

이 장의 목적

내적의 깊은 이해:

- 전통적 정의 (계산)
- 기하학적 의미 (투영)
- 선형변환 관점 (쌍대성)

왜 이제야 내적을?

- 전통적으로는 맨 처음 배움
- 하지만 선형변환을 알아야 진정한 의미 이해
- 쌍대성(duality)이라는 깊은 개념

전통적 내적 정의

수치적 정의:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = [v_1, v_2] \cdot [w_1, w_2] = v_1w_1 + v_2w_2$$

과정:

1. 두 벡터의 각 좌표 짝짓기
2. 각 쌍을 곱하기
3. 모두 더하기

예:

$$[1, 2] \cdot [3, 4] = 1 \times 3 + 2 \times 4 = 3 + 8 = 11$$

일반화 (n차원):

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \sum_i v_i w_i = v_1w_1 + v_2w_2 + \dots + v_nw_n$$

기하학적 의미: 투영

내적의 기하학적 해석:

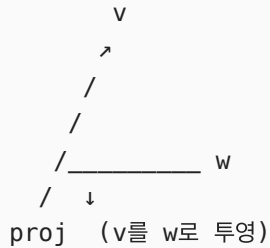
$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = (\mathbf{v} \text{를 } \mathbf{w} \text{ 방향으로 투영한 길이}) \times |\mathbf{w}|$$

또는 대칭적으로:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = (\mathbf{w} \text{를 } \mathbf{v} \text{ 방향으로 투영한 길이}) \times |\mathbf{v}|$$

시각화:

1. \mathbf{w} 방향으로 \mathbf{v} 를 투영:



2. 투영 길이 측정:

- v 의 끝에서 w 에 수직선
- 원점에서 수직선까지 거리 = 투영 길이

3. 내적:

$$v \cdot w = (\text{투영 길이}) \times |w|$$

투영 길이의 부호

같은 방향:

v 와 w 가 예각 ($<90^\circ$)
 → 투영 길이 > 0
 → $v \cdot w > 0$

수직:

v 와 w 가 직각 ($=90^\circ$)
 → 투영 길이 $= 0$
 → $v \cdot w = 0$

반대 방향:

v 와 w 가 둔각 ($>90^\circ$)
 → 투영 길이 < 0
 → $v \cdot w < 0$

시각적:

예각: $v \nearrow w \rightarrow$ (양수)
 수직: $v \uparrow w \rightarrow$ (0)
 둔각: $v \nwarrow w \rightarrow$ (음수)

순서 무관성

대칭성:

$$v \cdot w = w \cdot v$$

기하학적 이유:

$\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{w}$ 투영:

$$(\mathbf{v} \text{를 } \mathbf{w} \text{로}) \times |\mathbf{w}|$$

$\mathbf{w} \rightarrow \mathbf{v}$ 투영:

$$(\mathbf{w} \text{를 } \mathbf{v} \text{로}) \times |\mathbf{v}|$$

같은 이유: 평행사변형의 넓이를 이용한 기하학적 증명

- 두 경우 모두 같은 값

직관:

- 투영의 "총량"은 순서와 무관
- 기하학적으로 대칭적

스케일링 성질

벡터를 스케일하면:

$$(2\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = 2(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$$

기하학적 의미:

\mathbf{v} 를 2배로:

- 투영 길이도 2배
- 따라서 내적도 2배

일반적:

$$(c\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = c(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$$

단위벡터와의 내적

단위벡터 $\hat{\mathbf{u}}$ ($|\hat{\mathbf{u}}| = 1$):

$$\begin{aligned}\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{u}} &= (\mathbf{v} \text{를 } \hat{\mathbf{u}} \text{로 투영한 길이}) \times 1 \\ &= \text{투영 길이 그 자체}\end{aligned}$$

의미:

- 단위벡터와의 내적 = 그 방향으로의 좌표
- 매우 중요한 해석!

예:

$v = [3, 4]$
 $\hat{i} = [1, 0]$ (x축 단위벡터)
 $v \cdot \hat{i} = 3 = v$ 의 x좌표

핵심 질문

두 가지 미스터리:

1. 순서가 왜 무관한가?
 - 투영의 대칭성이 왜?
2. 좌표 곱셈이 왜 투영과 같은가?
 - $v_1w_1 + v_2w_2$ 가 왜 기하학적 투영?

답: 쌍대성(Duality)!

$nD \rightarrow 1D$ 선형변환

복습: $1 \times n$ 행렬

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = u_1x + u_2y$$

의미:

- 2D 벡터를 입력
- 숫자(1D)를 출력

선형성:

- 직선이 균등 간격 유지
- 원점 고정

선형변환의 시각화 ($2D \rightarrow 1D$)



입력 공간 (2D):

- 균등 간격의 점들

출력 공간 (1D):

- 수직선

선형성 확인:

입력:  (2D 직선)
↓ 변환
출력:  (1D 직선)

균등 간격 유지!

1×n 행렬의 기하학적 의미

1×2 행렬:

$$[u_1 \quad u_2]$$

의미:

- 2D → 1D 변환
- 완전히 두 숫자로 결정

어떻게?

기저벡터의 도착지:

$$\begin{aligned}\hat{i} &= [1, 0] \rightarrow u_1 \\ \hat{j} &= [0, 1] \rightarrow u_2\end{aligned}$$

행렬 형태:

$$[u_1 \quad u_2] = [\hat{i} \text{가 가는 곳}, \hat{j} \text{가 가는 곳}]$$

행렬-벡터 곱셈 = 내적

핵심 통찰:

$$[u_1 \quad u_2] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = u_1x + u_2y$$

이것은:

$$[u_1, u_2] \cdot [x, y] = u_1x + u_2y$$

내적과 완전히 동일!

