복습: 단일 변환

3장에서 배운 내용:

- 행렬 = 선형변환의 설명
- 행렬의 열 = 변환된 기저벡터
- 행렬-벡터 곱셈 = 변환 적용

예:

```
M = [1  2]  의미: î → [1, 0], ĵ → [2, 1]
    [0  1]
```

이번 장의 핵심 질문

"두 개의 변환을 차례로 적용하면?"

예:

1. 먼저 변환 M_1 적용
2. 그 결과에 변환 M_2 적용
3. 전체 효과는?

이것을 **변환의 합성(composition)**이라고 합니다.

함수의 합성 (Function Composition)

일반적인 함수:

```
f(x) = 2x
g(x) = x + 3

(g ∘ f)(x) = g(f(x)) = g(2x) = 2x + 3
```

선형변환도 함수이므로:

```
M₁(v) = 변환 M₁을 v에 적용
M₂(M₁(v)) = M₁ 적용 후 M₂ 적용
```

행렬 곱셈의 기하학적 의미

두 행렬의 곱 **M_2M_1:**

- 먼저 M_1 적용
- 그 다음 M_2 적용
- **오른쪽에서 왼쪽으로 읽음!**

왜 오른쪽에서 왼쪽인가?

함수 표기법에서 유래:

```
f(g(x))
```

- 먼저 g를 적용 (오른쪽)
- 그 다음 f를 적용 (왼쪽)

행렬도 마찬가지:

```
M₂M₁v
```

- 먼저 M_1을 v에 적용
- 그 다음 M_2를 적용

구체적 예제: 회전 후 전단

M_1: 90도 반시계 회전

```
M₁ = [0  -1]
     [1   0]
```

- î = [1, 0] → [0, 1]
- ĵ = [0, 1] → [-1, 0]

M_2: 전단(Shear)

```
M₂ = [1  1]
     [0  1]
```

- î = [1, 0] → [1, 0]
- ĵ = [0, 1] → [1, 1]

합성 변환 M_2M_1은?

핵심 아이디어:

- 합성 변환도 선형변환
- 따라서 기저벡터가 어디로 가는지만 알면 됨
- M_2M_1의 열 = 합성 후 기저벡터의 위치

합성 행렬 계산하기

방법: 각 기저벡터를 추적

î의 최종 위치 구하기

1. **M_1 적용:**

   ```
   î = [1, 0] → M₁[1, 0] = [0, 1]
   ```

(M_1의 첫 번째 열)

2. **M_2 적용:**

```
M₂[0, 1] = 0·[1, 0] + 1·[1, 1] = [1, 1]
```

(M_2의 두 번째 열, 왜냐하면 [0, 1] = 0·î + 1·ĵ)

결과: î → [1, 1] **따라서 M_2M_1의 첫 번째 열 = [1, 1]**

ĵ의 최종 위치 구하기

1. **M_1 적용:**

```
ĵ = [0, 1] → M₁[0, 1] = [-1, 0]
```

(M_1의 두 번째 열)

2. **M_2 적용:**

```
M₂[-1, 0] = (-1)·[1, 0] + 0·[1, 1] = [-1, 0]
```

(M_2의 첫 번째 열, 왜냐하면 [-1, 0] = -1·î + 0·ĵ)

결과: ĵ → [-1, 0] **따라서 M_2M_1의 두 번째 열 = [-1, 0]**

합성 행렬

```
M₂M₁ = [1  -1]
       [1   0]
```

행렬 곱셈 공식의 유도

일반적인 2×2 행렬:

```
M₁ = [a  b]    M₂ = [e  f]
     [c  d]         [g  h]
```

M_2M_1의 첫 번째 열 (î의 변환):

1. M_1 적용: î → [a, c]
2. M_2 적용: M_2[a, c] = a·[e, g] + c·[f, h] = [ae+cf, ag+ch]

M_2M_1의 두 번째 열 (ĵ의 변환):

1. M_1 적용: ĵ → [b, d]
2. M_2 적용: M_2[b, d] = b·[e, g] + d·[f, h] = [be+df, bg+dh]

최종 결과:

```
M₂M₁ = [ae+cf  be+df]
       [ag+ch  bg+dh]
```

이것이 바로 **행렬 곱셈 공식**입니다!

