LAPORAN PRAKTIKUM 4

Analisis algoritma

Disusun oleh :

Tyko Zidane Badhawi

140810180031

PROGRAM STUDI S1 TEKNIK INFORMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS PADJADJARAN

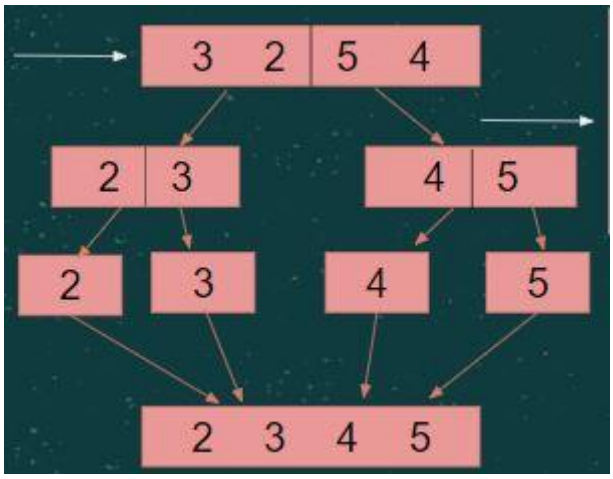
2020

A. Paradigma Divide dan Conquer

Divide and Conquer adalah teknik algoritmik dengan cara memecah input menjadi beberapa bagian, memecahkan masalah di setiap bagian secara rekursif, dan menggabungkan solusi untuk subproblem ini menjadi solusi keseluruhan. Algoritma yang menggunakan *divide and conquer* adalah **algoritma *merge-sort***.

B. Merge Sort

Misalkan ada array sebagai berikut. Tujuan kita adalah untuk mengurutkan dari terkecil - terbesar.



Proses **divide** pada saat membagi array menjadi 2 bagian $D(n)$.
Proses **conquer** pada saat array yang dibagi dua diurutkan $C(n)$.

Sehingga, $T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + D(n) + C(n)$
$a =$ banyaknya cabang di awal proses *divide* → *2*
$b =$ pada proses *divide*, array dibagi menjadi berapa bagian? → 2
$D(n) =$ proses *divide* ; $C(n) =$ proses *conquer*

C. Metode Penyelesaian Requrensi

1) Metode Subtitusi

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + cn$$

- Menebak sebuah solusi
- Membuktikan dengan cara induksi matematika

2) Recursion Tree

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + cn$$

- Membuat recursion tree dari soal
- Melihat pola bilangan pada setiap level di recursion tree untuk mencapai $T(1)$

3) Metode Master

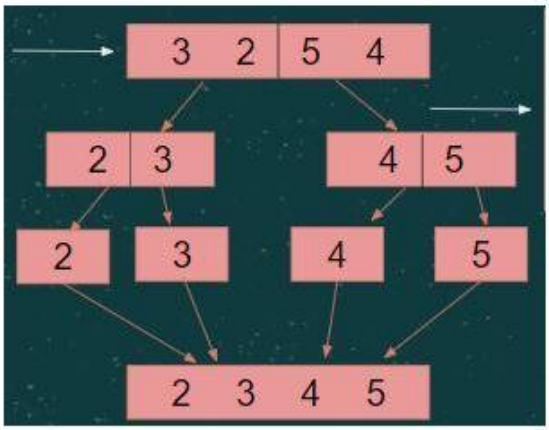
$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

- Urutan pengerjaan cek contoh soal

D. Contoh Soal

1) Subtitusi

Misalkan ada array sebagai berikut. Tujuan kita adalah untuk mengurutkan dari terkecil - terbesar.



Proses **divide** pada saat membagi array menjadi 2 bagian $D(n)$.
Proses **conquer** pada saat array yang dibagi dua diurutkan $C(n)$.

Sehingga, $T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + D(n) + C(n)$
a = banyaknya cabang di awal proses *divide* → 2
b = pada proses *divide*, array dibagi menjadi berapa bagian? → 2
$D(n)$ = proses *divide* ; $C(n)$ = proses *conquer*

$$T(n) = 2T\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right) + f(n)$$

- $O(tebakan) = O(n \log n)$ → karena mirip dengan algoritma heap sort pengerjaannya. Sehingga : $f(n) = n \log n$
- $T(n) \leq c\big(f(n)\big)$

  $T(n) \leq c(n \log n)$

  $n = 2$, karena $\lfloor n/2 \rfloor = \lfloor 2/2 \rfloor = 1$ → kalua $n = 1, \lfloor n/2 \rfloor = \lfloor 1/2 \rfloor = 0$ sehingga tidak memenuhi