쌍대성 (Duality)

정의: 서로 다른 두 수학적 대상 사이의 자연스럽지만 놀라운 대응

선형대수에서:

$$\text{벡터} \leftrightarrow \text{선형변환} \quad (nD \rightarrow 1D)$$

구체적:

벡터 $u = [u_1, u_2]$:

- 2D 공간의 화살표

쌍대 (dual):

- 1×2 행렬 $[u_1 \ u_2]$
- $2D \rightarrow 1D$ 선형변환

관계:

u 와의 내적 = u 의 쌍대 변환 적용

왜 쌍대성이 존재하는가?

기하학적 이유:

단위벡터 \hat{u} 를 생각:

$$\hat{u} = [u_1, u_2] \quad (|\hat{u}| = 1)$$

\hat{u} 방향의 수직선 정의:

\hat{u} 를 따라 놓인 1D 수직선

투영 연산:

임의의 벡터 v 를 이 수직선에 투영
→ 숫자 하나 얻음

이것이 선형변환!

변환 행렬:

$$[u_1 \ u_2]$$

변환 적용:

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = u_1 v_1 + u_2 v_2 = \hat{u} \cdot v$$

투영이 선형변환인 이유

선형성 확인:

1. 가법성:

$$\text{proj}(v + w) = \text{proj}(v) + \text{proj}(w)$$

2. 스케일링:

$$\text{proj}(cv) = c \cdot \text{proj}(v)$$

기하학적 직관:

- 투영은 "선형적"
- 격자선 유지
- 비례성 유지

\hat{u} 의 좌표의 의미

단위벡터 $\hat{u} = [u_1, u_2]$:

u_1 의 의미:

$$u_1 = \hat{i} \text{를 } \hat{u} \text{ 방향 수직선에 투영한 값}$$

u_2 의 의미:

$$u_2 = \hat{j} \text{를 } \hat{u} \text{ 방향 수직선에 투영한 값}$$

왜 중요한가?

변환 행렬:

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} = [\hat{i} \text{의 도착지}, \hat{j} \text{의 도착지}]$$

임의의 벡터 $v = [x, y]$:

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x \cdot u_1 + y \cdot u_2$$

$$\begin{aligned} &= x(\hat{i} \text{의 투영}) + y(\hat{j} \text{의 투영}) \\ &= v \text{의 투영} \end{aligned}$$

선형결합이 보존됨!

기하학적 증명

설정:

- 대각선 방향 단위벡터 \hat{u}
- 대각선을 따라 놓인 수직선

질문:

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ 이 왜 } v \text{를 } \hat{u} \text{로 투영?}$$

답:

1. 기저벡터 투영:

$$\begin{aligned}\hat{i} &\rightarrow u_1 \text{ (수직선 위 값)} \\ \hat{j} &\rightarrow u_2 \text{ (수직선 위 값)}\end{aligned}$$

2. 선형성:

$$\begin{aligned}v &= x\hat{i} + y\hat{j} \\ \text{투영}(v) &= \text{투영}(x\hat{i} + y\hat{j}) \\ &= x \cdot \text{투영}(\hat{i}) + y \cdot \text{투영}(\hat{j}) \\ &= x \cdot u_1 + y \cdot u_2\end{aligned}$$

3. 결론:

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \text{투영}(v)$$

일반 벡터로의 확장

단위벡터가 아닌 u :

$$u = [u_1, u_2] \quad (|u| \neq 1)$$

쌍대 변환:

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix}$$

변환 적용:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} &= u_1 v_1 + u_2 v_2 \\ &= u \cdot v \text{ (내적)}\end{aligned}$$

기하학적 의미:

$$= (v \text{를 } u \text{ 방향으로 투영}) \times |u|$$

왜?

- $u = |u| \cdot \hat{u}$ (\hat{u} 는 단위벡터)
- $u \cdot v = |u| (\hat{u} \cdot v)$
- $= |u| \times (\hat{u} \text{ 방향 투영})$

내적 공식의 유도

왜 $v_1 w_1 + v_2 w_2$ 인가?

선형변환 관점:

벡터 $\mathbf{w} = [w_1, w_2]$:

- 쌍대 변환: $[w_1 \ w_2]$

벡터 $\mathbf{v} = [v_1, v_2]$:

변환 적용:

$$\begin{bmatrix} w_1 & w_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = w_1 v_1 + w_2 v_2$$

이것이 내적 공식!

기하학적 해석:

$$= v \text{를 } w \text{로 투영} \times |w|$$

결론: 수치 공식 \leftrightarrow 기하학적 투영 둘이 같은 이유 = 쌍대성!

대칭성의 증명

왜 $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}$?

변환 관점:

$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$:

- w 의 쌍대 변환을 v 에 적용

$\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}$:

- v 의 쌍대 변환을 w 에 적용

둘 다:

$$= v_1 w_1 + v_2 w_2$$

기하학적:

- 투영의 대칭성
- 평행사변형의 넓이 논증

쌍대성의 중요성

벡터의 이중성:

1. 기하학적 객체:

- 공간의 화살표
- 방향과 크기

2. 선형 함수:

- $nD \rightarrow 1D$ 변환
- 투영 연산

어느 관점?

- 상황에 따라 유용한 것 선택
- 같은 대상의 다른 얼굴

예: 그래디언트 (미적분):

- 벡터로 표현
- 실제로는 방향 도함수 (선형 함수)
- 쌍대성의 완벽한 예!

쌍대성의 일반적 정의

수학 전반: 서로 다른 종류의 수학적 대상 사이의 자연스럽게 놀라운 대응

선형대수의 경우:

벡터의 쌍대:

- 그 벡터가 인코딩하는 선형변환

선형변환의 쌍대 ($nD \rightarrow 1D$):

- 공간 내의 특정 벡터

양방향 대응:

벡터 \leftrightarrow 선형변환

내적의 요약

표면적 이해:

- 기하학적 도구
- 투영 이해
- 벡터 방향 판단

이것만으로도 충분히 유용!

