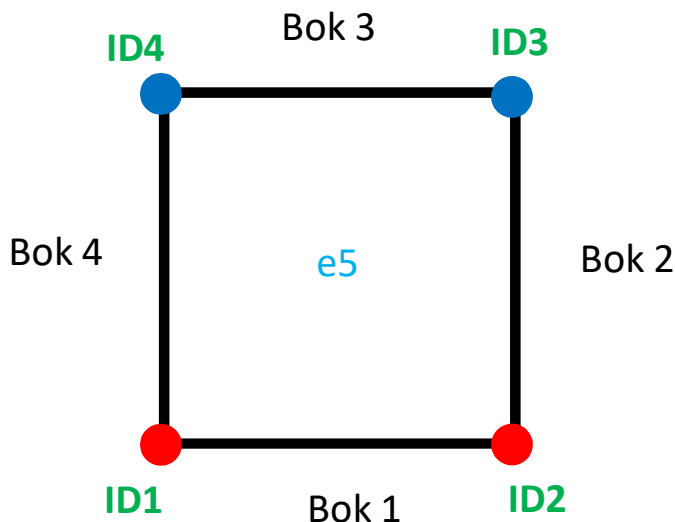
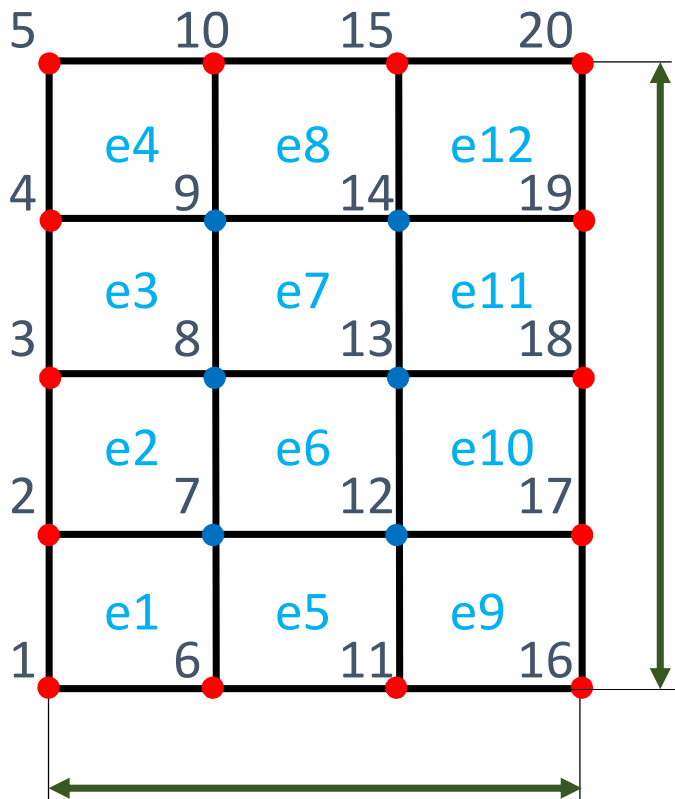


# Całkowanie macierzy $[Hbc]$ oraz wektora obciążeń $\{P\}$ metodą Gaussa

dr inż. Kustra Piotr  
WIMiP, KISiM, AGH  
B5, pokój 710

- 



Obliczanie fragmentu macierzy H – macierz Hbc

$$[H] = \int_V k(t) \left( \left\{ \frac{\partial \{N\}}{\partial x} \right\} \left\{ \frac{\partial \{N\}}{\partial x} \right\}^T + \left\{ \frac{\partial \{N\}}{\partial y} \right\} \left\{ \frac{\partial \{N\}}{\partial y} \right\}^T \right) dV$$

$$+ \int_S \alpha \{N\} \{N\}^T dS \quad [H]\{t\} + \{P\} = 0$$

$$q = \alpha t - \alpha t_{amb}$$

$$q = \alpha(t - t_{amb})$$

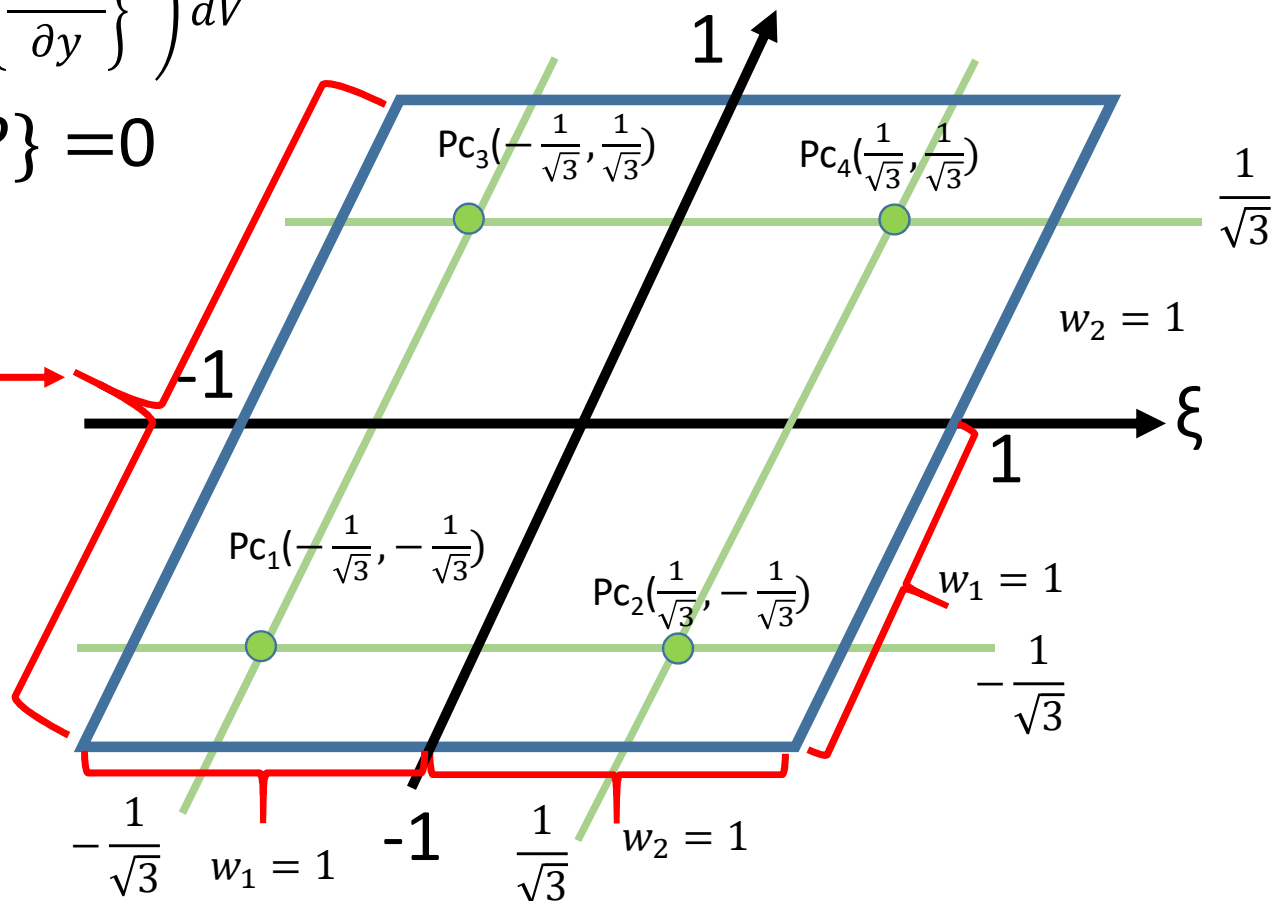
Które punkty całkowania  
należy wybrać?

