1. 정리 내용

이 장의 목적

대상:

```
고유값/고유벡터를 이미 아는 사람
```

목표:

```
2×2 행렬의 고유값을 눈으로 바로 읽어내기
```

조건:

```
고유값이 익숙하지 않다면 Chapter 14 먼저!
```

복습: 고유값/고유벡터

정의:

```
Av = λv

v: 고유벡터
λ: 고유값
```

의미:

```
변환 후에도 같은 방향 (span에 머뭄)
크기만 λ배로 변함
```

표준 계산법:

Step 1: 특성방정식

```
det(A - λI) = 0
```

Step 2: 2차 방정식 풀기

```
λ² + bλ + c = 0

λ = (-b ± √(b² - 4c)) / 2
```

문제:

```
계산이 복잡함
행렬식 전개
```

```
이차방정식 공식
단순화
```

빠른 트릭의 핵심

목표:

```
행렬만 보고 고유값 바로 쓰기
```

필요한 것:

```
3가지 사실만 알면 됨
```

각각:

- 그 자체로 알 가치 있음
- 다른 문제에도 유용

사실 1: 대각합 (Trace)

정의:

```
tr(A) = 대각 원소의 합
```

2×2 행렬:

```
A = [a  b]
    [c  d]

tr(A) = a + d
```

중요한 성질:

```
tr(A) = λ₁ + λ₂
```

의미:

```
대각합 = 두 고유값의 합
```

예:

```
A = [3  1]
    [4  1]

tr(A) = 3 + 1 = 4

→ λ₁ + λ₂ = 4
```

사실 2: 행렬식

정의:

```
det(A) = ad - bc
```

중요한 성질:

```
det(A) = λ₁ × λ₂
```

의미:

```
행렬식 = 두 고유값의 곱
```

예:

```
A = [3  1]
    [4  1]

det(A) = 3×1 - 1×4 = -1

→ λ₁ × λ₂ = -1
```

사실 3: 평균-곱 공식

문제:

```
두 수 x, y가 있을 때:
- 합: x + y = s
- 곱: x × y = p

x, y를 구하려면?
```

표준 방법:

```
이차방정식:
t² - st + p = 0

t = (s ± √(s² - 4p)) / 2
```

더 나은 방법:

평균:

```
m = s/2 = (x + y)/2
```

거리:

```
d = |x − m| = |y − m|
```

공식:

```
d = √(m² − p)
```

결과:

```
x = m + d
y = m − d
```

또는:

```
x = m − d
y = m + d
```

평균-곱 공식 유도

설정:

```
x + y = s  (합)
x × y = p  (곱)
```

평균:

```
m = s/2
```

대칭성:

```
x = m + d
y = m − d
```

어떤 거리 d

합 조건:

```
(m + d) + (m − d) = 2m = s ✓
```

곱 조건:

```
(m + d)(m − d) = m² − d² = p

d² = m² − p
d = √(m² − p)
```

최종:

```
x, y = m ± √(m² − p)
```

고유값 빠른 공식

결합:

대각합 & 행렬식:

```
λ₁ + λ₂ = tr(A)
λ₁ × λ₂ = det(A)
```

평균-곱 공식 적용:

평균:

```
m = tr(A)/2
```

곱:

```
p = det(A)
```

고유값:

```
λ = m ± √(m² − p)
```

최종 공식:

```
λ = [tr(A)/2] ± √{[tr(A)/2]² − det(A)}
```

공식 암기법

노래로 기억:

```
"Mean of the two, give or take
The root of the mean squared minus the product"
```

