

크래머 공식이란?

크래머 공식(Cramer's Rule)은 선형 연립방정식의 해를 행렬식(determinant)을 이용해 구하는 방법입니다. 많은 학생들에게 이 공식은 암기해야 할 무작위한 규칙처럼 보이지만, 실제로는 아름다운 기하학적 이유가 있습니다.

중요한 전제: 크래머 공식은 실제 계산에서 가장 효율적인 방법은 아닙니다 (가우스 소거법이 더 효율적). 하지만 이 공식을 이해하면 선형대수의 핵심 개념들이 어떻게 연결되는지 알 수 있습니다.

문제 설정

다음과 같은 선형 시스템을 생각해봅시다:

$$Ax = v$$

여기서:

- A : 알려진 변환 행렬
- x : 찾아야 할 미지의 입력 벡터
- v : 알려진 출력 벡터

예를 들어:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

질문: 어떤 입력 벡터 $[x, y]$ 가 변환 후 $[4, 2]$ 가 될까?

기하학적 관점

이 문제를 기하학적으로 보면:

- 행렬 A 는 공간을 변환시킵니다
- 우리는 변환 후 v 가 되는 원래 벡터 x 를 찾고 있습니다
- 즉, "거꾸로 추적"하는 것입니다

핵심 아이디어: 평행사변형의 넓이

크래머 공식의 핵심은 좌표를 넓이로 해석하는 것입니다.

좌표를 넓이로 표현하기

벡터 $[x, y]$ 의 y좌표를 넓이로 표현해봅시다:

$$[x, y] = x[1, 0] + y[0, 1]$$

y좌표는 다음 평행사변형의 부호있는 넓이와 같습니다:

- 한 변: $[x, y]$
- 다른 변: $[1, 0]$ (\uparrow)

왜냐하면:

- 평행사변형의 밑변: 1 ($\hat{\imath}$ 의 길이)
- 평행사변형의 높이: y
- 넓이 = 밑변 \times 높이 = $1 \times y = y$

마찬가지로 x 좌표는:

- 한 번: $[x, y]$
- 다른 번: $[0, 1] (\hat{\jmath})$
- 넓이: x

변환 후의 넓이

선형변환은 모든 넓이를 같은 비율로 변화시킵니다. 그 비율이 바로 $\det(A)$ 입니다!

변환 전 평행사변형의 넓이가 S 라면:

- 변환 후 넓이 = $\det(A) \times S$

크래머 공식 유도

변환 후를 생각해봅시다:

$$A[x, y] = [4, 2]$$

y 좌표 구하기:

변환 전:

- $[x, y]$ 와 $[1, 0]$ 로 만든 평행사변형의 넓이 = y

변환 후:

- $[4, 2]$ 와 $A[1, 0]$ ($= A$ 의 첫 번째 열)로 만든 평행사변형의 넓이 = $\det(A) \times y$

변환 후 평행사변형은:

- 한 번: $[4, 2]$ (결과 벡터)
- 다른 번: $[2, 0]$ (A 의 첫 번째 열)

이 평행사변형의 넓이는 다음 행렬의 행렬식:

$$\det([4 \ 2]) = 행렬 A의 첫 번째 열을 v로 바꾼 행렬의 행렬식$$
$$[2 \ 0]$$

따라서:

$$\det(A) \times y = \det([v의 x좌표 \ A의 두 번째 열])$$
$$[v의 y좌표 \ A의 두 번째 열]$$

정리하면:

$$y = \det([v\text{의 } x\text{좌표 } A\text{의 두 번째 열}]) / \det(A)$$

$$[v\text{의 } y\text{좌표 } A\text{의 두 번째 열}]$$

x좌표 구하기:

똑같은 논리로:

$$x = \det([A\text{의 첫 번째 열 } v\text{의 } x\text{좌표}]) / \det(A)$$

$$[A\text{의 첫 번째 열 } v\text{의 } y\text{좌표}]$$

크래머 공식 (일반 형태)

$n \times n$ 시스템 $Ax = v$ 에서:

$$x_i = \det(A_i) / \det(A)$$

여기서 A_i 는 행렬 A 의 i 번째 열을 벡터 v 로 교체한 행렬입니다.