  $T\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right) \leq c\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right) \log \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$ → Subtitusikan ke rekurensi

  $T(n) \leq c(n \log n) + cn$

  $T(n) \leq 2(c\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right) \log \left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)) + cn$ → kenapa 2 didepan? Karena di persamaan awal 2T

$T(n) \leq cn \log \frac{n}{2} + cn$

$T(n) = cn \log n - cn \log 2 + cn \rightarrow$ sifat algoritma

$T(n) = cn \log n - cn + cn$

$T(n) = cn \log n \rightarrow -cn + cn$ diabaikan karena nilainya kecil sehingga tidak berpengaruh besar. Sehingga terbukti bahwa Big-Omerge sort adalah $O(n \log n)$

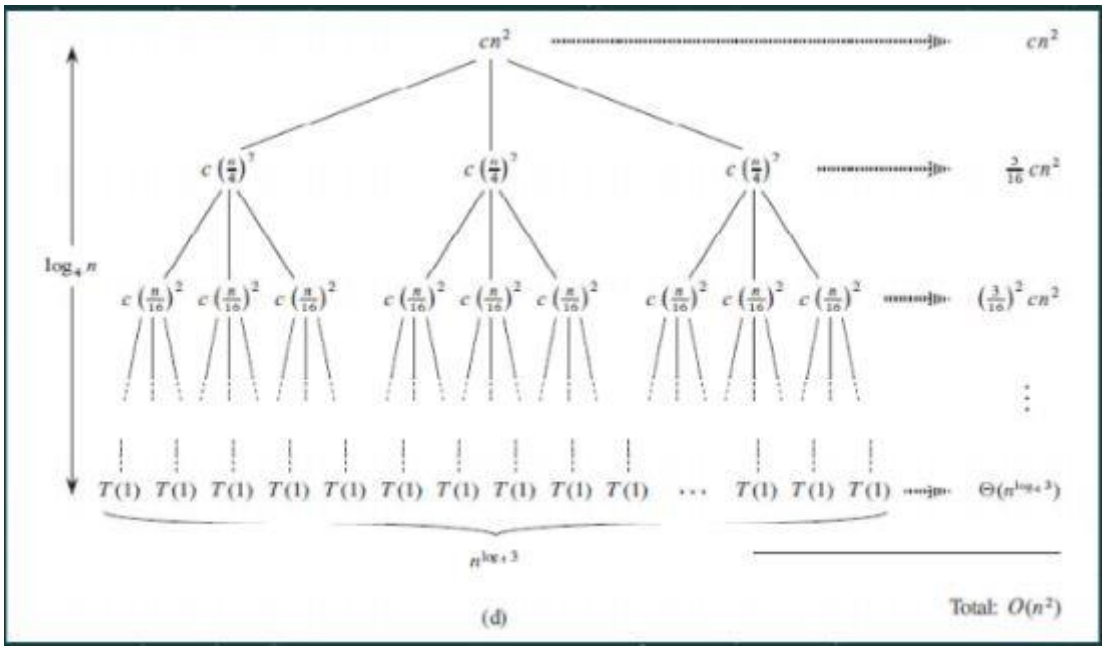
2) Recursion Tree

Temukan upper bound dari rekurensi berikut:

$$T(n) = 3T\left(\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor\right) + \Theta(n^2)$$

Jawab

- Membuat recursion tree sesuai fungsi
- Menghitung jumlah seluruh nilai di setiap kedalaman dengan sigma



Cost untuk keseluruhan tree, yaitu:

$$T(n) = cn^2 + \frac{3}{16}cn^2 + \left(\frac{3}{16}\right)^2 cn^2 + \cdots + \left(\frac{3}{16}\right)^{\log_4 n - 1} cn^2 + \Theta\left(n^{\log_4 3}\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{\log_4 n - 1} \left(\frac{3}{16}\right)^i cn^2 + \Theta\left(n^{\log_4 3}\right)$$

$$< \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^i cn^2 + \Theta\left(n^{\log_4 3}\right)$$

$$= \frac{1}{1-\left(\frac{3}{16}\right)} cn^2 + \Theta\left(n^{\log_4 3}\right)$$

$$= \frac{16}{13} cn^2 + \Theta\left(n^{\log_4 3}\right)$$

$$= O(n^2)$$

3) Master

Tentukan Big-Θ dari rekurensi berikut:

$$T(n) = 9T\left(\frac{n}{3}\right) + n$$

Jawab

$a = 9; b = 3; f(n) = n$

$n^{(\log_b a)} = n^{(\log_3 9)}$

$= n^2$

$f(n) = n = \Theta\left(n^{(\log_3 9-\varepsilon)}\right)$

$= \Theta\left(n^{(\log_3 9-1)}\right) \rightarrow untuk\ \varepsilon = 1$

$= \Theta\left(n^{(\log_3 8)}\right)$

$= \Theta\left(n^{(1,89)}\right)$

$= \Theta(n^2)$

E. Bagian Analisis di Modul Praktikum

1. Merge Sort

Setelah Anda mengetahui Algoritma Merge-Sort mengadopsi paradigma divide & conquer, lakukan hal berikut:

a. Buat program Merge-Sort dengan bahasa C++

b. Kompleksitas waktu algoritma merge sort adalah O(n lg n). Cari tahu kecepatan computer Anda dalam memproses program. Hitung berapa running time yang dibutuhkan apabila input untuk merge sort-nya adalah 20?

Jawaban:

a. Program

```
/*
Nama    : Tyko Zidane Badhawi
NPM     :140810180031
Kelas   : A
*/
#include <iostream>
```

```
using namespace std;

int a[50];

void merge(int low,int mid,int high){
    int h,i,j,b[50],k;
    h=low;
    i=low;
    j=mid+1;
    while((h<=mid)&&(j<=high)){
        if(a[h]<=a[j]){
            b[i]=a[h]; h++;
        }
        else{
            b[i]=a[j]; j++;
        }
        i++;
    }

    if(h>mid){
        for(k=j;k<=high;k++){
            b[i]=a[k]; i++;
        }
    }
    else{
        for(k=h;k<=mid;k++){
            b[i]=a[k]; i++;
        }
    }
    for(k=low;k<=high;k++)
        a[k]=b[k];
}

void merge_sort(int low,int high){
    int mid;
    if(low<high){
        mid=(low+high)/2;
        merge_sort(low,mid);
        merge_sort(mid+1,high);
        merge(low,mid,high);
    }
}

int main(){
    int num,i;

    cout<<"Masukkan jumlah elemen yang akan diurutkan: ";cin >
> num;
```

```
    cout<<endl;

    for(i=1;i<=num;i++){
        cout<<"Elemen "<<i<<" :";cin>>a[i] ;
    }

    merge_sort(1,num);

    cout << "\n-----------------------------------" << endl;
    cout<<"Merge Sort :"<<endl;
    cout<<endl;

    for(i=1;i<=num;i++){
        cout<<a[i]<<" ";
        cout<<endl<<endl<<endl<<endl;
    }
}
```

b. $O \rightarrow T(20 \log_{10} 20) = 26$

2. Selection Sort

Selection sort merupakan salah satu algoritma sorting yang berparadigma divide & conquer. Untuk membedah algoritma selection sort, lakukan langkah-langkah berikut:

- Pelajari cara kerja algoritma selection sort
- Tentukan $T(n)$ dari rekurensi (pengulangan) selection sort berdasarkan penentuan rekurensi divide & conquer:

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & if\ n \leq c \\ aT\left(\frac{n}{b}\right) + D(n) + C(n) & otherwise \end{cases}$$

- Selesaikan persamaan rekurensi $T(n)$ dengan **metode recursion-tree** untuk mendapatkan kompleksitas waktu asimptotiknya dalam Big-O, Big-Ω, dan Big-Θ
- Lakukan implementasi koding program untuk algoritma selection sort dengan menggunakan bahasa C++

Jawaban:

```
for i ← n downto 2 do {pass sebanyak n-1 kali}
    imaks ← 1
    for j ← 2 to i do
      if xj > ximaks then
        imaks ← j
      endif
    endfor
    {pertukarkan ximaks dengan xi}
    temp ← xi
    xi ← ximaks
    ximaks ← temp
endfor
```

