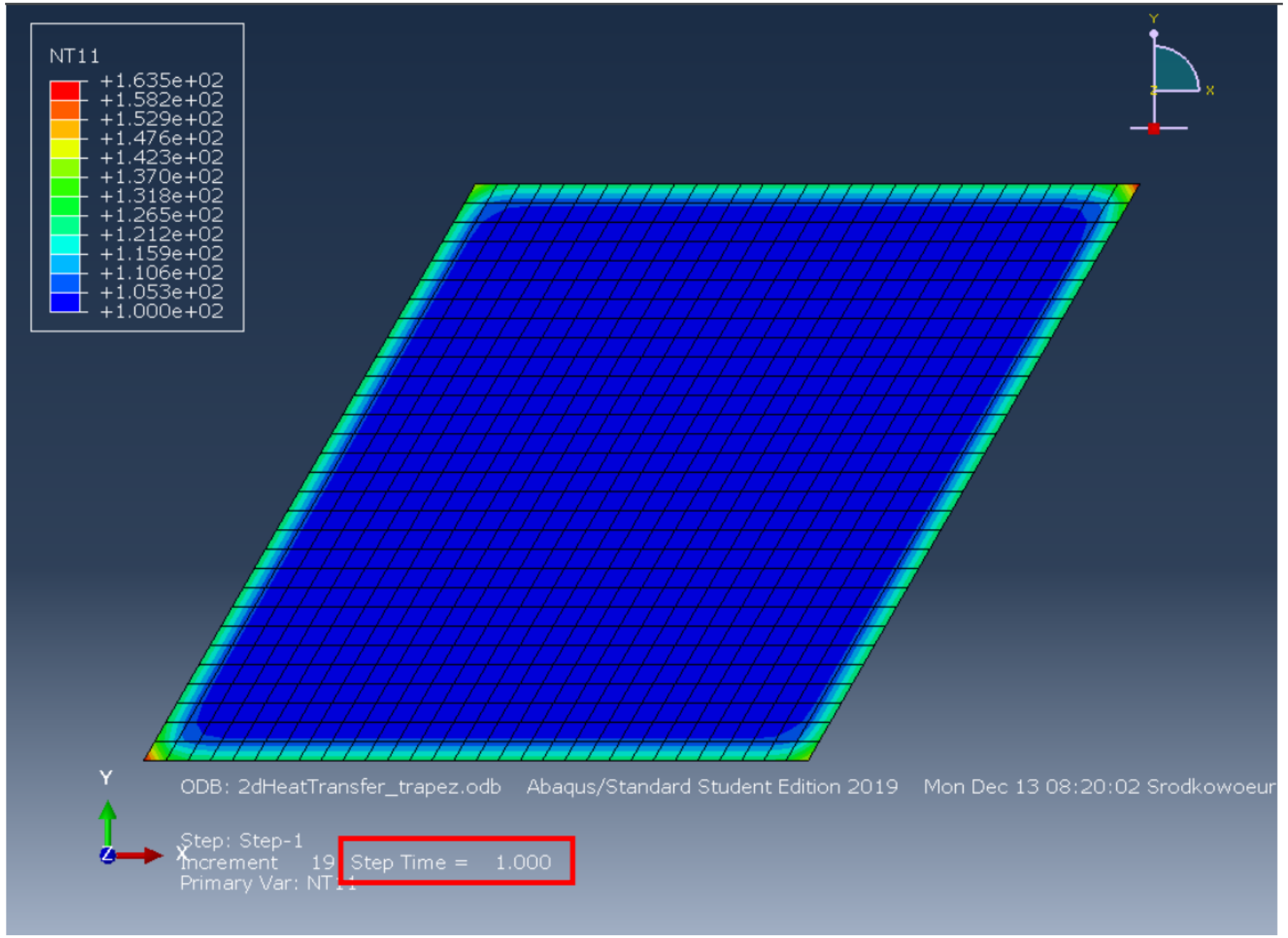
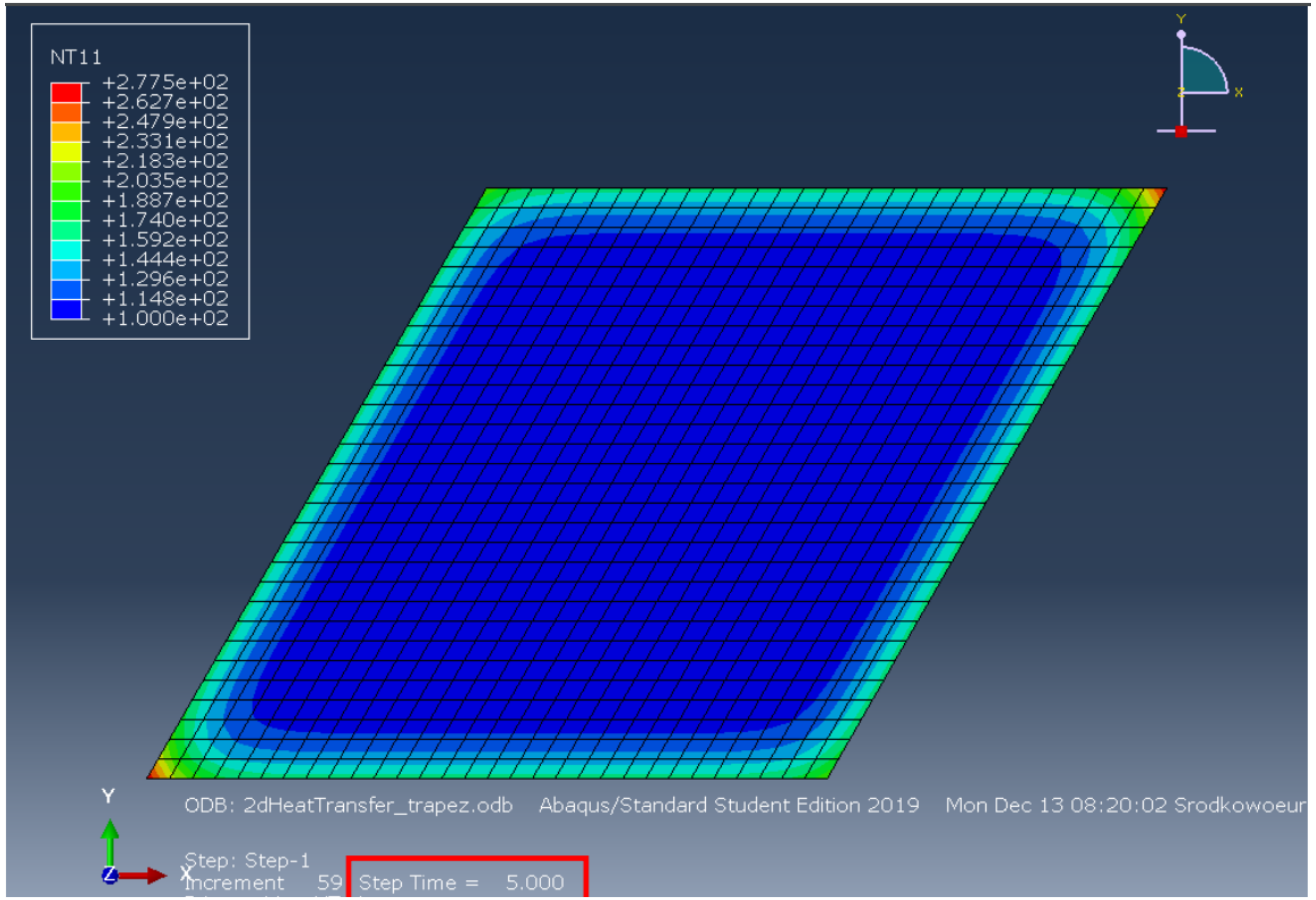