깊은 이해:

- 한 벡터를 변환으로 "번역"
- 쌍대성의 구체적 예
- 수치 \leftrightarrow 기하학 연결

3차원에서의 확장

3D 내적:

$$V \cdot W = V_1W_1 + V_2W_2 + V_3W_3$$

기하학적 의미:

$$= (V \text{를 } W \text{로 투영}) \times |W|$$

쌍대성:

$$1 \times 3 \text{ 행렬 } [W_1 \ W_2 \ W_3]$$

변환:

$$3D \rightarrow 1D$$

모든 개념이 자연스럽게 확장!

다음 장 예고: 외적

외적 (Cross Product):

- 3D에서만 존재
- 두 벡터 \rightarrow 벡터
- 쌍대성의 또 다른 예

공식이 복잡해 보이지만:

$$v \times w = \det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$$

쌍대성으로 이해하면 자연스러움!

핵심 직관 정리

1. 내적의 세 얼굴:

수치적: $V_1W_1 + V_2W_2 + \dots$
 기하학적: (투영 길이) $\times |W|$
 변환적: $1 \times n$ 행렬 적용

2. 쌍대성:

$$\text{벡터} \leftrightarrow nD \rightarrow 1D \text{ 선형변환}$$

3. 투영 = 선형변환:

특정 방향으로의 투영은 선형적

4. 좌표의 의미:

벡터 u 의 좌표 = 기저벡터를 u 로 투영한 값

5. 공식의 기원:

$$\begin{aligned} v \cdot w &= [w_1 \ w_2] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (\text{선형변환}) \\ &= \text{투영} \times |w| \quad (\text{기하학}) \end{aligned}$$

2. 퀴즈

문제 1

내적의 세 가지 정의를 설명하시오: (1) 수치적 정의, (2) 기하학적 정의(투영), (3) 선형변환 관점. 그리고 이 세 정의가 왜 동등한지 쌍대성의 개념을 사용하여 서술하시오.

문제 2

벡터 v 와 w 의 내적 $v \cdot w$ 가:

- 양수일 때
- 0일 때
- 음수일 때 각각 무엇을 의미하는지 기하학적으로 설명하시오. 특히 투영의 관점에서 부호가 결정되는 원리를 서술하시오.

문제 3

왜 $v \cdot w = w \cdot v$ 인지(내적의 교환법칙) 두 가지 관점에서 설명하시오: (a) 투영의 대칭성 관점 (b) 선형변환 관점 그리고 둘이 같은 이유를 논리적으로 서술하시오.

문제 4

쌍대성(duality)의 개념을 설명하시오. 특히: (a) 일반적으로 쌍대성이란 무엇인가? (b) 선형대수에서 벡터와 선형변환 ($nD \rightarrow 1D$)의 쌍대 관계는 무엇인가? (c) 단위벡터 $\hat{u} = [u_1, u_2]$ 에서 u_1 과 u_2 가 나타내는 기하학적 의미를 쌍대성 관점에서 설명하시오.

문제 5

내적 공식 $v \cdot w = v_1w_1 + v_2w_2$ 가 왜 " v 를 w 방향으로 투영한 길이 $\times |w|$ "와 같은지 선형변환의 관점에서 증명하시오. 특히 기저벡터 \hat{i}, \hat{j} 의 투영과 선형성을 이용하여 단계별로 서술하시오.

3. 퀴즈 답

문제 1 답안

내적의 세 가지 정의:

(1) 수치적 정의:

공식:

$$V \cdot W = V_1W_1 + V_2W_2 + \dots + V_nW_n$$

과정:

1. 각 좌표 쌍을 곱함
2. 모든 곱을 더함

예 (2D):

$$[3, 1] \cdot [2, 4] = 3 \times 2 + 1 \times 4 = 6 + 4 = 10$$

특징:

- 계산이 간단
- 좌표에 의존
- "왜?"는 알기 어려움

(2) 기하학적 정의 (투영):

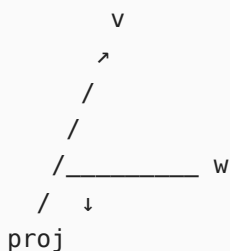
공식:

$$v \cdot w = (v \text{를 } w \text{로 투영한 길이}) \times |w|$$

또는 대칭적으로:

$$v \cdot w = (w \text{를 } v \text{로 투영한 길이}) \times |v|$$

시각화:



투영 길이:

- v의 끝에서 w에 수직선
- 원점에서 수직선까지 거리

부호:

- 같은 방향 (예각): 양수
- 수직: 0
- 반대 방향 (둔각): 음수

특징:

- 기하학적 직관
- 좌표 무관
- 순서 대칭성 명확

(3) 선형변환 관점:

1×n 행렬로 표현:

$$w = [w_1, w_2, \dots, w_n]$$

쌍대 변환: $[w_1 \ w_2 \ \dots \ w_n]$ (1×n 행렬)

변환 적용:

$$\begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \dots & w_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = w_1 v_1 + w_2 v_2 + \dots + w_n v_n$$

의미:

- $nD \rightarrow 1D$ 선형변환
- w 의 쌍대 변환을 v 에 적용

특징:

- 변환 이론과 연결
- 선형성 명확
- 쌍대성의 예

세 정의의 동등성:

쌍대성 (Duality)을 통한 연결:

핵심 개념:

$$\text{벡터} \leftrightarrow nD \rightarrow 1D \text{ 선형변환}$$

단계별 증명:

Step 1: 투영은 선형변환

투영 연산:

v 를 \hat{u} 방향으로 투영 (\hat{u} 는 단위벡터)

선형성 확인:

$$\begin{aligned}\text{proj}(v + w) &= \text{proj}(v) + \text{proj}(w) \quad \checkmark \\ \text{proj}(cv) &= c \cdot \text{proj}(v) \quad \checkmark\end{aligned}$$