구체적 예제

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

x 구하기:

$$x = \det([4 \ -1]) / \det([2 \ -1])$$

$$[2 \ 1] \quad [0 \ 1]$$

$$= (4 \times 1 - (-1) \times 2) / (2 \times 1 - (-1) \times 0)$$

$$= (4 + 2) / 2$$

$$= 6 / 2$$

$$= 3$$

y 구하기:

$$y = \det([2 \ 4]) / \det([2 \ -1])$$

$$[0 \ 2] \quad [0 \ 1]$$

$$= (2 \times 2 - 4 \times 0) / (2 \times 1 - (-1) \times 0)$$

$$= 4 / 2$$

$$= 2$$

답: $[x, y] = [3, 2]$

3차원으로 확장

3차원에서는 넓이가 부피로 바뀝니다.

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

x좌표:

$$x = \det \begin{pmatrix} v_1 & b & c \\ v_2 & e & f \\ v_3 & h & i \end{pmatrix} / \det(A)$$

y, z도 마찬가지로 해당 열을 v로 교체하여 구합니다.

기하학적 직관 정리

1. 좌표 = 부호있는 넓이/부피

- 2D: 평행사변형의 넓이
- 3D: 평행육면체의 부피

2. 변환은 모든 넓이를 $\det(A)$ 배 확대/축소

- 변환 전 넓이 $\times \det(A) =$ 변환 후 넓이

3. 비율은 보존됨

- (변환 후 특정 넓이) / (변환 후 전체 넓이)
- $= (\text{변환 전 좌표} \times \det(A)) / \det(A)$
- $= \text{변환 전 좌표}$

언제 크래머 공식을 사용할 수 없을까?

$\det(A) = 0$ 인 경우:

행렬식이 0이면 변환이 공간을 더 낮은 차원으로 압축합니다.

- 해가 존재하지 않거나
- 무수히 많은 해가 존재

이 경우 크래머 공식은 사용할 수 없습니다 (분모가 0).

왜 이것이 중요한가?

크래머 공식 자체는 실용적이지 않지만, 이것이 보여주는 것:

1. 행렬식의 기하학적 의미 (넓이/부피 변화율)
2. 좌표의 기하학적 해석 (넓이/부피로 표현)
3. 선형대수 개념들의 연결 (변환, 행렬식, 연립방정식)

이런 직관은 더 복잡한 문제를 해결할 때 큰 도움이 됩니다.

실전 계산 팁

2×2 행렬의 경우만 손으로 계산하기 적당합니다:

$$\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}$$

[c d]

행렬식: $ad - bc$

3x3 이상은 가우스 소거법이나 컴퓨터를 사용하는 것이 효율적입니다.

2. 퀴즈

문제 1

크래머 공식의 핵심 아이디어인 "좌표를 넓이로 해석한다"는 것의 의미를 설명하시오. 2차원 벡터 $[x, y]$ 에서 y 좌표가 어떤 평행사변형의 넓이와 같은지 구체적으로 서술하시오.

문제 2

다음 선형 시스템을 크래머 공식을 사용하여 풀이하시오. 각 단계를 명확히 보이고, 어떤 행렬의 행렬식을 계산하는지 설명하시오.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

문제 3

선형변환이 모든 평행사변형의 넓이를 같은 비율로 변화시킨다는 사실이 크래머 공식 유도에서 어떻게 사용되는지 설명하시오. 이때 그 비율이 무엇인지도 명시하시오.

문제 4

크래머 공식에서 $\det(A) = 0$ 일 때 공식을 사용할 수 없는 이유를 기하학적 관점과 대수적 관점 모두에서 설명하시오.

문제 5

3차원 공간에서 크래мер 공식을 사용할 때, 2차원과 달라지는 점을 설명하시오. 특히 "넓이"가 "부피"로 바뀐다는 것이 공식에 어떤 영향을 미치는지 서술하시오.

