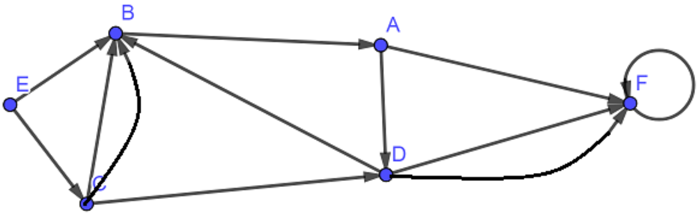
Xét đồ thị có hướng G

- Nửa bậc ngoài của đỉnh x là số các cạnh đi ra khỏi đỉnh x, ký hiệu $deg^{+}(x)$.
- Nửa bậc trong của đỉnh x là số các cạnh đi vào đỉnh x, ký hiệu $deg^{-}(x)$.
- Bậc của đỉnh x:

$$deg(x) = deg^{+}(x) + deg^{-}(x)$$

Chú ý

1 khuyên được tính 1 lần bậc vào và 1 lần bậc ra.



V	$Deg^+(v)$	$Deg^-(v)$	Deg(v)
A			
B			
C			
D			
E			
F			

- Đỉnh treo là đỉnh có bậc bằng 1.
- Đỉnh cô lập là đỉnh có bậc bằng 0.

Mối liên hệ giữa bậc và số cạnh

Định lý

- *Xét đồ thị có hướng G=(X, U). Ta có:*

$$\sum_{x \in X} deg^{+}(x) = \sum_{x \in X} deg^{-}(x) \text{ và } \sum_{x \in X} deg(x) = 2|U|$$

- *Xét đồ thị vô hướng G=(X, E). Ta có:*

$$\sum_{x \in X} deg(x) = 2|E|$$

Hệ quả

Số đỉnh có bậc lẻ trong một đồ thị là chẵn.

Ví dụ

Trong một bữa tiệc, mọi người bắt tay với nhau. Chứng minh rằng số người bắt tay với một số lẻ người khác là số chẵn.

Giải. Lập đồ thị vô hướng G như sau:

- Mỗi đỉnh là đại diện cho một người
- Hai đỉnh nối với nhau bằng một cạnh nếu hai người đó bắt tay nhau

Một người bắt tay với một số lẻ người khác, có nghĩa đỉnh tương ứng có bậc là lẻ. Theo hệ quả trên ta có điều chứng minh.

Ví dụ

Cho G là đồ thị vô hướng có 6 đỉnh với các bậc lần lượt là 1, 2, 2, 2, 3 và 4. Tính số cạnh của G. Hãy vẽ phác họa đồ thị G. (một trường hợp là đồ thị đơn và một trường hợp là đồ thị có cả khuyên và các cạnh song song).

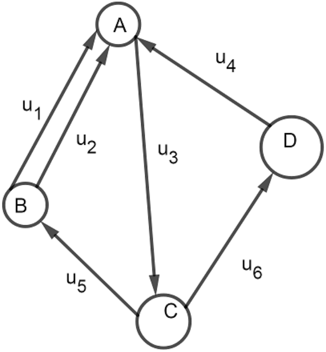
Ví dụ

Ví dụ. Cho H là đồ thị vô hướng có 34 cạnh, 3 đỉnh bậc 6, một số đỉnh bậc 5 và các đỉnh còn lại có bậc 8. Hãy xác định số đỉnh của H.

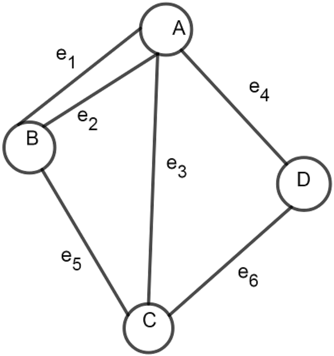
Ví dụ

Ví dụ. Vẽ đồ thị đơn vô hướng gồm 6 đỉnh với bậc 2, 2, 3, 3, 3, 5.

