ĐỒ THỊ PHẲNG

NỘI DUNG

- Bài toán ba biệt thự và ba nhà máy
- Đồ thị phẳng
- Các điều kiện cho tính phẳng của đồ thị
- Sắc số của đồ thị phẳng

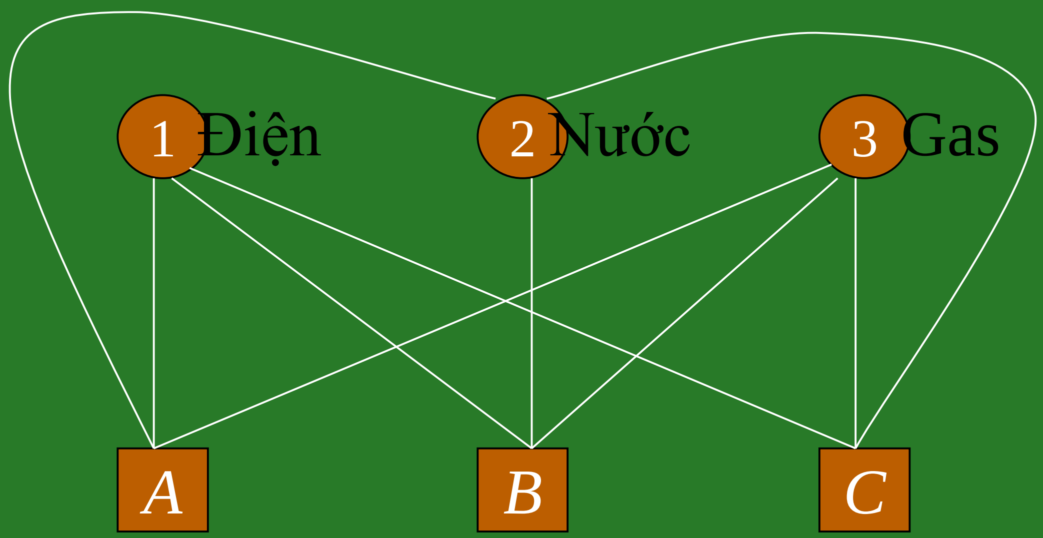
BÀI TOÁN BA BIỆT THỰ VÀ BA NHÀ MÁY

❖ Bài toán: Trong một thị trấn có ba biệt thự và ba nhà máy cung cấp: điện, nước và khí đốt.

Mỗi biệt thự đều muốn mắc đường cáp điện ngầm, đường ống cấp nước, đường ống cấp khí đốt riêng từ nhà mình đến ba nhà máy mà không gặp đường ống của các biệt thự khác.

Hỏi rằng có làm được những đường đi như thế hay không?

BÀI TOÁN BA BIỆT THỰ VÀ BA NHÀ MÁY (tiếp)



ĐỒ THỊ PHẲNG

❖ ***Định nghĩa***

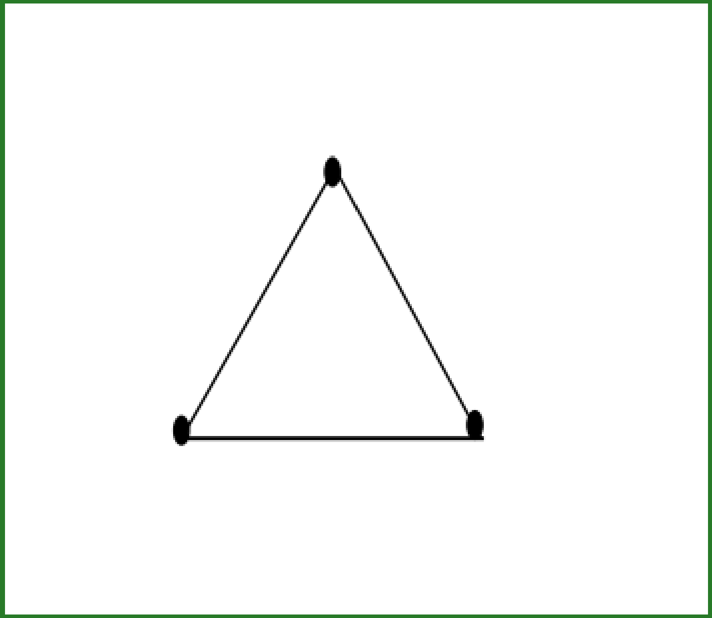
Một đồ thị vô hướng G được gọi là đồ thị *phẳng* nếu có thể biểu diễn nó trên mặt phẳng sao cho không có hai cạnh nào cắt nhau, trừ tại đỉnh.

- *Miền* của đồ thị phẳng G là một phần của mặt phẳng bị giới hạn bởi một chu trình của G.

- Miền không bị giới hạn của đồ thị G được gọi là *miền ngoài* của đồ thị.

ĐỒ THỊ PHẲNG (tiếp)

Ví dụ. Cho đồ thị



Khi đó:

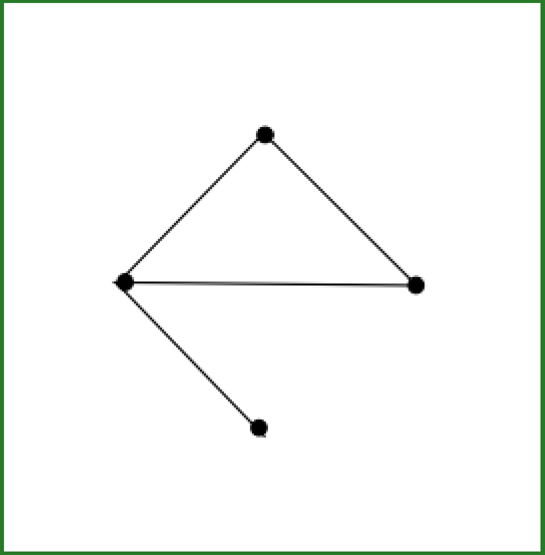
-Số đỉnh: 3

-Số cạnh: 3

-Số miền: 2

ĐỒ THỊ PHẲNG (tiếp)

Ví dụ. Cho đồ thị



Khi đó

-Số đỉnh: 4

-Số cạnh: 4

-Số miền: 2

Định lý Euler

❖Định lý Euler:

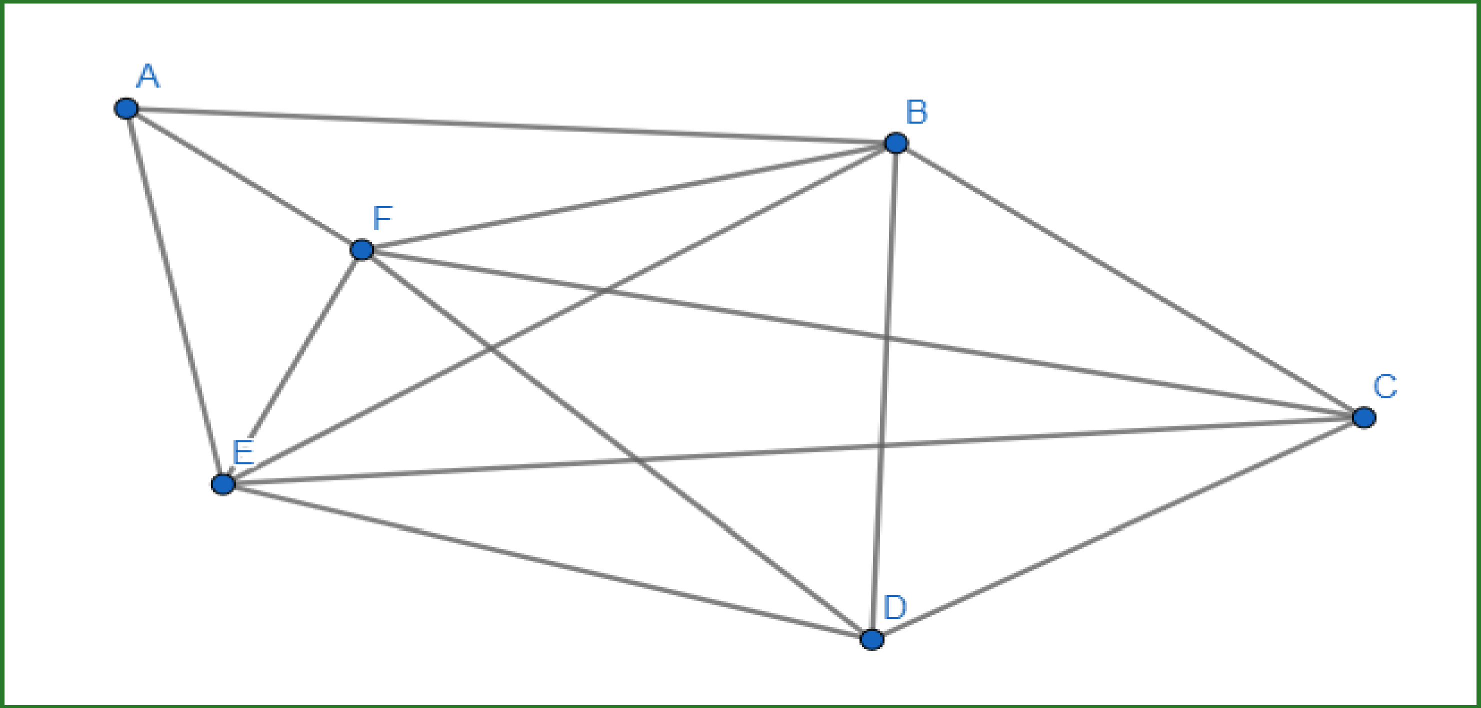
Cho G là đồ thị phẳng, liên thông với n đỉnh, q cạnh và r miền. Khi đó $\boldsymbol{n - q + r = 2}$.

