고유벡터와 고유값이란?

선형변환을 수행할 때, 대부분의 벡터는 방향이 바뀝니다. 하지만 일부 특별한 벡터들은 **방향은 유지한 채 크기만 변하는** 경우가 있습니다. 이런 특별한 벡터를 **고유벡터(eigenvector)** 라고 하고, 그 벡터가 늘어나거나 줄어드는 비율을 **고유값 (eigenvalue)** 이라고 합니다.

수식으로 표현하면:

```
Av = λv
```

- `A` : 선형변환 행렬
- `v` : 고유벡터 (0이 아닌 벡터)
- `λ` (lambda): 고유값 (스칼라)

기하학적 의미

변환 후에도 원래 벡터와 같은 직선 위에 있는 벡터가 고유벡터입니다. 예를 들어:

- 회전 변환의 경우, 회전축이 고유벡터가 됩니다 (3차원)
- 2차원에서는 변환 후에도 방향이 유지되는 벡터들이 고유벡터입니다

고유값과 고유벡터를 구하는 방법

1. **기본 방정식 변형**

   ```
   Av = λv
   Av - λv = 0
   (A - λI)v = 0
   ```

   여기서 `I` 는 단위행렬(identity matrix)입니다.
2. **고유값 구하기**

   위 방정식이 0이 아닌 해 `v` 를 가지려면, 행렬 `(A - λI)` 의 행렬식(determinant)이 0이어야 합니다.

   ```
   det(A - λI) = 0
   ```

   이것을 **특성방정식(characteristic polynomial)** 이라고 하며, 이를 풀면 고유값 λ를 구할 수 있습니다.
3. **고유벡터 구하기**

   구한 각 고유값 λ를 `(A - λI)v = 0` 에 대입하여 고유벡터 `v` 를 구합니다.

고유기저(Eigenbasis)의 중요성

만약 충분한 수의 고유벡터가 있어서 공간 전체를 span할 수 있다면, 이들을 새로운 기저로 사용할 수 있습니다. 이를 **고유기저(eigenbasis)** 라고 합니다.

고유기저의 장점:

- 고유기저를 사용하면 변환 행렬이 **대각행렬(diagonal matrix)** 이 됩니다
- 대각행렬은 대각선 위에만 값이 있고 나머지는 0인 행렬입니다
- 대각행렬의 대각선 값은 바로 고유값들입니다

기저 변환(Change of Basis)

고유기저로 변환하는 과정:

1. 고유벡터들을 열로 하는 **기저변환 행렬** `P` 를 만듭니다
2. 원래 변환 `A` 를 다음과 같이 변환합니다:

   ```
   D = P⁻¹AP
   ```

   여기서 `D` 는 대각행렬이고, 대각선 값들이 고유값입니다

실용적 응용

행렬의 거듭제곱 계산:

- `A¹⁰⁰` 을 직접 계산하는 것은 매우 복잡합니다
- 하지만 고유기저로 변환하면:

  ```
  A¹⁰⁰ = PD¹⁰⁰P⁻¹
  ```

  대각행렬 `D` 의 거듭제곱은 각 대각선 값을 거듭제곱하면 되므로 매우 간단합니다!

주의사항

모든 변환이 충분한 고유벡터를 가지는 것은 아닙니다:

- **전단변환(shear transformation)** 은 전체 공간을 span하기에 충분한 고유벡터를 갖지 못합니다
- 회전변환의 경우 실수 고유벡터가 없을 수도 있습니다 (복소수 고유값/고유벡터를 가짐)

---

2. 퀴즈

문제 1

고유벡터와 고유값의 정의를 기하학적 관점에서 설명하시오. 선형변환 시 고유벡터가 다른 일반적인 벡터와 어떻게 다르게 행동하는지 서술하시오.

문제 2

2×2 행렬 A = [[3, 1], [0, 2]]가 주어졌을 때, 이 행렬의 고유값을 구하는 과정을 단계별로 서술하시오. (계산 과정을 모두 포함할 것)

문제 3

고유기저(eigenbasis)를 사용하면 어떤 장점이 있는지 설명하고, 이것이 행렬의 거듭제곱 계산을 어떻게 간단하게 만드는지 구체적인 예를 들어 서술하시오.

문제 4

다음 중 어떤 변환이 실수 고유벡터를 갖지 못할 가능성이 높은지 설명하고, 그 이유를 기하학적 직관을 바탕으로 서술하시오: (a) 2차원 평면에서의 90도 회전변환 (b) x축 방향으로의 스케일링 변환

문제 5

방정식 (A - λI)v = 0에서 det(A - λI) = 0 이어야 하는 이유를 선형대수학의 행렬식(determinant) 개념과 연결하여 설명하시오.