따라서 투영 = 선형변환

Step 2: 선형변환 = 행렬

2D \rightarrow 1D 선형변환:

기저벡터의 도착지로 완전 결정

$$\hat{i} \rightarrow u_1$$

$$\hat{j} \rightarrow u_2$$

행렬: $[u_1 \quad u_2]$

Step 3: 기저 투영 = 좌표

단위벡터 $\hat{u} = [u_1, u_2]$ 로의 투영:

$$u_1 = \hat{i} \text{를 } \hat{u} \text{로 투영한 값}$$

$$u_2 = \hat{j} \text{를 } \hat{u} \text{로 투영한 값}$$

Step 4: 선형결합 보존

임의의 $v = x\hat{i} + y\hat{j}$:

$$\begin{aligned}\text{투영}(v) &= \text{투영}(x\hat{i} + y\hat{j}) \\ &= x \cdot \text{투영}(\hat{i}) + y \cdot \text{투영}(\hat{j}) \quad (\text{선형성}) \\ &= x \cdot u_1 + y \cdot u_2\end{aligned}$$

행렬 형태:

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x \cdot u_1 + y \cdot u_2$$

Step 5: 스케일링 고려

일반 벡터 $w = [w_1, w_2]$:

$$w = |w| \cdot \hat{u} \text{ (}\hat{u}\text{는 단위벡터)}$$

$$\begin{aligned} v \cdot w &= |w| \cdot (v \cdot \hat{u}) \\ &= |w| \times (v \text{를 } \hat{u} \text{로 투영}) \\ &= (v \text{를 } w \text{로 투영}) \times |w| \quad (\text{기하학적}) \end{aligned}$$

수치적:

$$\begin{bmatrix} w_1 & w_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = w_1 v_1 + w_2 v_2 \quad (\text{변환})$$

결론:

$$\text{수치적 정의} = \text{선형변환} = \text{기하학적 투영}$$

쌍대성의 역할:

벡터 w :

1. 기하학적 객체 (화살표)
 - 투영의 방향
2. 선형 함수 ($1 \times n$ 행렬)
 - $nD \rightarrow 1D$ 변환

이 두 관점이 자연스럽게 대응:

$$\begin{aligned} w \text{의 좌표} &= \text{변환 행렬의 원소} \\ &= \text{기저벡터의 투영값} \end{aligned}$$

쌍대성 덕분에:

- 수치 계산이 기하학적 의미를 가짐
- 투영이 행렬 곱셈으로 표현됨
- 세 정의가 하나로 통합

이것이 내적의 진정한 아름다움입니다!

문제 2 답안

내적의 부호와 기하학적 의미:

기본 공식 (투영):

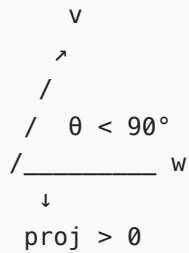
$$v \cdot w = (v \text{를 } w \text{로 투영한 길이}) \times |w|$$

(1) $v \cdot w > 0$ (양수):

기하학적 조건:

v 와 w 사이 각도 $\theta < 90^\circ$ (예각)

시각화:



투영 길이:

- v 의 끝에서 w 에 수직선을 그음
- 수직선이 w 의 양의 방향에 떨어짐
- 투영 길이 > 0

내적:

$$v \cdot w = (\text{양수}) \times |w| > 0$$

의미:

- 두 벡터가 같은 방향을 향함
- "협력적" 관계
- 한 벡터가 다른 벡터 방향으로 "진행"

구체적 예:

$$v = [3, 1], w = [2, 1]$$

$$v \cdot w = 3 \times 2 + 1 \times 1 = 7 > 0$$

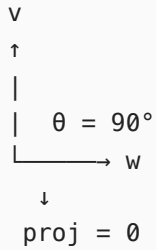
$$\text{각도: } \cos^{-1}(7 / (\sqrt{10} \times \sqrt{5})) \approx 18.4^\circ < 90^\circ \checkmark$$

(2) $v \cdot w = 0$:

기하학적 조건:

v 와 w 사이 각도 $\theta = 90^\circ$ (직각)

시각화:



투영 길이:

- v 의 끝에서 w 에 수직선을 그음
- 수직선이 원점에 떨어짐
- 투영 길이 = 0

내적:

$$v \cdot w = 0 \times |w| = 0$$

의미:

- 두 벡터가 직교(perpendicular)
- 서로 "독립적"
- 한 벡터가 다른 벡터 방향으로 전혀 진행 안 함

수학적 용어:

- Orthogonal (직교)
- 매우 중요한 개념!

구체적 예:

$$v = [3, -2], w = [2, 3]$$

$$v \cdot w = 3 \times 2 + (-2) \times 3 = 6 - 6 = 0 \checkmark$$

$$\text{각도: } 90^\circ \checkmark$$

응용:

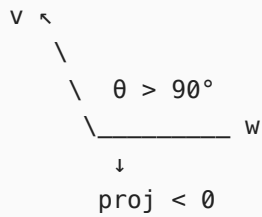
- 직교 기저
- 직교 분해
- 그람-슈미트 과정

(3) $v \cdot w < 0$ (음수):

기하학적 조건:

$$v \text{와 } w \text{ 사이 각도 } \theta > 90^\circ \text{ (둔각)}$$

시각화:



투영 길이:

- v 의 끝에서 w 에 수직선을 그음
- 수직선이 w 의 음의 방향에 떨어짐
- 투영 길이 < 0 (부호가 음!)