❖Định lý:

Cho G là đồ thị phẳng, liên thông với n đỉnh, q cạnh. Khi đó $\boldsymbol{q \leq 3n - 6}$

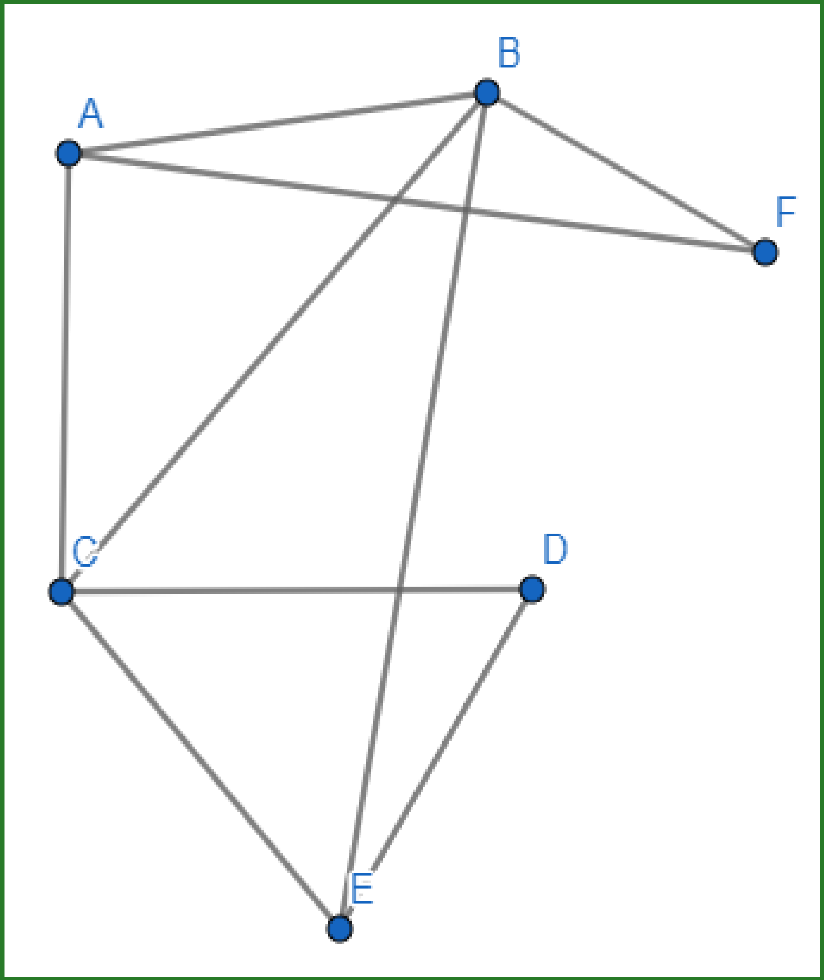
❖ Ví dụ

Chứng minh đồ thị sau không phẳng

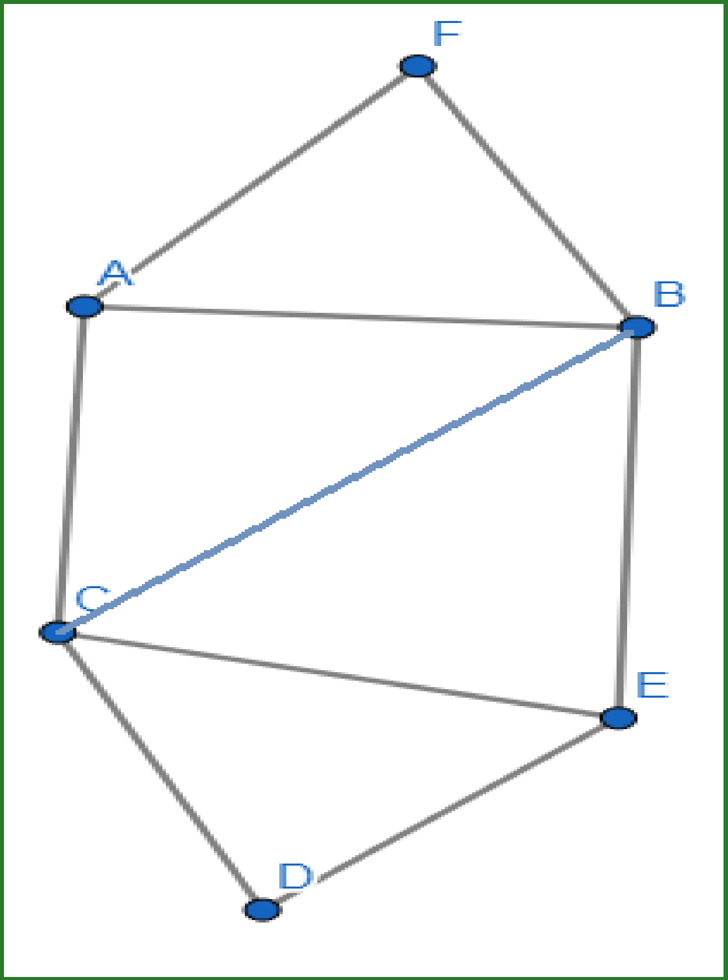


Giải. Đồ thị có 6 đỉnh (n=6) và 13 cạnh (q=13). Giả sử đồ thị là phẳng. Khi đó $13=q \le 3n-6=12$, mâu thuẫn. Do đó đồ thị đã cho không phẳng.

❖Ví dụ. Chứng minh đồ thị sau phẳng bằng cách vẽ lại đồ thị.



Giải.



CÁC ĐIỀU KIỆN CHO TÍNH PHẲNG CỦA ĐỒ THỊ

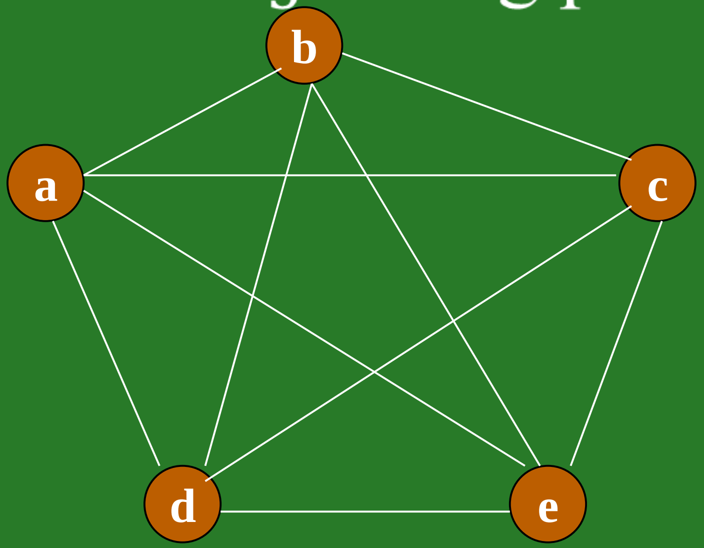
❖ ***Định lý***

Giả sử G là một đồ thị và G’ là đồ thị con của nó.

1. Đồ thị G phẳng thì G’ cũng phẳng.
2. Đồ thị G’ không phẳng thì G cũng không phẳng.

❖ Định lý: K_5 không phẳng.

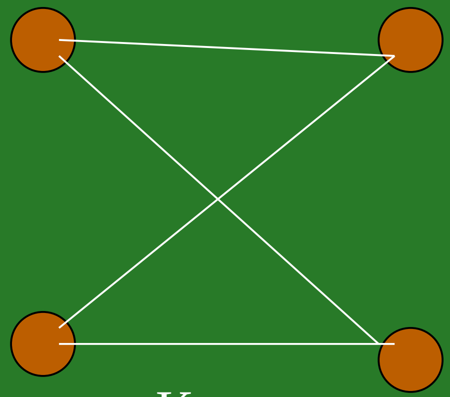
Chứng minh. Đồ thị K_5 có n=5, q=10. Giả sử $K_{5,5}$ phẳng. Khi đó ta có 10=$q \leq 3n - 6 = 9$, mâu thuẫn. Do đó K_5 không phẳng.



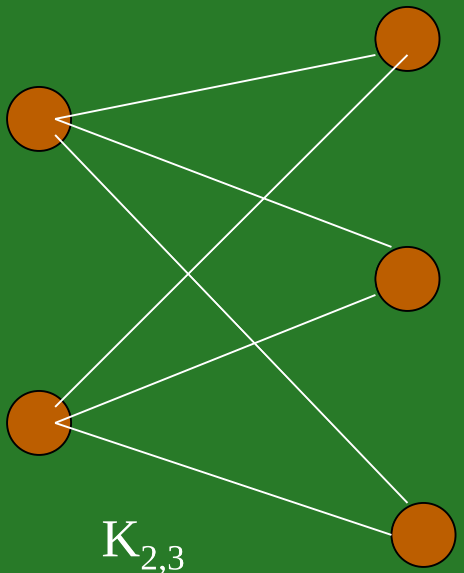
- Định lý: Cho G là một đồ thị phẳng. Khi đó G phải có ít nhất một đỉnh có bậc nhỏ hơn hoặc bằng 5.

CÁC ĐIỀU KIỆN CHO TÍNH PHẲNG CỦA ĐỒ THỊ (tiếp)

Đồ thị hai phần đầy đủ $K_{m,n}$ là một đơn đồ thị có $m+n$ đỉnh gồm m đỉnh "bên trái" và n đỉnh "bên phải" sao cho mỗi đỉnh "bên trái" đều kề với mọi đỉnh "bên phải".



$K_{2,2}$



$K_{2,3}$

Đồ thị đồng phôi

❖ Các phép biến đổi đồng phôi:

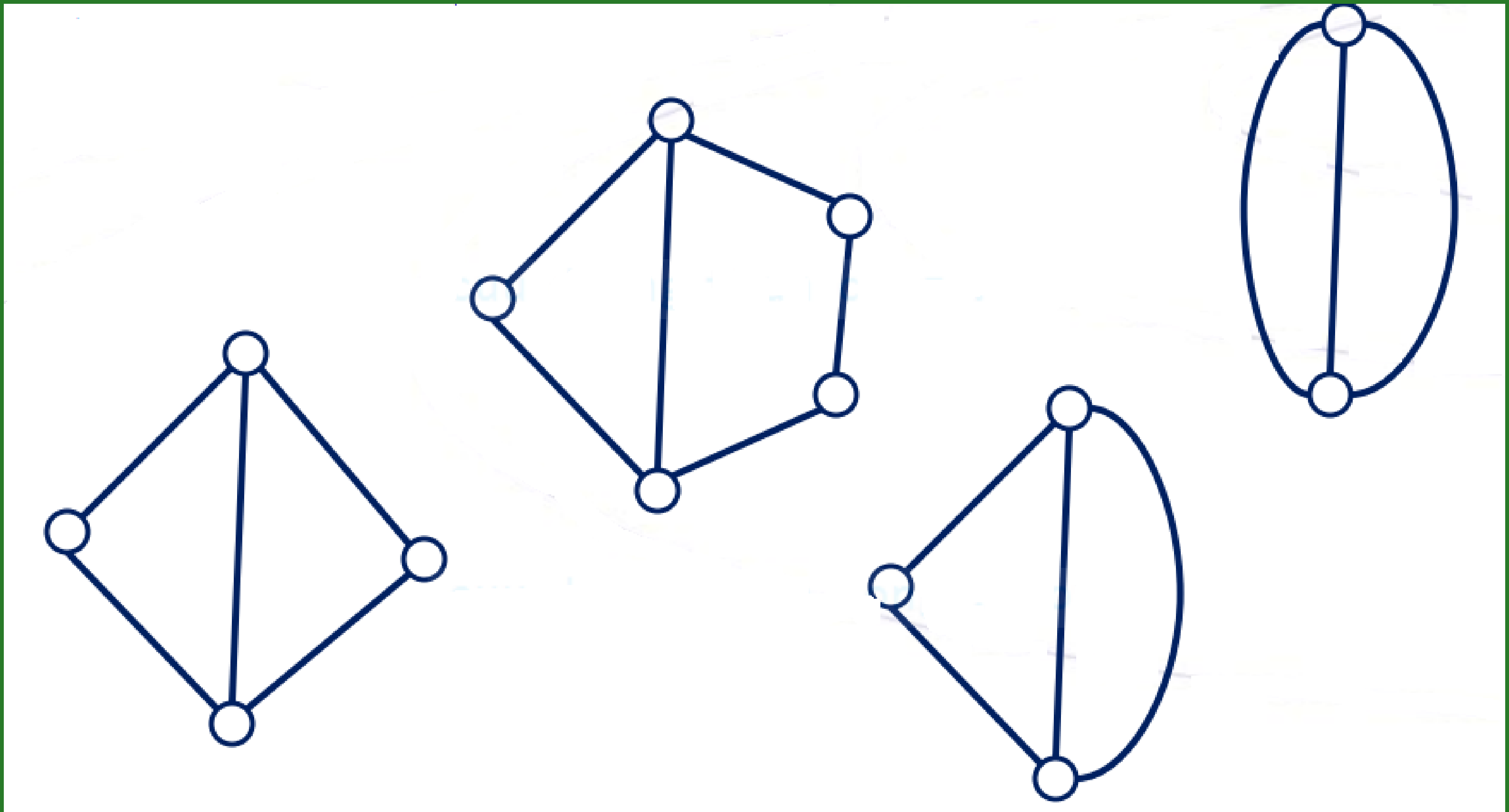
-Thêm một đỉnh nằm trên một cạnh

-Gộp 2 cạnh chung đỉnh bậc 2 thành một cạnh.

* Hai đồ thị được gọi là *đồng phôi* nếu mỗi đồ thị có được từ đồ thị kia bằng cách thực hiện một dãy các phép biến đổi đồng phôi

Đồ thị đồng phôi

❖ Ví dụ



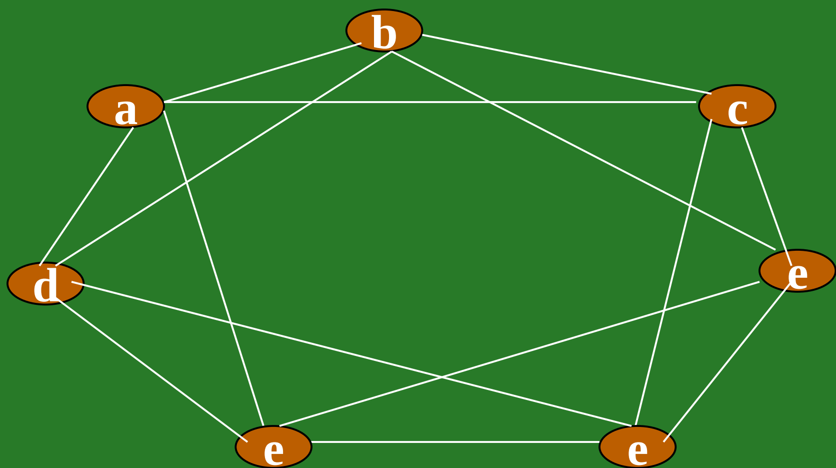
Định lý KURATOWSKY

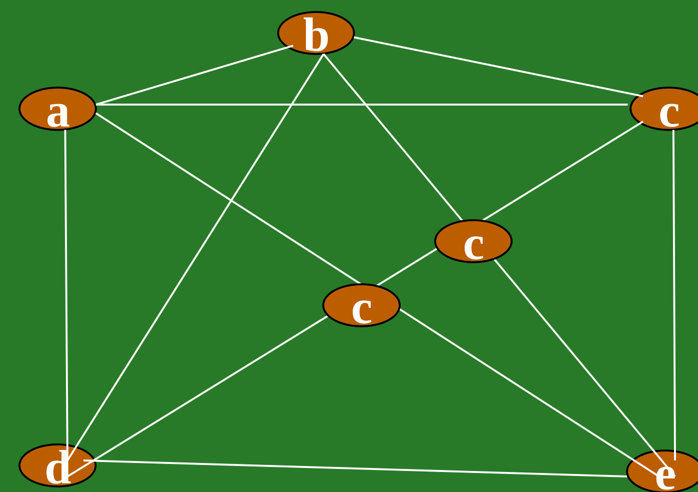
❖ Định lý Kuratowski:

Điều kiện cần và đủ để một đồ thị liên thông G có tính phẳng là G không chứa bất kỳ đồ thị con nào đồng phôi với K_5 hay $K_{3,3}$.

VÍ DỤ

Xét đồ thị sau đây (bên phải) và hình vẽ lại của nó (bên trái):





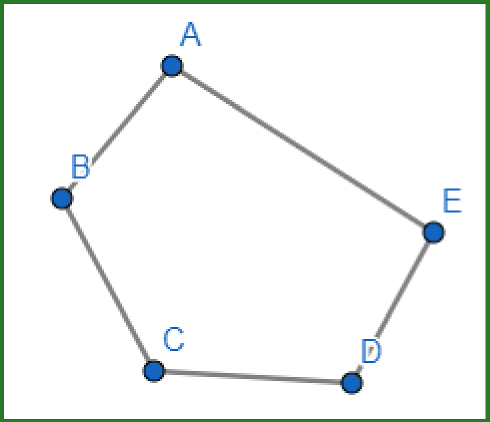
Đồ thị này chứa đồ thị con đồng phôi với K_5. Do vậy, nó không phẳng.

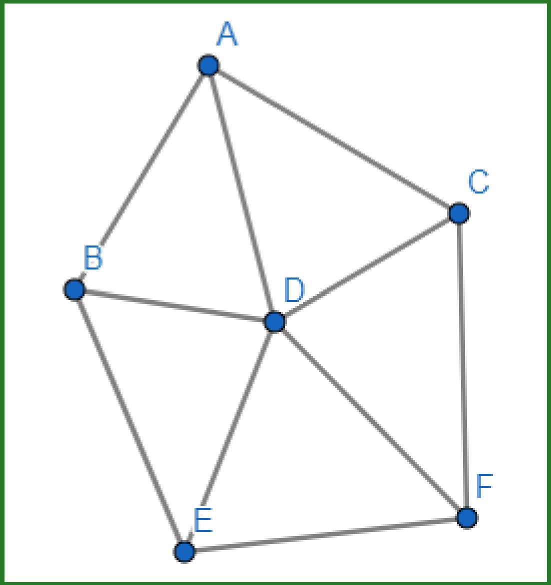
TÔ MÀU ĐỒ THỊ

- Định nghĩa: *Phép tô màu* đồ thị là một cách gắn cho mỗi đỉnh của đồ thị bằng một màu sao cho hai đỉnh kề nhau phải có màu khác nhau.
- *Sắc số* của đồ thị G, ký hiệu $\gamma(G)$, là số nguyên dương k nhỏ nhất sao cho tồn tại một phép tô màu cho G chỉ sử dụng k màu.
- Định lý: Mọi đồ thị phẳng đều có thể tô đúng bằng 4 màu.

TÔ MÀU ĐỒ THỊ

❖ Ví dụ





$\gamma(G)=3$

$\gamma(G)=4$

TÍNH CHẤT

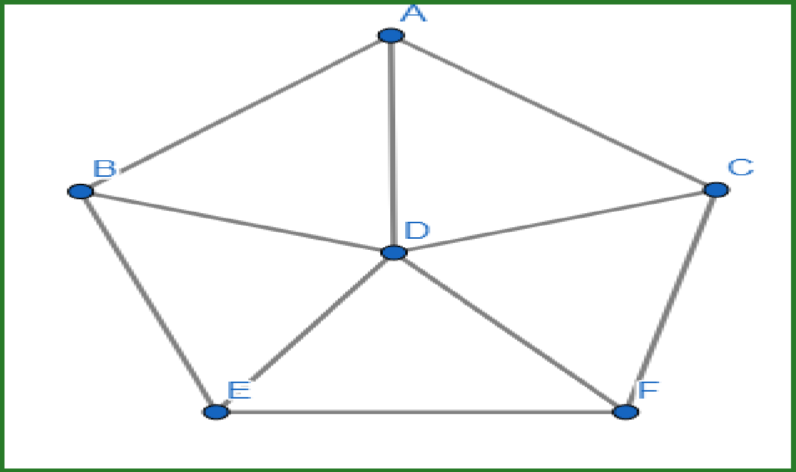
- Cho đồ thị G với n đỉnh. Khi đó $\gamma(G) \leq n$.
- Nếu đồ thị G có chứa ít nhất một cạnh không phải là khuyên thì $\gamma(G) \geq 2$.
- Đồ thị đủ N đỉnh K_N có sắc số là N. Nếu đồ thị G chứa một đồ thị con đẳng cấu K_R thì $\gamma(G) \geq R$
- Với mọi đồ thị G ta có $\gamma(G) \leq \Delta(G)+1$, trong đó $\Delta(G)$ là bậc của đỉnh cao nhất trong G.