---

3. 퀴즈 답

문제 1 답안

고유벡터는 선형변환 후에도 **방향이 변하지 않는** 벡터입니다. 일반적인 벡터는 변환 시 방향과 크기 모두 바뀌지만, 고유벡터는 원래 벡터와 같은 직선 위에 머물며 크기만 변합니다.

기하학적으로, 변환 전의 벡터 v와 변환 후의 벡터 Av가 서로 평행(같은 직선 위)합니다. 이때 늘어나거나 줄어드는 비율을 고유값 λ라고 합니다. 예를 들어, λ = 2이면 벡터가 2배로 늘어나고, λ = -1이면 크기는 같지만 반대 방향을 가리키게 됩니다.

문제 2 답안

단계 1: 특성방정식 세우기

```
det(A - λI) = det([[3-λ, 1], [0, 2-λ]]) = 0
```

단계 2: 행렬식 계산

```
det([[3-λ, 1], [0, 2-λ]]) = (3-λ)(2-λ) - (1)(0)
                          = (3-λ)(2-λ)
                          = 6 - 3λ - 2λ + λ²
                          = λ² - 5λ + 6
```

단계 3: 특성방정식 풀기

```
λ² - 5λ + 6 = 0
(λ - 2)(λ - 3) = 0
```

답: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$

따라서 이 행렬의 고유값은 2와 3입니다.

문제 3 답안

고유기저를 사용하면 변환 행렬이 **대각행렬**로 표현됩니다. 대각행렬은 대각선 위에만 값(고유값들)이 있고 나머지는 0이므로 계산이 매우 간단합니다.

행렬 거듭제곱의 예: 원래 행렬 A를 100번 곱하려면 (A^{100}) 엄청난 계산이 필요하지만, 고유기저를 사용하면:

1. 기저변환: $A = PDP^{-1}$ (D는 대각행렬)

2. 거듭제곱: $A^{100} = PD^{100}P^{-1}$
3. 대각행렬의 거듭제곱은 각 대각선 원소만 거듭제곱하면 됨

예를 들어, D = 2, 0], [0, 3이면 D^{100} = 2^{100}, 0], [0, 3^{100}

이는 100번의 행렬 곱셈을 단순한 스칼라 거듭제곱으로 바꿔줍니다.

문제 4 답안

(a) 90도 회전변환이 실수 고유벡터를 갖지 못할 가능성이 높습니다.

이유: 2차원 평면에서 90도 회전을 생각해보면, 어떤 벡터도 회전 후에 원래 방향(같은 직선 위)을 유지할 수 없습니다. 모든 벡터가 수직으로 회전하므로, 방향이 유지되는 벡터가 존재하지 않습니다.

반면 **(b) x축 스케일링 변환**은 x축 위의 모든 벡터가 고유벡터가 되며, y축 위의 벡터들도 고유벡터가 될 수 있으므로 실수 고유벡터를 가집니다.

일반적으로 회전변환은 복소수 고유값과 고유벡터를 가지며, 각도가 0도나 180도의 배수가 아닌 이상 실수 고유벡터를 갖지 않습니다.

문제 5 답안

$\det(A - \lambda I) = 0$ 이어야 하는 이유는 **영공간(null space)** 의 존재와 관련이 있습니다.

방정식 $(A - \lambda I)v = 0$에서 v는 0이 아닌 벡터여야 합니다 (고유벡터의 정의). 즉, 이 선형시스템이 **자명하지 않은 해 (nontrivial solution)** 를 가져야 합니다.

행렬식의 기하학적 의미를 생각하면:

- $\det(A - \lambda I) \neq 0$: 행렬이 가역(invertible)이며, 공간을 찌그러뜨리지 않음 → $v = 0$만 해가 됨
- $\det(A - \lambda I) = 0$: 행렬이 특이(singular)하며, 차원을 축소시킴 → 0이 아닌 벡터 v가 0으로 매핑됨

따라서 0이 아닌 고유벡터가 존재하려면, $(A - \lambda I)$가 적어도 하나의 차원을 0으로 찌그러뜨려야 하므로 $\det(A - \lambda I) = 0$이어야 합니다. 이를 만족하는 λ 값이 바로 고유값입니다.

gemini 정리

고유벡터와 고유값의 기하학적 및 대수적 이해

1) 고유벡터(Eigenvector)와 고유값(Eigenvalue)의 정의

- **기하학적 직관**: 선형 변환(Linear Transformation)을 수행할 때, 대부분의 벡터는 원래 자신이 놓여 있던 스팬(Span, 원점을 지나는 직선)에서 벗어나 회전하거나 방향이 바뀝니다. 그러나 **고유벡터**는 변환 후에도 **자신의 스팬(직선) 위에 그대로 머무르는 특별한 벡터**를 의미합니다.
- **고유값**: 고유벡터가 변환에 의해 늘어나거나 줄어드는 비율(Scaling factor)을 의미합니다. 고유값이 음수라면 벡터의 방향이 반대로 뒤집힌 것을 의미합니다.
  - *수식*: $Av = \lambda v$ (여기서 A는 변환 행렬, $\mathbf{v}$는 고유벡터, λ는 고유값)

