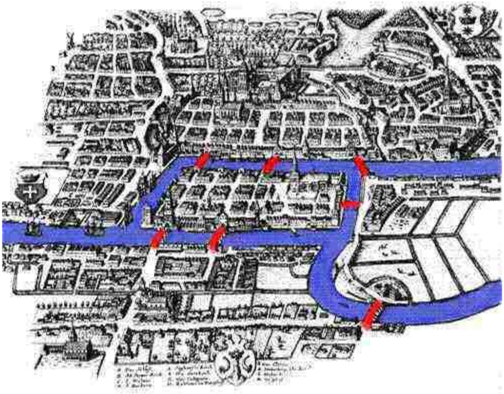
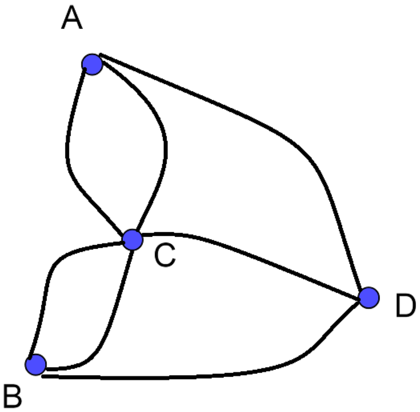
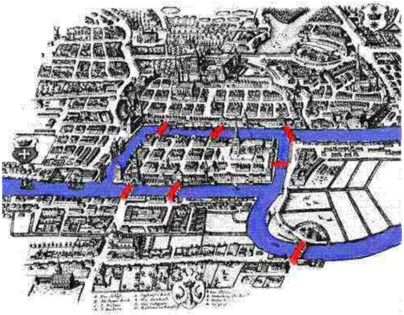
2. ĐỒ THỊ EULER

Leonhard Euler
(1707 – 1783)



Thành phố Konigsberg (Đức) bị chia thành 4 vùng do 2 nhánh của 1 dòng sông. Có 7 chiếc cầu nối những vùng này với nhau.
Bài toán: Xuất phát từ một vùng đi dạo qua mỗi chiếc cầu đúng một lần và trở về nơi xuất phát.
Năm 1736, nhà toán học Euler đã mô hình bài toán nầy bằng một đồ thị vô hướng với mỗi đỉnh ứng với một vùng, mỗi cạnh ứng với một chiếc cầu.


A
C
D
B



Liên thông

Định nghĩa

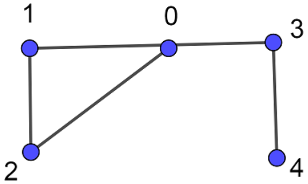
Cho G = (V,E) là đồ thị vô hướng. Trên V ta định nghĩa quan hệ tương đương như sau:

$$u \sim v \Leftrightarrow u = v \text{ hay có một đường đi từ u đến v.}$$

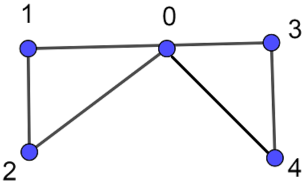
- Nếu $u \sim v$ thì ta nói hai đỉnh u và v liên thông với nhau
- Mỗi lớp tương đương được gọi là một thành phần liên thông của G
- Nếu G chỉ có một thành phần liên thông thì G gọi là liên thông

Định nghĩa

Đường đi Euler là đường đi qua tất cả các cạnh của đồ thị, mỗi cạnh đúng một lần.
Chu trình Euler là đường đi Euler có đỉnh đầu trùng với đỉnh cuối.
Đồ thị Euler là đồ thị có chứa một chu trình Euler.



Có chu trình Euler là 4 3 0 1 2 0



Có chu trình Euler là 4 3 0 1 2 0 4

Định lý Euler

Định lý

Cho G=(X, E) là đồ thị vô hướng liên thông. Khi đó
a) G là đồ thị Euler $\Leftrightarrow$ Tất cả các đỉnh của đồ G đều có bậc chẵn.
b) G có đường đi Euler và không có chu trình Euler $\Leftrightarrow$ G có đúng hai đỉnh bậc lẻ.

Nhận xét. Nếu G là đồ thị vô hướng liên thông chỉ có 2k đỉnh bậc lẻ thì ta có thể vẽ đồ thị bằng k nét.