Giải thuật tham lam tô màu đồ thị

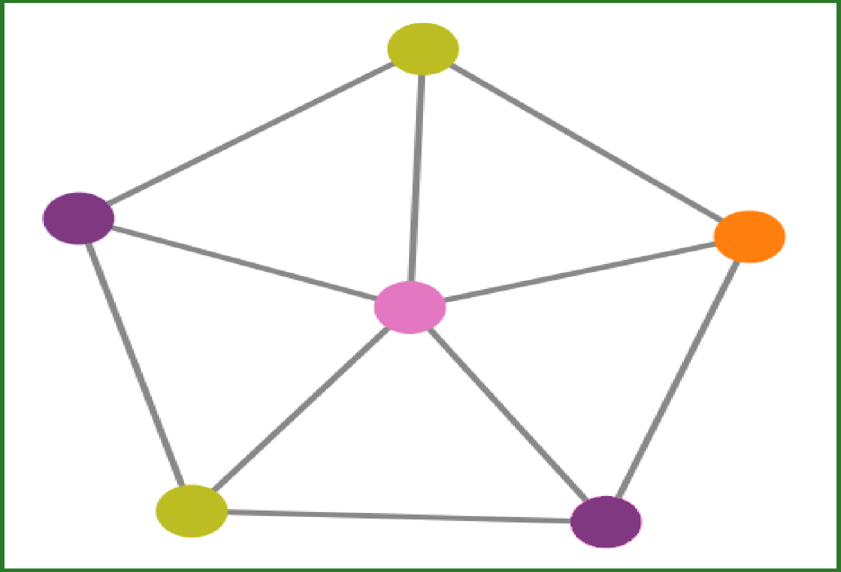
- Input: G(X,E)
- Output: Đồ thị được tô màu

1. Xác định bậc các đỉnh trong đồ thị; khởi động color=1.
2. Lặp lại trong khi còn đỉnh chưa được tô màu
   1. Tô màu tất cả các đỉnh có thể tô được bằng màu color theo thứ tự ưu tiên bậc từ cao đến thấp
   2. color = color + 1

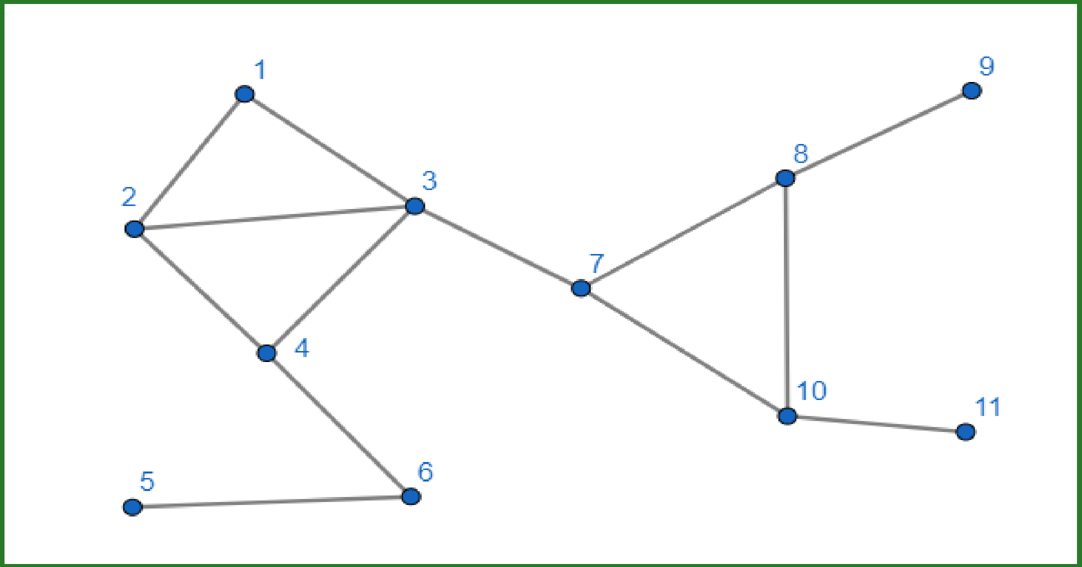
❖Ví dụ. Tô màu đồ thị sau



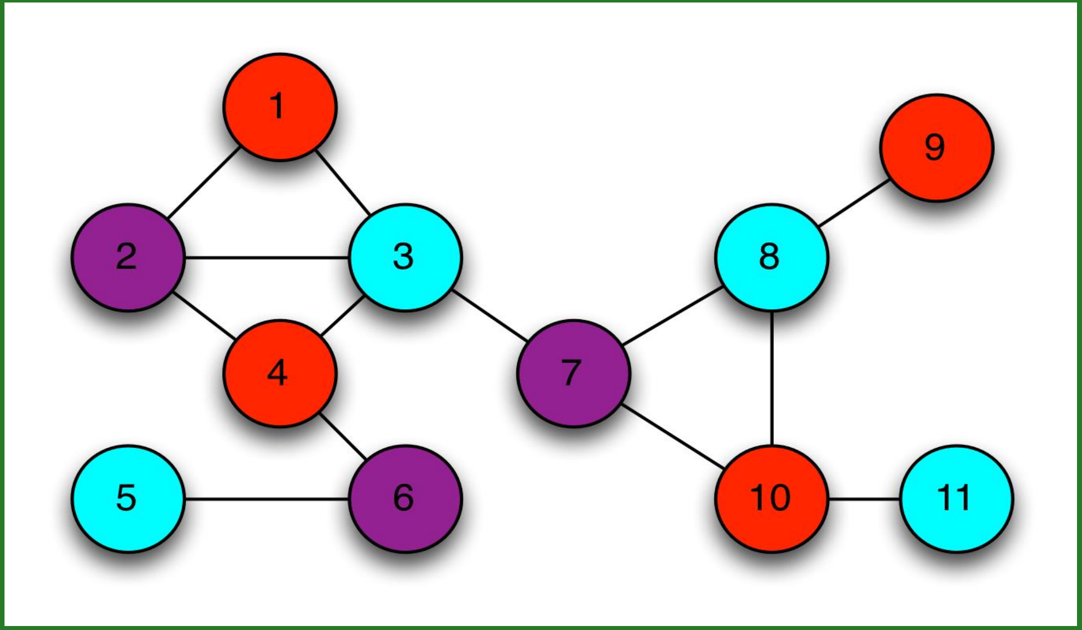
Giải.



❖Ví dụ. Tô màu đồ thị sau

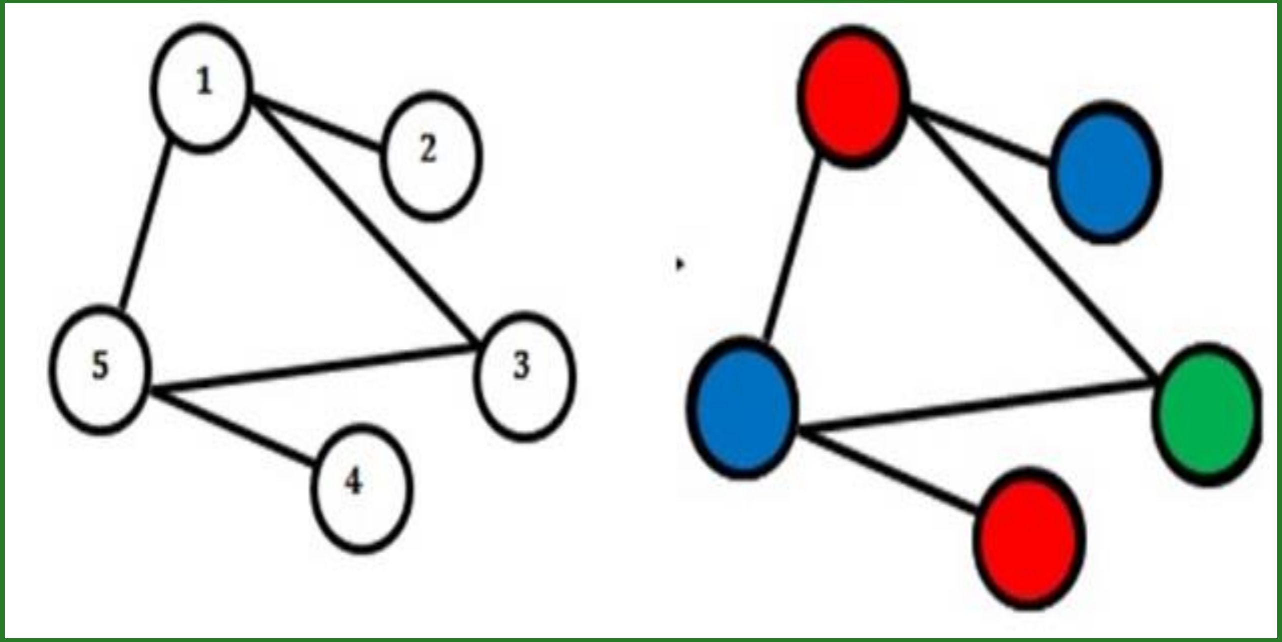


Giải.