2) 고유값의 계산과 행렬식(Determinant)

- 고유값을 찾기 위해 식을 $(A - \lambda I)v = 0$ 형태로 변형합니다.
- 영벡터가 아닌 고유벡터 $\mathbf{v}$가 존재하기 위해서는 행렬 $(A - \lambda I)$가 역행렬을 가지지 않아야 합니다. 기하학적으로는 이 변환이 공간의 차원을 낮춰야(예: 평면을 직선으로 압축) 함을 의미합니다.

- 따라서, 해당 행렬의 **행렬식(Determinant)이 0이 되어야 한다**는 조건(det(A−λI)=0)을 이용하여 특성 방정식(Characteristic equation)을 풀고 λ를 구합니다.

3) 고유기저(Eigenbasis)와 대각화(Diagonalization)

- **고유기저**: 공간 전체를 생성(Span)할 수 있는, 서로 선형 독립인 고유벡터들로 이루어진 기저를 말합니다.
- **대각화의 이점**: 기저 벡터를 고유벡터로 선택하여 좌표계를 변환하면, 해당 선형 변환을 나타내는 행렬은 **대각 행렬(Diagonal Matrix)** 이 됩니다. 대각 행렬은 주대각 성분에 고유값들이 위치하며, 나머지 성분은 모두 0입니다.
- **응용**: 대각 행렬은 거듭제곱 계산(An)이 매우 간편합니다(대각 성분만 n제곱하면 됨). 따라서 복잡한 행렬 연산을 고유기저로 변환하여 쉽게 계산한 뒤 다시 원래 좌표계로 되돌리는 방식이 자주 사용됩니다.

---

2. 퀴즈 (서술형/주관식)

문제 1. 선형 변환 A에 대하여 고유벡터(Eigenvector)와 고유값(Eigenvalue)이 갖는 **기하학적 의미**를 '스팬(Span)'이라는 용어를 사용하여 서술하시오.

문제 2. 고유값을 구할 때 사용하는 식 det(A−λI)=0이 도출되는 과정을 **선형 변환에 의한 공간의 압축(Squishing space)** 및 **영벡터가 아닌 해의 존재 조건**과 연관 지어 설명하시오.

문제 3. 모든 선형 변환이 대각화(Diagonalization) 가능한 것은 아니다. 대각화가 가능하기 위해 필요한 **고유벡터들의 조건**을 쓰고, 행렬을 대각화했을 때 얻을 수 있는 **계산상의 이점**을 서술하시오.

---

3. 퀴즈 답

답 1. 고유벡터는 선형 변환을 거친 후에도 다른 방향으로 회전하거나 이동하지 않고, **자신이 원래 속해 있던 스팬(원점을 지나는 직선) 위에 그대로 남아있는 벡터**를 말한다. 이때 **고유값**은 해당 고유벡터가 변환 과정에서 원래 길이에 비해 몇 배로 늘어나거나 줄어들었는지를 나타내는 **스칼라 비율(Scale factor)** 이다.

답 2. 고유벡터의 정의식 $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$를 변형하면 $(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$이 된다. 여기서 $\mathbf{v}$는 영벡터가 아닌(non-zero) 벡터여야 의미가 있다. 영벡터가 아닌 입력 벡터를 영벡터로 보내는 선형 변환은 공간을 더 낮은 차원으로 **압축(Squish)** 해야만 가능하다(예: 2차원 평면을 1차원 직선으로 누름). 선형대수학적으로 공간을 압축하여 면적(또는 부피)을 0으로 만드는 변환은 **행렬식(Determinant)이 0** 인 경우이다. 따라서 det(A−λI)=0이라는 특성 방정식을 만족하는 λ를 찾게 된다.

답 3. 대각화가 가능하기 위해서는 해당 차원의 공간 전체를 생성(Span)할 수 있는 **충분한 수의 선형 독립인 고유벡터(즉, 고유기저)**가 존재해야 한다. 행렬이 대각화되어 대각 행렬(Diagonal Matrix)로 표현되면, 행렬의 곱셈이나 거듭제곱 연산을 할 때 **대각 성분(고유값)들만 거듭제곱**하면 되므로 계산 복잡도가 획기적으로 줄어드는 이점이 있다. (예: D100 계산 시 대각 원소만 100승 하면 됨).