내적:

$$v \cdot w = (\text{음수}) \times |w| < 0$$

의미:

- 두 벡터가 반대 방향을 향함
- "대립적" 관계
- 한 벡터가 다른 벡터와 반대로 "진행"

극단적 경우 ($\theta = 180^\circ$):

$$\begin{aligned} &v \text{와 } w \text{가 정반대} \\ &v \cdot w = -|v| \times |w| \text{ (최소값)} \end{aligned}$$

구체적 예:

$$v = [1, 2], w = [-2, -1]$$

$$v \cdot w = 1 \times (-2) + 2 \times (-1) = -2 - 2 = -4 < 0$$

$$\text{각도: } \cos^{-1}(-4 / (\sqrt{5} \times \sqrt{5})) = \cos^{-1}(-4/5) \approx 143^\circ > 90^\circ \checkmark$$

투영의 부호 결정 원리:

수식적:

$$v \cdot w = |v| |w| \cos(\theta)$$

$\cos(\theta)$ 의 부호:

$$\begin{aligned}\theta < 90^\circ: \cos(\theta) > 0 &\rightarrow \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} > 0 \\ \theta = 90^\circ: \cos(\theta) = 0 &\rightarrow \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0 \\ \theta > 90^\circ: \cos(\theta) < 0 &\rightarrow \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} < 0\end{aligned}$$

기하학적 직관:

투영 = "그림자"

태양이 \mathbf{w} 방향에서 비춤:

\mathbf{w} 방향 $\leftarrow *$

\mathbf{v} 의 그림자가 \mathbf{w} 위에 어디?

예각:

- 그림자가 \mathbf{w} 의 양의 방향
- 투영 > 0

직각:

- 그림자가 원점
- 투영 $= 0$

둔각:

- 그림자가 \mathbf{w} 의 음의 방향
- 투영 < 0

요약 표:

각도	내적 부호	투영 방향	벡터 관계
$\theta < 90^\circ$	> 0	양의 방향	같은 방향
$\theta = 90^\circ$	$= 0$	원점	직교
$\theta > 90^\circ$	< 0	음의 방향	반대 방향

결론: 내적의 부호는 두 벡터의 상대적 방향을 나타내며, 이는 투영의 방향으로 기하학적으로 이해할 수 있습니다.

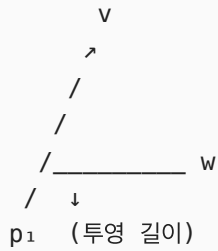
문제 3 답안

내적의 교환법칙: $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}$

(a) 투영의 대칭성 관점:

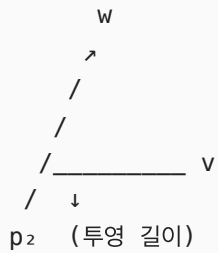
두 가지 투영:

방법 1: v 를 w 로 투영



$$v \cdot w = p_1 \times |w|$$

방법 2: w 를 v 로 투영

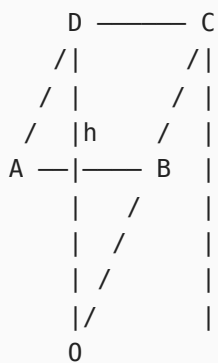


$$w \cdot v = p_2 \times |v|$$

질문: 왜 같은가?

기하학적 증명 (평행사변형 이용):

1. 평행사변형 구성:



- O = 원점
- $OA = v$
- $OB = w$
- $OACB$ = 평행사변형

2. 넓이 계산 (v 기준):

$$\text{넓이} = |w| \times h_1$$

여기서 $h_1 = v$ 를 w 에 수직인 방향으로 측정한 높이

하지만:

$$h_1 = |v| \sin(\theta)$$

따라서:

$$\text{넓이} = |w| \times |v| \sin(\theta)$$

3. 넓이 계산 (w 기준):

$$\text{넓이} = |v| \times h_2$$

여기서 $h_2 = w$ 를 v 에 수직인 방향으로 측정한 높이

$$h_2 = |w| \sin(\theta)$$

따라서:

$$\text{넓이} = |v| \times |w| \sin(\theta)$$

4. 같은 넓이:

$$|v| |w| \sin(\theta) = |w| |v| \sin(\theta) \checkmark$$

내적 연결:

투영을 이용한 넓이:

$$\text{넓이}^2 = |v|^2 |w|^2 - (v \cdot w)^2$$

(이것은 라그랑주 항등식)

대칭성이 보장됨!

더 직접적인 증명:

공식:

$$\begin{aligned} v \cdot w &= |v| |w| \cos(\theta) \\ w \cdot v &= |w| |v| \cos(\theta) \end{aligned}$$

곱셈의 교환법칙:

$$|v| |w| = |w| |v|$$

따라서:

$$v \cdot w = w \cdot v \checkmark$$

(b) 선형변환 관점:

변환으로 표현:

$v \cdot w$ (w 의 변환을 v 에 적용):

$$\begin{bmatrix} w_1 & w_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = w_1 v_1 + w_2 v_2$$

$w \cdot v$ (v 의 변환을 w 에 적용):

$$\begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = v_1 w_1 + v_2 w_2$$

같은 이유:

수의 곱셈 교환법칙:

$$\begin{aligned} w_1 v_1 &= v_1 w_1 \\ w_2 v_2 &= v_2 w_2 \end{aligned}$$

따라서:

$$w_1 v_1 + w_2 v_2 = v_1 w_1 + v_2 w_2$$

행렬 표기법:

$$\begin{bmatrix} w_1 & w_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

(c) 두 관점이 같은 이유:

핵심 연결: 쌍대성

1. 투영과 변환의 동일성:

벡터 w 로의 투영:

$$\begin{aligned} \text{기하학적: } (v \text{를 } w \text{로 투영}) \times |w| \\ \text{변환적: } \begin{bmatrix} w_1 & w_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

둘이 같음! (쌍대성)

2. 대칭성의 보존:

기하학적 대칭성:

평행사변형은 대칭적
→ 투영 관계 대칭적

대수적 대칭성:

수의 곱셈 교환법칙
→ 행렬 곱셈에서도 교환

3. 쌍대성이 보장:

기하학 \leftrightarrow 쌍대성 \rightarrow 대수
↓ ↓
대칭적 대칭적

쌍대성 덕분에:

- 기하학적 대칭성 = 대수적 대칭성
- 투영의 순서 무관 = 곱셈의 순서 무관

직관적 이해:

투영의 본질:

v 와 w 의 "얼마나 같은 방향?"

