Chương 4

HỆ THỨC ĐỆ QUY

Nội dung

Chương 4. HỆ THỨC ĐỆ QUY

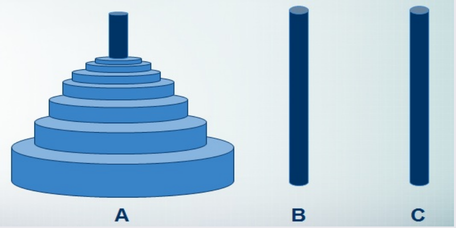
1. **Giới thiệu**

2. **Hệ thức đệ quy tuyến tính với hệ số hằng**

3. **Nghiệm của hệ thức đệ quy tuyến tính thuần nhất**

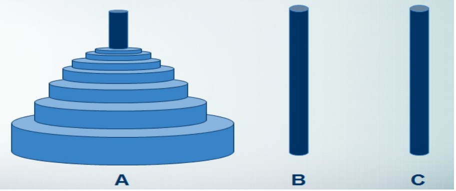
4.1. Giới thiệu

Ví dụ. Tháp Hà Nội



Có 3 cọc A, B, C và n đĩa với đường kính đôi một khác nhau. Nguyên tắc đặt đĩa vào cọc là: mỗi đĩa chỉ được chồng lên đĩa lớn hơn nó.

Ban đầu, cả n đĩa được đặt chồng lên nhau ở cọc A, hai cọc B và C để trống. Vấn đề đặt ra là chuyển cả n đĩa ở cọc A sang cọc C (có thể qua trung gian cọc B), mỗi lần chỉ chuyển được một đĩa. Ta gọi x_n là số lần chuyển đĩa, tìm x_n?



Giải. Với $n = 1$, ta có $x_1 = 1$.

Với $n > 1$, trước hết ta chuyển $n - 1$ đĩa bên trên sang cọc B qua trung gian cọc C (giữ nguyên đĩa thứ n dưới cùng ở cọc A). Số lần chuyển $n - 1$ đĩa đó là x_{n-1}. Sau đó ta chuyển đĩa thứ n từ cọc A sang cọc C. Cuối cùng ta chuyển $n - 1$ đĩa từ cọc B sang cọc C (cọc A làm trung gian). Số lần chuyển $n - 1$ đĩa đó lại là x_{n-1}.

Như vậy số lần chuyển toàn bộ n đĩa từ A sang C là:

$$\boldsymbol{x_{n-1} + 1 + x_{n-1} = 2x_{n-1} + 1}.$$

Nghĩa là

$$\begin{cases} x_1 & = & 1 \\ x_n & = & 2x_{n-1} + 1 \quad \text{với } n > 1 \end{cases}$$

Ví dụ. Một cầu thang có n bậc. Mỗi bước đi gồm 1 hoặc 2 bậc. Gọi x_n là số cách đi hết cầu thang. Tìm x_n?

Giải. Với $n = 1$, ta có $x_1 = 1$. Với $n = 2$, ta có $x_2 = 2$.

Với $n > 2$, để khảo sát x_n ta chia thành hai trường hợp loại trừ lẫn nhau:

- **Trường hợp 1.** Bước đầu tiên gồm 1 bậc. Khi đó, cầu thang còn $n-1$ bậc nên số cách đi hết cầu thang là x_{n-1}.
- **Trường hợp 2.** Bước đầu tiên gồm 2 bậc. Khi đó, cầu thang còn $n-2$ bậc nên số cách đi hết cầu thang trong là x_{n-2}.

Theo nguyên lý cộng, số cách đi hết cầu thang là $x_{n-1} + x_{n-2}$. Do đó ta có:

$$\boldsymbol{x_n = x_{n-1} + x_{n-2}}$$

Như vậy

$$\begin{cases} x_1 = 1, x_2 = 2; \\ x_n = x_{n-1} + x_{n-2} \quad \text{với } n > 2. \end{cases}$$

4.2. Hệ thức đệ quy tuyến tính với hệ số hằng

Định nghĩa. Một ***hệ thức đệ quy tuyến tính cấp k với hệ số hằng*** là một hệ thức có dạng:

$$\boldsymbol{a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + \ldots + a_k x_{n-k} = f_n} \qquad \textbf{(1)}$$

trong đó

- $a_0 \neq 0, a_1, \ldots, a_k$ là các hệ số thực;
- $\{f_n\}$ là một dãy số thực cho trước;
- $\{x_n\}$ là dãy ẩn nhận các giá trị thực.