$$N1 = 0.25(1 - \xi)(1 - \eta)$$

$$N2 = 0.25(1 + \xi)(1 - \eta)$$

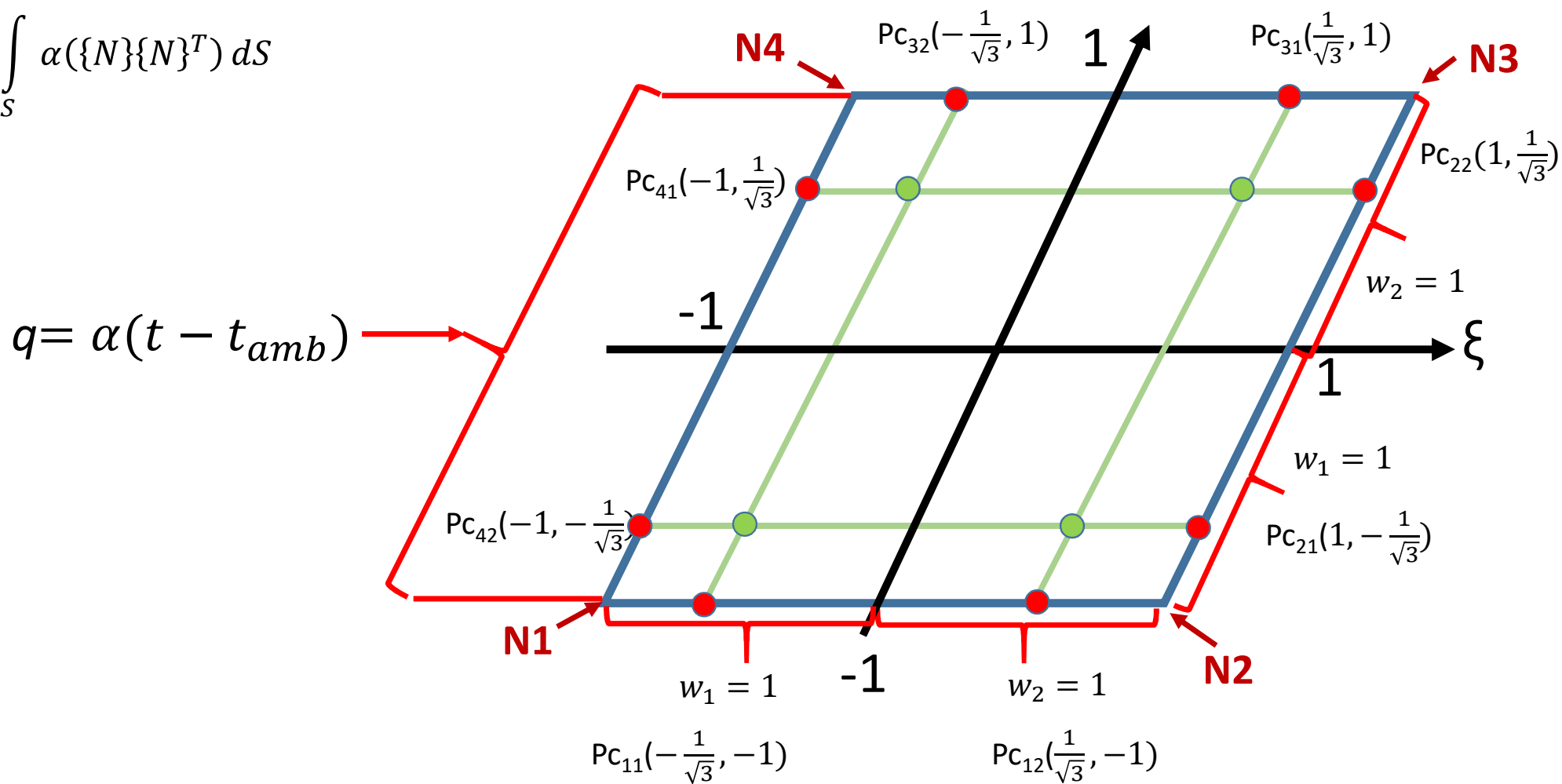
$$N3 = 0.25(1 + \xi)(1 + \eta)$$

$$N4 = 0.25(1 - \xi)(1 + \eta)$$



## Obliczanie macierzy Hbc

$$[H_{BC}] = \int_S \alpha(\{N\}\{N\}^T) dS$$

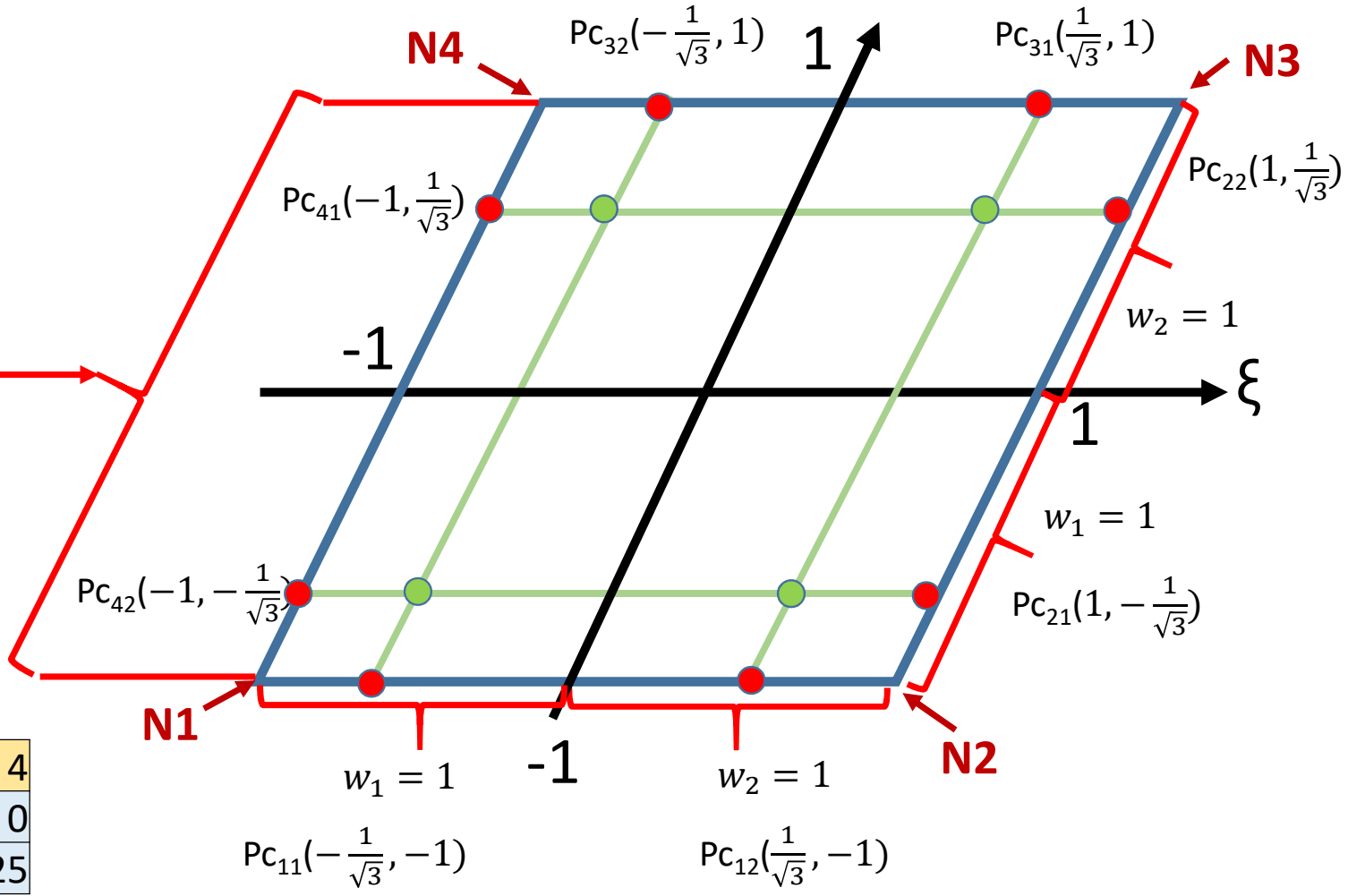


Obliczanie macierzy Hbc

$$[H_{BC}] = \int_S \alpha(\{N\}\{N\}^T) dS$$

$$H_{BC} = H_{BC_{pc41}} + H_{BC_{pc42}}$$

$$q = \alpha(t - t_{amb})$$



| ID | 1 | 2     | 3     | 4     |
|----|---|-------|-------|-------|
| x  | 0 | 0,025 | 0,025 | 0     |
| y  | 0 | 0     | 0,025 | 0,025 |

Obliczanie Macierzy  $H_{bc}$

$$[H_{BC}] = \int_S \alpha (\{N\} \{N\}^T) dS = \sum_{i=1}^{n_{pc}} f(pc_i) w_i \det[J]$$

$$[H_{BC}] = H_{BC_{pc41}} + H_{BC_{pc42}}$$

| pc | ksi | eta     | N1     | N2 | N3 | N4     |
|----|-----|---------|--------|----|----|--------|
| 41 | -1  | 0,5773  | 0,2113 | 0  | 0  | 0,7886 |
| 42 | -1  | -0,5773 | 0,7886 | 0  | 0  | 0,2113 |