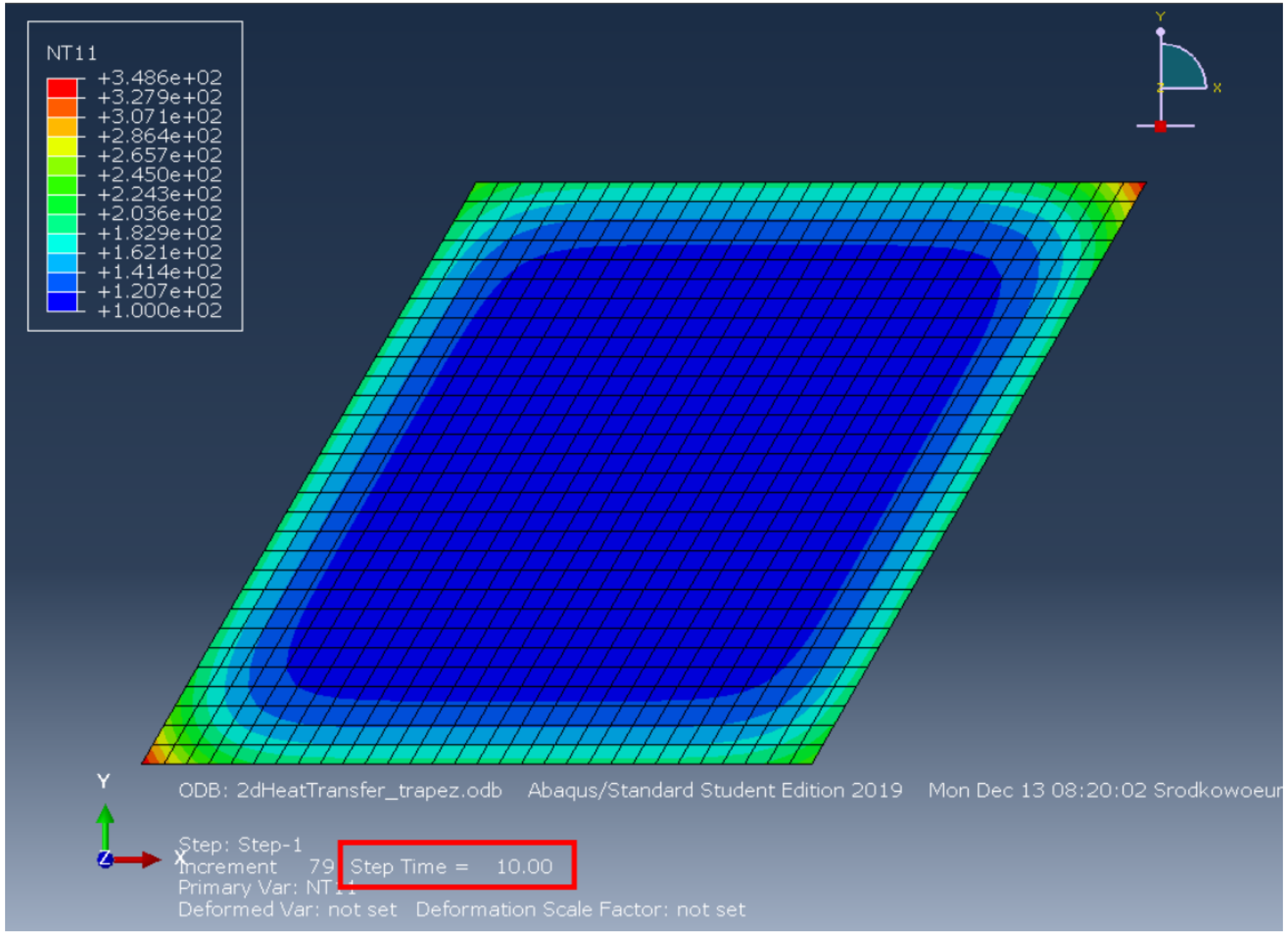
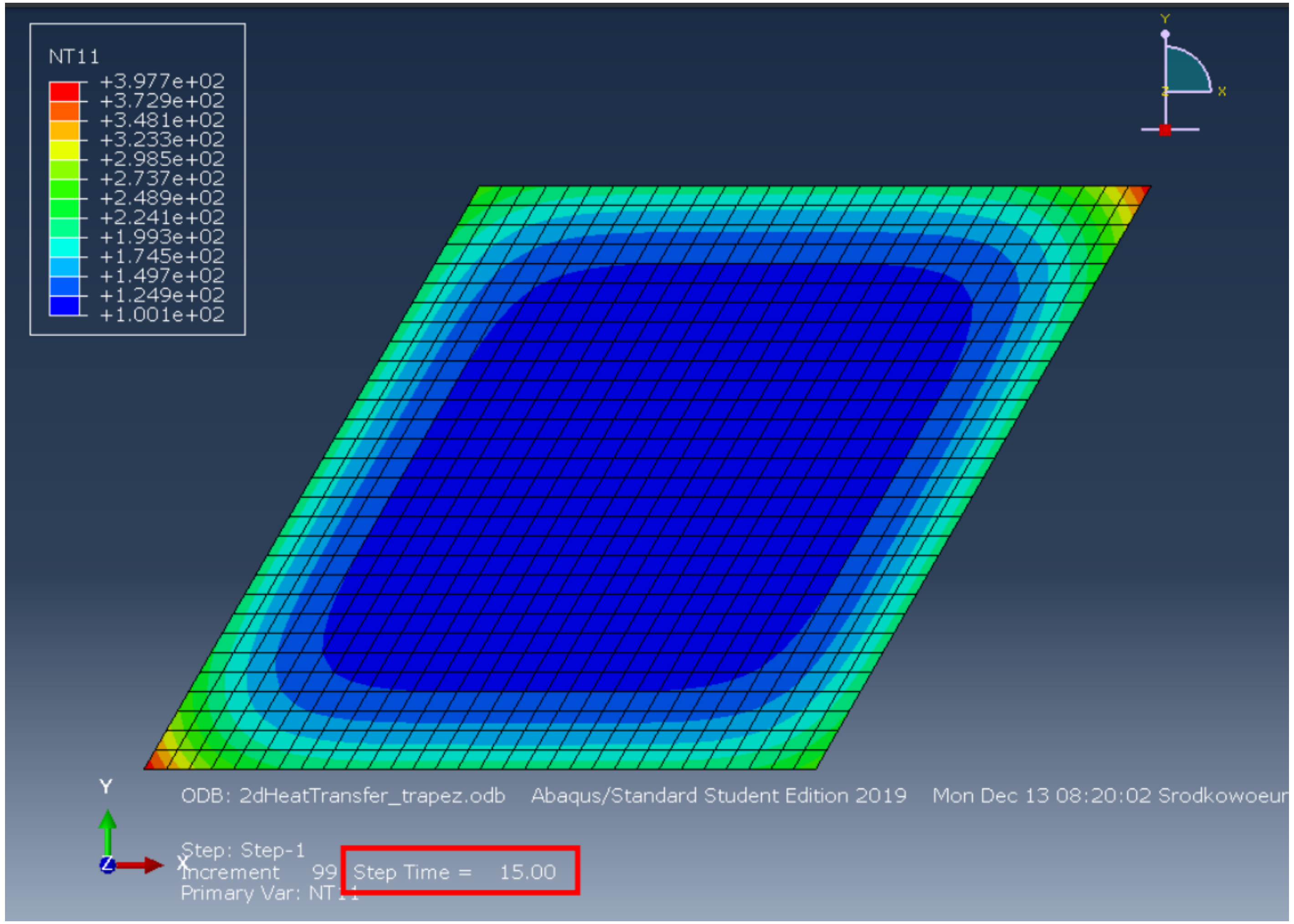