3. 퀴즈 답

문제 1 답안

"좌표를 넓이로 해석한다"는 것은 벡터의 각 성분을 특정 평행사변형의 부호있는 넓이로 표현할 수 있다는 의미입니다.

y좌표를 넓이로 해석:

벡터 $[x, y]$ 의 y 좌표는 다음 평행사변형의 넓이와 같습니다:

- 한 번: 벡터 $[x, y]$ 자체
- 다른 번: 단위 기저벡터 $\hat{i} = [1, 0]$

기하학적 설명: 이 평행사변형의 밑변은 \hat{i} 의 길이인 1이고, 높이는 벡터 $[x, y]$ 의 y성분입니다. 따라서:

- 넓이 = 밑변 \times 높이 = $1 \times y = y$

이것을 행렬식으로 표현하면:

$$\det([x \ 1] \ [y \ 0]) = x \cdot 0 - y \cdot 1 = -y$$

부호를 고려하면 $\det([1 \ x]) = y$ 가 됩니다. $[0 \ y]$

마찬가지로 x 좌표:

- 평행사변형: $[x, y]$ 와 $\hat{j} = [0, 1]$
- 넓이 = x

이 해석은 크래머 공식의 기하학적 기반이 됩니다. 변환 후에도 이 넓이 관계가 유지되지만, $\det(A)$ 배만큼 스케일됩니다.

문제 2 답안

주어진 시스템:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

단계 1: 계수 행렬 A 의 행렬식 계산

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det([3 \ 2] \ [1 \ -1]) \\ &= 3 \cdot (-1) - 2 \cdot 1 \\ &= -3 - 2 \\ &= -5 \end{aligned}$$

$\det(A) \neq 0$ 이므로 유일한 해가 존재하며 크래머 공식을 사용할 수 있습니다.

단계 2: x 구하기 (A 의 첫 번째 열을 v 로 교체)

$$A_1 = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{결과 벡터 } v \text{가 첫 번째 열로})$$

$$\begin{aligned} x &= \det(A_1) / \det(A) \\ &= \det([7 \ 2] \ [4 \ -1]) / (-5) \\ &= (7 \cdot (-1) - 2 \cdot 4) / (-5) \\ &= (-7 - 8) / (-5) \\ &= -15 / (-5) \\ &= 3 \end{aligned}$$

단계 3: y 구하기 (A 의 두 번째 열을 v 로 교체)

$A_2 = [3 \ 7] \quad (\text{결과 벡터 } v\text{가 두 번째 열로})$
[1 4]

$$\begin{aligned}y &= \det(A_2) / \det(A) \\&= \det([3 \ 7]) / (-5) \\&\quad [1 \ 4] \\&= (3 \times 4 - 7 \times 1) / (-5) \\&= (12 - 7) / (-5) \\&= 5 / (-5) \\&= -1\end{aligned}$$

최종 답: $[x, y] = [3, -1]$

검증:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \times 3 + 2 \times (-1) \\ 1 \times 3 + (-1) \times (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 - 2 \\ 3 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \checkmark$$

문제 3 답안

선형변환의 핵심 성질은 모든 넓이를 $\det(A)$ 배만큼 균일하게 변화시킨다는 것입니다. 이 성질이 크래머 공식의 핵심입니다.

변환 전: 벡터 $[x, y]$ 와 기저벡터 $\hat{\imath}$ 로 만든 평행사변형의 넓이 = y

변환 후:

- 출력 벡터 $v = [v_1, v_2]$ 과 변환된 기저벡터 $A \cdot \hat{\imath} (= A\text{의 첫 번째 열})$ 로 만든 평행사변형
- 변환 후 넓이 = $\det(A) \times y$ (선형변환의 성질)

변환 후 넓이 계산: 이 평행사변형의 넓이는 다음 행렬식으로 계산됩니다:

$$\det(\begin{bmatrix} v_1 & a_{11} \\ v_2 & a_{21} \end{bmatrix}) \quad (v\text{와 } A\text{의 첫 번째 열})$$

이것을 다시 쓰면 A 의 첫 번째 열을 v 로 교체한 행렬 A_1 의 행렬식입니다.

비율의 보존:

$$\begin{aligned}\text{변환 후 넓이} &= \det(A) \times \text{변환 전 넓이} \\ \det(A_1) &= \det(A) \times y\end{aligned}$$

따라서:

$$y = \det(A_1) / \det(A)$$

이것이 바로 크래머 공식입니다! $\det(A)$ 라는 공통 스케일 팩터로 나누면 원래 좌표를 복원할 수 있습니다.