$$N1 = 0.25(1 - \xi)(1 - \eta)$$

$$N2 = 0.25(1 + \xi)(1 - \eta)$$

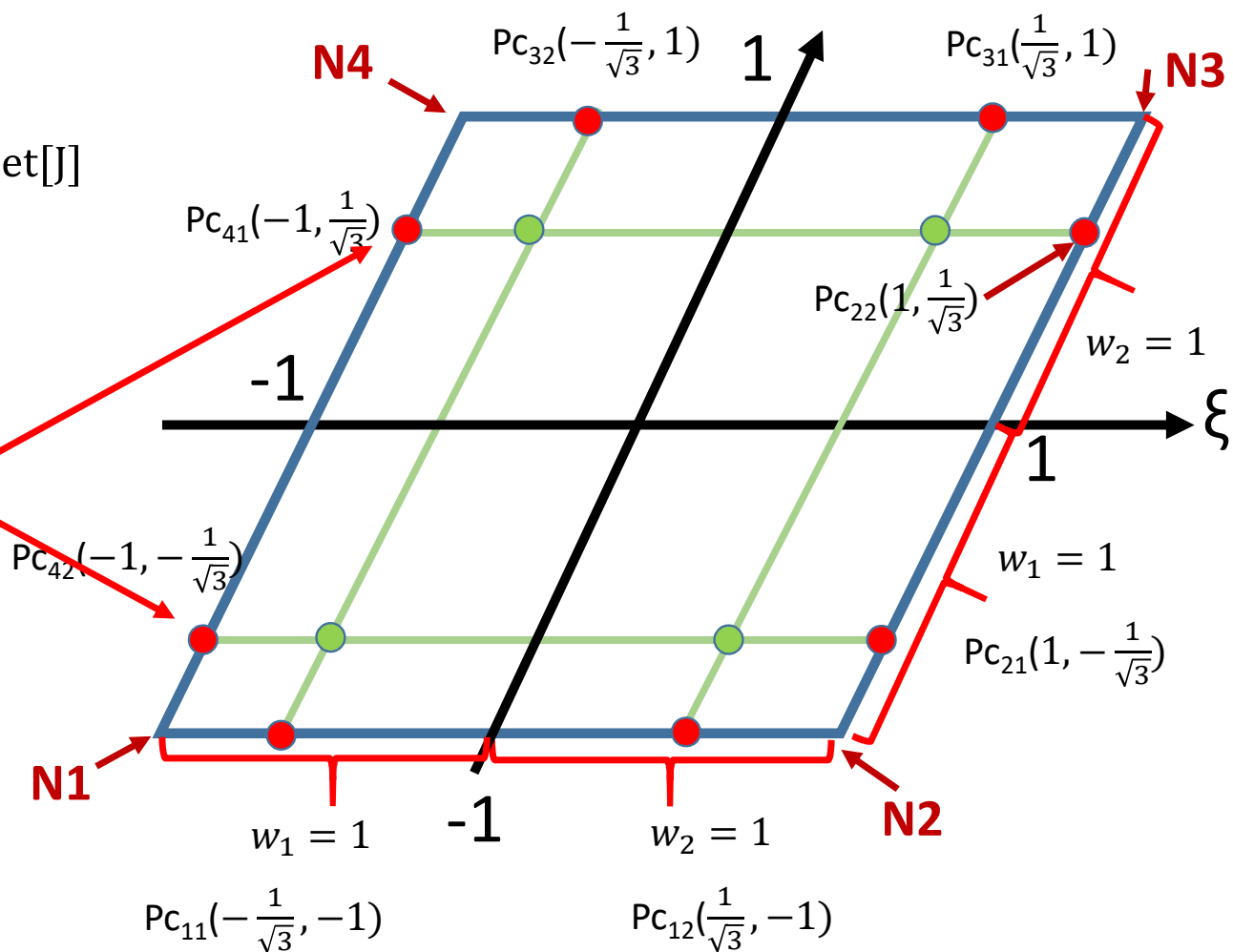
$$N3 = 0.25(1 + \xi)(1 + \eta)$$

$$N4 = 0.25(1 - \xi)(1 + \eta)$$

$$\det[J] = \frac{dx}{dKsi} = \frac{L}{2} = 0,0125$$

Obliczenia wykonano dla  $\alpha = 25$

$$[H_{BC}] = \int_S 25 \left( \begin{Bmatrix} N1 \\ N2 \\ N3 \\ N4 \end{Bmatrix} \{N1 \ N2 \ N3 \ N4\} \right) ds = 25 \left( w_1 * \left( \begin{Bmatrix} 0,2113 \\ 0 \\ 0 \\ 0,7886 \end{Bmatrix} \{0,2113 \ 0 \ 0 \ 0,7886\} \right) + w_2 * \left( \begin{Bmatrix} 0,7886 \\ 0 \\ 0 \\ 0,2113 \end{Bmatrix} \{0,7886 \ 0 \ 0 \ 0,2113\} \right) \right) \det[J]$$



$$[H_{BC}] = \int_S 25 \left( \begin{Bmatrix} N1 \\ N2 \\ N3 \\ N4 \end{Bmatrix} \{N1 \quad N2 \quad N3 \quad N4\} \right) ds = \left( w_1 * 25 * \begin{pmatrix} \begin{Bmatrix} 0,2113 \\ 0 \\ 0 \\ 0,7886 \end{Bmatrix} \{0,2113 \quad 0 \quad 0 \quad 0,7886\} + w_2 * 25 * \begin{pmatrix} \begin{Bmatrix} 0,7886 \\ 0 \\ 0 \\ 0,2113 \end{Bmatrix} \{0,7886 \quad 0 \quad 0 \quad 0,2113\} \right) * det[J] \right)$$

|         |         |   |   |         |
|---------|---------|---|---|---------|
| pc1     | 0,21132 | 0 | 0 | 0,78867 |
| 0,21132 | 1,11645 | 0 | 0 | 4,16666 |