수치적 계산 vs 기하학적 이해

암기하는 방법 (나쁨):

```
(AB)ᵢⱼ = Σₖ Aᵢₖ Bₖⱼ
```

- 복잡한 공식 외우기
- 의미 모름
- 왜 그렇게 되는지 모름

이해하는 방법 (좋음):

1. 행렬 = 변환
2. 행렬 곱셈 = 변환의 합성
3. 결과 행렬의 열 = 합성 후 기저벡터의 위치
4. 각 기저벡터를 두 변환에 차례로 적용
5. 자연스럽게 공식이 도출됨

순서가 중요하다!

행렬 곱셈은 교환법칙이 성립하지 않습니다:

```
M₁M₂ ≠ M₂M₁  (일반적으로)
```

기하학적 이유:

"회전 후 전단" ≠ "전단 후 회전"

예:

```
M₁M₂ = [0  -1] [1  1]    [0  -1]
       [1   0] [0  1] = [1   1]

M₂M₁ = [1  1] [0  -1]    [1  -1]
       [0  1] [1   0] = [1   0]
```

완전히 다른 결과!

직관:

- 변환의 순서를 바꾸면 결과가 달라짐
- 먼저 회전하고 밀기 vs 먼저 밀고 회전하기
- 공간이 다르게 변형됨

결합법칙 (Associativity)

행렬 곱셈은 결합법칙이 성립합니다:

```
(AB)C = A(BC)
```

수치적 증명: 복잡하고 지루함

기하학적 증명: 자명함!

왜 자명한가?

```
(AB)C = "먼저 (C 다음 B)를 적용, 그 다음 A"
A(BC) = "먼저 C를 적용, 그 다음 (B 다음 A)"
```

둘 다:

1. C 적용
2. B 적용
3. A 적용

같은 순서이므로 같은 결과!

괄호를 어디에 두든, 변환을 적용하는 순서는 C, B, A로 같습니다.

교훈:

- 기하학적 이해가 훨씬 명확함
- 증명도 쉬움
- 왜 그런지 직관적으로 이해

실전 예제

예제 1: 연속 변환

```
M₁ = [2  0]  (x축으로 2배 확대)
     [0  2]

M₂ = [0  -1]  (90도 회전)
     [1   0]

M₂M₁ = ?
```

계산:

$\hat{\imath}$ 추적:

- M_1: [1, 0] → [2, 0]
- M_2: [2, 0] → 2·[0, 1] = [0, 2]

$\hat{\jmath}$ 추적:

- M_1: [0, 1] → [0, 2]
- M_2: [0, 2] → 2·[-1, 0] = [-2, 0]

```
M₂M₁ = [0  -2]
       [2   0]
```

의미: 2배 확대한 후 90도 회전 = 90도 회전한 2배 확대

예제 2: 순서 바꾸기

```
M₁M₂ = [2  0] [0  -1]   [0  -2]
       [0  2] [1   0] = [2   0]
```

같은 결과! (이 경우에는 우연히 교환법칙 성립)

왜? 균일한 스케일링은 순서에 무관

3차원으로의 확장

3×3 행렬의 곱셈:

```
M₂M₁의 열 = 합성 후 기저벡터들
```

- 첫 번째 열: $\hat{i}$의 최종 위치
- 두 번째 열: $\hat{j}$의 최종 위치
- 세 번째 열: $\hat{k}$의 최종 위치

같은 원리:

1. 각 기저벡터를 M_1으로 변환
2. 그 결과를 M_2로 변환
3. 최종 위치가 M_2M_1의 열

행렬 곱셈의 일반적 성질

교환법칙 (Commutative): 일반적으로 성립 안 함

```
AB ≠ BA  (대부분의 경우)
```

결합법칙 (Associative): 항상 성립

```
(AB)C = A(BC)
```

분배법칙 (Distributive): 항상 성립

```
A(B + C) = AB + AC
(A + B)C = AC + BC
```

항등원 (Identity):

```
I = [1  0]  (2D의 경우)
    [0  1]

AI = IA = A
```

I는 "아무것도 하지 않는" 변환

왜 이것이 중요한가?