방향성은 상대적:

- v 가 w 방향을 보는 것
- w 가 v 방향을 보는 것
- 같은 "방향 일치도"

변환의 본질:

한 벡터를 다른 벡터의 "좌표계"로 변환

좌표계 변환은 상대적:

- v 를 w 좌표로
- w 를 v 좌표로
- 같은 "상대적 위치"

결론:

$v \cdot w = w \cdot v$ 인 이유:

1. 투영 관점:

- 평행사변형의 기하학적 대칭성
- $|v| |w| \cos(\theta)$ 의 곱셈 교환법칙

2. 변환 관점:

- 수의 곱셈 교환법칙
- $w_1 v_1 + w_2 v_2 = v_1 w_1 + v_2 w_2$

3. 통합:

- 쌍대성이 두 관점을 연결
- 기하학적 대칭성 = 대수적 대칭성

이것이 내적의 교환법칙이 성립하는 깊은 이유입니다!

문제 4 답안

쌍대성(Duality)의 개념:

(a) 쌍대성의 일반적 정의:

정의:

서로 다른 두 종류의 수학적 대상 사이의
자연스럽지만 놀라운 대응 관계

핵심 요소:

1. 두 종류의 대상:

- 타입 A와 타입 B
- 겉보기에는 전혀 다름

2. 자연스러운 대응:

- $A \leftrightarrow B$ 사이의 일대일 대응
- 구조를 보존하는 방식

3. 놀라운 연결:

- 직관적으로 예상 못함
- 하지만 깊이 생각하면 필연적

예시 (다른 분야):

기하학:

- 점 \leftrightarrow 선 (사영기하학)
- 내부 \leftrightarrow 외부 (위상수학)

논리:

- AND \leftrightarrow OR (불 대수)
- $\forall \leftrightarrow \exists$ (양화사)

물리:

- 위치 \leftrightarrow 운동량 (푸리에 변환)
- 시간 \leftrightarrow 주파수

공통점:

- 두 관점이 상호 변환 가능
 - 한쪽에서 어려운 것이 다른 쪽에서 쉬움
 - 더 깊은 통찰 제공
-

(b) 선형대수의 쌍대성:

벡터와 선형변환의 대응:

타입 A: 벡터

$$v = [v_1, v_2, \dots, v_n]$$

- n차원 공간의 화살표
- 기하학적 객체
- 방향과 크기

타입 B: 선형변환 ($nD \rightarrow 1D$)

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

- 벡터를 숫자로 변환
- 함수적 객체
- 행렬로 표현: $[v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]$

자연스러운 대응:

벡터 v 의 쌍대:

$$v = [v_1, v_2, \dots, v_n]$$

$$\text{쌍대 } v^* = \text{선형변환 } f_v$$

여기서:

$$f_v(w) = v \cdot w$$

선형변환 f 의 쌍대:

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{선형})$$

$$\text{쌍대 } f^* = \text{벡터 } v$$

여기서:

$$f(w) = v \cdot w \quad (\text{모든 } w \text{에 대해})$$

양방향 대응:

$$\text{벡터} \leftrightarrow nD \rightarrow 1D \text{ 선형변환}$$

구조 보존:

$$(v + w)^* = v^* + w^* \quad (\text{가법성})$$

$$(cv)^* = c \cdot v^* \quad (\text{스케일링})$$

(c) 단위벡터 $\hat{u} = [u_1, u_2]$ 의 좌표 의미:

설정:

$$\hat{u} = [u_1, u_2] \quad (|\hat{u}| = 1, \text{ 단위벡터})$$

쌍대 변환:

$$f_{\hat{u}}(v) = \hat{u} \cdot v$$

행렬 표현:

$$[u_1 \quad u_2]$$

기하학적 의미:

$$v \text{를 } \hat{u} \text{ 방향으로 투영}$$

u_1 의 의미:

정의:

$u_1 = \hat{i}$ 를 \hat{u} 로 투영한 값

상세 설명:

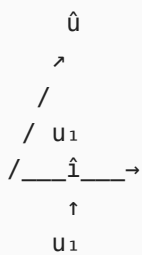
1. 표준 기저벡터 \hat{i} :

$$\hat{i} = [1, 0]$$

2. \hat{u} 로 투영:

$$\begin{aligned} \text{proj}_{\hat{u}}(\hat{i}) &= (\hat{i} \cdot \hat{u}) / |\hat{u}| \\ &= (1 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2) / 1 \\ &= u_1 \end{aligned}$$

3. 기하학적 그림:



4. 쌍대성 관점:

변환 행렬 $[u_1 \ u_2]$:

- 첫 번째 열 원소 = \hat{i} 의 도착지
- $\hat{i} \rightarrow u_1$

5. 좌표 의미:

$u_1 = \hat{u}$ 의 x 성분
= \hat{u} 이 x축으로 얼마나 가는가
= x축을 \hat{u} 로 투영한 값

u_2 의 의미:

정의:

$$u_2 = \hat{j}$$
를 \hat{u} 로 투영한 값

상세 설명:

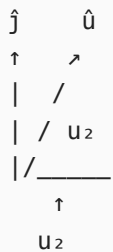
1. 표준 기저벡터 \hat{j} :

$$\hat{j} = [0, 1]$$

2. \hat{u} 로 투영:

$$\begin{aligned}\text{proj}_{\hat{u}}(\hat{j}) &= (\hat{j} \cdot \hat{u}) / |\hat{u}| \\ &= (0 \cdot u_1 + 1 \cdot u_2) / 1 \\ &= u_2\end{aligned}$$