| 0       | 0       | 0 | 0 | 0       |
| 0       | 0       | 0 | 0 | 0       |
| 0,78867 | 4,16666 | 0 | 0 | 15,5502 |

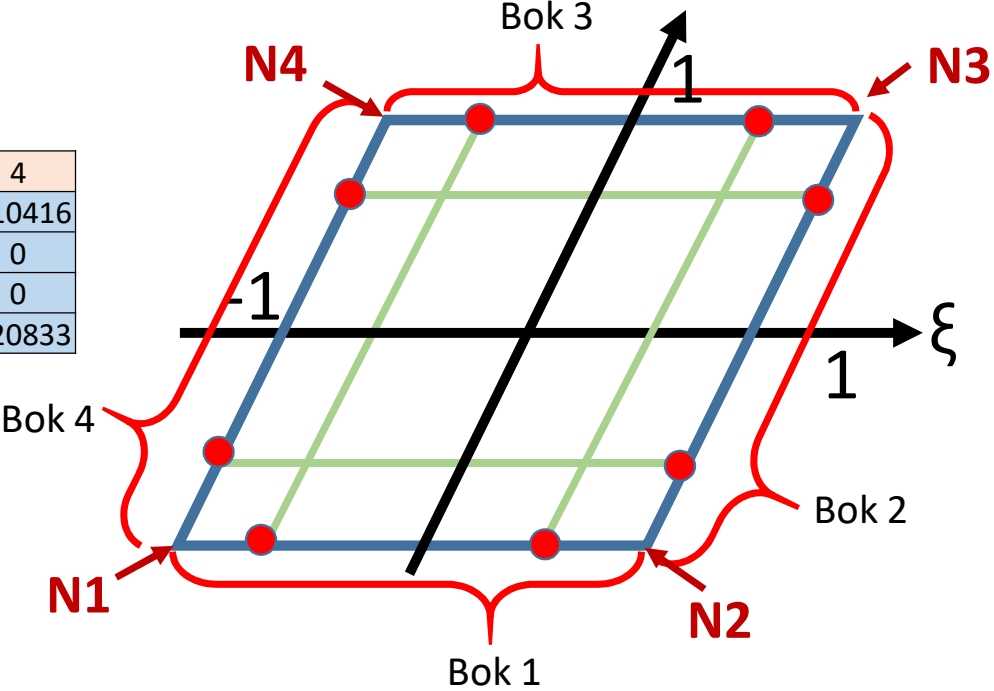
|         |           |   |   |          |
|---------|-----------|---|---|----------|
| pc2     | 0,7886751 | 0 | 0 | 0,211325 |
| 0,78867 | 15,550211 | 0 | 0 | 4,16666  |
| 0       | 0         | 0 | 0 | 0        |
| 0       | 0         | 0 | 0 | 0        |
| 0,21132 | 4,1666666 | 0 | 0 | 1,11645  |

\*det[J] = 0,0125

|     |         |   |   |         |
|-----|---------|---|---|---------|
| sum | 1       | 2 | 3 | 4       |
| 1   | 0,20833 | 0 | 0 | 0,10416 |
| 2   | 0       | 0 | 0 | 0       |
| 3   | 0       | 0 | 0 | 0       |
| 4   | 0,10416 | 0 | 0 | 0,20833 |

| Pow_3 | 1 | 2 | 3       | 4       |
|-------|---|---|---------|---------|
| 1     | 0 | 0 | 0       | 0       |
| 2     | 0 | 0 | 0       | 0       |
| 3     | 0 | 0 | 0,20833 | 0,10416 |
| 4     | 0 | 0 | 0,10416 | 0,20833 |

| Pow_4 | 1       | 2 | 3 | 4       |
|-------|---------|---|---|---------|
| 1     | 0,20833 | 0 | 0 | 0,10416 |
| 2     | 0       | 0 | 0 | 0       |
| 3     | 0       | 0 | 0 | 0       |
| 4     | 0,10416 | 0 | 0 | 0,20833 |

