

## 이 장의 목적

### 외적의 깊은 이해:

- 왜 행렬식 트릭이 작동하는가?
  - 왜 3D에만 외적이 존재하는가?
  - 외적과 쌍대성의 연결

### 선택적 장:

- 핵심 내용은 아님
  - 하지만 매우 우아함
  - 수학적 직관 향상

## 필요한 배경:

- Chapter 6: 행렬식
  - Chapter 9: 쌍대성 (내적)

## 복습: 쌍대성

### 핵심 개념:

nD  $\rightarrow$  1D 선형변환  $\leftrightarrow$  n차원 벡터

의미:

### 선형변환 $f:$

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

쌓대 벡터  $v$ :

$$f(w) = v \cdot w \quad (\text{모든 } w \text{에 대해})$$

## 양방향:

- 변환  $\rightarrow$  벡터 (쌍대 벡터)
  - 벡터  $\rightarrow$  변환 (내적 연산)

2D 예:

변환:  $\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

쌍대 벡터:  $[u_1, u_2]$

### 3D도 같음:

변환:  $[u_1 \ u_2 \ u_3]$

쌍대 벡터:  $[u_1, u_2, u_3]$

## 핵심 질문

외적의 미스터리:

### 1. 왜 3D만?

2D: 외적 없음 (넓이만)

3D: 외적 = 벡터

4D: 외적 없음??

### 2. 행렬식 트릭:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \det([\hat{i} \quad \hat{j} \quad \hat{k}] \begin{pmatrix} [v_1 & v_2 & v_3] \\ [w_1 & w_2 & w_3] \end{pmatrix})$$

왜 이게 작동하는가?

### 3. 계산 vs 기하학:

계산:  $v_2 w_3 - v_3 w_2, \dots$

기하학: 수직 벡터, 넓이

왜 연결되는가?

## 3D → 1D 변환 정의

새로운 함수:

입력: 3D 벡터  $[x, y, z]$

출력: 숫자

정의:

$$f([x, y, z]) = \det([x \ v_1 \ w_1] \begin{pmatrix} [y & v_2 & w_2] \\ [z & v_3 & w_3] \end{pmatrix})$$

여기서  $v, w$ 는 고정된 벡터

의미:

- $x, y, z$ 는 변수
- $v, w$ 는 상수

기하학적 의미: 부피

### 3x3 행렬식:

$\det([a \ b \ c]) =$  평행육면체의 부피 (부호 포함)  
( [d \ e \ f])  
( [g \ h \ i])

### 우리의 함수:

$$f([x, y, z]) = \det([x \ v_1 \ w_1] \\ [y \ v_2 \ w_2] \\ [z \ v_3 \ w_3])$$

### 기하학적:

= [x, y, z], v, w로 만든 평행육면체의 부피

### 시각화:

$$\begin{matrix} [x, y, z] \\ \diagup \\ / | \\ / | \\ / | \\ / \underline{\underline{w}} \\ / \ / \\ v \ / \end{matrix}$$

세 벡터가 만드는 3D 박스

### 함수의 선형성

확인해야 할 것:

#### 1. 가법성:

$$f(u + v) = f(u) + f(v)$$

#### 2. 스케일링:

$$f(cu) = c \cdot f(u)$$

### 행렬식의 성질:

#### 열 가법성:

$$\det([a+a' \ b \ c]) = \det([a \ b \ c]) + \det([a' \ b \ c]) \\ ([d+d' \ e \ f]) \quad ([d \ e \ f]) \quad ([d' \ e \ f]) \\ ([g+g' \ h \ i]) \quad ([g \ h \ i]) \quad ([g' \ h \ i])$$

열 스케일링:

$$\det([ka \ b \ c]) = k \cdot \det([a \ b \ c])$$
$$(\begin{bmatrix} kd & e & f \end{bmatrix}) \quad (\begin{bmatrix} d & e & f \end{bmatrix})$$
$$(\begin{bmatrix} kg & h & i \end{bmatrix}) \quad (\begin{bmatrix} g & h & i \end{bmatrix})$$

우리의 함수:

$$f([x, y, z]) = \det([x \ v_1 \ w_1])$$
$$(\begin{bmatrix} y & v_2 & w_2 \end{bmatrix})$$
$$(\begin{bmatrix} z & v_3 & w_3 \end{bmatrix})$$

첫 번째 열이 변수!

선형성 확인:

$$f([x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2])$$
$$= \det([x_1+x_2 \ v_1 \ w_1])$$
$$(\begin{bmatrix} y_1+y_2 & v_2 & w_2 \end{bmatrix})$$
$$(\begin{bmatrix} z_1+z_2 & v_3 & w_3 \end{bmatrix})$$
$$= \det([x_1 \ v_1 \ w_1]) + \det([x_2 \ v_1 \ w_1])$$
$$(\begin{bmatrix} y_1 & v_2 & w_2 \end{bmatrix}) \quad (\begin{bmatrix} y_2 & v_2 & w_2 \end{bmatrix})$$
$$(\begin{bmatrix} z_1 & v_3 & w_3 \end{bmatrix}) \quad (\begin{bmatrix} z_2 & v_3 & w_3 \end{bmatrix})$$
$$= f([x_1, y_1, z_1]) + f([x_2, y_2, z_2]) \checkmark$$

결론:  $f$ 는 선형변환!

쌍대성 적용

선형변환 존재:

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \text{ (선형)}$$

쌍대성 정리:

$f$ 의 쌍대 벡터  $p$ 가 존재

의미:

$$f([x, y, z]) = p \cdot [x, y, z] \quad (\text{모든 } [x, y, z])$$

목표: 이 벡터  $p$ 를 찾자!

쌍대 벡터 찾기

방법:

기저벡터에 적용 → 변환 행렬 얻음

$\hat{i}$ 에 적용:

$$\begin{aligned}f(\hat{i}) &= f([1, 0, 0]) \\&= \det([1 \ v_1 \ w_1]) \\&\quad ([0 \ v_2 \ w_2]) \\&\quad ([0 \ v_3 \ w_3])\end{aligned}$$

코팩터 전개 (첫 열):

$$\begin{aligned}&= 1 \cdot \det([v_2 \ w_2]) - 0 + 0 \\&\quad ([v_3 \ w_3]) \\&= v_2 w_3 - v_3 w_2\end{aligned}$$

$\hat{j}$ 에 적용:

$$\begin{aligned}f(\hat{j}) &= f([0, 1, 0]) \\&= \det([0 \ v_1 \ w_1]) \\&\quad ([1 \ v_2 \ w_2]) \\&\quad ([0 \ v_3 \ w_3]) \\&= -1 \cdot \det([v_1 \ w_1]) + 0 \\&\quad ([v_3 \ w_3]) \\&= -(v_1 w_3 - v_3 w_1) \\&= v_3 w_1 - v_1 w_3\end{aligned}$$

$\hat{k}$ 에 적용:

$$\begin{aligned}f(\hat{k}) &= f([0, 0, 1]) \\&= \det([0 \ v_1 \ w_1]) \\&\quad ([0 \ v_2 \ w_2]) \\&\quad ([1 \ v_3 \ w_3]) \\&= 1 \cdot \det([v_1 \ w_1]) \\&\quad ([v_2 \ w_2]) \\&= v_1 w_2 - v_2 w_1\end{aligned}$$

변환 행렬:

$$[v_2 w_3 - v_3 w_2 \quad v_3 w_1 - v_1 w_3 \quad v_1 w_2 - v_2 w_1]$$

쌍대 벡터:

$$\begin{aligned}p &= [v_2 w_3 - v_3 w_2] \\&\quad [v_3 w_1 - v_1 w_3]\end{aligned}$$

$$[v_1w_2 - v_2w_1]$$

이것이  $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ !!!