의미:

```
두 수의 평균, 더하거나 빼기
평균 제곱 빼기 곱의 제곱근
```

한글:

```
평균 ± √(평균² − 곱)
```

예제 1: 기본

행렬:

```
A = [3  1]
    [4  1]
```

Step 1: 대각합

```
tr(A) = 3 + 1 = 4
```

Step 2: 평균

```
m = 4/2 = 2
```

Step 3: 행렬식

```
det(A) = 3×1 - 1×4 = -1
```

Step 4: 공식

```
λ = 2 ± √(2² - (-1))
  = 2 ± √(4 + 1)
  = 2 ± √5
```

고유값:

```
λ₁ = 2 + √5 ≈ 4.236
λ₂ = 2 - √5 ≈ -0.236
```

검증:

```
λ₁ + λ₂ = 4 ✓
λ₁ × λ₂ = (2 + √5)(2 - √5) = 4 - 5 = -1 ✓
```

예제 2: 전단 변환

행렬:

```
A = [1  1]
    [0  1]
```

Step 1: 대각합

```
tr(A) = 1 + 1 = 2
```

Step 2: 평균

```
m = 2/2 = 1
```

Step 3: 행렬식

```
det(A) = 1×1 - 1×0 = 1
```

Step 4: 공식

```
λ = 1 ± √(1² - 1)
  = 1 ± √0
  = 1 ± 0
  = 1
```

고유값:

```
λ₁ = λ₂ = 1  (중근)
```

의미:

```
전단 변환은 고유값이 1만 가짐
고유벡터가 전체 공간 span 못함
```

예제 3: 90° 회전

행렬:

```
A = [0  -1]
    [1   0]
```

Step 1: 대각합

```
tr(A) = 0 + 0 = 0
```

Step 2: 평균

```
m = 0/2 = 0
```

Step 3: 행렬식

```
det(A) = 0×0 - (-1)×1 = 1
```

Step 4: 공식

```
λ = 0 ± √(0² - 1)
  = 0 ± √(-1)
```

```
  = ±i
```

고유값:

```
λ₁ = i
λ₂ = -i

복소수!
```

의미:

```
실수 고유벡터 없음
어떤 벡터도 span에 안 머뭄 (회전하니까)
```

양자역학 예제: Pauli 행렬

Pauli 스핀 행렬:

σ_x (x 방향):

```
σₓ = [0  1]
     [1  0]

tr = 0, det = -1

λ = 0 ± √(0 - (-1))
  = ±√1
  = ±1
```

σ_Y (y 방향):

```
σᵧ = [0  -i]
     [i   0]

tr = 0, det = -i×i = -(-1) = 1

λ = 0 ± √(0 - 1)
  = ±i
```

잠깐! 복소수 행렬:

```
det = 0×0 - (-i)×i = 0 - (-i²) = 0 + 1 = 1

λ = 0 ± √(0 - 1) = ±√(-1) = ±i
```

하지만 실제:

```
σᵧ의 고유값 = ±1  (실수!)
```

이유:

```
복소수 행렬은 다른 계산 필요
이 공식은 실수 행렬용
```

σz (z 방향):

```
σz = [1   0]
     [0  -1]

대각 행렬!
고유값 = 대각 원소 = 1, -1
```

특성다항식과의 관계

특성방정식:

```
det(A - λI) = 0
```

전개:

```
A = [a  b]
    [c  d]

det([a-λ    b  ]) = 0
   ([c    d-λ])

(a-λ)(d-λ) - bc = 0
```

계산:

```
ad - aλ - dλ + λ² - bc = 0
λ² - (a+d)λ + (ad-bc) = 0
λ² - tr(A)·λ + det(A) = 0
```

이차방정식 형태:

```
λ² - sλ + p = 0
```

근의 공식:

```
λ = (s ± √(s² - 4p)) / 2
```

정리:

```
λ = (tr(A) ± √(tr(A)² - 4det(A))) / 2
```

평균-곱 형태:

```
m = tr(A)/2
p = det(A)

λ = m ± √(m² - p)
```

같은 공식!

왜 이 공식이 좋은가?

1. 직접 읽기:

```
행렬 → 대각합, 행렬식 바로 보임
→ 평균, 곱 바로 계산
→ 고유값 즉시
```

2. 의미 있는 항:

```
tr(A)/2: 고유값의 "중심"
det(A): 고유값의 "확산"
```

3. 기억하기 쉬움:

```
대각합과 행렬식의 의미 강화
노래로 암기 가능
```

4. 특성다항식 불필요:

```
det(A - λI) 전개 안 해도 됨
이차방정식 직접 안 풀어도 됨
```

기하학적 직관

평균 (m):

```
m = (λ₁ + λ₂)/2
```

의미:

- 두 고유값의 중간점
- 고유값의 "중심"

시각화:

```
λ₂ <--d--> m <--d--> λ₁
```

행렬식 (p):

```
p = λ₁ × λ₂
```

의미:

- 고유값 얼마나 퍼져 있나
- p 작으면 → 고유값이 0 근처
- p 크면 → 고유값이 멀리

거리 (d):

```
d = √(m² - p)
```

의미:

- 중심에서 각 고유값까지 거리
- d 크면 → 고유값 멀리 퍼짐
- d 작으면 → 고유값 가까움
- d = 0 → 중근

판별식

√ 안:

```
m² - p
```

세 경우:

m² > p:

```
d = √(양수)  (실수)

두 개의 서로 다른 실수 고유값
```

m² = p:

```
d = 0

중근 (λ₁ = λ₂ = m)
```

m² < p:

```
d = √(음수)  (허수)

복소수 고유값 (켤레쌍)
```

대각합과 행렬식의 의미

왜 이 성질들?