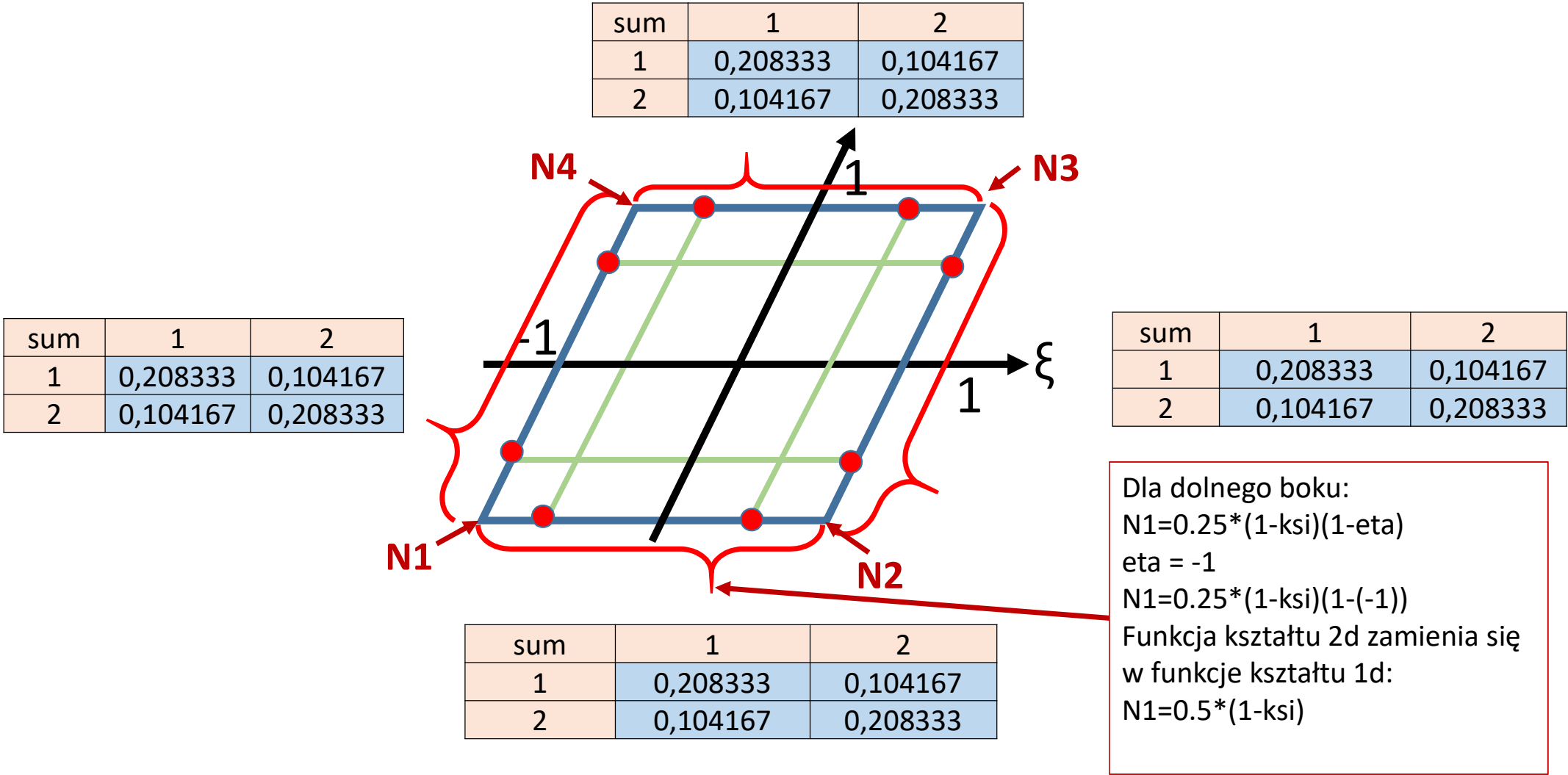


| Pow_2 | 1 | 2       | 3       | 4 |
|-------|---|---------|---------|---|
| 1     | 0 | 0       | 0       | 0 |
| 2     | 0 | 0,20833 | 0,10416 | 0 |
| 3     | 0 | 0,10416 | 0,20833 | 0 |
| 4     | 0 | 0       | 0       | 0 |

| Pow_1 | 1       | 2       | 3 | 4 |
|-------|---------|---------|---|---|
| 1     | 0,20833 | 0,10416 | 0 | 0 |
| 2     | 0,10416 | 0,20833 | 0 | 0 |
| 3     | 0       | 0       | 0 | 0 |
| 4     | 0       | 0       | 0 | 0 |



Obliczanie Wektora P przy wykorzystaniu funkcji kształtu 1d.



Czytanie siatki z pliku - > tworzenie struktur danych – element, node, element uniwersalny

Implementacja pętli po elementach e:

Pobieranie wartości x oraz y węzłów elementu skończonego e,

Pętla po punktach całkowania  $pc$  (dla 2d  $pc = 4, 9, 16...$ )

Obliczanie macierzy Jakobiego J, Jakobianu i macierzy odwrotnej  $J^{-1}$   
dla punktu całkowania  $pc$

Obliczamy  $dN/dx$  oraz  $dN/dy \rightarrow$  Macierz H w dla punktu całkowania  $pc$

Sumujemy macierze H z punktów całkowania  $pc_1 - pc_n$  (dla 2d  $pc_n = 4, 9, 16...$ )

Obliczamy macierz Hbc dla każdej ściany elementu „e” i sumujemy

Struct GaussIntegration

w, pc

Struct Elem2d\_4 (element uniwersalny)

$dNdKsi[4 \text{ lub } 9 \text{ lub } 16(\text{zależne od npc})][4]$

$dNdEta[4 \text{ lub } 9 \text{ lub } 16(\text{zależne od npc})][4]$

Struct Surface

$N[2 \text{ lub } 3 \text{ lub } 4(\text{npc})][4]$

Surface[4]