## 놀라운 발견

외적 = 쌍대 벡터:

$$\begin{aligned}\mathbf{v} \times \mathbf{w} &= [v_2w_3 - v_3w_2] \\ &\quad [v_3w_1 - v_1w_3] \\ &\quad [v_1w_2 - v_2w_1]\end{aligned}$$

이것은:

$$\begin{aligned}f([x, y, z]) &= \det([x & v_1 & w_1]) \\ &\quad ([y & v_2 & w_2]) \\ &\quad ([z & v_3 & w_3])\end{aligned}$$

의 쌍대 벡터!

의미:

$$\det([x & v_1 & w_1]) = (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot [x, y, z] \\ ([y & v_2 & w_2]) \\ ([z & v_3 & w_3])$$

## 기하학적 해석

왼쪽 (행렬식):

$$[x, y, z], \mathbf{v}, \mathbf{w} \text{의 평행육면체 부피}$$

오른쪽 (내적):

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot [x, y, z]$$

내적 기하학:

$$= |\mathbf{v} \times \mathbf{w}| \times [x, y, z] \text{를 } (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \text{ 방향으로 투영}$$

연결:

$$\text{평행육면체 부피} = \text{밑면 넓이} \times \text{높이}$$

밑면:

- $\mathbf{v}$ 와  $\mathbf{w}$ 의 평행사변형
- 넓이  $= |\mathbf{v} \times \mathbf{w}|$

높이:

- $[x, y, z]$ 의  $v, w$  평면에서의 높이
- $= [x, y, z]$ 를  $(v \times w)$  방향으로 투영
- (왜?  $v \times w \perp v, w$ )

따라서:

$$\begin{aligned} \text{부피} &= |v \times w| \times \text{투영} \\ &= (v \times w) \cdot [x, y, z] \end{aligned}$$

완벽한 일치!

## 행렬식 트릭의 정당화

복습: 트릭

$$v \times w = \det([\hat{i} \quad \hat{j} \quad \hat{k}] \cdot ([v_1 \quad v_2 \quad v_3]) \cdot ([w_1 \quad w_2 \quad w_3]))$$

쌍대성 관점:

### Step 1: 변환 정의

$$f([x, y, z]) = \det([x \quad v_1 \quad w_1] \cdot [y \quad v_2 \quad w_2] \cdot [z \quad v_3 \quad w_3])$$

### Step 2: 쌍대 벡터

$$p = v \times w \text{ (위에서 계산)}$$

### Step 3: 동등성

$$\det([x \quad v_1 \quad w_1] \cdot p \cdot [x, y, z] \cdot [y \quad v_2 \quad w_2] \cdot [z \quad v_3 \quad w_3])$$

### Step 4: 특별한 선택

$$[x, y, z] = [\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}] \text{로 선택}$$

왜? 기저벡터의 선형결합으로  $p$  표현

결과:

$$\det([\hat{i} \quad v_1 \quad w_1] \cdot p \cdot \hat{i} = p \text{의 } x\text{성분} \cdot [\hat{j} \quad v_2 \quad w_2])$$

$$(\hat{k} \ v_3 \ w_3])$$

$$\det([\hat{i} \ v_1 \ w_1]) = p \cdot \hat{j} = p \text{의 } y\text{성분}$$
$$([\hat{j} \ v_2 \ w_2])$$
$$([\hat{k} \ v_3 \ w_3])$$

$$\det([\hat{i} \ v_1 \ w_1]) = p \cdot \hat{k} = p \text{의 } z\text{성분}$$
$$([\hat{j} \ v_2 \ w_2])$$
$$([\hat{k} \ v_3 \ w_3])$$

행렬 형태:

$$p = [p \cdot \hat{i}] = \det([\hat{i} \ v_1 \ w_1])$$
$$[p \cdot \hat{j}] \quad ([\hat{j} \ v_2 \ w_2])$$
$$[p \cdot \hat{k}] \quad ([\hat{k} \ v_3 \ w_3])$$

하지만 코팩터 전개:

$$\det([\hat{i} \ v_1 \ w_1]) = \hat{i} \cdot \det(\dots) + \hat{j} \cdot \det(\dots) + \hat{k} \cdot \det(\dots)$$
$$([\hat{j} \ v_2 \ w_2])$$
$$([\hat{k} \ v_3 \ w_3])$$

형식적으로 같은 식!

결론: 행렬식 트릭은 쌍대 벡터를 기저벡터로 표현한 것!

왜 3D만?

차원의 우연한 일치:

일반적 상황:

n차원 공간  
n-1개 벡터  $\rightarrow$  (n-1)차원 subspace

부피 함수:

$$f([x_1, \dots, x_n]) = \det([x_1 \ \dots \ x_n \ v_1 \ \dots \ v_{n-1}])$$

쌍대 벡터:

n차원 벡터

2D의 경우:

1개 벡터 ( $v$ )  
 $\rightarrow$  1D subspace (직선)

부피 함수:

$$f([x, y]) = \det([x \ v_1] \\ [y \ v_2])$$

쌍대 벡터:

2D 벡터

하지만:

$v$ 는 이미 2D 벡터  
쌍대 벡터도 2D 벡터

새로운 정보 없음!

실제로:

쌍대 벡터 =  $v$ 를  $90^\circ$  회전

3D의 경우:

2개 벡터 ( $v, w$ )  
 $\rightarrow$  2D subspace (평면)

부피 함수:

$$f([x, y, z]) = \det([x \ v_1 \ w_1] \\ [y \ v_2 \ w_2] \\ [z \ v_3 \ w_3])$$

쌍대 벡터:

3D 벡터 ( $v \times w$ )

차원 일치:

입력: 2개 벡터 ( $v, w$ )  
 출력: 1개 벡터 ( $v \times w$ )

완벽한 대응!