1. 복잡한 변환 분해:

- 복잡한 변환 = 간단한 변환들의 합성
- 예: 임의의 회전 = 3개의 축 회전 합성

2. 효율성:

- 여러 변환을 미리 합성
- 많은 벡터에 한 번에 적용

3. 개념적 명확성:

- "곱셈"이 무엇을 의미하는지 이해
- 다른 주제들과의 연결 (역행렬, 고유벡터 등)

핵심 직관 정리

1. **행렬 곱셈 = 변환의 합성**
    - M_2M_1 = "M_1을 한 후 M_2를 함"
    - 오른쪽에서 왼쪽으로 읽음
2. **결과 행렬의 의미**
    - 열 = 합성 변환 후 기저벡터의 위치
    - 각 열을 독립적으로 계산
3. **순서가 중요**
    - 변환 순서를 바꾸면 결과 다름
    - AB ≠ BA (일반적으로)
4. **괄호는 중요하지 않음**
    - 변환 순서만 같으면 됨
    - (AB)C = A(BC)
5. **기하학적 이해 > 공식 암기**
    - 왜 그렇게 되는지 이해
    - 증명도 쉬워짐
    - 다른 상황에 응용 가능

---

2. 퀴즈

문제 1

행렬 곱셈 M_2M_1을 "변환의 합성"으로 해석할 때, 왜 오른쪽에서 왼쪽으로 읽는지 설명하시오. 그리고 이것이 함수 표기법 f(g(x))와 어떻게 연결되는지 서술하시오.

문제 2

다음 두 행렬이 주어졌을 때:

```
M₁ = [1  0]  (항등 변환)
     [0  1]

M₂ = [2  0]  (2배 확대)
     [0  2]
```

(a) M_2M_1을 기하학적으로 해석하고 계산하시오. (b) M_1M_2를 기하학적으로 해석하고 계산하시오. (c) $M_2M_1 = M_1M_2$인지 확인하고, 이 경우 교환법칙이 성립하는 이유를 설명하시오.

문제 3

다음 두 행렬의 곱 M_2M_1을 계산하되, 수치적 공식을 암기하여 푸는 것이 아니라, "합성 변환 후 기저벡터의 위치"를 추적하는 방법으로 풀이 과정을 상세히 서술하시오:

```
M₁ = [0  -1]  (90도 회전)
     [1   0]

M₂ = [1  1]  (전단)
     [0  1]
```

문제 4

행렬 곱셈에서 교환법칙이 일반적으로 성립하지 않는 이유($M_1M_2 \neq M_2M_1$)를 기하학적 관점에서 설명하시오. 구체적인 변환 예시(예: 회전과 전단)를 들어 서술하시오.

문제 5

행렬 곱셈의 결합법칙 (AB)C = A(BC)를 변환의 합성 관점에서 증명하시오. 왜 이 증명이 수치적으로 계산하는 것보다 기하학적으로 이해하는 것이 더 명확한지 논하시오.

---

3. 퀴즈 답

문제 1 답안

행렬 곱셈을 오른쪽에서 왼쪽으로 읽는 이유:

행렬 곱셈 M_2M_1v는 다음 순서로 적용됩니다:

1. **먼저 M_1을 v에 적용** (가장 오른쪽)
2. **그 결과에 M_2를 적용** (왼쪽)
3. **최종 결과**

즉:

```
M₂M₁v = M₂(M₁v)
```

함수 표기법과의 연결:

일반적인 함수 합성:

```
(f ∘ g)(x) = f(g(x))
```

읽는 순서:

1. 먼저 g를 x에 적용 (오른쪽)
2. 그 결과에 f를 적용 (왼쪽)

행렬도 함수이므로:

행렬을 선형함수로 보면:

```
M₂M₁ = M₂ ∘ M₁
```

이것은 "M_1을 먼저 적용한 후 M_2를 적용"을 의미합니다.