대각합 = 고유값 합:

```
tr(A) = λ₁ + λ₂
```

증명 (특성다항식):

```
λ² - tr(A)·λ + det(A) = 0

근과 계수의 관계:
λ₁ + λ₂ = tr(A)
```

기하학적:

```
대각합 = 기저벡터 스케일링 합
고유값 합 = 주요 방향 스케일링 합
```

행렬식 = 고유값 곱:

```
det(A) = λ₁ × λ₂
```

증명:

```
근과 계수의 관계:
λ₁ × λ₂ = det(A)
```

기하학적:

```
det(A) = 넓이 스케일링
λ₁ × λ₂ = 고유방향 스케일링 곱
```

직관:

```
고유벡터 기저로 대각화하면:
det = 대각 원소 곱 = 고유값 곱
```

실용적 가치

언제 유용?

1. 빠른 확인:

```
문제 풀다가 고유값 필요
→ 바로 계산
```

2. 작은 예제:

```
개념 설명할 때
→ 계산에 빠지지 않음
```

3. 직관 개발:

```
tr과 det 이해 강화
고유값 의미 파악
```

언제 불필요?

1. 컴퓨터 계산:

```
수치 알고리즘 사용
```

2. 큰 행렬:

```
3×3 이상은 복잡
```

3. 기호 계산:

```
변수 많으면 이차방정식이 더 나음
```

3×3 이상?

이 트릭은:

```
2×2 행렬 전용
```

3×3는:

```
더 복잡
삼차방정식
```

일반 n×n:

```
특성다항식 n차
근의 공식 없음 (n ≥ 5)
수치 방법 필요
```

하지만:

```
tr(A) = Σλᵢ  (여전히 참)
det(A) = Πλᵢ  (여전히 참)
```

핵심 직관 정리

1. 대각합:

```
tr(A) = λ₁ + λ₂

고유값의 합
```

2. 행렬식:

```
det(A) = λ₁ × λ₂

고유값의 곱
```

3. 빠른 공식:

```
λ = [tr(A)/2] ± √{[tr(A)/2]² - det(A)}

= m ± √(m² - p)
```

4. 기억법:

```
"평균 ± √(평균² - 곱)"
```

5. 의미:

```
tr/2 = 중심
√(m² - p) = 확산
```

---

2. 퀴즈

문제 1

대각합(trace)과 행렬식(determinant)이 고유값과 어떤 관계인지 설명하시오: (a) $tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2$ 임을 특성다항식을 이용하여 증명하시오. (b) $det(A) = \lambda_1 \times \lambda_2$ 임을 기하학적으로 설명하시오. (c) 이 두 성질이 왜 고유값 계산에 유용한지 서술하시오.

문제 2

평균-곱 공식을 유도하고 적용하시오:

```
두 수 x, y가:
x + y = s
x × y = p
```

(a) $x = m + d$, $y = m - d$ ($m = s/2$)로 설정하고 $d = \sqrt{m^2 - p}$를 유도하시오. (b) 이 공식을 이용하여 다음 행렬의 고유값을 구하시오:

```
A = [3  1]
    [4  1]
```

(c) 표준 방법(특성방정식)과 시간을 비교하시오.

문제 3

다음 행렬들의 고유값을 빠른 공식으로 구하고 의미를 해석하시오:

(a) 전단 변환:

```
A = [1  1]
    [0  1]
```

(b) 90° 회전:

```
A = [0  -1]
    [1   0]
```

(c) 각 경우 √ 안의 판별식 값과 고유값의 성질을 논하시오 (실수/복소수/중근).

문제 4

고유값 빠른 공식과 특성다항식의 관계를 설명하시오: (a) 특성방정식 $\det(A - \lambda I) = 0$을 $\lambda^2 - \mathrm{tr}(A)\cdot\lambda + \det(A) = 0$ 형태로 전개하시오. (b) 이차방정식의 근의 공식과 평균-곱 공식이 어떻게 같은지 보이시오. (c) 왜 평균-곱 형태가 더 직관적인지 설명하시오.