4D의 경우:

3개 벡터 ( $u, v, w$ )  
 $\rightarrow$  3D subspace

부피 함수:

```

f([x, y, z, t]) = det([x   u1   v1   w1])
                  ([y   u2   v2   w2])
                  ([z   u3   v3   w3])
                  ([t   u4   v4   w4])

```

쌍대 벡터:

4D 벡터

하지만:

입력: 3개 벡터

출력: 1개 벡터

**3 → 1 대응이 이상함!**

결론:

2D: 1 → 1 (평범)

3D: 2 → 1 (완벽!)

4D: 3 → 1 (이상)

오직 3D에서만 자연스러움!

**일반화: 7차원**

놀라운 사실:

7차원에서도 외적 존재!

왜?

차원 일치:

6개 벡터 → 6D subspace

쌍대 벡터 → 7D

**Cayley 외적:**

- 7차원 전용
- 2개 벡터 입력
- 1개 벡터 출력
- 매우 특수함

일반적 차원:

3D: 매우 특별

7D: 예외적 특별

다른 차원: 외적 없음

## 수학적 우아함

쌍대성이 설명:

### 1. 외적의 정의:

$v \times w =$  특정  $3D \rightarrow 1D$  변환의 쌍대 벡터

### 2. 계산 공식:

기저벡터에 변환 적용  $\rightarrow$  좌표 얻음

### 3. 행렬식 트릭:

쌍대 벡터를 기저로 표현 = 행렬식 전개

### 4. 기하학적 의미:

부피 = 밑면  $\times$  높이 =  $|v \times w| \times$  투영

모든 것이 연결됨!

## 실용적 의의

내적과 외적의 통일:

내적:

$v \cdot w = v$ 의 쌍대 변환을  $w$ 에 적용

외적:

$v \times w = (v, w)$ 의 부피 함수의 쌍대 벡터

둘 다 쌍대성!

계산 vs 기하학:

더 이상 미스터리 아님:

- 계산 = 쌍대 벡터 찾기
- 기하학 = 변환의 의미

쌍대성이 다리!

## 핵심 직관 정리

## 1. 부피 함수:

$$f([x, y, z]) = \det([x \ v_1 \ w_1] \\ [y \ v_2 \ w_2] \\ [z \ v_3 \ w_3])$$

=  $[x, y, z]$ ,  $v, w$ 의 평행육면체 부피

## 2. 선형변환:

$f$ 는 3D  $\rightarrow$  1D 선형변환

## 3. 쌍대 벡터:

$v \times w = f$ 의 쌍대 벡터

## 4. 동등성:

$$f([x, y, z]) = (v \times w) \cdot [x, y, z]$$

## 5. 기하학:

$$\text{부피} = |v \times w| \times \text{높이} \\ = (v \times w) \cdot [x, y, z]$$

## 6. 왜 3D만:

2개 벡터  $\rightarrow$  2D 평면  
쌍대 벡터  $\rightarrow$  3D (법선)  
완벽한 대응!

## 2. 퀴즈

### 문제 1

3D  $\rightarrow$  1D 선형변환  $f$ 를 다음과 같이 정의하시오:

$$f([x, y, z]) = \det([x \ v_1 \ w_1] \\ [y \ v_2 \ w_2] \\ [z \ v_3 \ w_3])$$

(a) 이 함수의 기하학적 의미는 무엇인가? (b) 왜 이 함수가 선형변환이지 행렬식의 성질을 이용하여 증명하시오. (c) 선형변환이므로 쌍대 벡터  $p$ 가 존재한다. 이 쌍대 벡터를 찾는 방법을 설명하시오.

### 문제 2

외적  $v \times w$ 가 다음 선형변환의 쌍대 벡터임을 증명하시오:

$$f([x, y, z]) = \det([x \ v_1 \ w_1] \\ ([y \ v_2 \ w_2]) \\ ([z \ v_3 \ w_3]))$$

특히: (a) 기저벡터  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ 에  $f$ 를 적용하여 변환 행렬을 구하시오. (b) 이 변환 행렬로부터 쌍대 벡터를 얻으시오. (c) 이것 이 외적 공식과 같음을 보이시오.

### 문제 3

평행육면체의 부피와 외적의 관계를 설명하시오:

$$\det([x \ v_1 \ w_1] \\ ([y \ v_2 \ w_2]) \\ ([z \ v_3 \ w_3])) = (v \times w) \cdot [x, y, z]$$

(a) 왼쪽(행렬식)의 기하학적 의미 (b) 오른쪽(내적)의 기하학적 의미 (c) 왜 둘이 같은지 "밑면  $\times$  높이" 관점에서 설명하시오.

### 문제 4

행렬식 트릭이 왜 작동하는지 쌍대성 관점에서 설명하시오:

$$v \times w = \det([\hat{i} \ \hat{j} \ \hat{k}] \\ ([v_1 \ v_2 \ v_3]) \\ ([w_1 \ w_2 \ w_3]))$$

(a) 왜 이 "행렬식"이 수학적으로 이상한가? (b) 쌍대 벡터  $p$ 를 기저벡터로 표현하면 어떻게 되는가? (c) 이것이 행렬식 트릭과 어떻게 연결되는지 서술하시오.

### 문제 5

왜 외적이 3차원에만 존재하는지 차원 분석을 통해 설명하시오: (a) 2D의 경우: 1개 벡터  $\rightarrow$  쌍대 벡터는? 왜 "외적"이 아닌가? (b) 3D의 경우: 2개 벡터  $\rightarrow$  쌍대 벡터는? 왜 완벽한가? (c) 4D의 경우: 3개 벡터  $\rightarrow$  쌍대 벡터는? 왜 이상한가? (d) 일반적으로  $n$ 차원에서 외적이 존재하려면 어떤 조건이 필요한가?