Trường hợp dãy $\boldsymbol{f_n = 0}$ với mọi n thì **(1)** trở thành

$$\boldsymbol{a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + \ldots + a_k x_{n-k} = 0} \qquad \textbf{(2)}$$

Ta nói **(2)** là một ***hệ thức đệ quy tuyến tính thuần nhất cấp k với hệ số hằng***.

Ví dụ.

- $2x_n - 5x_{n-1} + 2x_{n-2} = -n^2 - 2n + 3 \longrightarrow$ tuyến tính cấp 2.
- $x_n - 3x_{n-1} + 2x_{n-3} = 20 + n2^{n-2} + 3^n \longrightarrow$ tuyến tính cấp 3.
- $2x_{n+2} + 5x_{n+1} + 2x_n = (35n + 51)3^n \longrightarrow$ tuyến tính cấp 2.
- $x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 0 \longrightarrow$ tuyến tính thuần nhất cấp 2.

Định nghĩa. Xét hệ thức đệ quy tuyến tính cấp k

$$a_0x_n + a_1x_{n-1} + \ldots + a_kx_{n-k} = f_n \qquad (1)$$

Mỗi dãy $\{x_n\}$ thỏa (1) được gọi là một ***nghiệm*** của (1).

Nhận xét rằng mỗi nghiệm $\{x_n\}$ của (1) được hoàn toàn xác định bởi k giá trị ban đầu $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$.

Họ dãy số $\{x_n = x_n(C_1, C_2, \ldots, C_k)\}$ phụ thuộc vào k họ tham số $C_1, C_2, \ldots, C_k$ được gọi là ***nghiệm tổng quát*** của (1) nếu mọi dãy của họ này đều là nghiệm của (1).

Với k giá trị ban đầu $y_0, y_1, \ldots, y_{k-1}$, tồn tại duy nhất các giá trị của k tham số $C_1, C_2, \ldots, C_k$ sao cho nghiệm $\{x_n\}$ tương ứng thỏa

$$x_0 = y_0,\ x_1 = y_1,\ \ldots\ , x_{k-1} = y_{k-1} \qquad (*)$$

Khi đó, nghiệm $\{x_n\}$ tương ứng được gọi là ***nghiệm riêng*** ứng với điều kiện ban đầu $(*)$.

Giải một hệ thức đệ quy là đi **tìm nghiệm tổng quát** của nó; nhưng nếu hệ thức đệ quy có kèm theo điều kiện ban đầu, ta phải **tìm nghiệm** thỏa điều kiện ban đầu đó.

Ví dụ.

- $2x_n - 3x_{n-1} = 0$ có nghiêm tổng quát là $x_n = C\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$.
- $\begin{cases} x_n - 5x_{n-1} + 6x_{n-2} = 0; \\ x_0 = 4; \\ x_1 = 9. \end{cases}$ có nghiệm là $x_n = 3 \cdot 2^n + 3^n$.

Lưu ý. Trong phạm vi của chương trình ta chỉ xét các hệ thức đệ quy tuyến tính (cấp 1 và 2) với hệ số hằng.

4.3. Nghiệm của HTĐQTT thuần nhất

Xét hệ thức đệ quy tuyến tính thuần nhất

$$a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + \ldots + a_k x_{n-k} = 0 \qquad \mathbf{(1)}$$

Phương trình đặc trưng của **(1)** là phương trình bậc k định bởi

$$\boldsymbol{a_0\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + \ldots + a_k = 0} \qquad (*)$$

▷ **Trường hợp $\boldsymbol{k = 1}$**. Phương trình đặc trưng $(*)$ trở thành

$$\boldsymbol{a_0\lambda + a_1 = 0}$$

nên có nghiệm là

$$\lambda_0 = -\frac{a_1}{a_0}.$$

Khi đó, **(1)** có nghiệm tổng quát là: $\boldsymbol{x_n = C \cdot \lambda_0^n}$.