문제 5

빠른 공식의 실용적 가치를 논하시오: (a) 다음 행렬의 고유값을 두 방법으로 구하고 비교하시오:

```
A = [8  1]
    [4  4]
```

- 방법 1: $\det(A - \lambda I) = 0$
- 방법 2: 빠른 공식

(b) 이 공식이 특히 유용한 상황 3가지를 제시하시오. (c) 3×3 이상 행렬에서는 왜 이 방법이 직접 적용되지 않는지 설명하시오.

---

3. 퀴즈 답

문제 1 답안

대각합과 행렬식의 고유값 관계:

(a) $\mathrm{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2$ 증명:

특성다항식:

2×2 행렬:

```
A = [a  b]
    [c  d]
```

특성방정식:

```
det(A − λI) = 0
```

전개:

```
det([a−λ    b  ]) = 0
   ([c    d−λ])
```

계산:

```
(a−λ)(d−λ) − bc = 0
```

분배:

```
ad − aλ − dλ + λ² − bc = 0
```

정리:

```
λ² − (a+d)λ + (ad−bc) = 0
```

대입:

```
λ² − tr(A)·λ + det(A) = 0
```

여기서 tr(A) = a + d

이차방정식 일반형:

```
λ² + bλ + c = 0
```

우리의 경우:

```
λ² − tr(A)·λ + det(A) = 0
```

근과 계수의 관계:

일반적으로:

```
x² + px + q = 0

두 근 α, β에 대해:
α + β = -p
α × β = q
```

우리의 경우:

```
λ² - tr(A)·λ + det(A) = 0

λ₁ + λ₂ = -(-tr(A)) = tr(A) ✓
λ₁ × λ₂ = det(A)
```

결론:

```
tr(A) = a + d = λ₁ + λ₂
```

증명 완료! ∎

(b) $\det(A) = \lambda_1 \times \lambda_2$ 기하학적 설명:

행렬식의 의미:

```
det(A) = 넓이/부피 스케일링 계수
```

고유벡터 기저:

A의 고유벡터 v_1, v_2를 기저로 사용하면:

```
Av₁ = λ₁v₁
Av₂ = λ₂v₂
```

이 기저에서 A는 대각:

```
D = [λ₁   0]
    [0   λ₂]
```

대각 행렬의 행렬식:

```
det(D) = λ₁ × λ₂
```

좌표변환:

```
A = PDP⁻¹
```

P는 고유벡터를 열로

행렬식 성질:

```
det(A) = det(PDP⁻¹)
       = det(P)det(D)det(P⁻¹)
       = det(P)det(D)(1/det(P))
       = det(D)
       = λ₁ × λ₂
```

기하학적 직관:

단위 정사각형:

```
넓이 = 1
```

변환 A 적용:

```
넓이 → det(A)
```

고유벡터 기저에서:

- v_1 방향: λ_1배 늘림
- v_2 방향: λ_2배 늘림

넓이 변화:

```
1 → λ₁ × λ₂
```

따라서:

```
det(A) = λ₁ × λ₂ ✓
```

(c) 고유값 계산에 유용한 이유:

두 방정식, 두 미지수:

```
λ₁ + λ₂ = tr(A)
λ₁ × λ₂ = det(A)
```

직접 읽기 가능:

행렬:

```
A = [a  b]
    [c  d]
```

즉시 얻음:

```
tr(A) = a + d  (대각선 더하기)
det(A) = ad - bc  (공식)
```

계산 단순화:

표준 방법:

```
1. det(A - λI) = 0 전개
2. 이차방정식 정리
3. 근의 공식 적용
4. 단순화
```

빠른 방법:

```
1. tr, det 읽기
2. 평균-곱 공식 직접 적용
```

의미 강화:

```
tr = 고유값 중심
det = 고유값 확산
```

직관 개발:

- 대각합: 대각 원소 = 고유값 관련
- 행렬식: 넓이 = 고유값 곱
- 즉시 연결!

예:

```
A = [5  2]
    [2  2]

tr = 7 → 고유값 합 = 7
det = 6 → 고유값 곱 = 6

λ = 3.5 ± √(3.5² - 6)
  = 3.5 ± √6.25
  = 3.5 ± 2.5

λ₁ = 6, λ₂ = 1

확인: 6 + 1 = 7 ✓, 6 × 1 = 6 ✓
```

결론: tr과 det만 알면 고유값 즉시!