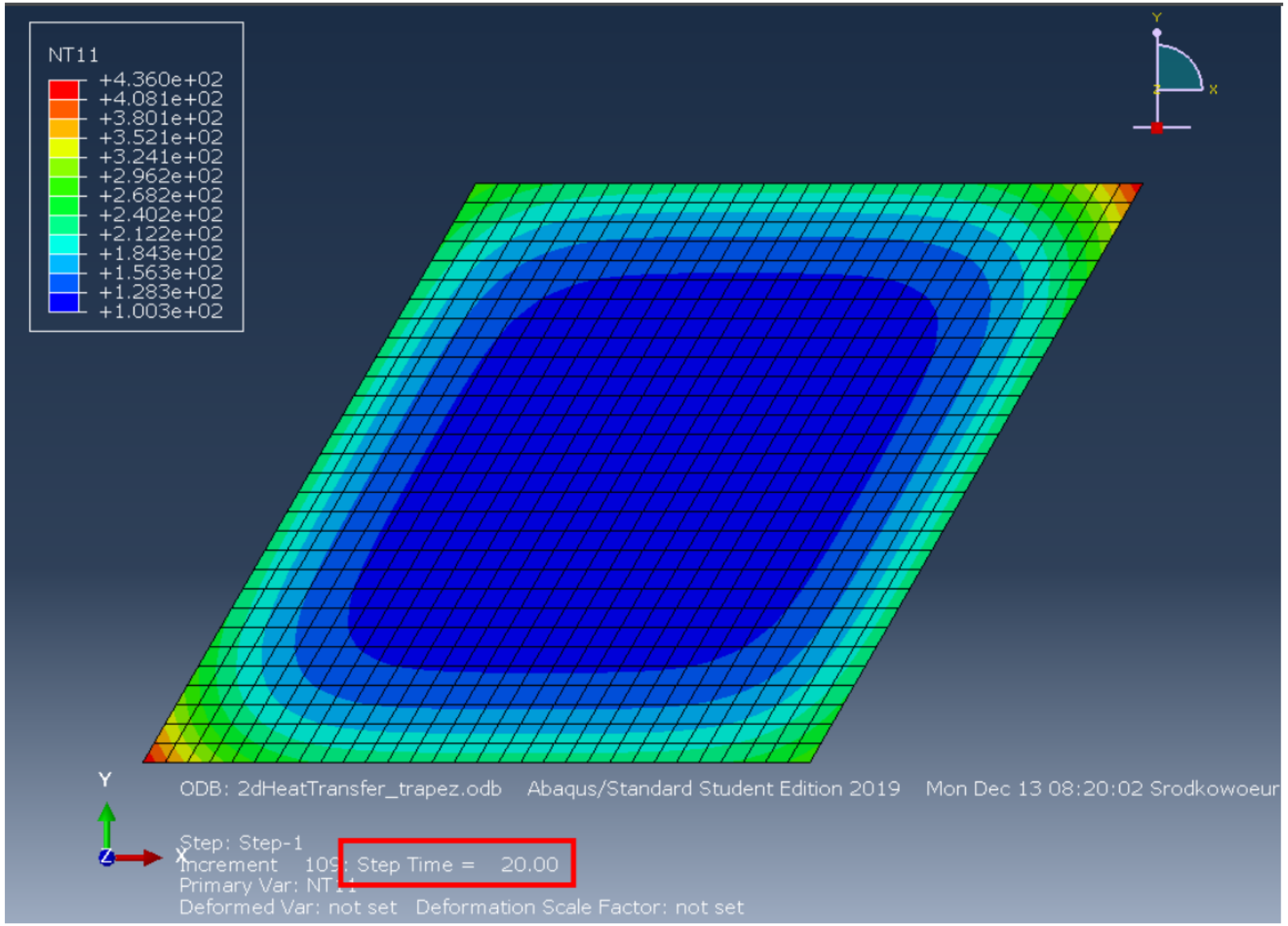
Metoda Elementów Skończonych - wstęp