3. 기하학적 그림:



4. 쌍대성 관점:

변환 행렬 $[u_1 \ u_2]$:

- 두 번째 열 원소 = \hat{j} 의 도착지
- $\hat{j} \rightarrow u_2$

5. 좌표 의미:

$$\begin{aligned}u_2 &= \hat{u} \text{의 } y \text{ 성분} \\ &= \hat{u} \text{이 } y \text{축으로 얼마나 가는가} \\ &= y \text{축을 } \hat{u} \text{로 투영한 값}\end{aligned}$$

쌍대성의 심오한 의미:

벡터의 좌표 = 기저의 투영값

일반 벡터 $v = [x, y]$:

$$v = x\hat{i} + y\hat{j}$$

\hat{u} 로 투영:

$$\begin{aligned}\text{proj}_{\hat{u}}(v) &= \text{proj}_{\hat{u}}(x\hat{i} + y\hat{j}) \\ &= x \cdot \text{proj}_{\hat{u}}(\hat{i}) + y \cdot \text{proj}_{\hat{u}}(\hat{j}) \quad (\text{선형성!}) \\ &= x \cdot u_1 + y \cdot u_2\end{aligned}$$

행렬 형태:

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x \cdot u_1 + y \cdot u_2$$

결론:

u_1, u_2 는:

1. 벡터 관점:
 - \hat{u} 의 좌표 성분
2. 변환 관점:
 - 기저벡터의 도착지
 - 변환 행렬의 원소
3. 투영 관점:
 - 기저벡터를 \hat{u} 로 투영한 값

쌍대성 덕분에 이 세 관점이 하나로 통합!

직관:

"벡터의 좌표"는
"기저를 그 방향으로 투영한 값"

이것이 쌍대성의 핵심 통찰입니다!

문제 5 답안

내적 공식의 증명 (선형변환 관점):

증명할 명제:

$$\begin{aligned} v \cdot w &= v_1 w_1 + v_2 w_2 \quad (\text{수치}) \\ &= (v \text{를 } w \text{로 투영}) \times |w| \quad (\text{기하학}) \end{aligned}$$

증명 전략:

1. 투영을 선형변환으로 이해
2. 기저벡터 투영 확인
3. 선형성으로 일반화

Step 1: 단위벡터의 경우 ($|w| = 1$)

설정:

$$\hat{u} = [u_1, u_2] \quad (|\hat{u}| = 1)$$

투영 연산:

v 를 \hat{u} 방향으로 투영 \rightarrow 숫자

목표: 이것이 선형변환임을 보이고, 행렬을 찾기

Step 2: 기저벡터 투영

$\hat{i} = [1, 0]$ 를 \hat{u} 로 투영:

기하학적으로:

$$\text{proj}_{\hat{u}}(\hat{i}) = u_1$$

이유:

- \hat{i} 는 x 축 단위벡터
- $\hat{u} = [u_1, u_2]$
- $u_1 = \hat{u}$ 의 x 성분 = x 축으로의 투영

$\hat{j} = [0, 1]$ 를 \hat{u} 로 투영:

기하학적으로:

$$\text{proj}_{\hat{u}}(\hat{j}) = u_2$$

이유:

- \hat{j} 는 y 축 단위벡터
 - $u_2 = \hat{u}$ 의 y 성분 = y 축으로의 투영
-

Step 3: 선형변환 행렬

기저벡터의 도착지:

$$\begin{aligned}\hat{i} &\rightarrow u_1 \\ \hat{j} &\rightarrow u_2\end{aligned}$$

2D \rightarrow 1D 선형변환 행렬:

$$[u_1 \quad u_2]$$

의미:

- 첫 번째 열: \hat{i} 의 도착지

- 두 번째 열: \hat{j} 의 도착지

Step 4: 임의 벡터 투영

벡터 $\mathbf{v} = [v_1, v_2]$:

선형결합으로 표현:

$$\mathbf{v} = v_1 \hat{\mathbf{i}} + v_2 \hat{\mathbf{j}}$$

투영 (선형성 이용):

$$\text{proj}_{\hat{\mathbf{u}}}(\mathbf{v}) = \text{proj}_{\hat{\mathbf{u}}}(v_1 \hat{\mathbf{i}} + v_2 \hat{\mathbf{j}})$$

선형성:

$$\begin{aligned} &= v_1 \cdot \text{proj}_{\hat{\mathbf{u}}}(\hat{\mathbf{i}}) + v_2 \cdot \text{proj}_{\hat{\mathbf{u}}}(\hat{\mathbf{j}}) \\ &= v_1 \cdot \mathbf{u}_1 + v_2 \cdot \mathbf{u}_2 \end{aligned}$$

행렬 형태:

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = v_1 u_1 + v_2 u_2$$

결론 (단위벡터):

$$\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{u}} = v_1 u_1 + v_2 u_2 = \text{proj}_{\hat{\mathbf{u}}}(\mathbf{v})$$

Step 5: 일반 벡터로 확장

일반 벡터 $\mathbf{w} = [w_1, w_2]$ ($|\mathbf{w}| \neq 1$):

단위벡터 분해:

$$\mathbf{w} = |\mathbf{w}| \cdot \hat{\mathbf{u}}$$

$$\text{여기서 } \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{w} / |\mathbf{w}| = [w_1/|\mathbf{w}|, w_2/|\mathbf{w}|]$$

$\hat{\mathbf{u}}$ 의 성분:

$$\begin{aligned} u_1 &= w_1 / |\mathbf{w}| \\ u_2 &= w_2 / |\mathbf{w}| \end{aligned}$$