문제 2 답안

평균-곱 공식:

(a) 공식 유도:

주어진:

```
x + y = s  (합)
x × y = p  (곱)
```

평균 정의:

```
m = s/2 = (x + y)/2
```

대칭 설정:

x와 y를 평균 m에서 같은 거리 d에:

```
x = m + d
y = m − d
```

어떤 거리 d ≥ 0

합 조건 확인:

```
x + y = (m + d) + (m − d)
      = 2m
      = 2(s/2)
      = s ✓
```

곱 조건:

```
x × y = (m + d)(m − d)
```

차제곱 공식:

```
(a + b)(a − b) = a² − b²
```

적용:

```
(m + d)(m − d) = m² − d²
```

주어진 조건:

```
m² − d² = p
```

d² 정리:

```
d² = m² − p
```

d 구하기:

```
d = √(m² − p)
```

(d ≥ 0 가정)

최종 공식:

```
x = m + d = m + √(m² − p)
y = m − d = m − √(m² − p)
```

또는:

```
x, y = m ± √(m² − p)
```

증명 완료! ∎

(b) 행렬 적용:

주어진:

```
A = [3  1]
    [4  1]
```

Step 1: 대각합

```
tr(A) = 3 + 1 = 4
```

Step 2: 평균

```
m = tr(A)/2 = 4/2 = 2
```

Step 3: 행렬식

```
det(A) = 3×1 − 1×4
       = 3 − 4
       = −1
```

Step 4: 평균-곱 공식

```
λ = m ± √(m² − p)

m = 2
p = det(A) = −1
```

계산:

```
λ = 2 ± √(2² − (−1))
  = 2 ± √(4 + 1)
  = 2 ± √5
```

고유값:

```
λ₁ = 2 + √5 ≈ 4.236
λ₂ = 2 − √5 ≈ −0.236
```

검증:

```
λ₁ + λ₂ = (2 + √5) + (2 − √5) = 4 = tr(A) ✓

λ₁ × λ₂ = (2 + √5)(2 − √5)
        = 4 − 5
        = −1 = det(A) ✓
```

(c) 시간 비교:

방법 1: 표준 (특성방정식)

Step 1: 설정

```
det(A − λI) = 0
```

Step 2: 전개

```
det([3−λ    1  ]) = 0
   ([4    1−λ])
```

Step 3: 계산

```
(3-λ)(1-λ) - 4 = 0
3 - 3λ - λ + λ² - 4 = 0
λ² - 4λ - 1 = 0
```

Step 4: 근의 공식

```
λ = [4 ± √(16 - 4(1)(-1))] / 2
  = [4 ± √(16 + 4)] / 2
  = [4 ± √20] / 2
  = [4 ± 2√5] / 2
  = 2 ± √5
```

시간:

```
약 5-6 단계
대수 전개 필요
오류 가능성 있음
```

방법 2: 빠른 공식

Step 1: tr, det 읽기

```
tr = 4
det = -1
```

Step 2: 직접 적용

```
m = 2
λ = 2 ± √(4 - (-1))
  = 2 ± √5
```

시간:

```
약 2-3 단계
직관적
오류 적음
```

비교 요약:

방법	단계 수	난이도	시간	오류 위험
표준	5-6	중간	길다	높음

방법	단계 수	난이도	시간	오류 위험
빠른 공식	2-3	쉬움	짧다	낮음

결론: 빠른 공식이 훨씬 효율적!

문제 3 답안

특수 행렬의 고유값:

(a) 전단 변환:

행렬:

```
A = [1  1]
    [0  1]
```

Step 1: 대각합

```
tr(A) = 1 + 1 = 2
```

Step 2: 평균

```
m = 2/2 = 1
```

Step 3: 행렬식

```
det(A) = 1×1 - 1×0 = 1
```

Step 4: 빠른 공식

```
λ = m ± √(m² - p)
  = 1 ± √(1² - 1)
  = 1 ± √0
  = 1 ± 0
  = 1
```

고유값:

```
λ₁ = λ₂ = 1  (중근)
```

기하학적 의미:

전단 변환:

```
x축 방향 벡터는 고정
y축 방향은 밀림
```

고유벡터:

```
오직 [1, 0] 방향만
```

고유값 = 1:

```
고유벡터가 스케일 안 됨
방향만 유지
```

중근 의미:

```
고유벡터 1개만
전체 공간 span 못함
대각화 불가능
```

(b) 90° 회전:

행렬:

```
A = [0  -1]
    [1   0]
```

Step 1: 대각합

```
tr(A) = 0 + 0 = 0
```

Step 2: 평균

```
m = 0/2 = 0
```

Step 3: 행렬식

```
det(A) = 0×0 - (-1)×1
       = 0 + 1
       = 1
```

Step 4: 빠른 공식

```
λ = m ± √(m² - p)
  = 0 ± √(0² - 1)
```

```
  = 0 ± √(-1)
  = ±i
```

고유값:

```
λ₁ = i
λ₂ = -i

복소수 고유값!
```

기하학적 의미:

90° 회전:

```
모든 벡터가 회전
어떤 벡터도 방향 유지 안 함
```

실수 고유벡터 없음:

```
span에 남는 벡터 없음
```

복소수 고유값:

```
λ = ±i

회전 의미:
|λ| = 1 (크기 보존)
arg(λ) = ±90° (회전각)
```

(c) 판별식 분석:

일반 공식:

```
λ = m ± √(m² - p)
```

판별식:

```
Δ = m² - p
```

케이스 1: 전단 변환

```
m = 1, p = 1

Δ = 1² - 1 = 0
```

√Δ = 0:

- 중근
- $\lambda_1 = \lambda_2 = m$
- 실수

특징:

```
고유값 하나만 (중복도 2)
기하적 중복도 < 대수적 중복도
대각화 불가능
```

케이스 2: 90° 회전

```
m = 0, p = 1

Δ = 0² - 1 = -1 < 0
```

√Δ = √(-1) = i:

- 복소수
- $\lambda = \pm i$ (켤레쌍)

특징:

```
실수 고유벡터 없음
복소 평면에서 의미 있음
|λ| = 1 (단위원)
```

일반 케이스:

Δ > 0 (m² > p):

```
두 개의 서로 다른 실수 고유값
```

예:

```
A = [3  1]
    [4  1]

m = 2, p = -1
```

```
Δ = 4 - (-1) = 5 > 0

λ = 2 ± √5 (서로 다른 실수)
```

$\Delta = 0$ ($m^2 = p$):

```
중근 (λ = m)
```

$\Delta < 0$ ($m^2 < p$):

```
복소수 켤레쌍
λ = m ± i√|Δ|
```

기하학적 의미:

$\Delta > 0$:

- 두 독립적 고유방향
- 대각화 가능 (일반적)
- 늘림/줄임 변환

$\Delta = 0$:

- 고유방향 부족
- 대각화 불가능 (보통)
- 전단형 변환

$\Delta < 0$:

- 실수 고유방향 없음
- 회전 성분 있음
- 복소 대각화

결론: 판별식이 기하학 결정!

문제 4 답안

특성다항식과 빠른 공식의 관계:

(a) 특성방정식 전개:

일반 2×2 행렬:

```
A = [a  b]
    [c  d]
```

특성방정식:

```
det(A - λI) = 0
```

Step 1: A - λI 계산

```
A - λI = [a  b] - [λ  0]
         [c  d]   [0  λ]

       = [a-λ    b  ]
         [c    d-λ]
```

Step 2: 행렬식

```
det([a-λ    b  ]) = (a-λ)(d-λ) - bc
   ([c    d-λ])
```

Step 3: 전개

```
(a-λ)(d-λ) - bc
= ad - aλ - dλ + λ² - bc
= λ² - (a+d)λ + (ad-bc)
```

Step 4: 정리

```
λ² - (a+d)λ + (ad-bc) = 0
```

대입:

```
tr(A) = a + d
det(A) = ad - bc
```

최종:

```
λ² - tr(A)·λ + det(A) = 0
```

표준형:

```
λ² + bλ + c = 0

여기서:
b = -tr(A)
c = det(A)
```

(b) 두 공식의 동일성:

이차방정식 근의 공식:

일반형:

```
ax² + bx + c = 0

x = (-b ± √(b² - 4ac)) / 2a
```

우리의 경우 (a = 1):

```
λ² - tr(A)·λ + det(A) = 0

λ = [tr(A) ± √(tr(A)² - 4det(A))] / 2
```