Struct Element

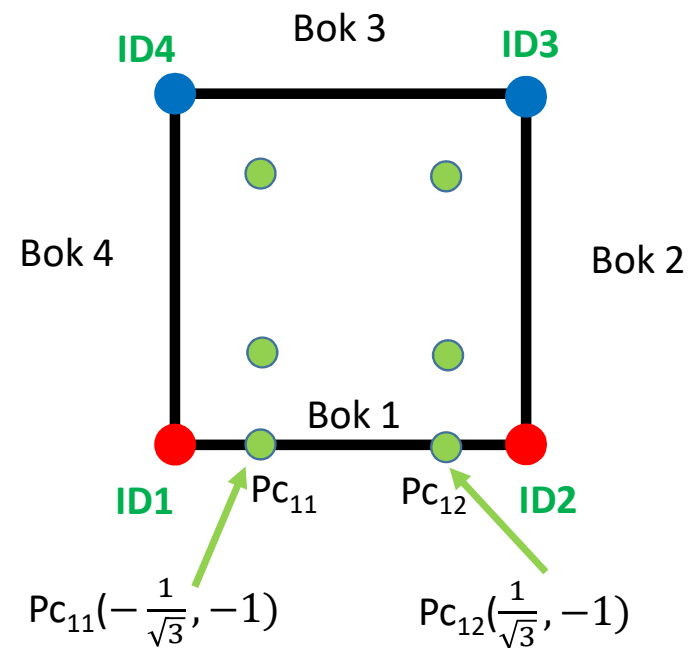
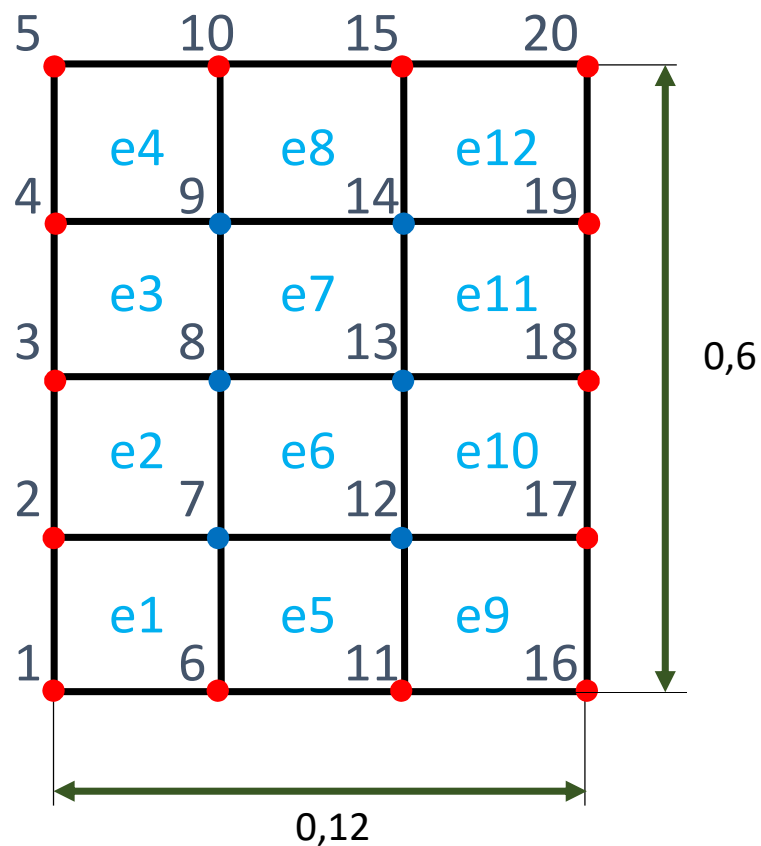
id[4]

H[4][4]

Hbc[4][4]

Struct node

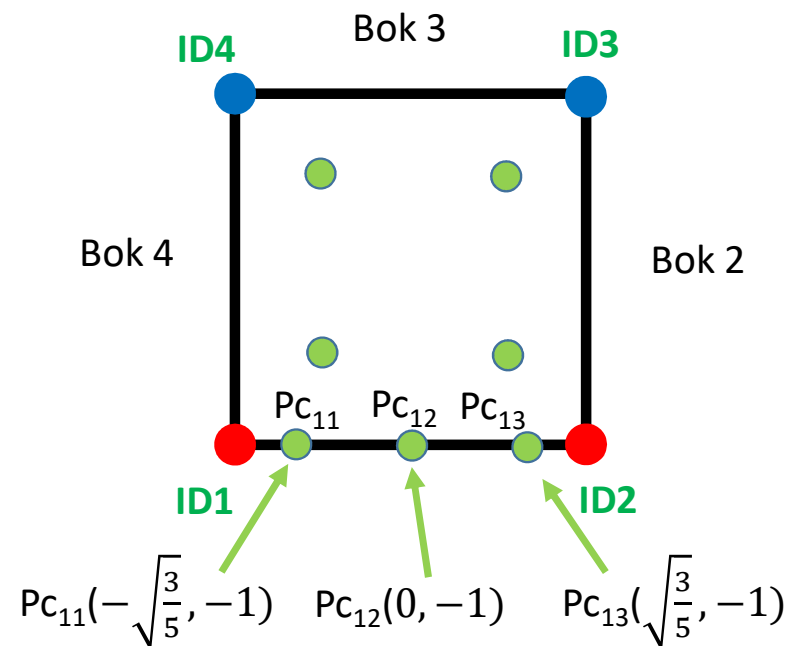
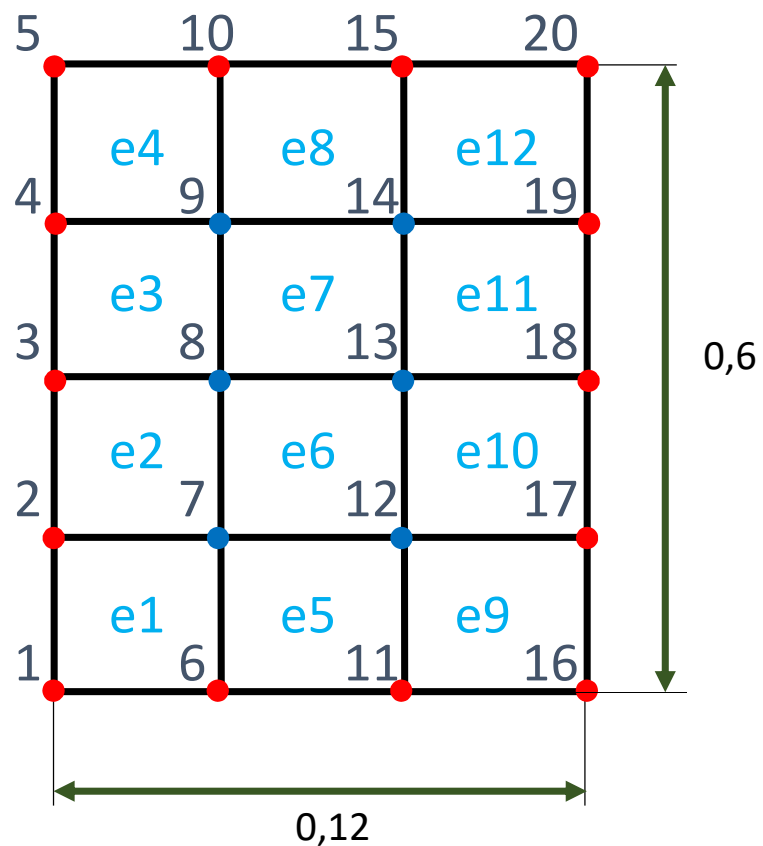
x, y, BC