투영:

$$\begin{aligned}\text{proj}_{\hat{u}}(v) &= v_1 u_1 + v_2 u_2 \\ &= v_1 (w_1/|w|) + v_2 (w_2/|w|) \\ &= (v_1 w_1 + v_2 w_2) / |w|\end{aligned}$$

w 방향 투영:

$$\begin{aligned}\text{proj}_w \text{의 길이} &= |w| \times \text{proj}_{\hat{u}}(v) \\ &= |w| \times (v_1 w_1 + v_2 w_2) / |w| \\ &= v_1 w_1 + v_2 w_2\end{aligned}$$

내적:

$$\begin{aligned}v \cdot w &= (v \text{를 } w \text{로 투영한 길이}) \times |w| \\ &= \text{proj}_w(v) \times |w| \\ &= (v_1 w_1 + v_2 w_2) / |w| \times |w| \\ &= v_1 w_1 + v_2 w_2\end{aligned}$$

선형변환 관점 재정리:

w의 쌍대 변환:

$$f_w(v) = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

기저벡터:

$$\begin{aligned}\hat{i} &\rightarrow w_1 \\ \hat{j} &\rightarrow w_2\end{aligned}$$

임의 벡터 $v = v_1 \hat{i} + v_2 \hat{j}$:

$$f_w(v) = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2$$

기하학적 의미:

$$\begin{aligned}&= v \text{를 } w/|w| \text{ 방향으로 투영} \times |w| \\ &= (v \text{를 } w \text{로 투영}) \times |w|\end{aligned}$$

완전한 증명:

명제:

$$v \cdot w = v_1 w_1 + v_2 w_2 = (v \text{를 } w \text{로 투영}) \times |w|$$

증명:

1. 투영 = 선형변환

- 가법성: $\text{proj}(u + v) = \text{proj}(u) + \text{proj}(v)$
- 스케일링: $\text{proj}(cu) = c \cdot \text{proj}(u)$

2. 기저 투영:

- $\text{proj}_w(\hat{i}) = w_1 / |w| \times |w| = w_1$
- $\text{proj}_w(\hat{j}) = w_2 / |w| \times |w| = w_2$

3. 변환 행렬:

- $[w_1 \ w_2]$

4. 선형성 적용:

$$\begin{aligned} v &= v_1 \hat{i} + v_2 \hat{j} \\ v \cdot w &= [w_1 \ w_2] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \\ &= v_1 w_1 + v_2 w_2 \quad (\text{수치}) \end{aligned}$$

5. 기하학적 해석:

$$\begin{aligned} &= (v \text{를 } w/|w| \text{로 투영}) \times |w| \\ &= (v \text{를 } w \text{로 투영}) \times |w| \quad (\text{기하학}) \end{aligned}$$

Q.E.D.

핵심 통찰:

쌍대성이 연결:

수치 계산 \leftarrow [선형변환] \rightarrow 기하학적 투영

w의 좌표 = 기저의 투영값

$$\begin{aligned} w_1 &= \hat{i} \text{를 } w \text{로 투영} \\ w_2 &= \hat{j} \text{를 } w \text{로 투영} \end{aligned}$$

선형결합이 보존됨:

$$\begin{aligned} v &= v_1 \hat{i} + v_2 \hat{j} \\ \text{투영}(v) &= v_1 \cdot \text{투영}(\hat{i}) + v_2 \cdot \text{투영}(\hat{j}) \\ &= v_1 w_1 + v_2 w_2 \end{aligned}$$

이것이 내적 공식의 진정한 의미입니다!

Dataview (inline field '(v를 u 방향으로 투영) × |u|'): Error:
-- PARSING FAILED -----

```
> 1 | (v를 u 방향으로 투영) × |u|
      |      ^
```

Expected one of the following:

'), '*' or '/' or '%', '+' or '-', ',', '>=' or '<=' or '!=' or '=' or '>' or '<', 'and' or 'or'

Dataview (inline field 'v를 w로 투영 × |w|'): Error:

-- PARSING FAILED -----

```
> 1 | v를 w로 투영 × |w|
      |      ^
```

Expected one of the following:

',' or '/' or '%', '+' or '-', '>=' or '<=' or '!=' or '=' or '>' or '<', 'and' or 'or'

Dataview (inline field 'v₁w₁ + v₂w₂'): Error:

-- PARSING FAILED -----

```
> 1 | v1w1 + v2w2
      |      ^
```

Expected one of the following:

'(', '*', '/' or '%', '+' or '-', '.', '>=' or '<=' or '!=' or '=' or '>' or '<', '[', 'and' or 'or', /[0-9\p{Letter}_-]/u, EOF, text

Dataview (inline field '(v를 w로 투영) × |w|'): Error:

-- PARSING FAILED -----

```
> 1 | (v를 w로 투영) × |w|
      |      ^
```

Expected one of the following:

'), '*' or '/' or '%', '+' or '-', ',', '>=' or '<=' or '!=' or '=' or '>' or '<', 'and' or 'or'

Dataview (inline field 'v를 w/|w| 방향으로 투영 × |w|

= (v를 w로 투영) × |w|'): Error:

-- PARSING FAILED -----

```
> 1 | v를 w/|w| 방향으로 투영 × |w|
```

$$\frac{|v|^2}{2} = (v \text{를 } w \text{로 투영}) \times |w|$$

Expected one of the following:

'*' or '/' or '%', '+' or '-', '>=' or '<=' or '!=' or '=' or '>' or '<',
'and' or 'or'

Dataview (inline field '(v를 w/|w|로 투영) × |w|
= (v를 w로 투영) × |w| (기하학)'): Error:

-- PARSING FAILED -----

$$\frac{|v|^2}{2} = (v \text{를 } w/|w| \text{로 투영}) \times |w| \quad (\text{기하학})$$

Expected one of the following:

'), '*' or '/' or '%', '+' or '-', ',', '>=' or '<=' or '!=' or '=' or
'>' or '<', 'and' or 'or'