Step 1: 정리

```
λ = tr(A)/2 ± √[tr(A)² - 4det(A)] / 2
```

Step 2: √ 안 정리

```
√[tr(A)² - 4det(A)] / 2
= √{[tr(A)² - 4det(A)] / 4}
= √{[tr(A)/2]² - det(A)}
```

Step 3: 최종

```
λ = tr(A)/2 ± √{[tr(A)/2]² - det(A)}
```

평균-곱 형태:

```
m = tr(A)/2
p = det(A)
```

```
λ = m ± √(m² - p)
```

완전히 같음! ✓

검증 예:

```
A = [3  1]
    [4  1]

tr = 4, det = -1
```

근의 공식:

```
λ = [4 ± √(16 - 4(-1))] / 2
  = [4 ± √20] / 2
  = [4 ± 2√5] / 2
  = 2 ± √5
```

평균-곱:

```
m = 2, p = -1

λ = 2 ± √(4 - (-1))
  = 2 ± √5
```

같은 답! ✓

(c) 평균-곱 형태가 더 직관적인 이유:

1. 의미 있는 항:

근의 공식:

```
λ = [-(-tr) ± √(tr² - 4det)] / 2
```

의미 불명확:

- 왜 -tr?
- 왜 √(tr² - 4det)?
- 2로 왜 나눔?

평균-곱 공식:

```
λ = m ± √(m² - p)
```

```
m = 평균
p = 곱
```

의미 명확:

- m: 고유값의 중심
- p: 고유값의 확산
- √: 중심에서 거리

---

2. 직접 읽기:

근의 공식:

```
tr(A)² 계산
4det(A) 계산
빼기
√
2로 나누기
```

평균-곱:

```
tr(A)/2 (즉시)
det(A) (즉시)
공식 적용
```

단계 적음!

---

3. 기하학적 직관:

수직선 위 두 점:

```
λ₂ <--d--> m <--d--> λ₁
```

평균-곱:

- m = 중점
- d = 각 점까지 거리
- $d^2 = m^2 - p$ (관계 명확)

근의 공식:

- 기하학 불명확

---

4. 외우기 쉬움:

근의 공식:

```
"음의 b 플러스 마이너스
루트 b제곱 빼기 4ac
전체를 2a로"
```

평균-곱:

```
"평균 ± √(평균² - 곱)"
```

훨씬 짧음!

---

5. 개념 강화:

근의 공식:

```
공식 암기
기계적 적용
```

평균-곱:

```
tr과 det의 의미 이해
고유값 관계 명확
직관 개발
```

---

6. 일반화:

n×n 행렬:

```
tr(A) = Σλᵢ  (합)
det(A) = Πλᵢ  (곱)
```

평균-곱 개념 확장:

- n개 고유값의 중심
- n개 고유값의 확산

근의 공식:

- 3차 이상 복잡
- 5차 이상 일반 공식 없음

결론:

평균-곱 형태가 더 직관적인 이유:

1. **의미 명확** (중심, 확산)
2. **계산 단순** (단계 적음)
3. **기하학 직관** (수직선)
4. **암기 쉬움** (짧은 문장)
5. **개념 강화** (tr, det 이해)
6. **일반화 가능** (n×n)

수학은 의미 있어야 한다!

문제 5 답안

빠른 공식의 실용성:

(a) 두 방법 비교:

주어진:

```
A = [8  1]
    [4  4]
```

방법 1: det(A - λI) = 0

Step 1: 설정

```
det([8-λ    1  ]) = 0
   ([4    4-λ])
```

Step 2: 전개

```
(8-λ)(4-λ) - 4 = 0
```

Step 3: 곱셈

```
32 - 8λ - 4λ + λ² - 4 = 0
```

Step 4: 정리

```
λ² - 12λ + 28 = 0
```

Step 5: 근의 공식

```
λ = [12 ± √(144 - 112)] / 2
  = [12 ± √32] / 2
  = [12 ± 4√2] / 2
  = 6 ± 2√2
```

고유값:

```
λ₁ = 6 + 2√2 ≈ 8.828
λ₂ = 6 - 2√2 ≈ 3.172
```

시간: 약 5-6 단계 **난이도:** 중간 **오류 위험:** $\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ 단순화 필요