문제 4 답안

$\det(A) = 0$ 일 때 크래머 공식을 사용할 수 없는 이유:

대수적 관점: 크래머 공식은 다음과 같습니다:

$$x = \det(A_i) / \det(A)$$

$\det(A) = 0$ 이면 분모가 0이 되어 나눗셈이 정의되지 않습니다. 따라서 수식 자체가 의미를 잃습니다.

기하학적 관점:

$\det(A) = 0$ 은 변환 A가 공간을 더 낮은 차원으로 압축한다는 의미입니다:

- 2D에서: 평면 전체를 선이나 점으로 압축
- 3D에서: 공간 전체를 평면, 선, 또는 점으로 압축

이 경우 두 가지 상황이 발생합니다:

1. 해가 없는 경우: 목표 벡터 v 가 압축된 부분공간 밖에 있으면, 어떤 입력도 v 로 변환될 수 없습니다.
2. 무수히 많은 해가 있는 경우: 목표 벡터 v 가 압축된 부분공간 안에 있으면, v 로 매핑되는 입력 벡터가 무한히 많습니다 (전체 부분공간).

넓이 관점: $\det(A) = 0$ 은 모든 넓이가 0으로 압축된다는 뜻입니다. 따라서:

- 변환 후 평행사변형의 넓이 = 0
- 원래 좌표 정보가 손실됨
- 넓이 비율로 좌표를 복원할 수 없음

결론적으로, $\det(A) = 0$ 일 때는 정보 손실로 인해 역추적이 불가능하며, 크래머 공식의 기하학적 논리가 무너집니다.

문제 5 답안

3차원에서 크래머 공식을 사용할 때의 변화점:

1. 넓이 → 부피

- 2D: 평행사변형의 넓이
- 3D: 평행육면체(parallelepiped)의 부피

2. 좌표의 기하학적 의미 변화

2차원에서 y좌표:

- $[x, y]$ 와 $[1, 0]$ 으로 만든 평행사변형의 넓이

3차원에서 z좌표:

- $[x, y, z], [1, 0, 0], [0, 1, 0]$ 으로 만든 평행육면체의 부피
- 밑면: $[1, 0, 0]$ 과 $[0, 1, 0]$ 으로 만든 정사각형 (넓이 = 1)
- 높이: z
- 부피 = $1 \times z = z$

3. 공식 형태

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

[g h i] [z] [v₃]

z좌표 구하기:

```
z = det([a b v1]) / det(A)
      [d e v2]
      [g h i3]
```

세 번째 열을 결과 벡터 v로 교체합니다.

4. 행렬식 계산의 복잡도

- 2×2 행렬식: 2개 항 (ad - bc)
- 3×3 행렬식: 여인수 전개로 6개 항
- n×n: n! 개 항 (급격히 증가)

이것이 크래머 공식이 큰 시스템에서 비실용적인 이유입니다.

5. 기하학적 직관은 동일

차원과 관계없이 핵심 원리는 같습니다:

- 좌표 = 부피/넓이
- 변환은 모든 부피를 det(A)배 변화
- 비율을 이용해 원래 좌표 복원

결론: 3차원에서도 크래머 공식의 논리는 동일하지만, "넓이"를 "부피"로 바꾸고 계산 복잡도가 증가합니다. 하지만 기하학적 아름다움은 여전히 유지됩니다.

Gemini 정리

12장: 크래머 공식의 기하학적 의미 (Cramer's Rule)

1. 개요 (Introduction)

선형 연립방정식 $A\vec{x} = \vec{v}$ 를 풀 때, 크래머 공식(Cramer's Rule)은 선형 대수학의 핵심 개념인 행렬식(Determinant)과 면적/부피가 어떻게 연결되는지 보여주는 아름다운 기하학적 직관을 제공합니다. 가우스 소거법보다 계산 효율은 떨어지지만, 수학적 통찰력을 기르는 데 중요한 주제입니다.

2. 문제 설정 (The Setup)

다음과 같은 2변수 선형 연립방정식을 기하학적으로 해석해 봅시다.