---

## 3. 퀴즈 답

### 문제 1 답안

**3D  $\rightarrow$  1D** 선형변환의 정의와 분석:

함수:

$$f([x, y, z]) = \det([x \ v_1 \ w_1] \\ ([y \ v_2 \ w_2]) \\ ([z \ v_3 \ w_3]))$$

여기서  $v = [v_1, v_2, v_3]$ ,  $w = [w_1, w_2, w_3]$ 은 고정된 벡터

### (a) 기하학적 의미:

행렬식의 기하학:

3x3 행렬식:

$$\det(A) = \text{세 열벡터가 만드는 평행육면체의 부피 (부호 포함)}$$

우리의 경우:

세 열벡터:

- 첫 번째:  $[x, y, z]$  (변수)
- 두 번째:  $v$  (고정)
- 세 번째:  $w$  (고정)

기하학적 의미:

$$f([x, y, z]) = [x, y, z], v, w \text{가 만드는 평행육면체의 부피}$$

시각화:



부피 공식:

$$V = \text{밑면 넓이} \times \text{높이}$$

밑면:

- $v$ 와  $w$ 의 평행사변형
- 넓이  $= |v \times w|$

높이:

- $[x, y, z]$ 의  $v, w$  평면으로부터의 거리

부호:

$\det > 0$ :  $[x, y, z], v, w$ 가 오른손 좌표계

$\det < 0$ : 원손 좌표계

$\det = 0$ :  $[x, y, z]$ 가  $v, w$  평면 위

예:

$$v = \hat{i} = [1, 0, 0]$$

$$w = \hat{j} = [0, 1, 0]$$

$$[x, y, z] = \hat{k} = [0, 0, 1]$$

$$\begin{aligned}f(\hat{k}) &= \det([0 & 1 & 0]) = 1 \\&\quad ([0 & 0 & 1]) \\&\quad ([1 & 0 & 0])\end{aligned}$$

단위 정육면체의 부피 = 1

(b) 선형성 증명:

선형변환의 조건:

조건 1: 가법성

$$f(u + w) = f(u) + f(w)$$

조건 2: 스케일링

$$f(cu) = c \cdot f(u)$$

행렬식의 성질 이용:

성질 1: 열 가법성

일반적으로:

$$\begin{aligned}\det([a+a' & b & c]) &= \det([a & b & c]) + \det([a' & b & c]) \\&\quad ([d+d' & e & f]) \quad ([d & e & f]) \quad ([d' & e & f]) \\&\quad ([g+g' & h & i]) \quad ([g & h & i]) \quad ([g' & h & i])\end{aligned}$$

우리의 함수에 적용:

두 벡터  $u = [x_1, y_1, z_1], w = [x_2, y_2, z_2]$

$$f(u + w) = f([x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2])$$

$$\begin{aligned}&= \det([x_1+x_2 & v_1 & w_1]) \\&\quad ([y_1+y_2 & v_2 & w_2]) \\&\quad ([z_1+z_2 & v_3 & w_3])\end{aligned}$$

행렬식의 열 가법성:

$$\begin{aligned} &= \det([x_1 \ v_1 \ w_1]) + \det([x_2 \ v_1 \ w_1]) \\ &\quad ([y_1 \ v_2 \ w_2]) \quad ([y_2 \ v_2 \ w_2]) \\ &\quad ([z_1 \ v_3 \ w_3]) \quad ([z_2 \ v_3 \ w_3]) \\ &= f(u) + f(w) \checkmark \end{aligned}$$

## 성질 2: 열 스케일링

일반적으로:

$$\begin{aligned} \det([ka \ b \ c]) &= k \cdot \det([a \ b \ c]) \\ ([kd \ e \ f]) &\quad ([d \ e \ f]) \\ ([kg \ h \ i]) &\quad ([g \ h \ i]) \end{aligned}$$

우리의 함수에 적용:

스칼라  $c$ 와 벡터  $u = [x, y, z]$

$$f(cu) = f(cx, cy, cz)$$

$$\begin{aligned} &= \det([cx \ v_1 \ w_1]) \\ &\quad ([cy \ v_2 \ w_2]) \\ &\quad ([cz \ v_3 \ w_3]) \end{aligned}$$

행렬식의 열 스케일링:

$$\begin{aligned} &= c \cdot \det([x \ v_1 \ w_1]) \\ &\quad ([y \ v_2 \ w_2]) \\ &\quad ([z \ v_3 \ w_3]) \\ &= c \cdot f(u) \checkmark \end{aligned}$$

결론:

$f$ 는 가법성과 스케일링을 만족  
→  $f$ 는 선형변환!

## (c) 쌍대 벡터 찾기:

쌍대성 정리:

$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  (선형)  
→ 쌍대 벡터  $p \in \mathbb{R}^3$  존재

정의:

$$f(x) = p \cdot x \quad (\text{모든 } x \in \mathbb{R}^3)$$

## 방법: 기저벡터 적용

### Step 1: 표준 기저벡터

$$\begin{aligned}\hat{i} &= [1, 0, 0] \\ \hat{j} &= [0, 1, 0] \\ \hat{k} &= [0, 0, 1]\end{aligned}$$

### Step 2: 각 기저에 $f$ 적용

$$\begin{aligned}f(\hat{i}) &= p \cdot \hat{i} = p_1 \quad (\text{p의 } x\text{성분}) \\ f(\hat{j}) &= p \cdot \hat{j} = p_2 \quad (\text{p의 } y\text{성분}) \\ f(\hat{k}) &= p \cdot \hat{k} = p_3 \quad (\text{p의 } z\text{성분})\end{aligned}$$

### Step 3: 행렬식으로 계산

$f(\hat{i})$ :

$$f(\hat{i}) = \det([1 \ v_1 \ w_1]) \\ ([0 \ v_2 \ w_2]) \\ ([0 \ v_3 \ w_3])$$

코팩터 전개 (첫 열):

$$= 1 \cdot \det([v_2 \ w_2]) - 0 + 0 \\ ([v_3 \ w_3]) \\ \\ = v_2 w_3 - v_3 w_2$$

$f(\hat{j})$ :

$$f(\hat{j}) = \det([0 \ v_1 \ w_1]) \\ ([1 \ v_2 \ w_2]) \\ ([0 \ v_3 \ w_3])$$

코팩터 전개 (첫 열):

$$= 0 - 1 \cdot \det([v_1 \ w_1]) + 0 \\ ([v_3 \ w_3]) \\ \\ = -(v_1 w_3 - v_3 w_1) \\ = v_3 w_1 - v_1 w_3$$

$f(\hat{k})$ :

$$f(\hat{k}) = \det([0 \ v_1 \ w_1]) \\ ([0 \ v_2 \ w_2]) \\ ([1 \ v_3 \ w_3])$$

코팩터 전개 (첫 열):

$$= 0 - 0 + 1 \cdot \det([v_1 \ w_1]) \\ ([v_2 \ w_2])$$

$$= v_1 w_2 - v_2 w_1$$

#### Step 4: 쌍대 벡터 구성

$$\begin{aligned} p &= [p_1] \quad [f(\hat{i})] \quad [v_2 w_3 - v_3 w_2] \\ [p_2] &= [f(\hat{j})] = [v_3 w_1 - v_1 w_3] \\ [p_3] &= [f(\hat{k})] \quad [v_1 w_2 - v_2 w_1] \end{aligned}$$

이것이 바로  $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ !

검증:

임의의  $[x, y, z]$ :

$$f([x, y, z]) = \det([x \quad v_1 \quad w_1]) \\ ([y \quad v_2 \quad w_2]) \\ ([z \quad v_3 \quad w_3])$$

$$p \cdot [x, y, z] = (v_2 w_3 - v_3 w_2)x + (v_3 w_1 - v_1 w_3)y + (v_1 w_2 - v_2 w_1)z$$

행렬식 전개로 같음을 보일 수 있음 ✓

결론: 쌍대 벡터 = 외적  $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$

#### 문제 2 답안

외적이 쌍대 벡터임을 증명:

주장:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = f\text{의 쌍대 벡터}$$

여기서:

$$f([x, y, z]) = \det([x \quad v_1 \quad w_1]) \\ ([y \quad v_2 \quad w_2]) \\ ([z \quad v_3 \quad w_3])$$

(a) 기저벡터에  $f$  적용:

$\hat{i} = [1, 0, 0]$ :

$$f(\hat{i}) = \det([1 \quad v_1 \quad w_1]) \\ ([0 \quad v_2 \quad w_2]) \\ ([0 \quad v_3 \quad w_3])$$

코팩터 전개 (첫 열):

$$= 1 \cdot M_{11} - 0 \cdot M_{21} + 0 \cdot M_{31}$$

$$M_{11} = \det([v_2 \quad w_2]) \\ ([v_3 \quad w_3])$$

$$= v_2w_3 - v_3w_2$$

따라서:

$$f(\hat{i}) = v_2w_3 - v_3w_2$$

---

$\hat{j} = [0, 1, 0]$ :

$$f(\hat{j}) = \det([0 \quad v_1 \quad w_1]) \\ ([1 \quad v_2 \quad w_2]) \\ ([0 \quad v_3 \quad w_3])$$

코팩터 전개 (첫 열):

$$= 0 \cdot M_{11} - 1 \cdot M_{21} + 0 \cdot M_{31}$$

$$M_{21} = \det([v_1 \quad w_1]) \\ ([v_3 \quad w_3])$$

$$= v_1w_3 - v_3w_1$$

따라서:

$$f(\hat{j}) = -(v_1w_3 - v_3w_1) = v_3w_1 - v_1w_3$$

---

$\hat{k} = [0, 0, 1]$ :

$$f(\hat{k}) = \det([0 \quad v_1 \quad w_1]) \\ ([0 \quad v_2 \quad w_2]) \\ ([1 \quad v_3 \quad w_3])$$

코팩터 전개 (첫 열):

$$= 0 \cdot M_{11} - 0 \cdot M_{21} + 1 \cdot M_{31}$$

$$M_{31} = \det([v_1 \quad w_1]) \\ ([v_2 \quad w_2])$$

$$= v_1w_2 - v_2w_1$$

따라서:

$$f(\hat{k}) = v_1w_2 - v_2w_1$$

변환 행렬:

3D → 1D 선형변환의 행렬:

$$\begin{bmatrix} f(\hat{i}) & f(\hat{j}) & f(\hat{k}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_2w_3 - v_3w_2 & v_3w_1 - v_1w_3 & v_1w_2 - v_2w_1 \end{bmatrix}$$

(b) 쌍대 벡터:

1x3 행렬 → 3D 벡터:

행 벡터를 열 벡터로:

$$\begin{aligned} p &= [f(\hat{i})] & [v_2w_3 - v_3w_2] \\ [f(\hat{j})] &= [v_3w_1 - v_1w_3] \\ [f(\hat{k})] &= [v_1w_2 - v_2w_1] \end{aligned}$$

쌍대성:

$$\begin{aligned} f([x, y, z]) &= [f(\hat{i}) \quad f(\hat{j}) \quad f(\hat{k})] [x] \\ &\quad [y] \\ &\quad [z] \\ &= p \cdot [x, y, z] \end{aligned}$$

(c) 외적 공식과의 일치:

외적 정의:

$$v \times w = [v_2w_3 - v_3w_2] \\ [v_3w_1 - v_1w_3] \\ [v_1w_2 - v_2w_1]$$

쌍대 벡터:

$$\begin{aligned} p &= [v_2w_3 - v_3w_2] \\ &\quad [v_3w_1 - v_1w_3] \\ &\quad [v_1w_2 - v_2w_1] \end{aligned}$$

완전히 일치!

$$v \times w = p \checkmark$$

증명 완료:

핵심 단계:

### 1. 선형변환 정의

$$f([x, y, z]) = \det([x \ v_1 \ w_1] \\ ([y \ v_2 \ w_2]) \\ ([z \ v_3 \ w_3]))$$

### 2. 기저벡터 적용

$$f(\hat{i}), f(\hat{j}), f(\hat{k}) \text{ 계산}$$

### 3. 변환 행렬 구성

$$[f(\hat{i}) \ f(\hat{j}) \ f(\hat{k})]$$

### 4. 쌍대 벡터 추출

$$p = [f(\hat{i}), f(\hat{j}), f(\hat{k})]^T$$

### 5. 외적과 비교

$$p = v \times w$$

결론: 외적은 ( $v, w$ 의 부피 함수)의 쌍대 벡터입니다!

## 문제 3 답안

평행육면체 부피와 외적의 관계:

등식:

$$\det([x \ v_1 \ w_1] \\ ([y \ v_2 \ w_2]) \\ ([z \ v_3 \ w_3])) = (v \times w) \cdot [x, y, z]$$

(a) 왼쪽(행렬식)의 기하학적 의미:

행렬식 = 부피:

3x3 행렬식:

$$\det([a \ b \ c] \\ ([d \ e \ f]) \\ ([g \ h \ i])) = 세 열벡터가 만드는 평행육면체의 부피$$

우리의 경우:

세 벡터:

- $[x, y, z]$
- $v = [v_1, v_2, v_3]$
- $w = [w_1, w_2, w_3]$

평행육면체:



부피:

$$V = \det([x \ v_1 \ w_1] \\ ([y \ v_2 \ w_2]) \\ ([z \ v_3 \ w_3]))$$

부호:

$\det > 0$ : 오른손 좌표계  
 $\det < 0$ : 왼손 좌표계  
 $\det = 0$ : 세 벡터가 한 평면 위

(b) 오른쪽(내적)의 기하학적 의미:

내적 복습:

$$\begin{aligned} a \cdot b &= |a| |b| \cos(\theta) \\ &= |a| \times (\text{b를 a로 투영한 길이}) \end{aligned}$$

우리의 경우:

$$(v \times w) \cdot [x, y, z]$$

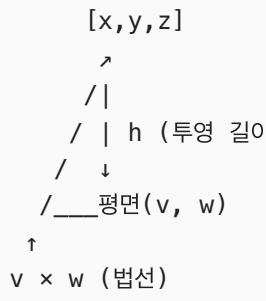
$v \times w$ :

- 방향:  $v$ 와  $w$  모두에 수직
- 크기:  $|v \times w| = v, w$ 의 평행사변형 넓이

내적 계산:

=  $|v \times w| \times [x, y, z]$  를  $(v \times w)$  방향으로 투영한 길이

시각화:



투영 길이  $h$ :

$h = [x, y, z]$ 의  $v, w$  평면으로부터의 "높이"  
 $= [x, y, z]$ 를 법선  $(v \times w)$  방향으로 투영

내적 결과:

$$(v \times w) \cdot [x, y, z] = |v \times w| \times h$$

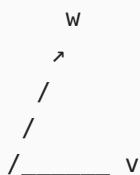
(c) 왜 둘이 같은가: "밑면  $\times$  높이"

평행육면체 부피 공식:

$$\text{부피} = \text{밑면 넓이} \times \text{높이}$$

밑면:

$v$ 와  $w$ 가 만드는 평행사변형:



밑면 넓이:

$$\text{넓이} = |v \times w|$$

이것은 외적의 정의!