3. Biểu diễn đồ thị



G



H

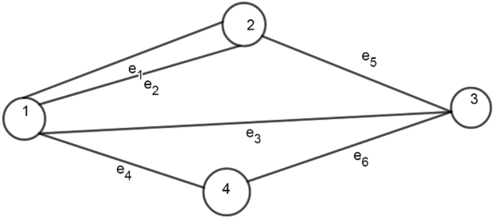
Ma trận liên kết

Định nghĩa

Cho G=(V,E) với V =1,..,n và E =e 1 ,. . . e m . Ma trận liên kết (incidence matrix) của G là ma trận $A = (a_i j)$ cấp nxm được định nghĩa như sau:

- $$a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ nếu i kề với } e_j \\ 0 \text{ nếu i không kề với } e_j \end{cases}$$
- Nếu G có hướng thì $a_i j \in \{-1, 0, 1\}$ xác định bởi

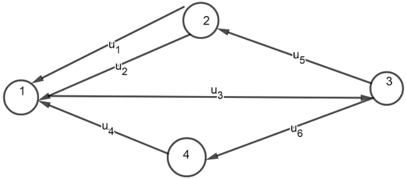
$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ nếu } e_j \text{ rời khỏi i} \\ -1 \text{ nếu } e_j \text{ đi vào i} \\ 0 \text{ nếu } e_j \text{ không kề với i} \end{cases}$$



$$A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Hỏi. Có nhận xét gì về các số trên dòng và trên cột?

- Bậc của đỉnh i = tổng các số trên dòng i
- Mỗi cột luôn có tổng =2



$$A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Hỏi. Có nhận xét gì về các số trên dòng và trên cột?

- $deg^+(i)$= tổng các số 1 trên dòng i
- $deg^-(i)$ = tổng các số -1 trên dòng i
- Mỗi cột luôn có một số 1 và một số -1

Ma trận liên kết

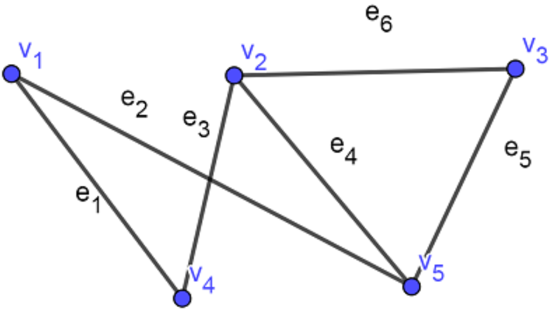
Ví dụ

Cho G là đồ thị có ma trận liên kết

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Hãy vẽ đồ thị G.

Đáp án



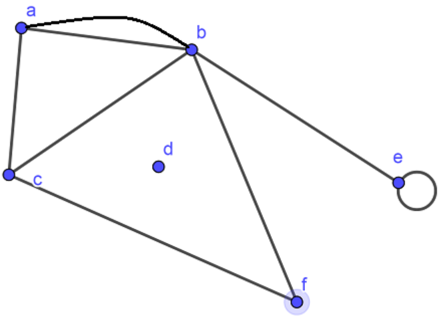
Ma trận kề

Định nghĩa

Cho G=(V,E) với $V = \{1, .., n\}$. Ma trận kề (adjacency matrix) của G là ma trận vuông $A = (a_{ij})$cấp n xác định bởi a_{ij} = số cạnh từ đỉnh i đến j.

Ví dụ

Tìm ma trận kề của đồ thị sau ?



$$
\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Chú ý

Với đồ thị vô hướng, nếu đỉnh i có 1 khuyên thì a_{ii} được tính thêm 2.

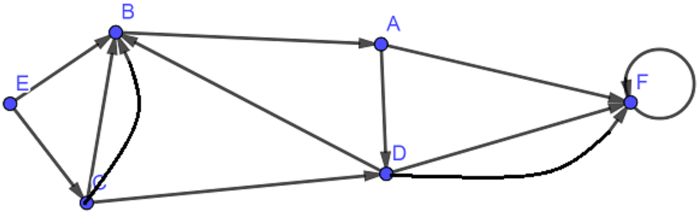
Tính chất

1. Ma trận kề của đồ thị vô hướng là ma trận đối xứng $a_{ij} = a_{ji}$.
2. Nếu đồ thị vô hướng:
   Tổng dòng thứ i = Tổng cột thứ i = bậc của đỉnh i
3. Nếu đồ thị có hướng:
   - Tổng dòng i = nửa bậc ngoài của i
   - Tổng cột i =nửa bậc trong của i

Ma trận kề

Ví dụ

Lập ma trận kề của đồ thị sau:



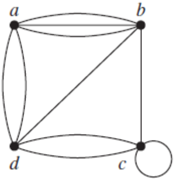
Ví dụ

Cho đồ thị vô hướng G với ma trận kề sau:

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Hãy vẽ đồ thị G.

Đáp án



Đẳng cấu đồ thị

Xét hai đồ thị sau: chúng giống nhau hay khác nhau?