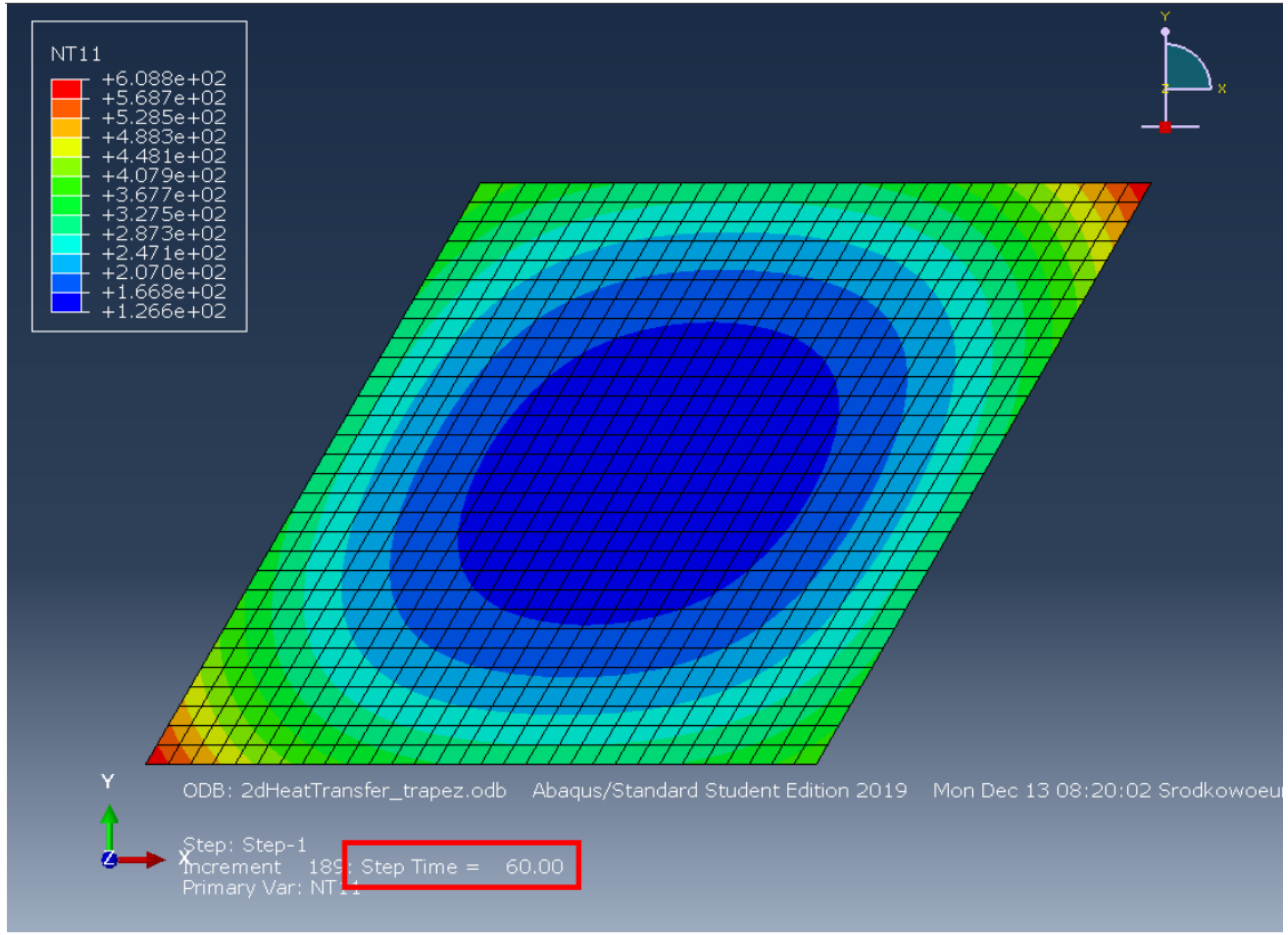

NT11
+1.635e+02
+1.582e+02
+1.529e+02
+1.476e+02
+1.423e+02
+1.370e+02
+1.318e+02
+1.265e+02
+1.212e+02
+1.159e+02
+1.106e+02
+1.053e+02
+1.000e+02
ODB: 2dHeatTransfer_trapez.odb Abaqus/Standard Student Edition 2019 Mon Dec 13 08:20:02 Srodkowoeur
Step: Step-1
Increment 19: Step Time = 1.000
Primary Var: NT11


NT11
+2.775e+02
+2.627e+02
+2.479e+02
+2.331e+02
+2.183e+02
+2.035e+02
+1.887e+02
+1.740e+02
+1.592e+02
+1.444e+02
+1.296e+02
+1.148e+02
+1.000e+02
ODB: 2dHeatTransfer_trapez.odb Abaqus/Standard Student Edition 2019 Mon Dec 13 08:20:02 Srodkowoeur
Step: Step-1
Increment 59 Step Time = 5.000
Y
X
Z

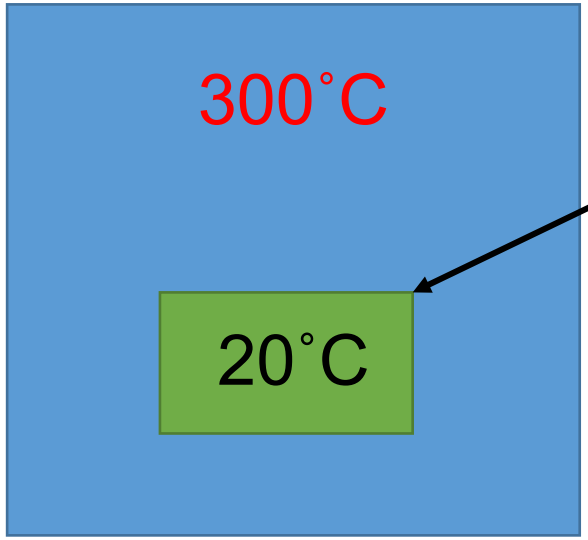

NT11
+3.486e+02
+3.279e+02
+3.071e+02
+2.864e+02
+2.657e+02
+2.450e+02
+2.243e+02
+2.036e+02
+1.829e+02
+1.621e+02
+1.414e+02
+1.207e+02
+1.000e+02
ODB: 2dHeatTransfer_trapez.odb Abaqus/Standard Student Edition 2019 Mon Dec 13 08:20:02 Srodkowoeur
Step: Step-1
Increment 79: Step Time = 10.00
Primary Var: NT11
Deformed Var: not set Deformation Scale Factor: not set


NT11
+3.977e+02
+3.729e+02
+3.481e+02
+3.233e+02
+2.985e+02
+2.737e+02
+2.489e+02
+2.241e+02
+1.993e+02
+1.745e+02
+1.497e+02
+1.249e+02
+1.001e+02
ODB: 2dHeatTransfer_trapez.odb Abaqus/Standard Student Edition 2019 Mon Dec 13 08:20:02 Srodkowoeur
Step: Step-1
Increment 99 Step Time = 15.00
Primary Var: NT11