▷ **Trường hợp $\boldsymbol{k = 2}$**. Phương trình đặc trưng $(*)$ trở thành

$$\boldsymbol{a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0} \qquad (*)$$

Người ta chứng minh được kết quả sau:

- Nếu $(*)$ có hai nghiệm thực phân biệt λ_1 và λ_2 thì **(1)** có nghiệm tổng quát là:

$$\boldsymbol{x_n = C_1 \cdot \lambda_1^n + C_2 \cdot \lambda_2^n}$$

- Nếu $(*)$ có nghiệm kép thực λ_0 thì **(1)** có nghiệm tổng quát là

$$\boldsymbol{x_n = (C_1 + nC_2) \cdot \lambda_0^n}$$

- Nếu $(*)$ có hai nghiệm phức liên hợp được viết dưới dạng

$$\lambda = r(\cos\varphi \pm i\,\sin\varphi)$$

thì **(1)** có nghiệm tổng quát là

$$\boldsymbol{x_n = r^n(A\cos n\varphi + B\sin n\varphi)}$$

Ví dụ. Giải hệ thức đệ quy $\begin{cases} x_n - 2x_{n-1} = 0 \\ x_0 = 5. \end{cases}$ **(1)**

Giải. Phương trình đặc trưng là $\lambda - 2 = 0$ có nghiệm là $\lambda = 2$. Suy ra **(1)** có nghiệm tổng quát là $\boldsymbol{x_n = C \cdot 2^n}$.

Từ điều kiện $x_0 = 5$ ta có $C = 5$. Suy ra nghiệm của $(*)$ là $\boldsymbol{x_n = 5 \cdot 2^n}$.

Ví dụ. Tìm nghiệm của $\begin{cases} x_n = 5x_{n-1} - 6x_{n-2}; \\ x_0 = 4; \\ x_1 = 9. \end{cases}$ **(2)**

Giải.

$$\begin{aligned} & x_n = 5x_{n-1} - 6x_{n-2} \\ \Leftrightarrow\ & x_n - 5x_{n-1} + 6x_{n-2} = 0 \end{aligned}$$

Phương trình đặc trưng

$$\boldsymbol{\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0}$$

có 2 nghiệm thực phân biệt $\lambda_1 = 2$ và $\lambda_2 = 3$. Suy ra **(2)** có nghiệm tổng quát là

$$\boldsymbol{x_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 3^n}.$$

Vì $x_0 = 4$; $x_1 = 9$ nên $\begin{cases} C_1 + C_2 = 4; \\ 2C_1 + 3C_2 = 9. \end{cases}$ Suy ra $C_1 = 3, C_2 = 1$. Vậy nghiệm của hệ thức đệ quy là

$$\boldsymbol{x_n = 3 \cdot 2^n + 3^n}.$$

Ví dụ. Tìm nghiệm của $\begin{cases} 4x_{n+1} - 12x_n + 9x_{n-1} = 0; \\ x_0 = 2; \\ x_1 = 9. \end{cases}$ **(3)**

Giải. Phương trình đặc trưng

$$\mathbf{4\lambda^2 - 12\lambda + 9 = 0}$$

có 1 nghiệm thực kép là $\lambda_0 = 3/2$. Suy ra **(3)** có nghiệm tổng quát là

$$x_n = (C_1 + nC_2)\left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

Vì $x_0 = 2$; $x_1 = 9$ nên $\begin{cases} C_1 = 2; \\ \dfrac{3}{2}(C_1 + C_2) = 9. \end{cases}$ Suy ra $C_1 = 2, C_2 = 4$. Vậy nghiệm của hệ thức đệ quy là

$$x_n = (2 + 4n)\left(\frac{3}{2}\right)^n.$$