표기법의 역사적 이유:

수학에서 함수는 전통적으로 변수의 왼쪽에 씁니다:

- f(x), sin(x), log(x)
- 따라서 합성도 왼쪽에서 오른쪽으로 쌓임
- f(g(h(x))) = "h 다음 g 다음 f"

행렬 표기법도 이를 따릅니다:

- M_1v, $M_2(M_1v)$, $M_3(M_2(M_1v))$
- 행렬이 벡터의 왼쪽에 위치
- 따라서 오른쪽에서 왼쪽으로 읽음

히브리어 독자에게는 좋은 소식, 나머지에게는 나쁜 소식! (히브리어는 오른쪽에서 왼쪽으로 읽음)

결론: 오른쪽에서 왼쪽으로 읽는 것은 함수 표기법의 자연스러운 결과이며, 이는 수학적 일관성을 유지하기 위한 관습입니다.

문제 2 답안

주어진 행렬:

```
M₁ = [1  0]  (항등 변환 - Identity)
     [0  1]

M₂ = [2  0]  (2배 균일 확대)
     [0  2]
```

(a) M_2M_1 계산 및 해석

기하학적 해석:

- 먼저 M_1 적용: 아무것도 안 함 (항등 변환)
- 그 다음 M_2 적용: 2배 확대
- **결과: 2배 확대**

계산:

î의 변환:

- M_1 적용: [1, 0] → [1, 0] (M_1의 첫 번째 열)
- M_2 적용: [1, 0] → [2, 0] (M_2의 첫 번째 열)

ĵ의 변환:

- M_1 적용: [0, 1] → [0, 1] (M_1의 두 번째 열)
- M_2 적용: [0, 1] → [0, 2] (M_2의 두 번째 열)

```
M₂M₁ = [2  0]
       [0  2]
```

(b) M_1M_2 계산 및 해석

기하학적 해석:

- 먼저 M_2 적용: 2배 확대
- 그 다음 M_1 적용: 아무것도 안 함
- **결과: 2배 확대**

계산:

î의 변환:

- M_2 적용: [1, 0] → [2, 0]
- M_1 적용: [2, 0] → [2, 0]

ĵ의 변환:

- M_2 적용: [0, 1] → [0, 2]
- M_1 적용: [0, 2] → [0, 2]

```
M₁M₂ = [2  0]
       [0  2]
```

(c) 교환법칙 확인 및 이유

```
M₂M₁ = M₁M₂ = [2  0]  ✓
              [0  2]
```

교환법칙이 성립하는 이유:

1. **M_1은 항등 변환:**
   - 어떤 변환과 합성해도 그 변환 그대로
   - AI = IA = A (모든 A에 대해)
   - "아무것도 안 하는" 변환이므로 순서 무관
2. **일반적 규칙:** 항등 행렬 I는 **모든 행렬과 교환 가능**합니다.

추가 예시 - 교환법칙이 성립하는 다른 경우:

- 두 스케일 변환: 둘 다 각 축을 독립적으로 확대/축소
- 같은 축 중심의 회전: 90도 + 45도 = 135도 (순서 무관)

결론: 이 경우는 특수한 경우로, 일반적으로는 $M_1M_2 \neq M_2M_1$입니다. 항등 행렬은 모든 행렬과 교환 가능한 특별한 행렬입니다.

문제 3 답안

주어진 행렬:

```
M₁ = [0  -1]  (90도 반시계 회전)
     [1   0]

M₂ = [1  1]  (전단 변환)
     [0  1]
```

목표: M_2M_1 계산 (먼저 M_1, 그 다음 M_2)

풀이: 기저벡터 추적 방법

합성 변환 M_2M_1의 행렬을 구하려면, 합성 변환 후 **기저벡터 î와 ĵ가 어디로 가는지** 알아야 합니다. 각 기저벡터를 두 변환에 차례로 적용합니다.