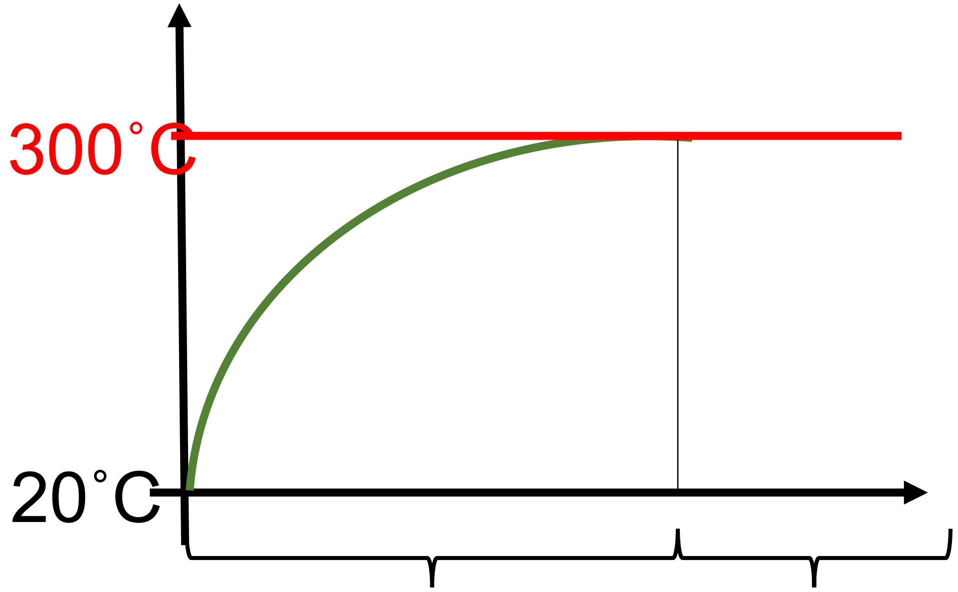

NT11
+4.360e+02
+4.081e+02
+3.801e+02
+3.521e+02
+3.241e+02
+2.962e+02
+2.682e+02
+2.402e+02
+2.122e+02
+1.843e+02
+1.563e+02
+1.283e+02
+1.003e+02
ODB: 2dHeatTransfer_trapez.odb Abaqus/Standard Student Edition 2019 Mon Dec 13 08:20:02 Srodkowoeur
Step: Step-1
Increment 109: Step Time = 20.00
Primary Var: NT11
Deformed Var: not set Deformation Scale Factor: not set


NT11
+6.088e+02
+5.687e+02
+5.285e+02
+4.883e+02
+4.481e+02
+4.079e+02
+3.677e+02
+3.275e+02
+2.873e+02
+2.471e+02
+2.070e+02
+1.668e+02
+1.266e+02
ODB: 2dHeatTransfer_trapez.odb Abaqus/Standard Student Edition 2019 Mon Dec 13 08:20:02 Srodkowoeu
Step: Step-1
Increment 189: Step Time = 60.00
Primary Var: NT11

Analiza problemu

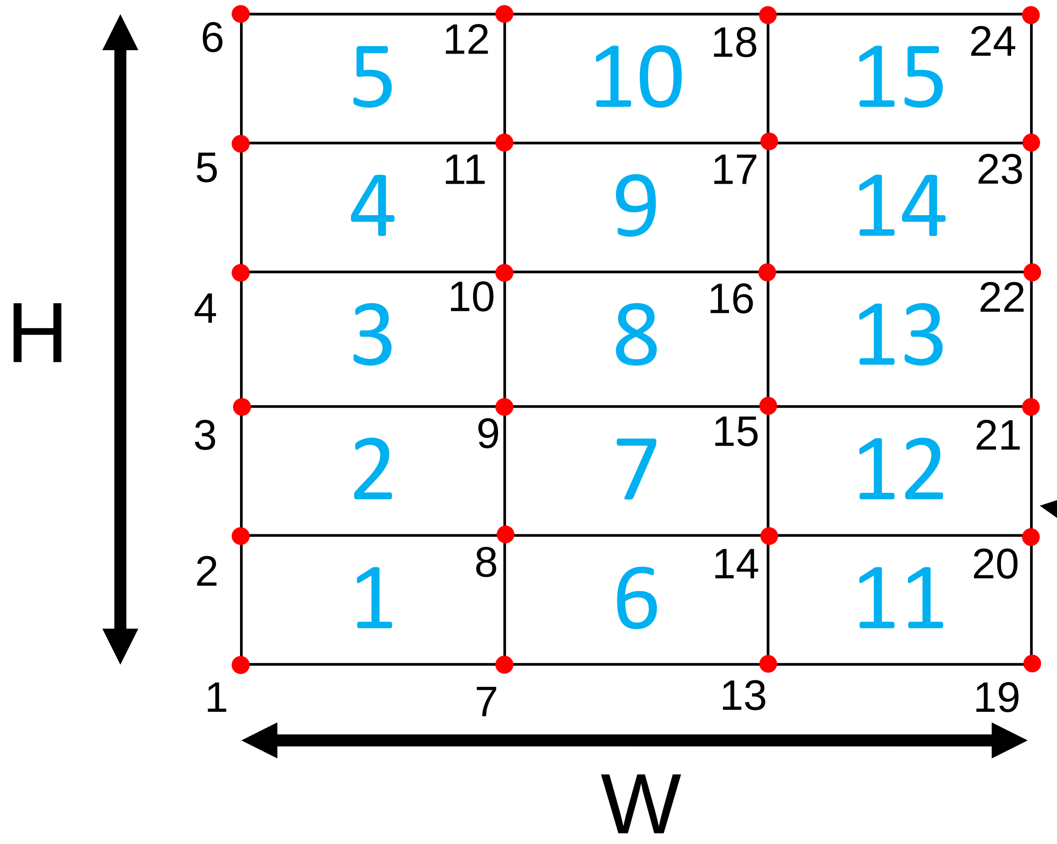


$$q = \alpha(t - t_{ot})$$

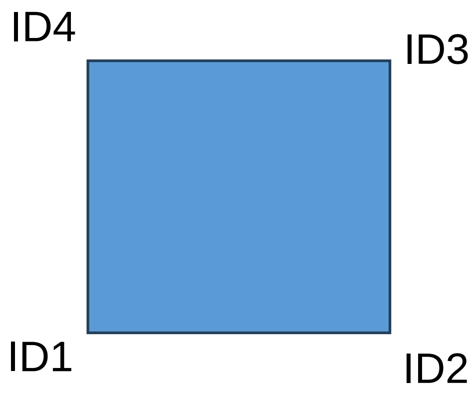


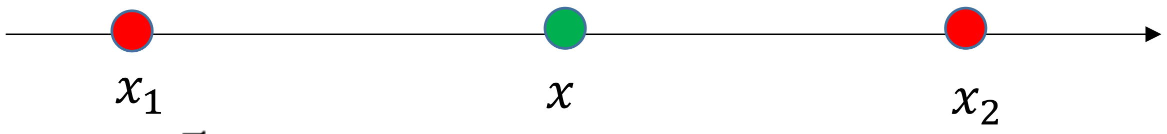
stan nieustalony
stan ustalony

H, W, nH = 6, nW = 4, nN = nH * nW, nE = (nH-1)(nW-1)