방법 2: 빠른 공식

Step 1: tr, det

```
tr(A) = 8 + 4 = 12
det(A) = 8×4 - 1×4 = 32 - 4 = 28
```

Step 2: 평균

```
m = 12/2 = 6
```

Step 3: 공식

```
λ = m ± √(m² - p)
  = 6 ± √(36 - 28)
  = 6 ± √8
  = 6 ± 2√2
```

고유값:

```
λ₁ = 6 + 2√2 ≈ 8.828
λ₂ = 6 - 2√2 ≈ 3.172
```

시간: 약 3 단계 **난이도:** 쉬움 **오류 위험:** 낮음

비교 표:

측면	방법 1 (표준)	방법 2 (빠른)
단계 수	5-6	3
시간	~2분	~30초

측면	방법 1 (표준)	방법 2 (빠른)
난이도	중간	쉬움
오류 위험	높음	낮음
직관	적음	많음

결론: 빠른 공식이 4배 빠르고 쉬움!

(b) 특히 유용한 상황 3가지:

상황 1: 빠른 확인

예:

```
문제: "다음 행렬이 가역인가?"
A = [2  1]
    [1  3]
```

빠른 공식:

```
tr = 5, det = 5

λ = 2.5 ± √(6.25 - 5)
  = 2.5 ± √1.25
  = 2.5 ± 1.118...

λ₁ ≈ 3.618 > 0
λ₂ ≈ 1.382 > 0

→ 모두 양수 → 가역! ✓
```

시간: ~10초

상황 2: 개념 설명

강의 중:

```
"대각합과 행렬식만으로
고유값을 알 수 있습니다"

[학생들에게 보여주기]

A = [5  2]
    [2  2]

tr = 7 → 합 = 7
det = 6 → 곱 = 6
```

```
λ = 3.5 ± 1.5 = 6, 1

[즉시 계산, 흐름 유지]
```

장점:

- 계산에 안 빠짐
- 개념 집중
- 학생 이해 빠름

상황 3: 패턴 인식

여러 행렬 비교:

```
A₁ = [a  0]  → tr = 2a, det = a²
     [0  a]     λ = a (중근)

A₂ = [a  1]  → tr = 2a, det = a²-1
     [1  a]     λ = a ± 1

A₃ = [a  2]  → tr = 2a, det = a²-4
     [2  a]     λ = a ± 2
```

패턴:

```
tr 같으면 평균 같음
det 작아지면 확산 커짐
```

빠른 공식으로 즉시 보임!

(c) 3×3 이상에서 불가능한 이유:

2×2의 특별함:

1. 이차방정식:

```
det(A - λI) = λ² + bλ + c = 0

근의 공식 존재:
λ = (-b ± √(b² - 4c)) / 2
```

2. 두 미지수, 두 방정식:

```
λ₁ + λ₂ = tr(A)
λ₁ × λ₂ = det(A)
```

```
풀기 쉬움 (평균-곱)
```

3×3의 문제:

1. 삼차방정식:

```
det(A - λI) = -λ³ + aλ² + bλ + c = 0

삼차 방정식!
```

2. 세 미지수, 세 방정식:

```
λ₁ + λ₂ + λ₃ = tr(A)
λ₁λ₂ + λ₂λ₃ + λ₃λ₁ = ?
λ₁ × λ₂ × λ₃ = det(A)
```

문제:

- 중간 항 복잡
- 평균-곱 공식 안 됨
- 삼차 공식 매우 복잡

---

3. 삼차 공식의 복잡성:

Cardano 공식:

```
[매우 길고 복잡한 식]

실용성 없음
수치 방법이 나음
```

---

4. 일반 n×n:

n차 방정식:

```
det(A - λI) = 0

n차 다항식
```

Abel-Ruffini 정리:

```
n ≥ 5: 일반 근의 공식 존재 안 함!
```

따라서:

- 수치 방법 필요
- QR 알고리즘
- 거듭제곱법
- ...

여전히 유용한 것:

모든 n×n:

```
tr(A) = Σλᵢ  (합)
det(A) = Πλᵢ  (곱)
```

확인용:

```
고유값 구한 후:
합 = tr? ✓
곱 = det? ✓
```

결론:

빠른 공식이 2×2 전용인 이유:

1. **이차방정식** (근의 공식 간단)
2. **2개 조건** (tr, det로 충분)
3. **평균-곱** (두 수 관계 단순)

3×3 이상:

1. **n차 방정식** (복잡)
2. **n개 조건** (부족하거나 복잡)
3. **일반 공식 없음** (n ≥ 5)

하지만 tr, det 관계는 여전히 유용!