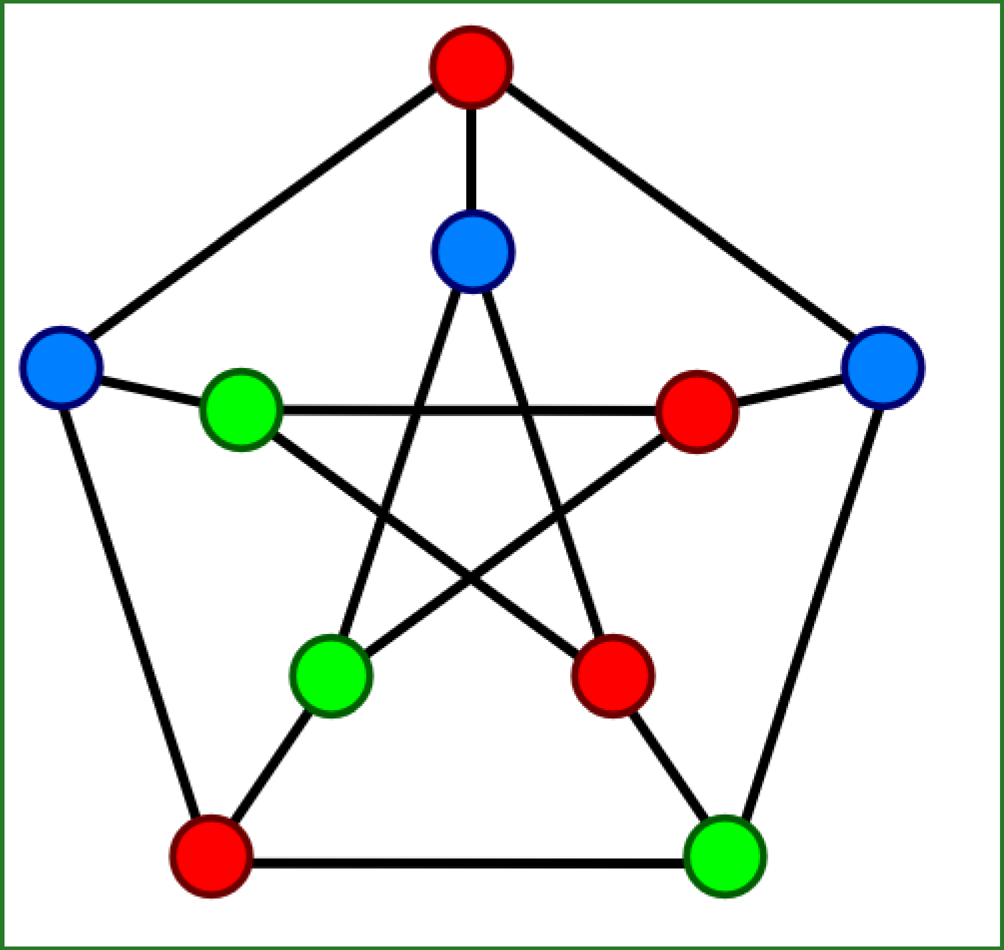


Tô màu đồ thị

❖ Ví dụ



❖Ví dụ



Bài toán lập lịch

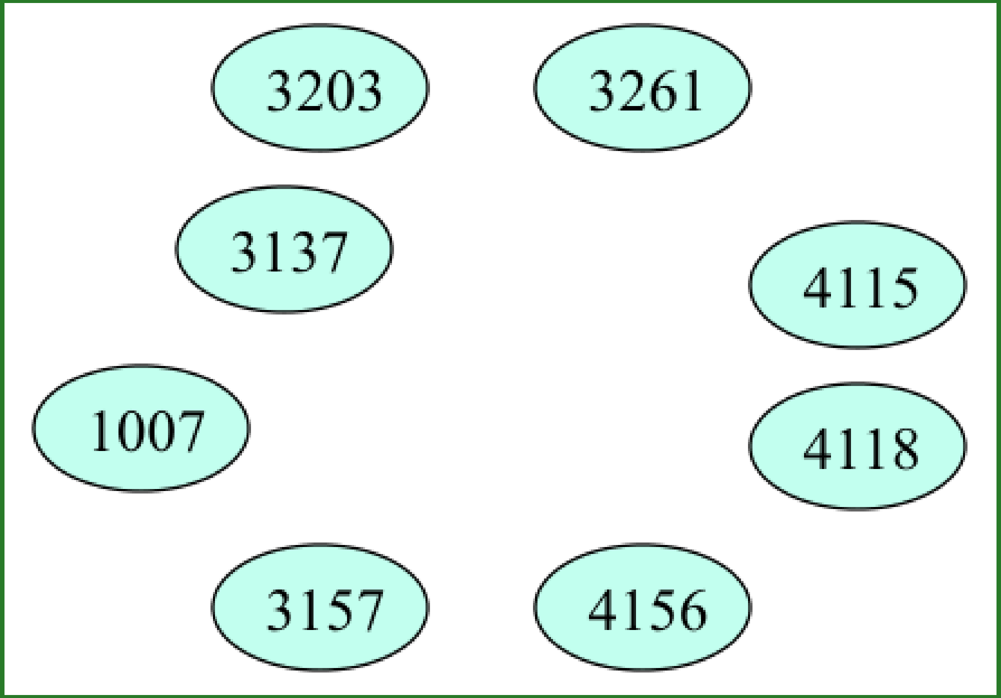
- ❖Bài toán: Ta cần lập lịch thi kết thúc môn học cho các chuyên đề có mã số: 1007, 3137, 3157, 3203, 3261, 4115, 4118, 4156.

Giả sử các môn học sau không có sinh viên nào đồng thời cùng thi (do điều kiện tiên quyết): 1007-3137, 1007-3157, 3137-3157, 1007-3203

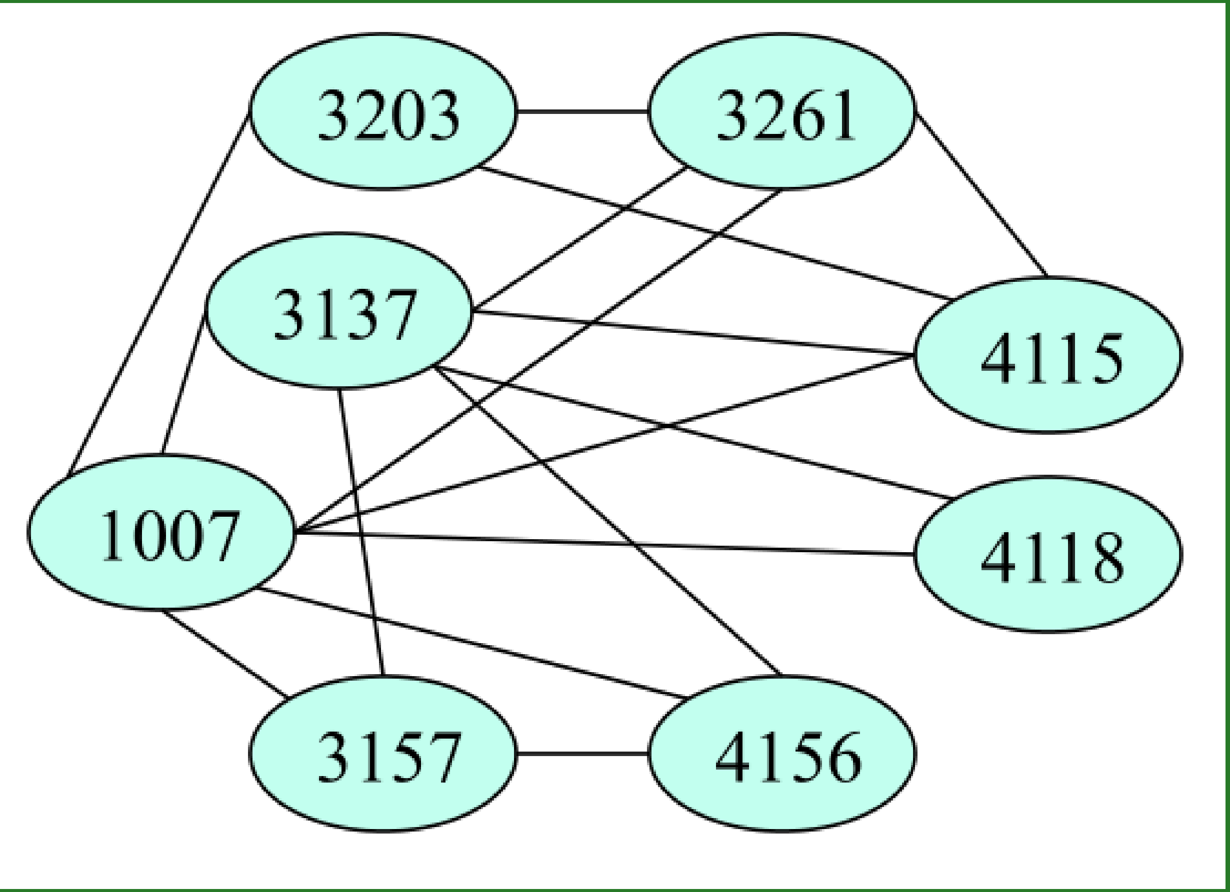
1007-3261, 3137-3261, 3203-3261, 1007-4115, 3137-4115, 3203-4115, 3261-4115, 1007-4118, 3137-4118,1007-4156, 3137-4156, 3157-4156.

Hỏi lịch thi gồm ít nhất bao nhiêu ngày? (Lịch thi phải đảm bảo mỗi sinh viên trong một ngày phải thi không quá 1 môn)

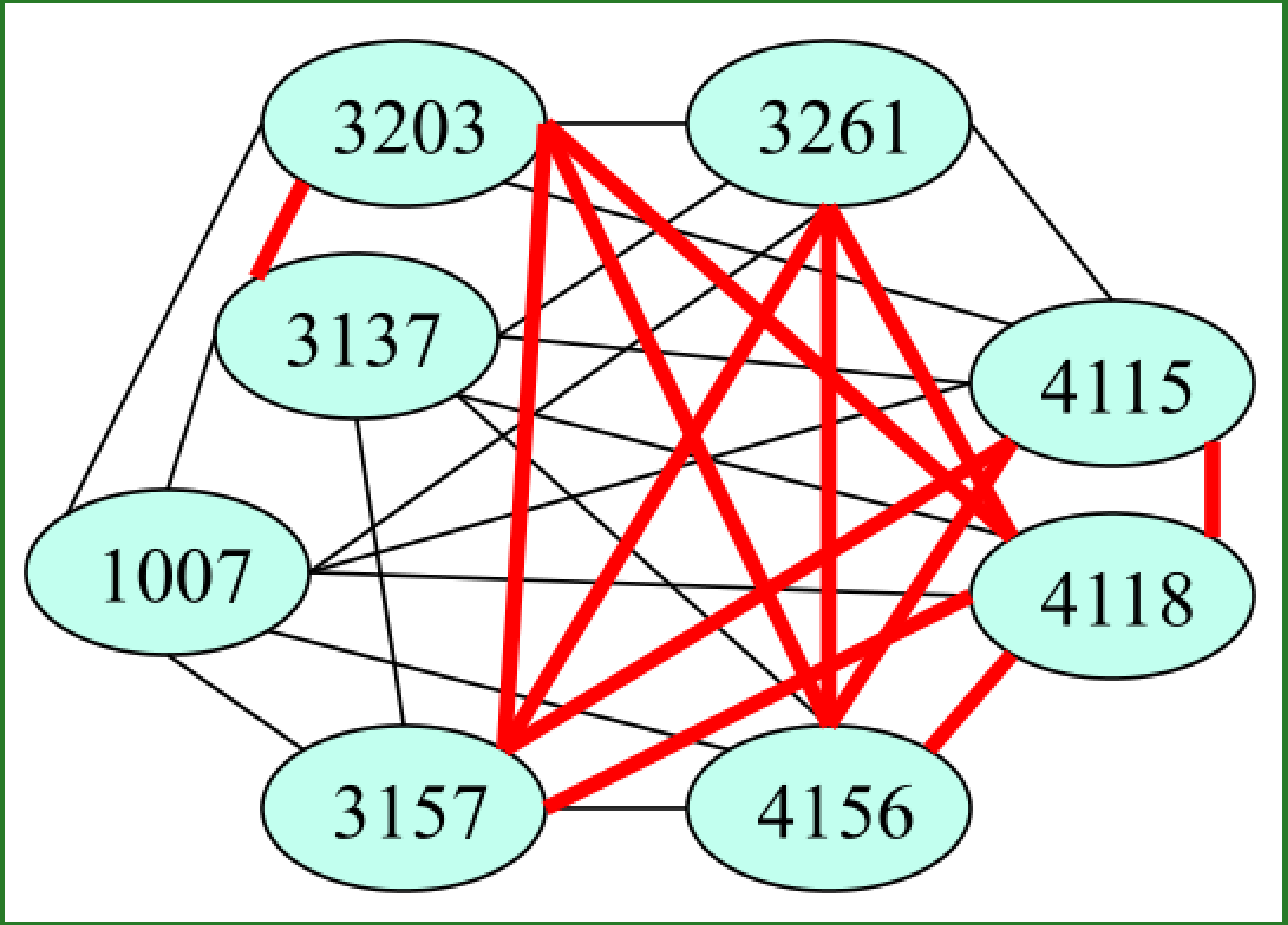
❖ Đưa bài toán về bài toán tô màu đồ thị: Các đỉnh tương ứng với các môn học, cạnh nối có giữa hai đỉnh nếu hai môn tương ứng có thể có chung sinh viên dự thi (vì thế không được tổ chức đồng thời):