$$q = \alpha(t - t_\alpha)$$



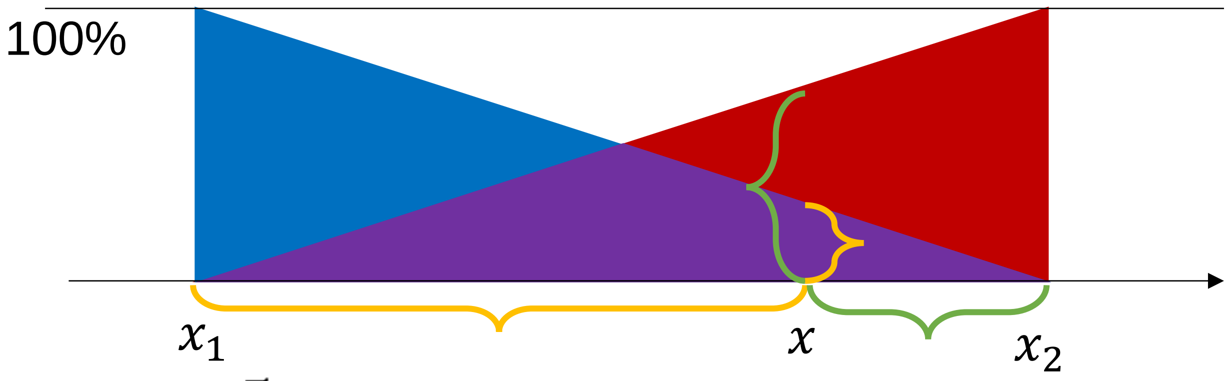


$x_1 = 5 \qquad x_2 = 10$

$t_1 = 20 \qquad t_2 = 60$

$$t_{x=7.5} = ?$$

$$t_{x=8.62} = ?$$



$$N_1 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}$$

$$N_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$N_1 + N_2 = 1\,!$$

$x_1 = 5$ $x_2 = 10$

$t_1 = 20$ $t_2 = 60$

$$t_{x=7.5} = \frac{20 + 60}{2} = 40$$

$$t_{x=8.62} = ?$$

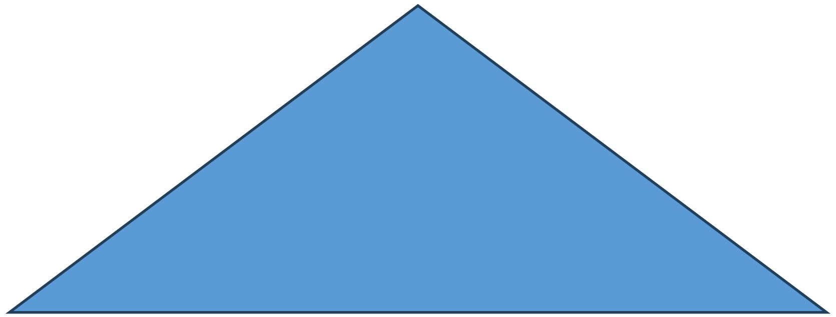
$$t = N_1 t_1 + N_2 t_2$$

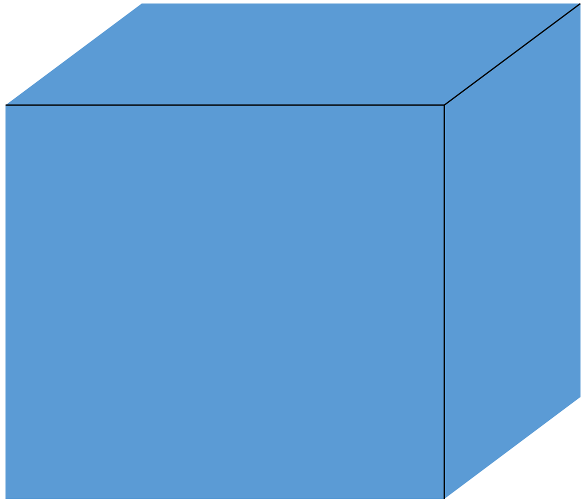
$$t_{x=5} = 1 * 20 + 0 * 60 = 20$$

$x = 7.5$

$N_1 = N_2 = 0.5$

$t = N_1 t_1 + N_2 t_2 = 0.5 * 20 + 0.5 * 60 = 40$





$$t = N_1 t_1 + N_2 t_2 + N_3 t_3$$

$$t = N_1 t_1 + N_2 t_2 + \dots + N_8 t_8$$

$$t = \sum_{1}^{8} N_i t_i$$

$$t = \{N\}^T \{t\} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = N_1 t_1 + N_2 t_2$$

Zjawiska cieplne zachodzące w stanie ustalonym opisuje równanie Fouriera w postaci:

$$div\left(k(t)grad(t)\right)+Q=0,$$

które może być zapisane też w postaci:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x(t)\frac{\partial t}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_y(t)\frac{\partial t}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_z(t)\frac{\partial t}{\partial z}\right)+Q=0, \qquad (5.1)$$

gdzie:
$k_x(t)$, $k_y(t)$, $k_z(t)$ – anizotropowe współczynniki przewodzenia ciepła zależne od temperatury t;
Q – prędkość generowania ciepła.