Struktura bok – w elemencie uniwersalnym:

- ilość punktów całkowania po powierzchni,
- współrzędne punktów całkowania,
- wartości funkcji kształtu w punktach całkowania.

| pc | ksi      | eta | N1       | N2       | N3 | N4 |
|----|----------|-----|----------|----------|----|----|
| 11 | -0,57735 | -1  | 0,788675 | 0,211325 | 0  | 0  |
| 12 | 0,57735  | -1  | 0,211325 | 0,788675 | 0  | 0  |



Struktura bok – w elemencie uniwersalnym:

- ilość punktów całkowania po powierzchni,
- współrzędne punktów całkowania,
- wartości funkcji kształtu w punktach całkowania.

| pc | ksi     | eta | N1       | N2       | N3 | N4 |
|----|---------|-----|----------|----------|----|----|
| 11 | -0,7746 | -1  | 0,887298 | 0,112702 | 0  | 0  |
| 12 | 0       | -1  | 0,5      | 0,5      | 0  | 0  |
| 13 | 0,7746  | -1  | 0,112702 | 0,887298 | 0  | 0  |

### Obliczanie wektora {P}

$$[P] = \int_S \alpha\{N\} t_{ot} dS = \sum_{i=1}^{n_{pc}} f(pc_i) w_i \det[J]$$

$$[P] = \int_S \alpha\{N\} t_{ot} dS = \sum_{i=1}^{n_{pc}} f(pc_i) w_i \det[J]$$

$$[P] = P_{pc1} + P_{pc2}$$

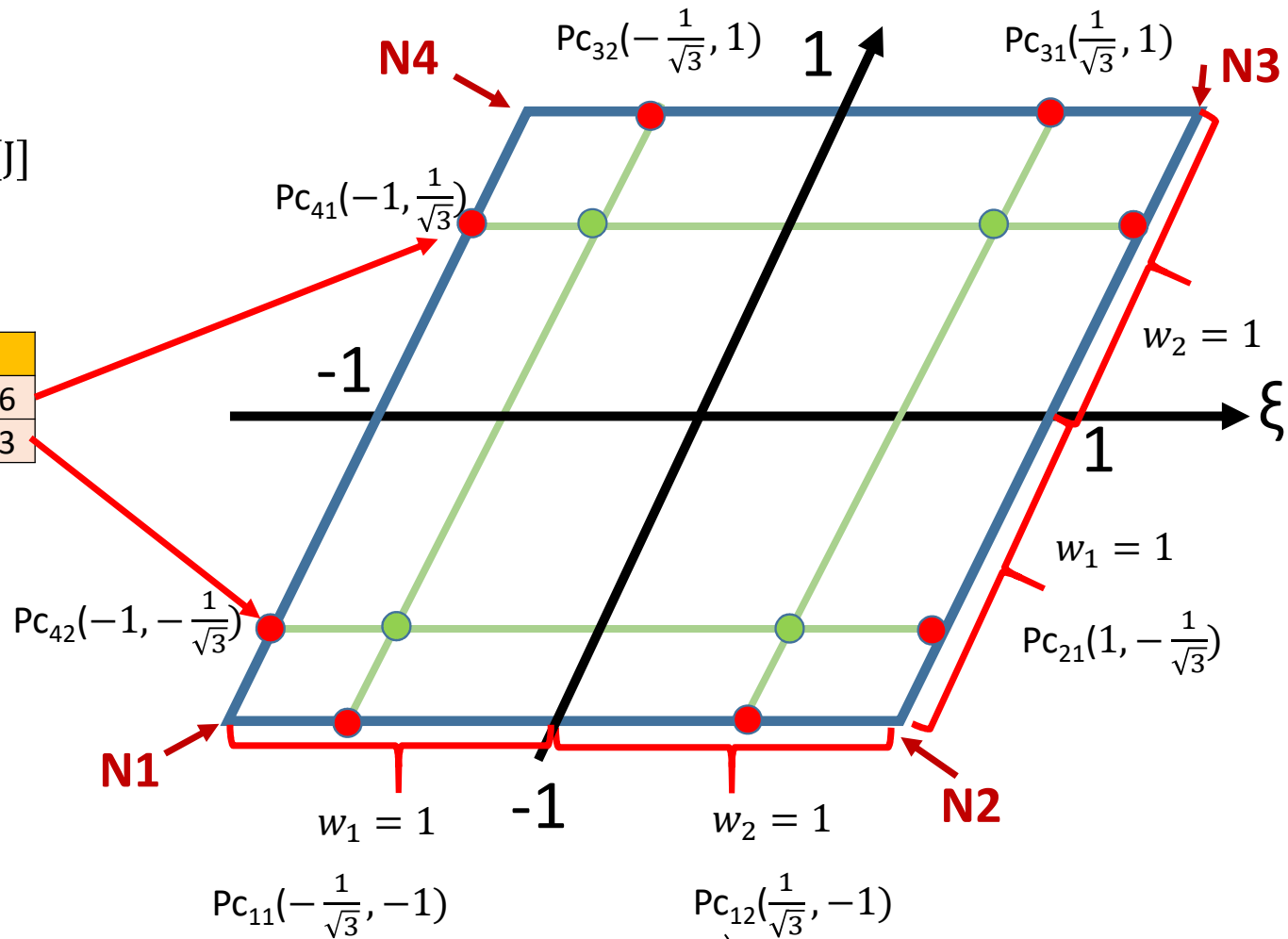
| pc | ksi | eta     | N1     | N2 | N3 | N4     |
|----|-----|---------|--------|----|----|--------|
| 1  | -1  | 0,5773  | 0,2113 | 0  | 0  | 0,7886 |
| 2  | -1  | -0,5773 | 0,7886 | 0  | 0  | 0,2113 |

| ID | 1 | 2     | 3     | 4     |
|----|---|-------|-------|-------|
| x  | 0 | 0,025 | 0,025 | 0     |
| y  | 0 | 0     | 0,025 | 0,025 |

$$\det[J] = \frac{L}{2} = 0,0125$$

$$t_{ot} = 1200C \text{ (temp. otoczenia)}$$

$$\{P\} = \int_s 25 \left( \begin{Bmatrix} N1 \\ N2 \\ N3 \\ N4 \end{Bmatrix} 1200 \right) ds = 25 \left( w_1 * \begin{Bmatrix} 0,2113 \\ 0 \\ 0 \\ 0,7886 \end{Bmatrix} 1200 \right) + w_2 * \begin{Bmatrix} 0,7886 \\ 0 \\ 0 \\ 0,2113 \end{Bmatrix} 1200 \right) * det[J]$$