높이:

$[x, y, z]$ 의 밑면( $v, w$  평면)으로부터 수직 거리:

$$\begin{array}{c} [x, y, z] \\ \nearrow \\ / | \\ / \quad h \\ / \quad \downarrow \\ / \quad \text{평면} \end{array}$$

높이 = 법선 방향 투영:

$v, w$  평면의 법선 =  $v \times w$

따라서:

$$\begin{aligned} h &= [x, y, z] \text{를 } (v \times w) \text{ 방향으로 투영} \\ &= (v \times w) \cdot [x, y, z] / |v \times w| \end{aligned}$$

단위 법선이면:

$$\hat{u} = (v \times w) / |v \times w|$$

$$h = \hat{u} \cdot [x, y, z]$$

부피 계산:

$$\begin{aligned} \text{부피} &= \text{밑면} \times \text{높이} \\ &= |v \times w| \times h \\ &= |v \times w| \times ((v \times w) \cdot [x, y, z] / |v \times w|) \\ &= (v \times w) \cdot [x, y, z] \end{aligned}$$

결론:

$$\det([x \quad v_1 \quad w_1], [y \quad v_2 \quad w_2], [z \quad v_3 \quad w_3]) = (v \times w) \cdot [x, y, z]$$

$$\text{왼쪽(부피)} = \text{오른쪽(밑면} \times \text{높이})$$

시각적 정리:

평행육면체:

- 밑면:  $v, w$ 의 평행사변형
- 높이:  $[x, y, z]$ 의 수직 거리

$$\begin{aligned} \text{부피} &= \text{밑면} \times \text{높이} \\ &= |v \times w| \times \text{투영} \end{aligned}$$

$$= (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot [x, y, z]$$

$$= \det([x \ v \ w])$$

이것이 행렬식과 외적의 깊은 연결입니다!

## 문제 4 답안

행렬식 트릭의 쌍대성 설명:

트릭:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \det([\hat{i} \quad \hat{j} \quad \hat{k}])$$

$$(\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix})$$

$$(\begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix})$$

(a) 수학적으로 이상한 이유:

정상적인 행렬식:

$$\det([a \ b \ c])$$

$$(\begin{bmatrix} d & e & f \end{bmatrix})$$

$$(\begin{bmatrix} g & h & i \end{bmatrix})$$

모든 원소 = 스칼라

우리의 "행렬식":

$$\det([\hat{i} \quad \hat{j} \quad \hat{k}])$$

$$(\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix})$$

$$(\begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix})$$

첫 행 = 벡터!

문제:

### 1. 타입 불일치

첫 행: 벡터 (3차원)  
나머지: 스칼라

### 2. 행렬식의 정의

$\det: (n \times n \text{ 스칼라 행렬}) \rightarrow \text{스칼라}$

하지만:

우리의 "행렬식": ???  $\rightarrow$  벡터

### 3. 수학적으로 정의되지 않음

벡터를 원소로 하는 행렬의 행렬식  
= 표준 정의에 없음

공식적으로:

- 이것은 행렬식이 아님
- 표기법의 남용
- 기억법 장치

하지만:

- 올바른 답을 줌
- 매우 유용함
- 쌍대성으로 정당화됨

---

(b) 쌍대 벡터를 기저벡터로 표현:

쌍대 벡터:

$$p = v \times w = [p_1, p_2, p_3]$$

기저 표현:

모든 3D 벡터는:

$$p = p_1\hat{i} + p_2\hat{j} + p_3\hat{k}$$

성분 추출:

내적 이용:

$$\begin{aligned} p_1 &= p \cdot \hat{i} \\ p_2 &= p \cdot \hat{j} \\ p_3 &= p \cdot \hat{k} \end{aligned}$$

쌍대성 이용:

$p$ 는  $f$ 의 쌍대 벡터:

$$f([x, y, z]) = p \cdot [x, y, z]$$

특별한 입력:

$$[x, y, z] = \hat{i} = [1, 0, 0]$$

$$f(\hat{i}) = p \cdot \hat{i} = p_1$$

하지만  $f$ 의 정의:

$$f(\hat{i}) = \det([1 \ v_1 \ w_1]) \\ ([0 \ v_2 \ w_2]) \\ ([0 \ v_3 \ w_3])$$

마찬가지로:

$$p_2 = f(\hat{j}) = \det([0 \ v_1 \ w_1]) \\ ([1 \ v_2 \ w_2]) \\ ([0 \ v_3 \ w_3])$$

$$p_3 = f(\hat{k}) = \det([0 \ v_1 \ w_1]) \\ ([0 \ v_2 \ w_2]) \\ ([1 \ v_3 \ w_3])$$

벡터 표현:

$$p = p_1\hat{i} + p_2\hat{j} + p_3\hat{k} \\ = f(\hat{i}) \cdot \hat{i} + f(\hat{j}) \cdot \hat{j} + f(\hat{k}) \cdot \hat{k} \\ = \det([1 \ v_1 \ w_1]) \cdot \hat{i} + \det([0 \ v_1 \ w_1]) \cdot \hat{j} + \det([0 \ v_1 \ w_1]) \cdot \hat{k} \\ ([0 \ v_2 \ w_2]) \quad ([1 \ v_2 \ w_2]) \quad ([0 \ v_2 \ w_2]) \\ ([0 \ v_3 \ w_3]) \quad ([0 \ v_3 \ w_3]) \quad ([1 \ v_3 \ w_3])$$

### (c) 행렬식 트릭과의 연결:

관찰:

위 식에서  $[1, 0, 0], [0, 1, 0], [0, 0, 1]$ 을:  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ 로 형식적으로 대체:

$$p = \det([\hat{i} \ v_1 \ w_1]) \cdot \hat{i} + \det([\hat{j} \ v_1 \ w_1]) \cdot \hat{j} + \det([\hat{k} \ v_1 \ w_1]) \cdot \hat{k} \\ ([0 \ v_2 \ w_2]) \quad ([0 \ v_2 \ w_2]) \quad ([0 \ v_2 \ w_2]) \\ ([0 \ v_3 \ w_3]) \quad ([0 \ v_3 \ w_3]) \quad ([0 \ v_3 \ w_3])$$