Rozwiązanie równania (5.1) sprowadza się do zadania polegającego na poszukiwaniu minimum takiego funkcjonału, dla którego równanie (5.1) jest równaniem Eulera. Według rachunku wariacyjnego [5, 14, 17] funkcjonał taki będzie miał postać:

$$J=\int_V \frac{1}{2}\left(k_x(t)\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2+k_y(t)\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)^2+k_z(t)\left(\frac{\partial t}{\partial z}\right)^2-2Qt\right)dV\ . \qquad (5.2)$$

Przy założeniu, że $k_x(t) = k_y(t) = k_z(t) = k(t)$ dla materiałów izotropowych funkcjonał wyraża się jako:

$$J=\int_V \left(\frac{k(t)}{2}\left(\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial t}{\partial z}\right)^2\right)-Qt\right)dV\ . \qquad (5.3)$$

Funkcja $t(x,y,z)$ musi spełniać określone warunki brzegowe na powierzchni rozpatrywanego obszaru. Możliwe są trzy typy warunków brzegowych:

– na powierzchni jest zadana temperatura t;

– na powierzchni zadany jest strumień ciepła q według prawa konwekcji:

$$k(t)\left(\frac{\partial t}{\partial x}a_x+\frac{\partial t}{\partial y}a_y+\frac{\partial t}{\partial z}a_z\right)=\alpha_{konw}\left(t-t_\infty\right), \qquad (5.4)$$

gdzie:

a_x, a_y, a_z – kosinusy kierunkowe wektora normalnego do powierzchni;

t_∞ – temperatura otoczenia;

α_{konw} – współczynnik konwekcyjnej wymiany ciepła;

– na powierzchni metalu zadany jest strumień cieplny q według prawa wymiany przez promieniowanie:

$$k(t)\left(\frac{\partial t}{\partial x}a_x+\frac{\partial t}{\partial y}a_y+\frac{\partial t}{\partial z}a_z\right)=\sigma_{rad}\left(t^4-t_\infty^4\right), \qquad (5.5)$$

Przy wspólnym działaniu dwóch ostatnich warunków może być użyte prawo konwekcji:

$$k(t)\left(\frac{\partial t}{\partial x}a_x+\frac{\partial t}{\partial y}a_y+\frac{\partial t}{\partial z}a_z\right)=\alpha\left(t-t_\infty\right) \tag{5.6}$$

gdzie:

α – efektywny współczynnik wymiany ciepła, który można wyznaczyć według iteracyjnej formuły:

$$\alpha=\alpha_{konw}+\sigma_{rad}\left(t^2+t_\infty^2\right)\left(t+t_\infty\right). \tag{5.7}$$

Wyrażenie $\alpha(t_\infty - t)$ dotyczy wymiany ciepła z otoczeniem, a współczynnik α jest przyjmowany odpowiednio do istniejących warunków. Możliwa jest wymiana ciepła z gazem, powietrzem lub medium chłodzącym na powierzchniach swobodnych.
Bezpośrednie wprowadzenie warunków brzegowych do funkcjonału (5.3) nie jest możliwe. W praktyce narzuca się te warunki poprzez dodanie do funkcjonału (5.3) całki w postaci:

$$\int_S \frac{\alpha}{2}(t - t_\infty)^2\, dS + \int_S qt dS \quad , \qquad (5.8)$$

gdzie:

S – powierzchnia, na której zadane są warunki brzegowe.

W rezultacie otrzymuje się:

$$J = \int_V \left(\frac{k(t)}{2} \left(\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial z}\right)^2 \right) - Qt \right) dV + \\ + \int_S \frac{\alpha}{2}(t - t_\infty)^2\, dS + \int_S qt dS \quad . \qquad (5.9)$$

Dyskretyzacja przedstawionego problemu polega na podzieleniu rozpatrywanego obszaru na elementy i przedstawieniu temperatury wewnątrz elementu, jako funkcji wartości węzłowych zgodnie z zależnością:

$$t = \sum_{i=1}^{n} N_i t_i = \{N\}^T \{t\}. \tag{5.10}$$

Wprowadzając zależność (5.10) do funkcjonału (5.9) otrzymano:

$$\begin{aligned} J = \int_V \left(\frac{k}{2} \left(\left(\left\{ \frac{\partial \{N\}}{\partial x} \right\}^T \{t\} \right)^2 + \left(\left\{ \frac{\partial \{N\}}{\partial y} \right\}^T \{t\} \right)^2 + \left(\left\{ \frac{\partial \{N\}}{\partial z} \right\}^T \{t\} \right)^2 \right) - Q \{N\}^T \{t\} \right) dV + \\ + \int_S \frac{\alpha}{2} \left(\{N\}^T \{t\} - t_\infty \right)^2 dS + \int_S q \{N\}^T \{t\} dS. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Minimalizacja funkcjonału (5.11) sprowadza się do obliczenia pochodnych cząstkowych tego funkcjonału względem wartości węzłowych temperatury $\{t\}$, co w rezultacie prowadzi do następującego układu równań:

$$\frac{\partial J}{\partial\{t\}} = \int_V \left(k \left(\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial x}\right\}\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial x}\right\}^T + \left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial y}\right\}\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial y}\right\}^T + \left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial z}\right\}\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial z}\right\}^T \right)\{t\} - Q\{N\} \right) dV + \\ + \int_S \alpha\left(\{N\}^T\{t\} - t_\infty\right)\{N\} dS + \int_S q\{N\} dS = 0 \tag{5.12}$$

Układ równań (5.12) zapisany w postaci macierzowej ma postać:

$$[H]\{t\}+\{P\}=0\,. \tag{5.13}$$

W równaniu (5.13) macierze $[H]$ i $\{P\}$ opisane są następującymi zależnościami:

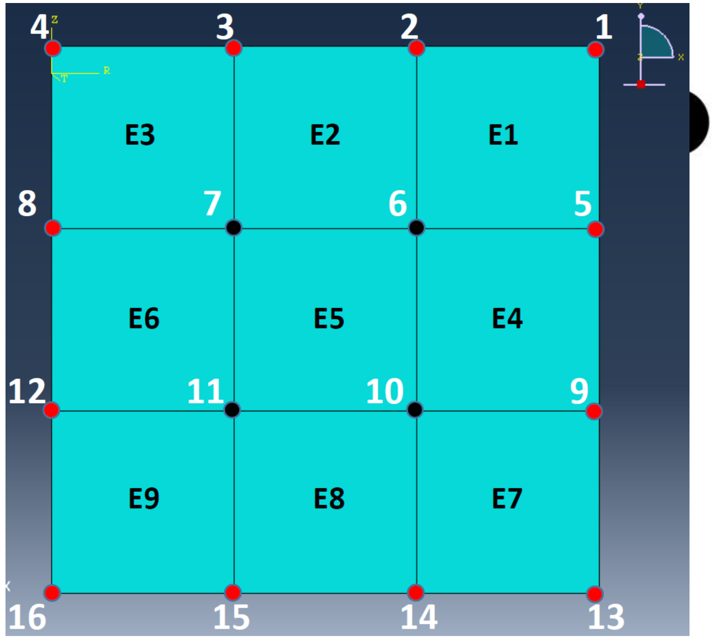
$$[H]=\int_V k(t)\left(\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial x}\right\}\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial x}\right\}^T+\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial y}\right\}\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial y}\right\}^T+\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial z}\right\}\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial z}\right\}^T\right)dV+$$

$$+\int_S \alpha\{N\}\{N\}^T dS, \tag{5.14}$$

$$\{P\}=-\int_S \alpha\{N\}t_\infty dS-\int_V Q\{N\}dV+\int_S q\{N\}dS\,. \tag{5.15}$$

W inny sposób minimalizacja funkcjonału (5.11) może być wykonana przez bezpośredni dobór węzłowych wartości temperatury za pomocą jednej z istniejących metod minimalizacji.