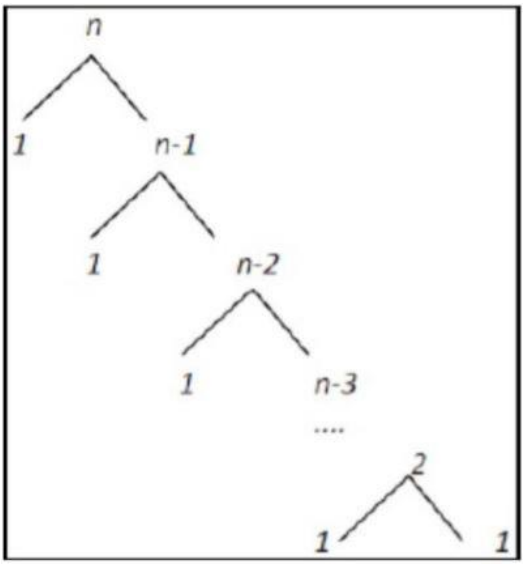
Subproblem = 1

Masalah setiap subproblem = n-1

Waktu proses pembagian = n

Waktu proses penggabungan = n

$T(n) = \{\Theta(1)T(n-1) + \Theta(n)$



$$T(n) = cn + cn - c + cn - 2c + \cdots + 2c + cn$$

$$= c\left(\frac{(n-1)(n-2)}{2}\right) + cn$$

$$= c\left(\frac{n^2 - 3n + 2}{2}\right) + cn$$

$$= c\left(\left(\frac{n^2}{2}\right) - \left(\frac{3n}{2}\right) + 1\right) + cn$$

$$= O(n^2)$$

$$T(n) = cn + cn - c + cn - 2c + \cdots + 2c + cn$$

$$= c\left(\frac{(n-1)(n-2)}{2}\right) + cn$$

$$= c\left(\frac{n^2 - 3n + 2}{2}\right) + cn$$

$$= c\left(\left(\frac{n^2}{2}\right) - \left(\frac{3n}{2}\right) + 1\right) + cn$$

$$= \Omega(n^2)$$

$$T(n) = cn^2 = \Theta(n^2)$$

Program:

```
/*
Nama     : Tyko Zidane Badhawi
NPM      :140810180031
Kelas    : A
*/
#include <iostream>
#include<conio.h>

using namespace std;

int data[100],data2[100];
int n;

void tukar(int a, int b)
{
    int t;
    t = data[b];
    data[b] = data[a];
    data[a] = t;
}
void selection_sort()
{
    int pos,i,j;
    for(i=1;i<=n-1;i++)
    {
        pos = i;
        for(j = i+1;j<=n;j++)
        {
           if(data[j] < data[pos]) pos = j;
        }
        if(pos != i) tukar(pos,i);
    }
}

int main()
```

```
{
    cout<<"\nEnter the number of data element to be sorted: ";cin>>n
;
    for(int i=1;i<=n;i++)
    {
        cout<<"Enter element "<<i<<": ";
        cin>>data[i];
        data2[i]=data[i];
    }

    selection_sort();
    cout<<"Sorted Data: "<<endl;
    for(int i=1; i<=n; i++)
    {
        cout<<" "<<data[i];
    }
}
```

3. Insertion Sort

   Insertion sort merupakan salah satu algoritma sorting yang berparadigma divide & conquer. Untuk membedah algoritma insertion sort, lakukan langkah-langkah berikut:

   - Pelajari cara kerja algoritma insertion sort
   - Tentukan $T(n)$ dari rekurensi (pengulangan) insertion sort berdasarkan penentuan rekurensi divide & conquer:

     $$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & if\ n \leq c \\ aT\left(\frac{n}{b}\right) + D(n) + C(n) & otherwise \end{cases}$$

   - Selesaikan persamaan rekurensi $T(n)$ dengan **metode subtitusi** untuk mendapatkan kompleksitas waktu asimptotiknya dalam Big-O, Big-Ω, dan Big-Θ
   - Lakukan implementasi koding program untuk algoritma insertion sort dengan menggunakan bahasa C++

   Jawaban:

Algoritma

```
for i ← 2 to n do
    insert ← xi
    j ← i
    while (j < i) and (x[j-i] > insert) do
        x[j]← x[j-1]
        j←j-1
    endwhile
    x[j] = insert
endfor
```

Subproblem = 1

Masalah setiap subproblem = n-1

Waktu proses penggabungan = n

Waktu proses pembagian = n

$T(n) = \{\Theta(1)T(n-1) + \Theta(n)$

$T(n) = cn + cn - c + cn - 2c + \cdots + 2c + cn \Leftarrow 2cn^2 + cn^2$

$= c\left(\frac{(n-1)(n-2)}{2}\right) + cn \qquad \Leftarrow 2cn^2 + cn^2$

$= c\left(\frac{n^2 - 3n + 2}{2}\right) + cn \qquad \Leftarrow 2cn^2 + cn^2$

$= c\left(\left(\frac{n^2}{2}\right) - \left(\frac{3n}{2}\right) + 1\right) + cn \qquad \Leftarrow 2cn^2 + cn^2$