Step 1: î = [1, 0]의 최종 위치 구하기

1단계 - M_1 적용:

```
M₁[1, 0] = ?
```

M_1의 첫 번째 열이 "î가 어디로 가는가"를 나타냅니다:

```
M₁[1, 0] = [0, 1]
```

의미: 90도 회전 후 î는 위쪽([0, 1])을 가리킴

2단계 - M_2 적용:

```
M₂[0, 1] = ?
```

[0, 1]을 M_2로 변환합니다. [0, 1] = 0·î + 1·ĵ이므로:

```
M₂[0, 1] = 0·(M₂의 첫 번째 열) + 1·(M₂의 두 번째 열)
         = 0·[1, 0] + 1·[1, 1]
         = [1, 1]
```

결론: î → [1, 1]

따라서 M_2M_1의 첫 번째 열 = [1, 1]

Step 2: ĵ = [0, 1]의 최종 위치 구하기

1단계 - M_1 적용:

```
M₁[0, 1] = ?
```

M_1의 두 번째 열:

```
M₁[0, 1] = [-1, 0]
```

의미: 90도 회전 후 ĵ는 왼쪽([-1, 0])을 가리킴

2단계 - M_2 적용:

```
M₂[-1, 0] = ?
```

[-1, 0] = -1·î + 0·ĵ이므로:

```
M₂[-1, 0] = (-1)·(M₂의 첫 번째 열) + 0·(M₂의 두 번째 열)
          = (-1)·[1, 0] + 0·[1, 1]
          = [-1, 0]
```

결론: ĵ → [-1, 0]

따라서 M_2M_1의 두 번째 열 = [-1, 0]

Step 3: 최종 합성 행렬

```
M₂M₁ = [1  -1]
       [1   0]
```

검증 (선택사항):

벡터 [1, 1]에 적용해보기:

직접 합성:

1. M_1[1, 1] = [0·1 + (-1)·1, 1·1 + 0·1] = [-1, 1]
2. M_2[-1, 1] = [1·(-1) + 1·1, 0·(-1) + 1·1] = [0, 1]

M_2M_1 직접 사용:

```
[1  -1] [1]   [1·1 + (-1)·1]   [0]
[1   0] [1] = [1·1 + 0·1    ] = [1]  ✓
```

일치합니다!

문제 4 답안

교환법칙이 성립하지 않는 이유 (기하학적 관점):

행렬 곱셈 M_1M_2와 M_2M_1은 **변환의 순서가 다릅니다**:

- M_1M_2: "먼저 M_2, 그 다음 M_1"
- M_2M_1: "먼저 M_1, 그 다음 M_2"

변환의 순서가 다르면 일반적으로 **공간이 다르게 변형**됩니다.

구체적 예시: 회전과 전단

```
M₁ = [0  -1]  (90도 반시계 회전)
     [1   0]

M₂ = [1  1]  (전단 - y좌표만큼 오른쪽으로 밀기)
     [0  1]
```

경우 1: M_1M_2 (전단 후 회전)

시각화:

1. **전단 먼저:** 정사각형이 평행사변형으로 (오른쪽으로 기울어짐)
2. **회전:** 그 기울어진 평행사변형을 90도 회전

결과: 위쪽으로 기울어진 평행사변형

경우 2: M_2M_1 (회전 후 전단)

시각화:

1. **회전 먼저:** 정사각형을 90도 회전
2. **전단:** 회전된 정사각형을 오른쪽으로 밀기

결과: 오른쪽으로 기울어진 평행사변형

계산으로 확인:

```
M₁M₂ = [0  -1] [1  1]   [0·1+(-1)·0  0·1+(-1)·1]   [0  -1]
       [1   0] [0  1] = [1·1+0·0     1·1+0·1   ] = [1   1]

M₂M₁ = [1  1] [0  -1]   [1·0+1·1  1·(-1)+1·0]   [1  -1]
       [0  1] [1   0] = [0·0+1·1  0·(-1)+1·0] = [1   0]
```

완전히 다른 행렬!

기하학적 직관:

벡터 [1, 0]의 변환 추적:

M_1M_2 경로:

- [1, 0] → M_2 → [1, 0] (전단은 수평벡터에 영향 없음)
- [1, 0] → M_1 → [0, 1] (90도 회전)
- **최종: [0, 1]**

M_2M_1 경로:

- [1, 0] → M_1 → [0, 1] (90도 회전)
- [0, 1] → M_2 → [1, 1] (전단이 수직벡터를 오른쪽으로 밈)
- **최종: [1, 1]**

다른 최종 위치!