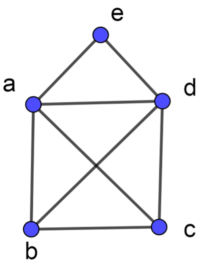
Định lý Euler

Định lý

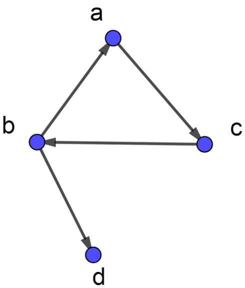
Cho G=(X, E) là đồ thị có hướng liên thông mạnh. Khi đó
a) G là đồ thị Euler $\Leftrightarrow d^+(x) = d^-(x) \forall x \in X$.
b) G có đường đi Euler $\Leftrightarrow$ *G có 2 đỉnh u, v sao cho:*

- $deg^+(u) = deg^-(u) + 1$
- $deg^-(v) = deg^+(v) + 1$
- $d^+(x) = d^-(x)$ *với mọi x khác u và v.*

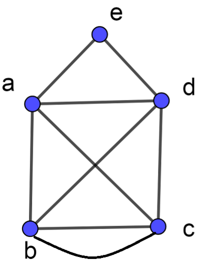
Ví dụ



Liên thông và có 2 đỉnh bậc lẻ và có đường đi Euler:
bacdaedbc



Có đường đi Euler:
bacbd



Liên thông và các đỉnh đều có bậc chẵn. Suy ra có chu trình Euler:
bacdaedbcb

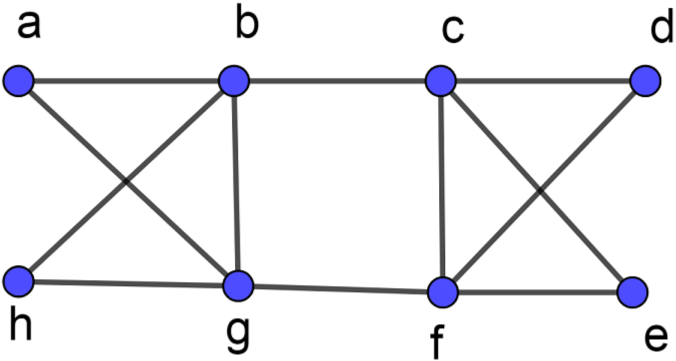
Thuật toán Fleurey

Thuật toán Fleurey dùng để tìm chu trình Euler của đồ thị từ một đỉnh bất kỳ, ta áp dụng 2 quy tắc sau:

- **Quy tắc 1.** Xóa các cạnh đã đi qua và các đỉnh cô lập nếu có.
- **Quy tắc 2.** Không bao giờ đi qua một cầu trừ khi không còn cách đi nào khác.

Ví dụ

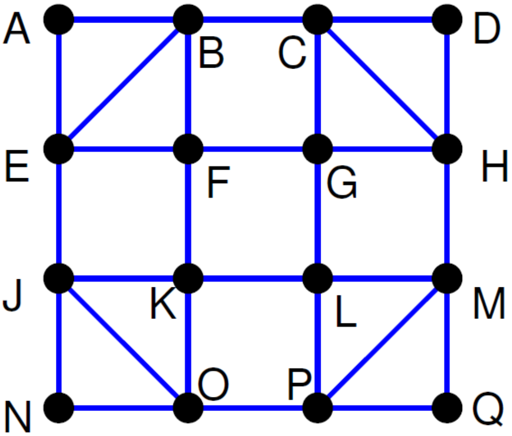
Đồ thị sau có là đồ thị Euler không. Nếu có, hãy tìm một chu trình Euler



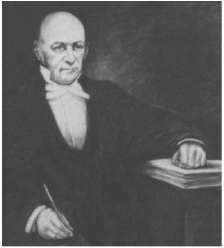
Đáp án. Chu trình Euler là: **a b c f d c e f g h b g a**

Ví dụ

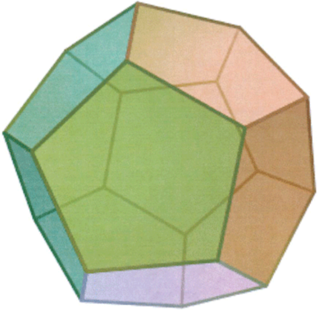
Đồ thị sau có là đồ thị Euler không. Nếu có, hãy tìm một chu trình Euler



3. ĐỒ THỊ HAMILTON



William Rowan Hamilton
(1805-1865)



Năm 1857 W. R. Hamilton đưa trò chơi sau đây: Trên mỗi đỉnh trong số 20 đỉnh của khối đa diện ngũ giác đều 12 mặt ghi tên một thành phố trên thế giới. Hãy tìm cách đi bằng các cạnh của khối đa diện để qua tất cả các thành phố, mỗi thành phố đúng một lần, sau đó trở về điểm xuất phát.

Một số bài toán

- Tổ chức tour du lịch sao cho người du lịch thăm quan mỗi thắng cảnh trong thành phố đúng một lần
- Bài toán mã đi tuần: Cho con mã đi trên bàn cờ vua sao cho nó đi qua mỗi ô đúng một lần.