$= O(n^2)$

$T(n) = cn \Leftarrow cn$

$= \Omega(n)$

$T(n) = \frac{cn + cn^2}{n} = \Theta(n)$

Program:

```
/*
Nama    : Tyko Zidane Badhawi
NPM     :140810180031
Kelas   : A
*/
#include <iostream>
#include <conio.h>

using namespace std;

int data[100],data2[100],n;
```

```
void insertion_sort()
{
    int temp,i,j;
    for(i=1;i<=n;i++){
        temp = data[i];
        j = i -1;
        while(data[j]>temp && j>=0){
            data[j+1] = data[j];
            j--;
        }
        data[j+1] = temp;
    }
}
int main()
{
    cout<<"Enter the number of data element to be sorted: "; cin>>n;
    cout<<endl;

    for(int i=1;i<=n;i++)
    {
      cout<<"Enter element "<<i<<": ";
      cin>>data[i];
      data2[i]=data[i];
    }

    insertion_sort();
    cout<<"\nSorted Data: "<<endl;
    for(int i=1; i<=n; i++)
    {
      cout<<data[i]<<" ";
    }
}
```

4. Bubble Sort

   Bubble sort merupakan salah satu algoritma sorting yang berparadigma divide & conquer. Untuk membedah algoritma bubble sort, lakukan langkah-langkah berikut:

   - Pelajari cara kerja algoritma bubble sort
   - Tentukan $T(n)$ dari rekurensi (pengulangan) insertion sort berdasarkan penentuan rekurensi divide & conquer:

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & if\ n \leq c \\ aT\left(\frac{n}{b}\right) + D(n) + C(n) & otherwise \end{cases}$$

- Selesaikan persamaan rekurensi $T(n)$ dengan **metode master** untuk mendapatkan kompleksitas waktu asimptotiknya dalam Big-O, Big-Ω, dan Big-Θ
- Lakukan implementasi koding program untuk algoritma bubble sort dengan menggunakan bahasa C++

Jawaban:

Algoritma

```
swapped = false
for i ← 1 to n-1 do
        if array[i-1] > array[i] then
                swap array[i-1] and array[i]
                swapped = true
        endif
endfor
```

Subproblem = 1

Masalah setiap subproblem = n-1

Waktu proses pembagian = n

Waktu proses penggabungan = n

$T(n) = \{\Theta(1)T(n-1) + \Theta(n)$

$T(n) = cn + cn - c + cn - 2c + \cdots + 2c + cn \Leftarrow 2cn^2 + cn^2$

$= c\left(\frac{(n-1)(n-2)}{2}\right) + cn \qquad \Leftarrow 2cn^2 + cn^2$

$= c\left(\frac{n^2 - 3n + 2}{2}\right) + cn \qquad \Leftarrow 2cn^2 + cn^2$

$= c\left(\left(\frac{n^2}{2}\right) - \left(\frac{3n}{2}\right) + 1\right) + cn \qquad \Leftarrow 2cn^2 + cn^2$

$= O(n^2)$

$T(n) = cn + cn - c + cn - 2c + \cdots + 2c + cn \Leftarrow 2cn^2 + cn^2$

$= c\left(\frac{(n-1)(n-2)}{2}\right) + cn \qquad \Leftarrow 2cn^2 + cn^2$

$= c\left(\frac{n^2 - 3n + 2}{2}\right) + cn \qquad \Leftarrow 2cn^2 + cn^2$

$= c\left(\left(\frac{n^2}{2}\right) - \left(\frac{3n}{2}\right) + 1\right) + cn \qquad \Leftarrow 2cn^2 + cn^2$

$$= \Omega(n^2)$$

$$T(n) = cn^2 + cn^2$$

$$= \Theta(n^2)$$

Program:

```
/*
Nama     : Tyko Zidane Badhawi
NPM      :140810180031
Kelas    : A
*/
#include <iostream>
#include <conio.h>

using namespace std;


int main(){
    int arr[100],n,temp;

    cout<<"Enter the number of data element to be sorted: ";cin>>n;


    for(int i=0;i<n;++i){
        cout<<"Enter element "<<i+1<<" : ";cin>>arr[i];
    }

    for(int i=1;i<n;i++){
        for(int j=0;j<(n-1);j++){
            if(arr[j]>arr[j+1]){
                temp=arr[j];
                arr[j]=arr[j+1];
                arr[j+1]=temp;
            }
        }
    }

    cout<<"\nSorted Data: "<<endl;
    for(int i=0;i<n;i++){
        cout<<" "<<arr[i];
    }

}
```