일반적 원리:

변환의 합성은 **경로 의존적(path-dependent)**입니다:

- 변환 A가 공간을 변형
- 변환 B는 **변형된 공간**에 작용
- 순서를 바꾸면 B가 작용하는 공간이 달라짐
- 따라서 최종 결과가 다름

예외:

교환법칙이 성립하는 경우:

- 항등 행렬과의 곱셈
- 같은 스케일 변환들
- 같은 축 중심의 회전들
- 대각 행렬들끼리

하지만 일반적으로는 성립하지 않습니다.

문제 5 답안

결합법칙의 증명 (변환의 합성 관점):

증명할 명제:

```
(AB)C = A(BC)
```

기하학적 해석:

좌변 (AB)C:

1. 먼저 (AB)를 계산 - 이것은 "C를 하고 B를 함"
2. 그 합성 변환을 C에 적용
3. 즉: "먼저 C, 그 다음 B, 마지막에 A"

실제로 벡터 v에 적용하면:

```
((AB)C)v = (AB)(Cv) = A(B(Cv))
```

우변 A(BC):

1. 먼저 (BC)를 계산 - 이것은 "C를 하고 B를 함"
2. A를 그 합성 변환에 적용
3. 즉: "먼저 C, 그 다음 B, 마지막에 A"

실제로 벡터 v에 적용하면:

```
(A(BC))v = A((BC)v) = A(B(Cv))
```

비교:

```
좌변: A(B(Cv))
우변: A(B(Cv))
```

완전히 동일합니다!

결론:

괄호를 어디에 두든, 변환을 적용하는 순서는:

1. C
2. B
3. A

이 순서는 변하지 않으므로, 결과도 같습니다. 증명 끝! □

왜 기하학적 이해가 더 명확한가?

1. 수치적 증명의 문제점:

행렬 곱셈 공식을 직접 전개하면:

$$
\begin{aligned}
((AB)C)_{ij} &= \Sigma_k(\Sigma_l\ A_{il}B_{lk})C_{kj} \\
&= \Sigma_k\ \Sigma_l\ A_{il}B_{lk}C_{kj} \\
\\
(A(BC))_{ij} &= \Sigma_l\ A_{il}(\Sigma_k\ B_{lk}C_{kj}) \\
&= \Sigma_l\ \Sigma_k\ A_{il}B_{lk}C_{kj}
\end{aligned}
$$

합의 순서를 바꿀 수 있으므로 같다는 것을 보이는 방식.

문제점:

- 복잡한 기호 조작
- 지루하고 기계적
- **왜 그래야 하는지 직관이 없음**

- 실수하기 쉬움
- 의미를 놓침

2. 기하학적 이해의 장점:

직관적:

- "변환을 순서대로 적용"이라는 간단한 아이디어
- 괄호는 계산 편의일 뿐, 적용 순서는 불변
- 그림으로도 쉽게 이해 가능

일반화 가능:

- 4개 이상의 행렬에도 즉시 적용
- (ABCD)를 어떻게 괄호치든 같음
- 왜냐하면 순서가 D→C→B→A로 고정

실수 방지:

- 개념이 명확하면 실수 안 함
- "변환 순서"만 기억하면 됨

깊은 이해:

- 단순히 "공식이 맞다"가 아니라
- "왜 그럴 수밖에 없는가"를 이해
- 수학의 본질에 다가감

3. 교육적 가치:

Grant Sanderson (3Blue1Brown)의 철학:

- "좋은 설명이란 증명을 제공하는 것을 넘어서, **왜 그것이 참이어야 하는지** 이해시키는 것"
- 기하학적 증명은 이것을 달성함
- 수치적 증명은 확인만 해줄 뿐

결론:

기하학적 이해가 더 명확한 이유:

1. 직관적이고 시각적
2. 실수하기 어려움
3. 깊은 이해 제공
4. 다른 상황에 쉽게 적용
5. 수학의 아름다움을 보여줌

이것이 바로 3Blue1Brown 시리즈의 핵심 메시지입니다!