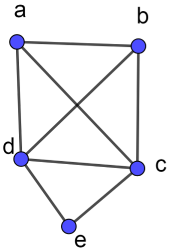
Định nghĩa

Đường đi Hamilton là đường đi qua tất cả các đỉnh của đồ thị mỗi đỉnh đúng một lần.

a. Định nghĩa tương tự cho chu trình Hamilton

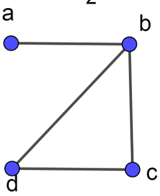
b. Đồ thi gọi là đồ thị Hamilton nếu nó có chu trình Hamilton

G_1



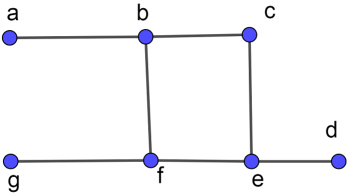
G_1 có đường đi
và chu trình Hamilton

G_2



G_2 có đường đi
nhưng không có
chu trình Hamilton

G_3



G_3 không có đường đi
và không có chu trình Hamilton

Một số điều kiện đủ

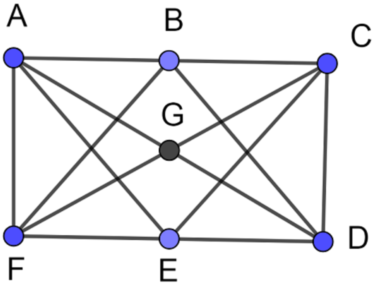
Định lý

Cho G =(V, E) là đồ thị đơn vô hướng có số đỉnh $n \geq 3$*. Khi đó*

- *Nếu* $deg(u) + deg(v) \geq n$ *với u và v là hai đỉnh không kề nhau tuỳ ý thì G là Hamilton.*
- *Nếu* $deg(u) \geq \frac{n}{2}$ *với mọi đỉnh u thì G là Hamilton.*

Ví dụ

Đây là đồ thị Hamilton?



Quy tắc xây dựng chu trình Hamilton

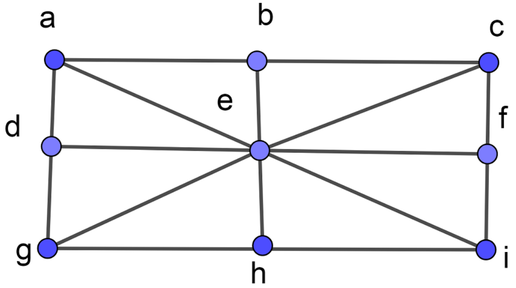
Quy tắc để xây dựng một chu trình Hamilton H hoặc chỉ ra đồ thị vô hướng không là Hamilton

- Quy tắc 1. Tất cả các cạnh kề với đỉnh bậc 2 phải ở trong H.
- Quy tắc 2. Không có chu trình con nào được tạo thành trong quá trình xây dựng H.
- Quy tắc 3. Khi chu trình Hamilton mà ta đang xây dựng đi qua đỉnh i thì xoá tất cả các cạnh kề với i mà ta chưa dùng. Điều này lại có thể cho ta một số đỉnh bậc 2 và ta lại dùng quy tắc 1.
- Quy tắc 4. Không có đỉnh cô lập hay cạnh treo nào được tạo nên sau khi áp dụng quy tắc 3.

Một số ví dụ

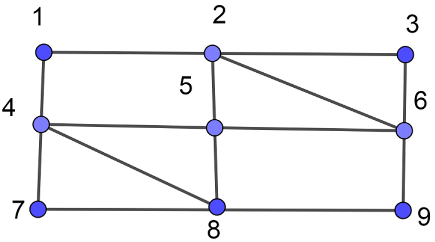
Ví dụ

Đồ thị sau có phải là đồ thị Hamilton không? Nếu có hãy tìm chu trình Hamilton.



Đáp án. Có, ví dụ **a, b, c, e, f, i, h, g, d, a.**

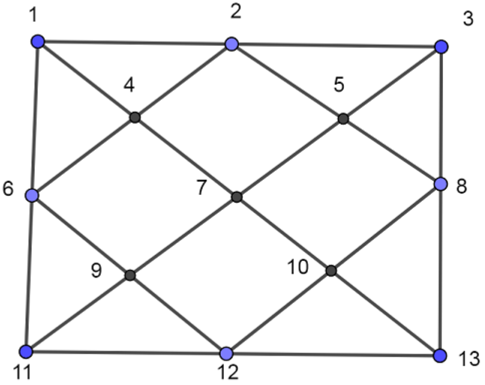
Đồ thị sau có phải là đồ thị Hamilton không?



Giải. Giả sử G có chu trình Hamilton H, theo quy tắc 1, tất cả các cạnh kề với đỉnh bậc 2 đều ở trong H: 12, 14, 23, 36, 47, 78, 69, 89. Khi đó ta có chu trình con là: 1, 2, 3, 6, 9, 8, 7, 4, 1. Vậy G không là đồ thị Hamilton

Ví dụ

Đồ thị sau có phải là đồ thị Hamilton không? Nếu có hãy tìm chu trình Hamilton



Ví dụ

Đồ thị sau có phải là đồ thị Hamilton không?