- 주어진 것: 변환 행렬 A (기저 벡터들의 변환 정보), 출력 벡터 \vec{v} (변환 결과)
- 구해야 할 것: 미지의 입력 벡터 $\vec{x} = [x, y]^T$

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Output} \\ \vec{v} \end{bmatrix}$$

우리는 어떤 입력 벡터 \vec{x} 가 변환 A를 거쳐 \vec{v} 가 되었는지 찾아야 합니다. (단, $\det(A) \neq 0$)

3. 좌표를 면적으로 해석하기 (Coordinates as Areas)

3.1. 내적(Dot Product)의 한계

좌표 x, y 를 구하기 위해 내적을 사용하는 것은 직관적이지만, 대부분의 선형 변환은 직교성(Orthogonality)을 깨뜨리기 때문에 변환 후에는 내적 값이 보존되지 않아 직접 사용하기 어렵습니다.

3.2. 면적을 이용한 좌표 표현

대신 "평행사변형의 면적"을 이용해 좌표를 정의합니다.

- **y 좌표의 의미:**

기저 벡터 \hat{i} 와 미지의 벡터 \vec{x} 가 만드는 평행사변형의 면적을 생각해 봅시다.

- 밑변: \hat{i} (길이 1)
- 높이: \vec{x} 의 y성분 (y)
- 면적: $1 \times y = y$
즉, " \hat{i} 와 \vec{x} 가 만드는 부호 있는 면적(Signed Area)은 y 와 같다"고 할 수 있습니다.

- **x 좌표의 의미:**

비슷하게, \vec{x} 와 기저 벡터 \hat{j} 가 만드는 평행사변형의 면적은 x 좌표와 같습니다. (순서에 따른 부호 주의)

4. 변환 후의 면적 변화 (Areas after Transformation)

선형 변환 A 를 적용하면 공간의 모든 면적은 행렬식 $\det(A)$ 만큼 스케일링(Scaling) 됩니다. 이것이 공식 유도의 핵심입니다.

4.1. y 좌표 구하기

변환 전의 평행사변형(\hat{i}, \vec{x})이 변환 후에는 다음과 같이 변합니다.

1. $\hat{i} \rightarrow$ 행렬 A 의 첫 번째 열(Column 1)
2. $\vec{x} \rightarrow$ 출력 벡터 \vec{v}

변환된 평행사변형의 면적은 원래 면적(y)에 $\det(A)$ 를 곱한 것과 같습니다.

$$\text{Area}(\text{Col}_1, \vec{v}) = \det(A) \times y$$

따라서 y 에 대해 정리하면 다음과 같습니다.

$$y = \frac{\text{Area}(\text{Col}_1, \vec{v})}{\det(A)} = \frac{\det(A \text{ with } \vec{v} \text{ in 2nd col})}{\det(A)}$$

4.2. x 좌표 구하기

동일한 논리로 x 좌표도 구할 수 있습니다. 변환 전 평행사변형(\vec{x}, \hat{j})은 변환 후 (\vec{v}, Col_2)가 됩니다.

$$x = \frac{\det(A \text{ with } \vec{v} \text{ in 1st col})}{\det(A)}$$

5. 크래머 공식의 일반화 (Generalization)

이 기하학적 직관은 3차원 이상의 고차원에서도 그대로 적용됩니다.

- 3차원에서 좌표는 기저 벡터들과 \vec{x} 가 만드는 육면체의 부호 있는 부피로 해석됩니다.
- 변환 후 이 부피는 $\det(A)$ 배만큼 커집니다.
- 따라서 좌표값은 (변환된 부피) / (변환 전 부피 확대율)이 됩니다.

결론: 크래머 공식 (Cramer's Rule)

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

- A : 원래의 계수 행렬
- A_i : A 의 i 번째 열을 출력 벡터 \vec{v} 로 교체한 행렬

6. 학습 포인트 (Key Takeaways)

1. 좌표의 재해석: 좌표 x, y, z 를 기저 벡터들과 함께 만드는 면적(또는 부피)로 바라볼 수 있습니다.
2. 행렬식의 기하학적 의미: 행렬식은 선형 변환 시 공간의 부피가 얼마나 변하는지를 나타내는 확대 비율입니다.
3. 크래머 공식의 본질: "변환된 부피 = 원래 부피 \times 확대 비율"이라는 관계식에서 유도된 결과입니다.