Praca domowa



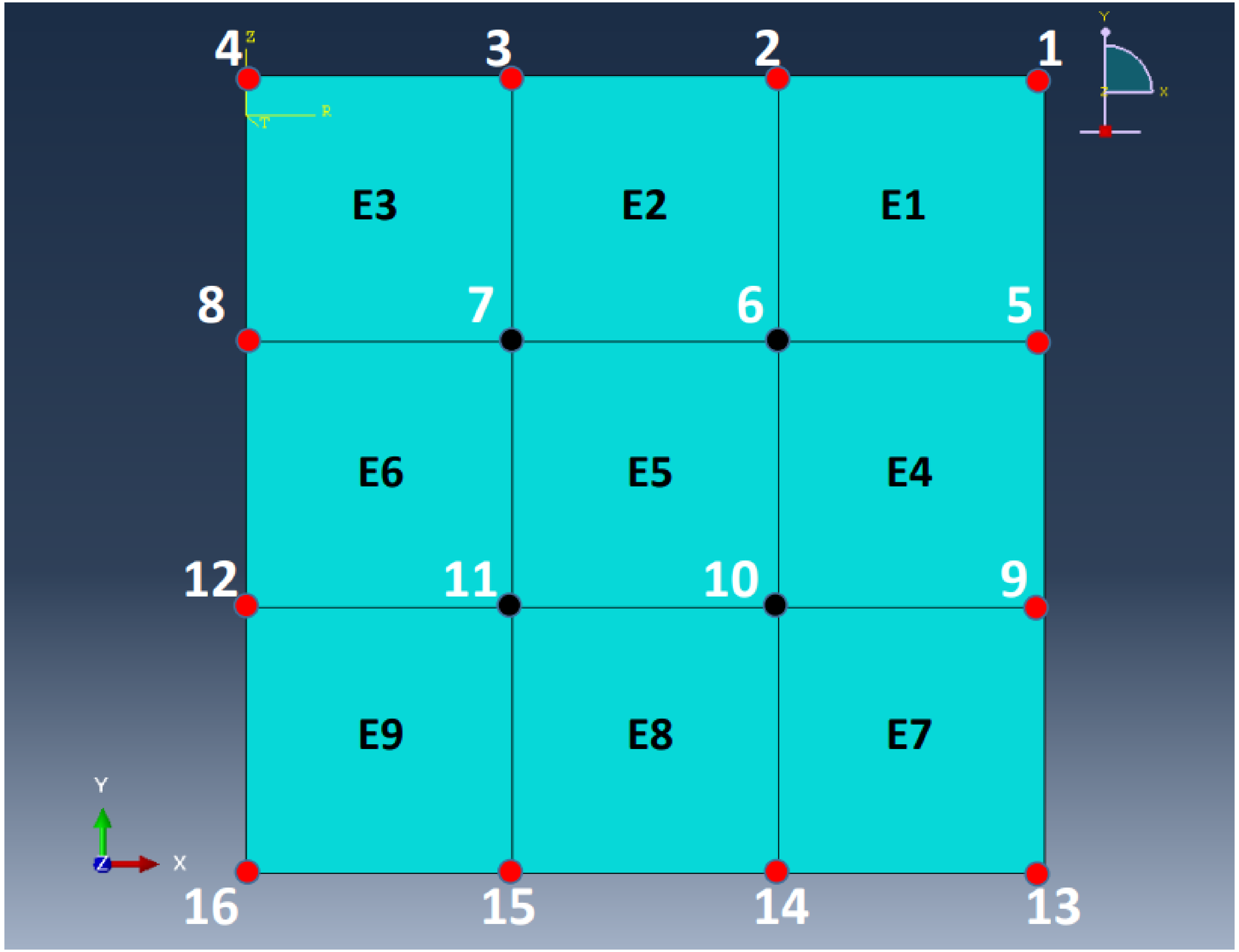

```
struct node
{
    x, y;
}

struct element
{
    ID{1x4] ->{1, 2, 6, 5}
}

struct grid
{
  nN – liczba węzłów
  nE – liczba elementów
  elem[nE]
  node[nN]
}
```

```
struct GlobalData (odczyt z pliku)
{
  SimulationTime
  SimulationStepTime
  Conductivity
  Alfa
  Tot
  InitialTemp100
  Density
  SpecificHeat
  nN – liczba węzłów
  nE – liczba elementów
  H – wysokość siatki
  W – szerokość siatki
}
```

```
*Node
    1,  0.100000001, 0.00499999989
    2, 0.0666666701, 0.00499999989
   ………………………
   14, 0.0666666701, -0.0949999988
   15, 0.0333333351, -0.0949999988
   16,           0., -0.0949999988
*Element, type=DC2D4
1,  1,  2,  6,  5
2,  2,  3,  7,  6
3,  3,  4,  8,  7
```

Import siatki MES

SimulationTime 500
SimulationStepTime 50
Conductivity 25
Alfa 300
Tot 1200
InitialTemp 100
Density 7800
SpecificHeat 700
Nodes number 16
Elements number 9
*Node
  1, 0.100000001, 0.00499999989
  2, 0.0666666701, 0.00499999989
  ....
  14, 0.0666666701, -0.0949999988
  15, 0.0333333351, -0.0949999988
  16,   0., -0.0949999988
*Element, type=DC2D4
1, 1, 2, 6, 5
2, 2, 3, 7, 6
3, 3, 4, 8, 7
4, 5, 6, 10, 9
5, 6, 7, 11, 10
6, 7, 8, 12, 11
7, 9, 10, 14, 13
8, 10, 11, 15, 14
9, 11, 12, 16, 15
*BC
1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 12, 13, 14, 15, 16



Test 1 siatka kwadratowa 4x4 węzły – Test1_4_4