하지만 이것은:

$\det([\hat{i} \ \hat{j} \ \hat{k}])$ 를 첫 행으로 코팩터 전개한 것!  
( $[v_1 \ v_2 \ v_3]$ )  
( $[w_1 \ w_2 \ w_3]$ )

코팩터 전개 (첫 행):

$$\det = \hat{i} \cdot \det([v_2 \ v_3]) - \hat{j} \cdot \det([v_1 \ v_3]) + \hat{k} \cdot \det([v_1 \ v_2]) \\ ([w_2 \ w_3]) \quad ([w_1 \ w_3]) \quad ([w_1 \ w_2])$$

벡터 형태:

$$= \hat{i} \cdot (v_2 w_3 - v_3 w_2) + \hat{j} \cdot (v_3 w_1 - v_1 w_3) + \hat{k} \cdot (v_1 w_2 - v_2 w_1)$$

$$= [v_2 w_3 - v_3 w_2]$$
$$[v_3 w_1 - v_1 w_3]$$
$$[v_1 w_2 - v_2 w_1]$$

$$= v \times w$$

정확히 일치!

정당화:

1. 쌍대 벡터는:

$$p = p_1 \hat{i} + p_2 \hat{j} + p_3 \hat{k}$$

2. 성분은:

$$p_i = f(\text{기저벡터}_i)$$
$$= \det(\text{기저벡터}_i \text{를 첫 열에})$$

3. 형식적 대체:

기저벡터를  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$  기호로 대체  
→ "행렬식" 표기

4. 코팩터 전개:

형식적 행렬식을 전개  
→ 실제 쌍대 벡터

결론:

행렬식 트릭은:

1. 표기법의 남용 (공식적으로)
2. 쌍대 벡터의 기저 표현 (본질적으로)
3. 우아한 기억법 (실용적으로)

쌍대성 덕분에 작동합니다!

## 문제 5 답안

왜 외적이 3차원에만 존재하는가:

일반적 설정:

n차원 공간에서:

- $(n-1)$ 개 벡터
- $\rightarrow (n-1)$ 차원 subspace
- $\rightarrow$  부피 함수 정의

부피 함수:

$$f([x_1, \dots, x_n]) = \det([x_1 \dots x_n \ v_1 \dots v_{n-1}])$$

쌍대 벡터:

$n$ 차원 벡터

질문: 외적이 의미 있는가?

---

(a) 2D의 경우:

설정:

1개 벡터:  $v = [v_1, v_2]$   
 $\rightarrow 1D$  subspace (직선)

부피 함수:

$$f([x, y]) = \det([x \ v_1] \\ ([y \ v_2]))$$

기하학:

$[x, y]$ 와  $v$ 가 만드는 평행사변형의 넓이

선형변환:

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

쌍대 벡터:

$p \in \mathbb{R}^2$  (2차원 벡터)

계산:

$$f(\hat{i}) = \det([1 \ v_1]) = v_2 \\ ([0 \ v_2])$$

$$f(\hat{j}) = \det([0 \ v_1]) = -v_1 \\ ([1 \ v_2])$$

$$p = [v_2, -v_1]$$

관계:

$$p = v \text{를 } 90^\circ \text{ 반시계 회전한 벡터}$$

왜 "외적"이 아닌가:

입력 **vs** 출력:

입력: 1개 벡터 ( $v$ )

출력: 1개 벡터 ( $p$ )

문제:

- $v$  자체가 이미 2D 벡터
- $p$ 도 2D 벡터
- $p$ 는  $v$ 의 단순 회전
- 새로운 정보 없음!

"외적" 의미 없음:

$$v \text{ "x" } ??? = p$$

하지만  $p$ 는  $v$ 에서 직접 나옴  
두 번째 벡터 불필요

결론: 2D에는 외적 없음 (회전만 있음)

---

(b) 3D의 경우:

설정:

2개 벡터:  $v, w$   
→ 2D subspace (평면)

부피 함수:

$$\begin{aligned} f([x, y, z]) &= \det([x & v_1 & w_1]) \\ &\quad ([y & v_2 & w_2]) \\ &\quad ([z & v_3 & w_3]) \end{aligned}$$

기하학:

$[x, y, z], v, w$ 의 평행육면체 부피

선형변환:

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

쌍대 벡터:

$$p \in \mathbb{R}^3 \text{ (3차원 벡터)}$$

계산:

$$\begin{aligned} p &= [v_2 w_3 - v_3 w_2] \\ &\quad [v_3 w_1 - v_1 w_3] = v \times w \\ &\quad [v_1 w_2 - v_2 w_1] \end{aligned}$$

왜 완벽한가:

입력 **vs** 출력:

입력: 2개 벡터 ( $v, w$ )

출력: 1개 벡터 ( $p$ )

차원 일치:

2개 3D 벡터  $\rightarrow$  1개 3D 벡터

기하학적 의미:

- $v, w$ 가 평면 정의
- $p$ 는 평면에 수직
- $p$ 의 크기 = 평행사변형 넓이
- 완벽한 대응!

새로운 정보:

$p = v, w$ 에서 유일하게 결정

$p$ 는  $v, w$ 와 독립적

$p$ 는  $v, w$ 의 "직교 보완"

외적의 정의:

$$v \times w = p$$

자연스럽고 의미 있음!

결론: 3D는 외적에 완벽 ( $2 \rightarrow 1$  대응)

### (c) 4D의 경우:

설정:

3개 벡터:  $u, v, w$   
 $\rightarrow$  3D subspace

부피 함수:

$$f([x, y, z, t]) = \det([x \ u_1 \ v_1 \ w_1] \\ ([y \ u_2 \ v_2 \ w_2]) \\ ([z \ u_3 \ v_3 \ w_3]) \\ ([t \ u_4 \ v_4 \ w_4]))$$

기하학:

$[x, y, z, t], u, v, w$ 의 4D 초평행육면체 부피

선형변환:

$$f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$$

쌍대 벡터:

$$p \in \mathbb{R}^4 \text{ (4차원 벡터)}$$

왜 이상한가:

입력 vs 출력:

입력: 3개 벡터 ( $u, v, w$ )  
 출력: 1개 벡터 ( $p$ )

문제:

$3 \rightarrow 1$  대응이 부자연스러움

외적 정의?

$$u \times v \times w = p \quad ???$$

이상한 점:

1. 연산자 모호:

$$(u \times v) \times w \text{ vs } u \times (v \times w)$$

2. 입력 개수 불일치:

3D: 2개 → 1개 (이항 연산)  
4D: 3개 → 1개 (삼항 연산?)