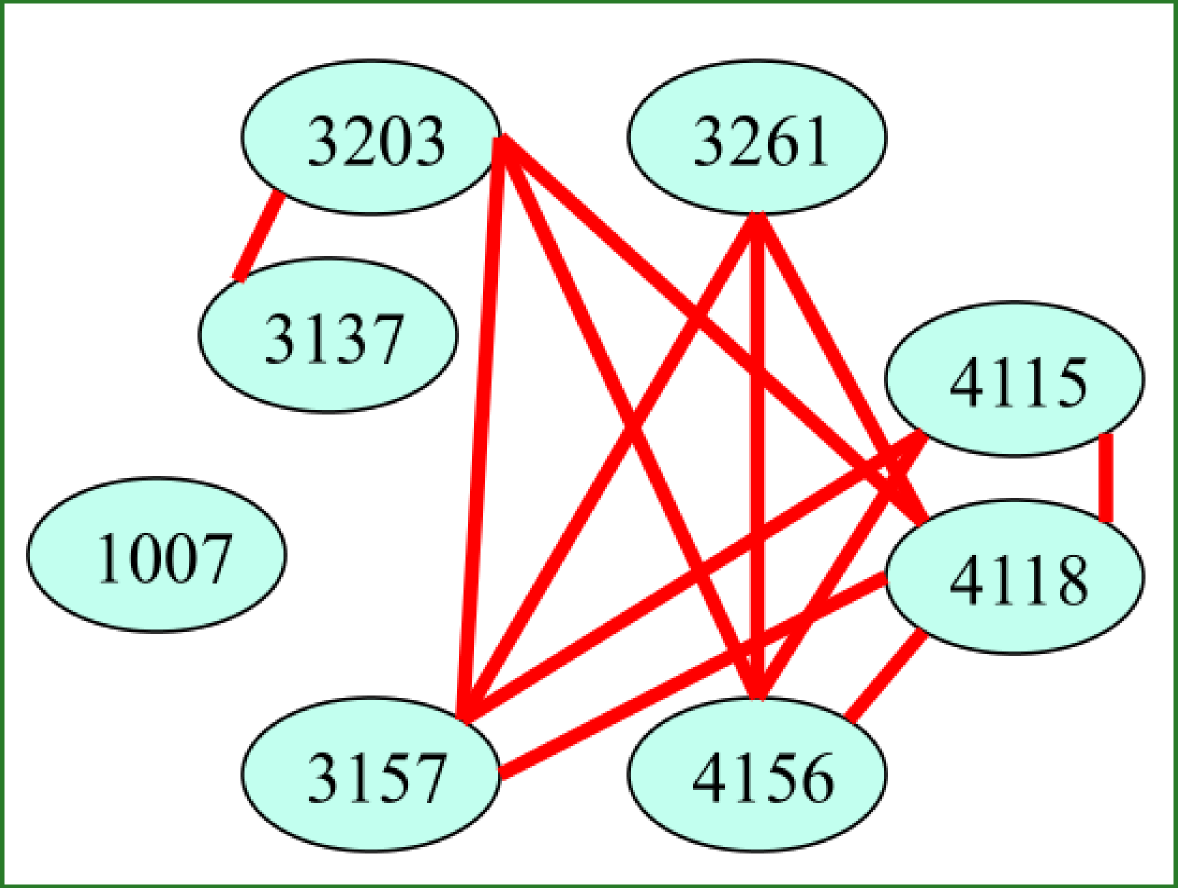
❖Trước hết ta đưa vào cạnh nối giữa các môn chắc chắn không có chung sinh viên (từ điều kiện tiên quyết)…



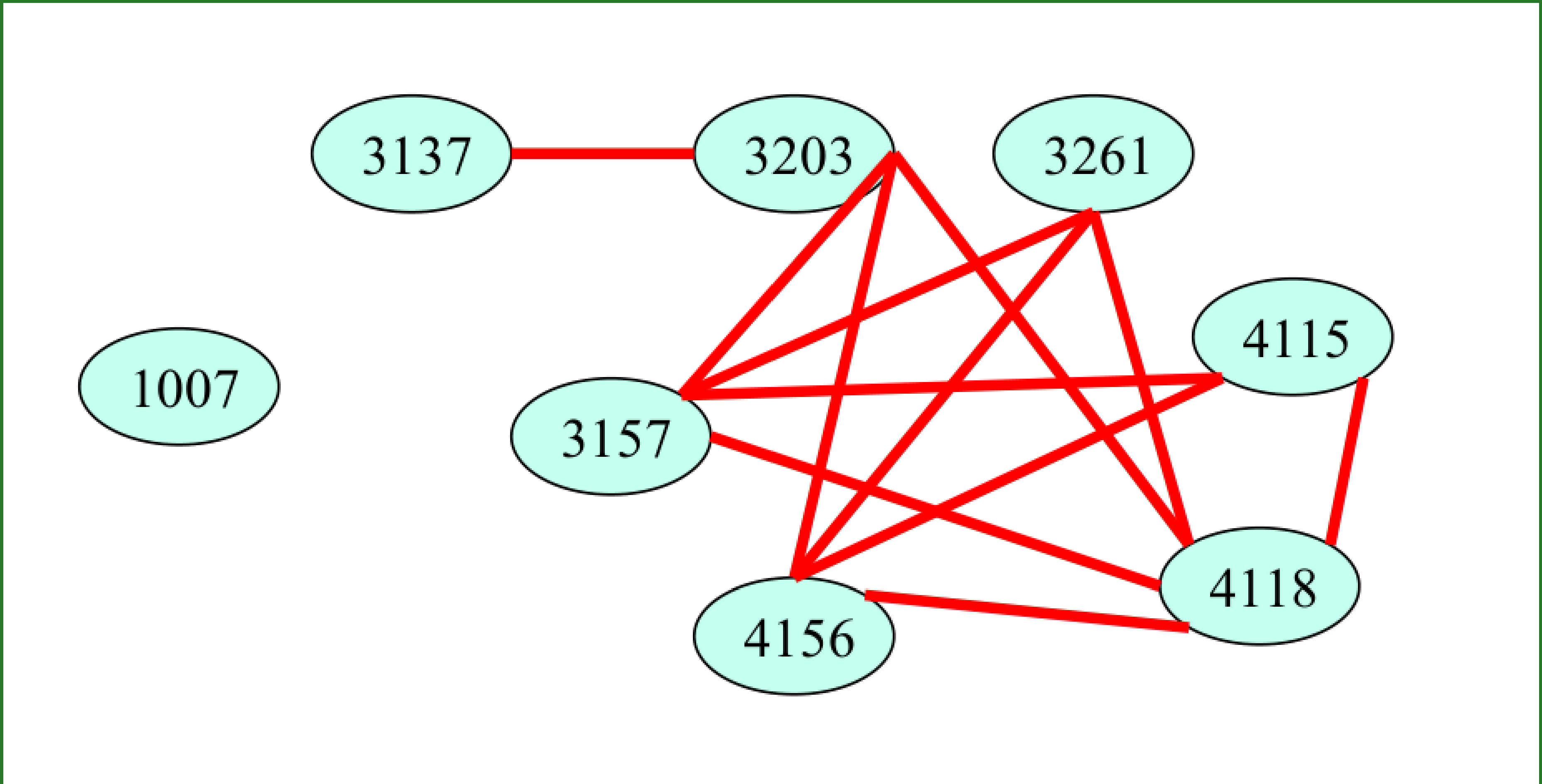
Sau đó xây dựng đồ thị bù



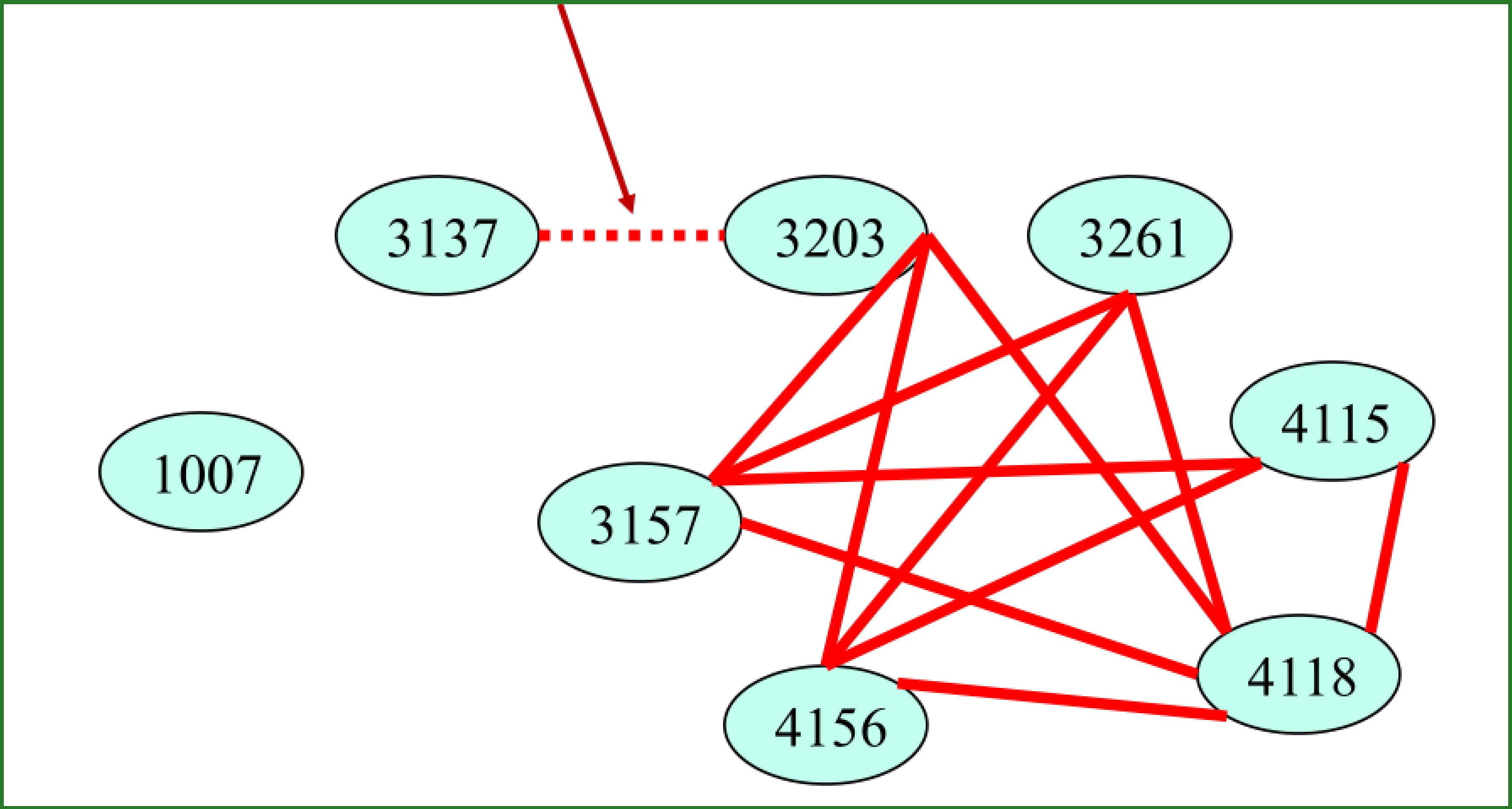
và sau đó làm việc với đồ thị bù (chỉ các môn học có cạnh nối mới có thể có chung sinh viên):