Obliczanie wektora {P}

$$[P] = \int_S \alpha\{N\}t_{ot} dS = \sum_{i=1}^{n_{pc}} f(pc_i) w_i \det[J]$$

$$[P] = P_{pc1} + P_{pc2} + P_{pc3}$$

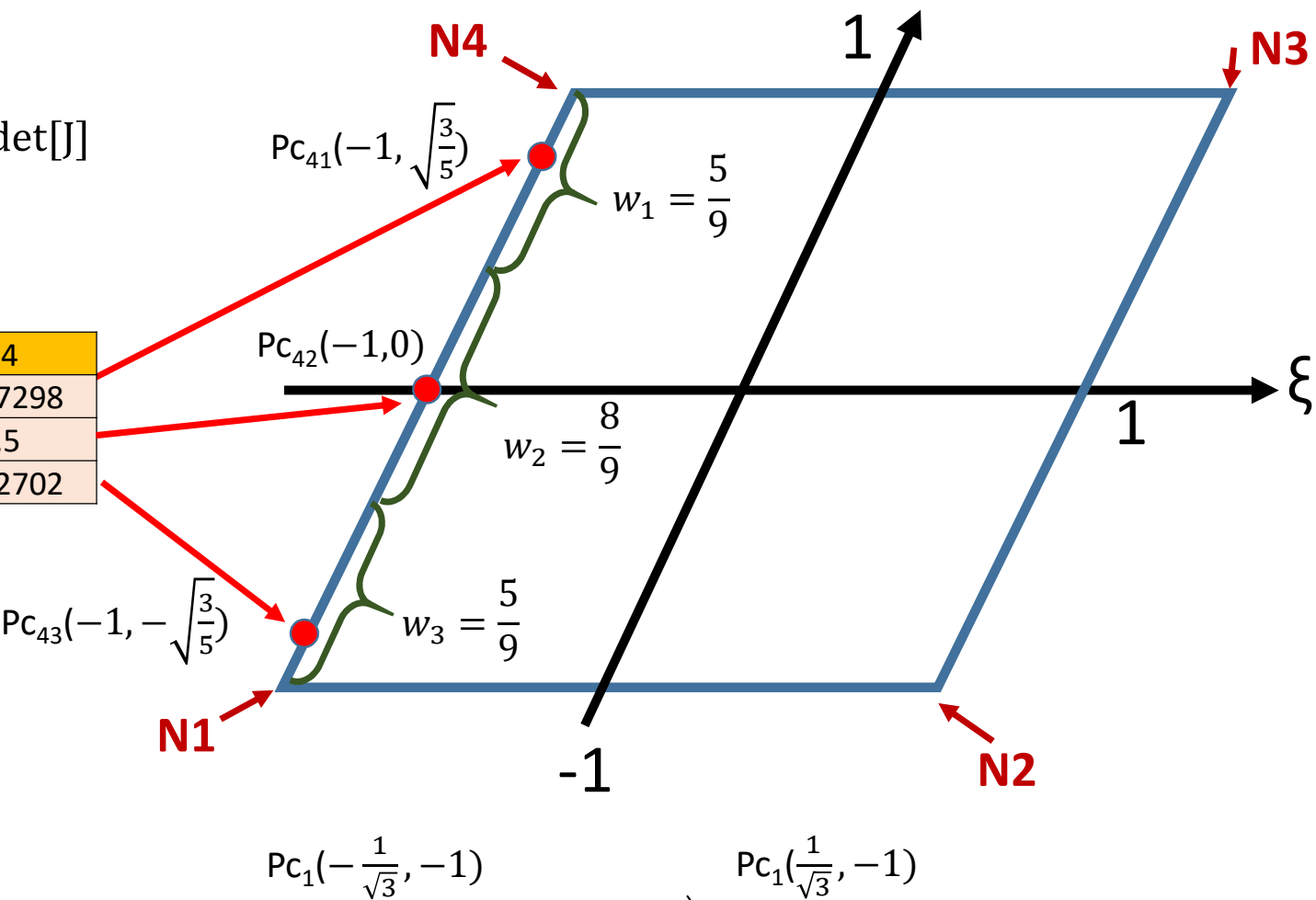
| pc | ksi | eta     | N1       | N2 | N3 | N4       |
|----|-----|---------|----------|----|----|----------|
| 41 | -1  | 0,7746  | 0,112702 | 0  | 0  | 0,887298 |
| 42 | -1  | 0       | 0,5      | 0  | 0  | 0,5      |
| 43 | -1  | -0,7746 | 0,887298 | 0  | 0  | 0,112702 |

| ID | 1 | 2     | 3     | 4     |
|----|---|-------|-------|-------|
| x  | 0 | 0,025 | 0,025 | 0     |
| y  | 0 | 0     | 0,025 | 0,025 |

$$\det[J] = \frac{L}{2} = 0,0125$$

$$t_{ot} = 1200C$$

$$[P] = 25 \left( w_1 * \left( \begin{pmatrix} 0,1127 \\ 0 \\ 0 \\ 0,8872 \end{pmatrix} 1200 \right) + w_2 * \left( \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0 \\ 0 \\ 0,5 \end{pmatrix} 1200 \right) + w_3 * \left( \begin{pmatrix} 0,8872 \\ 0 \\ 0 \\ 0,1127 \end{pmatrix} 1200 \right) \right) * \det[J]$$



Czytanie siatki z pliku - > tworzenie struktur danych – element, node, element uniwersalny

Implementacja pętli po elementach e:

Pobieranie wartości  $x$  oraz  $y$  węzłów elementu skończonego  $e$ ,

Pętla po punktach całkowania  $pc$  (dla 2d  $pc = 4, 9, 16...$ )

Obliczanie macierzy Jakobiego  $J$ , Jakobianu i macierzy odwrotnej  $J^{-1}$   
dla punktu całkowania  $pc$

Obliczamy  $dN/dx$  oraz  $dN/dy$  -> Macierz  $H$  w dla punktu całkowania  $pc$

Sumujemy macierze  $H$  z punktów całkowania  $pc_1 - pc_n$  (dla 2d  $pc_n = 4, 9, 16...$ )

Obliczamy macierz  $Hbc$  dla każdej ściany elementu „e” i sumujemy

Obliczamy wektor  $P$  dla każdej ściany elementu „e” i sumujemy

Struct GaussIntegration

w, pc

Struct Elem2d\_4 (element uniwersalny)

dNdKsi[4 lub 9 lub 16(zależne od npc)][4]

dNdEta[4 lub 9 lub 16 (zależne od npc)][4]

Struct Surface

N[2 lub 3 lub 4 (npc)][4]

Surface[4]

Struct Element

id[4]

H[4][4]

Hbc[4][4]

P[4]

Struct node

x, y, BC