### 3. 일반화 불가:

각 차원마다 다른 연산?

결론: 4D는 외적에 부적합 ( $3 \rightarrow 1$  대응 이상)

### (d) 일반적 조건:

외적이 존재하려면:

#### 조건 1: 차원 일치

입력:  $(n-1)$ 개 벡터  
출력: 1개 벡터  
상대 벡터:  $n$ 차원

#### 조건 2: 자연스러운 대응

$(n-1) \rightarrow 1$  대응이 의미 있어야 함

분석:

#### $n = 2$ :

$1 \rightarrow 1$  (평범, 새 정보 없음)

#### $n = 3$ :

$2 \rightarrow 1$  (완벽!)

#### $n = 4$ :

$3 \rightarrow 1$  (이상함)

#### 일반 $n > 3$ :

$(n-1) \rightarrow 1$  (점점 이상)

#### 예외: $n = 7$

놀랍게도 7차원에서도 외적 존재!

이유:

- 8원수 (octonions) 대수 구조
- 특수한 대칭성
- 매우 예외적

### Cayley 외적:

7D에서 2개 벡터 → 1개 벡터  
매우 특수한 경우

### 최종 결론:

#### 외적이 존재하는 차원:

$n = 3$ : 표준 외적 (가장 자연스러움)  
 $n = 7$ : Cayley 외적 (예외적)

### 일반적 $n$ :

외적 없음

### 이유:

$n = 3$ :  $(n-1) = 2$ , 쌍대 벡터 = 3D  
→ 2개 벡터가 1개 벡터로 완벽 대응

$n \neq 3$ : 대응이 부자연스러움

### 3차원의 특별함: 차원의 우연한 일치로 외적이 자연스럽게 정의됩니다!

```
Dataview (inline field '[x, y, z], v, w로 만든 평행육면체의 부피'): Error:  
-- PARSING FAILED -----
```

```
> 1 | [x, y, z], v, w로 만든 평행육면체의 부피  
| ^
```

Expected one of the following:

```
'(', '*' or '/' or '%', '+' or '-', '.', '>=' or '<=' or '!=' or '=' or  
'>' or '<', '[', 'and' or 'or', EOF
```

```
Dataview (inline field '1·det([v2 w2]) - 0 + 0  
([v3 w3])
```

```
= v2w3 - v3w2'): Error:  
-- PARSING FAILED -----
```

```

> 1 | 1·det([v2 w2]) - 0 + 0
| ^
2 |      ([v3 w3])
3 |

```

Expected one of the following:

'(', '\*' or '/' or '%', '+' or '-', '.', '>=' or '<=' or '!=' or '=' or '>' or '<', '[', 'and' or 'or', EOF

Dataview (inline field '|v × w| × [x, y, z]를 (v × w) 방향으로 투영'): Error:  
-- PARSING FAILED -----

```

> 1 | |v × w| × [x, y, z]를 (v × w) 방향으로 투영
| ^

```

Expected one of the following:

'(', 'null', boolean, date, duration, file link, list ('[1, 2, 3]'), negated field, number, object ('{ a: 1, b: 2 }'), string, variable

Dataview (inline field '1·M<sub>11</sub> - 0·M<sub>21</sub> + 0·M<sub>31</sub>

```

M11 = det([v2 w2])
      ([v3 w3])

```

= v<sub>2</sub>w<sub>3</sub> - v<sub>3</sub>w<sub>2</sub>

따라서:

f(î) = v<sub>2</sub>w<sub>3</sub> - v<sub>3</sub>w<sub>2</sub>): Error:  
-- PARSING FAILED -----

```

> 1 | 1·M11 - 0·M21 + 0·M31
| ^
2 |
3 | M11 = det([v2 w2])

```

Expected one of the following:

'(', '\*' or '/' or '%', '+' or '-', '.', '>=' or '<=' or '!=' or '=' or '>' or '<', '[', 'and' or 'or', EOF

Dataview (inline field '0·M<sub>11</sub> - 1·M<sub>21</sub> + 0·M<sub>31</sub>

```

M21 = det([v1 w1])
      ([v3 w3])

```

```
= v1w3 - v3w1
```

따라서:

```
f(j) = -(v1w3 - v3w1) = v3w1 - v1w3': Error:  
-- PARSING FAILED -----
```

```
> 1 | 0·M11 - 1·M21 + 0·M31  
| ^  
2 |  
3 | M21 = det([v1 w1])
```

Expected one of the following:

```
'(', '*' or '/' or '%', '+' or '-', '.', '>=' or '<=' or '!='
'=' or '>' or '<', '[', 'and' or 'or', EOF
```

```
Dataview (inline field '0·M11 - 0·M21 + 1·M31
```

```
M31 = det([v1 w1])  
([v2 w2])
```

```
= v1w2 - v2w1
```

따라서:

```
f(k) = v1w2 - v2w1': Error:  
-- PARSING FAILED -----
```

```
> 1 | 0·M11 - 0·M21 + 1·M31  
| ^  
2 |  
3 | M31 = det([v1 w1])
```

Expected one of the following:

```
'(', '*' or '/' or '%', '+' or '-', '.', '>=' or '<=' or '!='
'=' or '>' or '<', '[', 'and' or 'or', EOF
```

```
Dataview (inline field '|v × w| × [x, y, z]를 (v × w) 방향으로 투영한 길이'): Error:
```

```
-- PARSING FAILED -----
```

```
> 1 | |v × w| × [x, y, z]를 (v × w) 방향으로 투영한 길이|  
| ^
```

Expected one of the following:

```
'( ', 'null', boolean, date, duration, file link, list ('[1, 2, 3]'),  
negated field, number, object ('{ a: 1, b: 2 }'), string, variable
```

```
Dataview (inline field ' $\hat{i} \cdot (v_2 w_3 - v_3 w_2) + \hat{j} \cdot (v_3 w_1 - v_1 w_3) + \hat{k} \cdot (v_1 w_2 - v_2 w_1)$ )
```

```
= [v_2 w_3 - v_3 w_2]  
[v_3 w_1 - v_1 w_3]  
[v_1 w_2 - v_2 w_1]
```

```
= v × w'): Error:
```

```
-- PARSING FAILED -----
```

```
> 1 |  $\hat{i} \cdot (v_2 w_3 - v_3 w_2) + \hat{j} \cdot (v_3 w_1 - v_1 w_3) + \hat{k} \cdot (v_1 w_2 - v_2 w_1)$   
| ^  
2 |  
3 | = [v_2 w_3 - v_3 w_2]
```

Expected one of the following:

```
'( ', '*' or '/' or '%', '+' or '-', '.', '>=' or '<=' or '!='
or '=' or '>' or '<', '[', 'and' or 'or', /[0-9\p{Letter}_-]/u, EOF, text
```