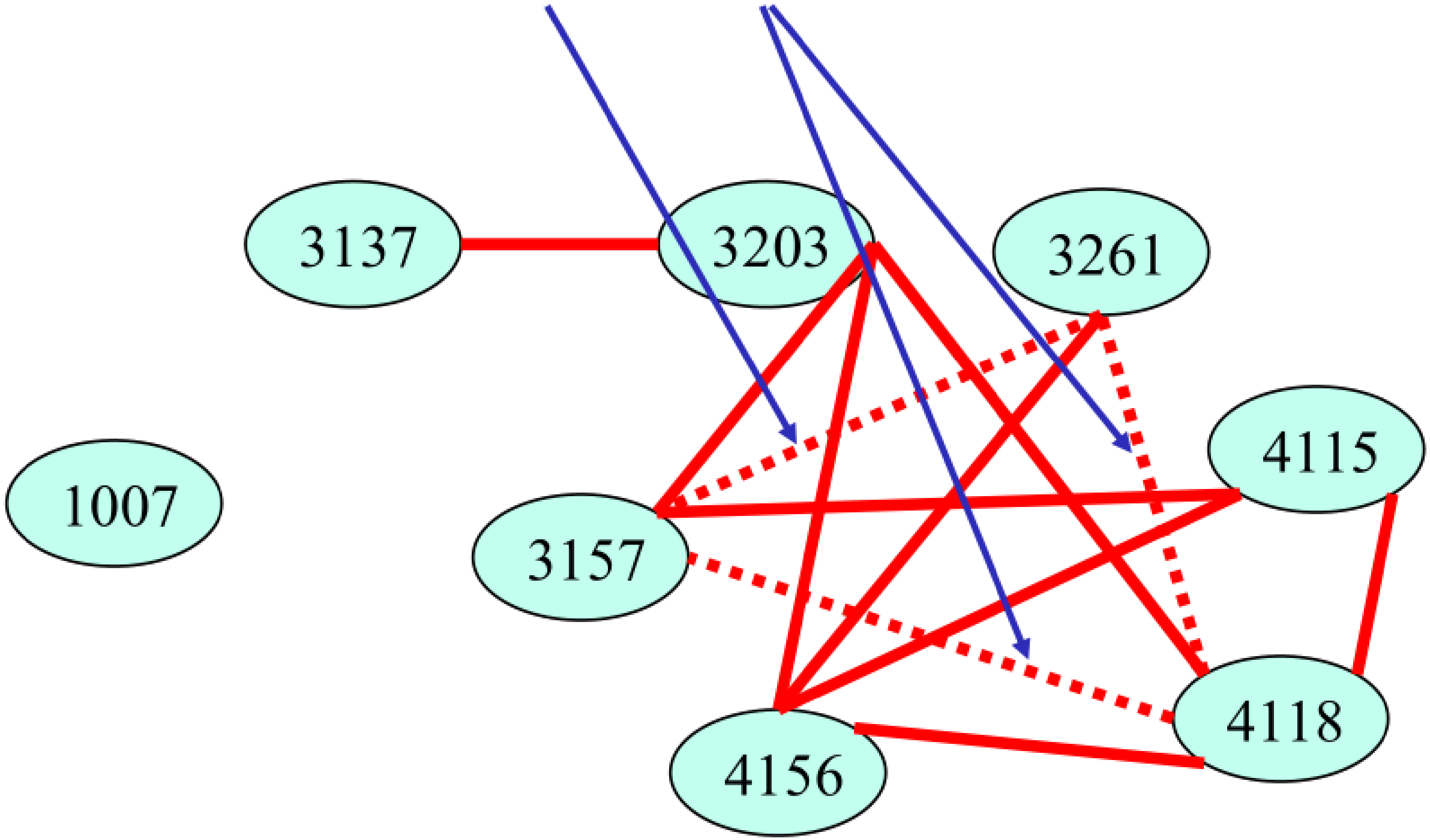
Vẽ lại:



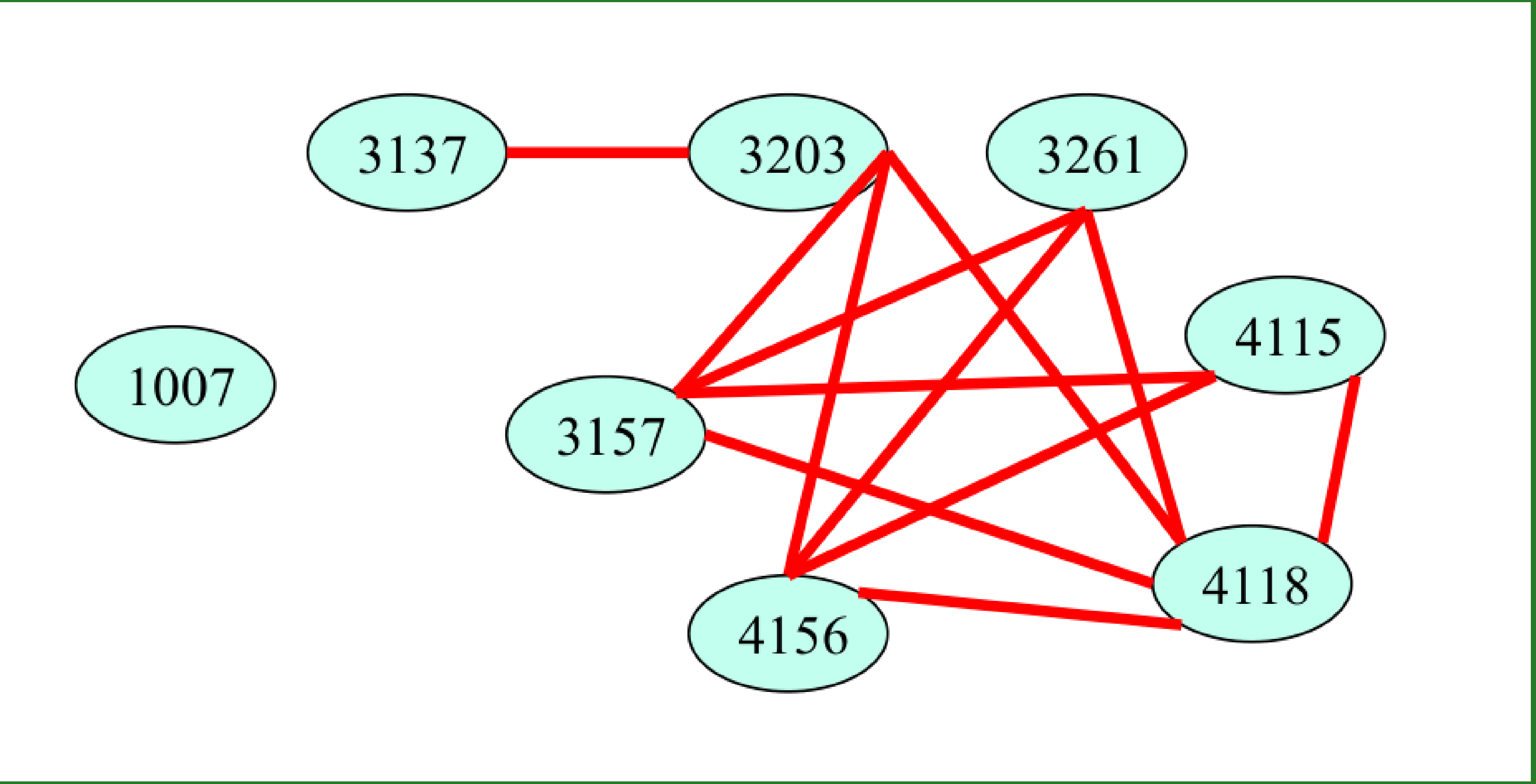
Không thể tô bởi 1 màu vì cạnh này

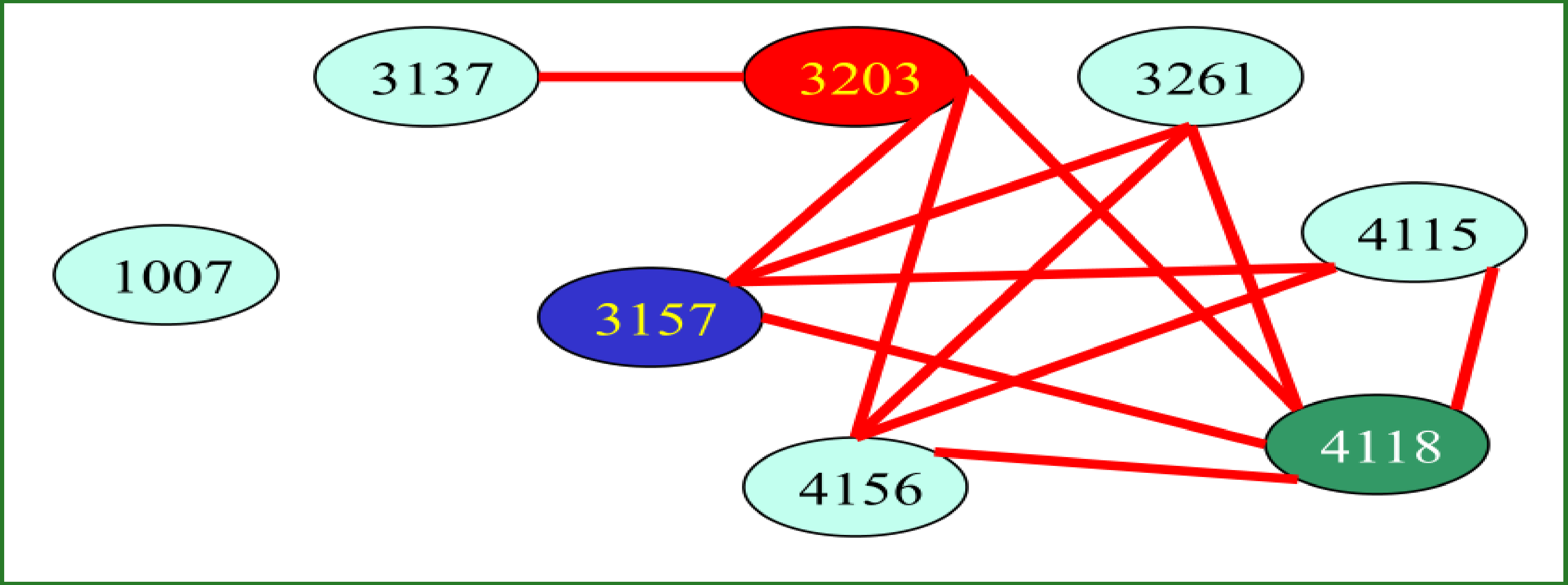
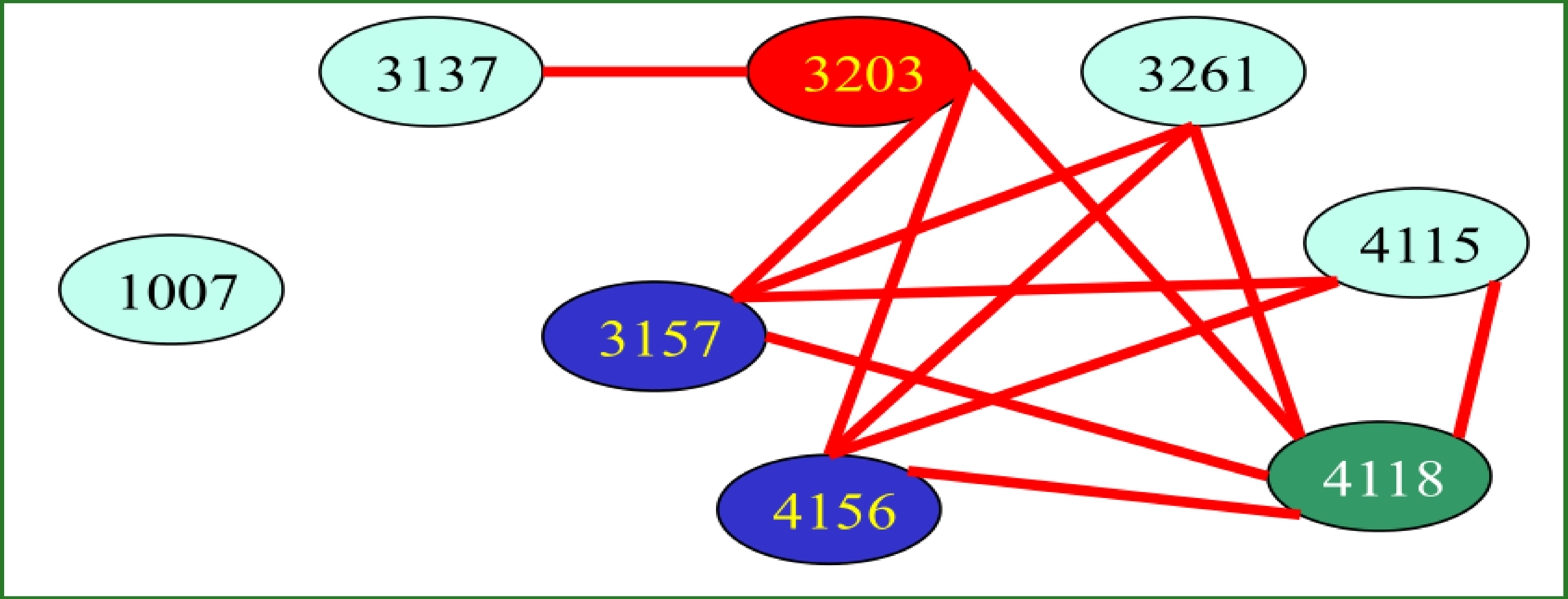


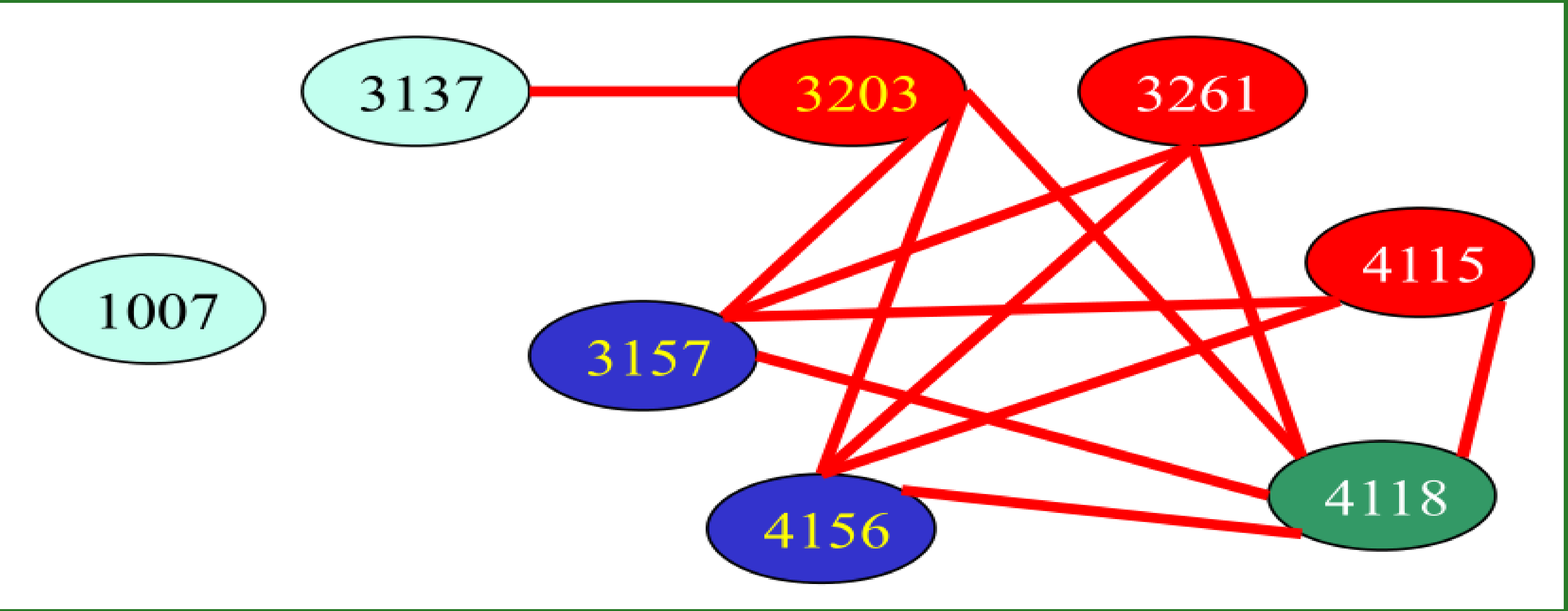
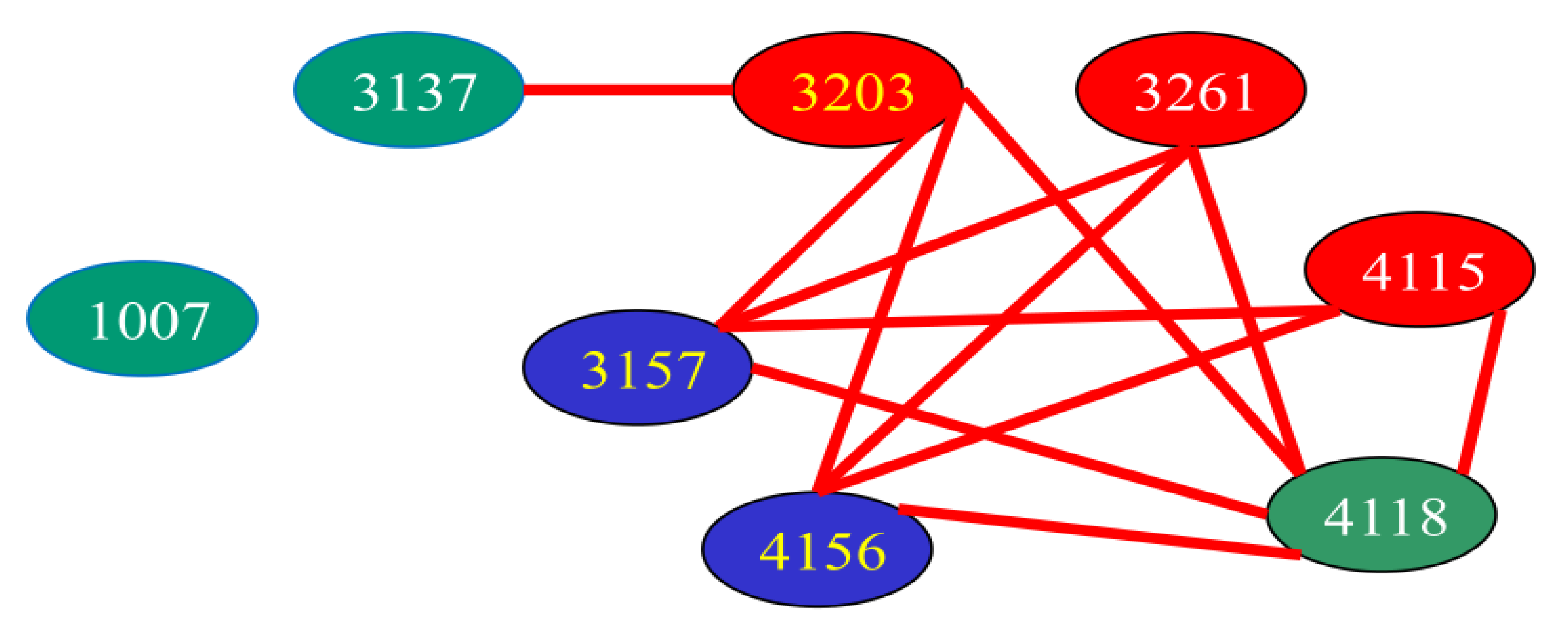
2 màu không đủ tô vì có tam giác này



3 màu là đủ tô tam giác này. Ta tô bởi 3 màu: đỏ, xanh lá, xanh dương.




3137
3203
3261
4115
1007
3157
4118
4156

3137
3203
3261
4115
1007
3157
4118
4156


3137
3203
3261
4115
1007
3157
4118
4156

3137
3203
3261
4115
1007
3157
4118
4156

Như vậy cần 3 ngày