

이 장의 목적

외적의 깊은 이해:

- 왜 행렬식 트릭이 작동하는가?
- 왜 3D에만 외적이 존재하는가?
- 외적과 쌍대성의 연결

선택적 장:

- 핵심 내용은 아님
- 하지만 매우 우아함
- 수학적 직관 향상

필요한 배경:

- Chapter 6: 행렬식
- Chapter 9: 쌍대성 (내적)

복습: 쌍대성

핵심 개념:

$nD \rightarrow 1D$ 선형변환 \leftrightarrow n 차원 벡터

의미:

선형변환 f :

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

쌍대 벡터 v :

$f(w) = v \cdot w$ (모든 w 에 대해)

양방향:

- 변환 \rightarrow 벡터 (쌍대 벡터)
- 벡터 \rightarrow 변환 (내적 연산)

2D 예:

변환: $\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

쌍대 벡터: $[u_1, u_2]$

3D도 같음:

변환: $[u_1 \ u_2 \ u_3]$

쌍대 벡터: $[u_1, u_2, u_3]$

핵심 질문

외적의 미스터리:

1. 왜 3D만?

2D: 외적 없음 (넓이만)

3D: 외적 = 벡터

4D: 외적 없음??

2. 행렬식 트릭:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$$

왜 이게 작동하는가?

3. 계산 vs 기하학:

계산: $v_2w_3 - v_3w_2, \dots$

기하학: 수직 벡터, 넓이

왜 연결되는가?

3D \rightarrow 1D 변환 정의

새로운 함수:

입력: 3D 벡터 $[x, y, z]$

출력: 숫자

정의:

$$f([x, y, z]) = \det \begin{pmatrix} x & v_1 & w_1 \\ y & v_2 & w_2 \\ z & v_3 & w_3 \end{pmatrix}$$

여기서 v, w 는 고정된 벡터

의미:

- x, y, z 는 변수
- v, w 는 상수

기하학적 의미: 부피

3×3 행렬식:

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \text{평행육면체의 부피 (부호 포함)}$$

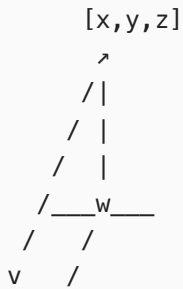
우리의 함수:

$$f([x, y, z]) = \det \begin{pmatrix} x & v_1 & w_1 \\ y & v_2 & w_2 \\ z & v_3 & w_3 \end{pmatrix}$$

기하학적:

$$= [x, y, z], v, w \text{로 만든 평행육면체의 부피}$$

시각화:



세 벡터가 만드는 3D 박스

함수의 선형성

확인해야 할 것:

1. 가법성:

$$f(u + v) = f(u) + f(v)$$

2. 스케일링:

$$f(cu) = c \cdot f(u)$$

행렬식의 성질:

열 가법성:

$$\det \begin{pmatrix} a+a' & b & c \\ d+d' & e & f \\ g+g' & h & i \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a' & b & c \\ d' & e & f \\ g' & h & i \end{pmatrix}$$

열 스케일링:

$$\det \begin{pmatrix} ka & b & c \\ kd & e & f \\ kg & h & i \end{pmatrix} = k \cdot \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

우리의 함수:

$$f([x, y, z]) = \det \begin{pmatrix} x & v_1 & w_1 \\ y & v_2 & w_2 \\ z & v_3 & w_3 \end{pmatrix}$$

첫 번째 열이 변수!

선형성 확인:

$$\begin{aligned} f([x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2]) &= \det \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & v_1 & w_1 \\ y_1 + y_2 & v_2 & w_2 \\ z_1 + z_2 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} x_1 & v_1 & w_1 \\ y_1 & v_2 & w_2 \\ z_1 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} x_2 & v_1 & w_1 \\ y_2 & v_2 & w_2 \\ z_2 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} \\ &= f([x_1, y_1, z_1]) + f([x_2, y_2, z_2]) \quad \checkmark \end{aligned}$$

결론: f 는 선형변환!

쌍대성 적용

선형변환 존재:

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \text{ (선형)}$$

쌍대성 정리:

f 의 쌍대 벡터 p 가 존재

의미:

$$f([x, y, z]) = p \cdot [x, y, z] \quad (\text{모든 } [x, y, z])$$

목표: 이 벡터 p 를 찾자!

쌍대 벡터 찾기

방법:

기저벡터에 적용 → 변환 행렬 얻음

i에 적용:

$$\begin{aligned} f(\hat{i}) &= f([1, 0, 0]) \\ &= \det \begin{pmatrix} 1 & v_1 & w_1 \\ 0 & v_2 & w_2 \\ 0 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

코팩터 전개 (첫 열):

$$\begin{aligned} &= 1 \cdot \det \begin{pmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{pmatrix} - 0 + 0 \\ &= v_2 w_3 - v_3 w_2 \end{aligned}$$

j에 적용:

$$\begin{aligned} f(\hat{j}) &= f([0, 1, 0]) \\ &= \det \begin{pmatrix} 0 & v_1 & w_1 \\ 1 & v_2 & w_2 \\ 0 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} \\ &= -1 \cdot \det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{pmatrix} + 0 \\ &= -(v_1 w_3 - v_3 w_1) \\ &= v_3 w_1 - v_1 w_3 \end{aligned}$$

k에 적용:

$$\begin{aligned} f(\hat{k}) &= f([0, 0, 1]) \\ &= \det \begin{pmatrix} 0 & v_1 & w_1 \\ 0 & v_2 & w_2 \\ 1 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} \\ &= 1 \cdot \det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix} \\ &= v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{aligned}$$

변환 행렬:

$$[v_2 w_3 - v_3 w_2 \quad v_3 w_1 - v_1 w_3 \quad v_1 w_2 - v_2 w_1]$$

쌍대 벡터:

$$p = \begin{bmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \end{bmatrix}$$

$$[v_1 w_2 - v_2 w_1]$$

이것이 $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$!!!

놀라운 발견

외적 = 쌍대 벡터:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{bmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{bmatrix}$$

이것은:

$$f([x, y, z]) = \det \begin{pmatrix} x & v_1 & w_1 \\ y & v_2 & w_2 \\ z & v_3 & w_3 \end{pmatrix}$$

의 쌍대 벡터!

의미:

$$\det \begin{pmatrix} x & v_1 & w_1 \\ y & v_2 & w_2 \\ z & v_3 & w_3 \end{pmatrix} = (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot [x, y, z]$$

기하학적 해석

왼쪽 (행렬식):

$[x, y, z], \mathbf{v}, \mathbf{w}$ 의 평행육면체 부피

오른쪽 (내적):

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot [x, y, z]$$

내적 기하학:

$$= |\mathbf{v} \times \mathbf{w}| \times [x, y, z] \text{를 } (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \text{ 방향으로 투영}$$

연결:

$$\text{평행육면체 부피} = \text{밑면 넓이} \times \text{높이}$$

밑면:

- \mathbf{v} 와 \mathbf{w} 의 평행사변형
- 넓이 $= |\mathbf{v} \times \mathbf{w}|$

높이:

- $[x, y, z]$ 의 v, w 평면에서의 높이
- $= [x, y, z]$ 를 $(v \times w)$ 방향으로 투영
- (왜? $v \times w \perp v, w$)

따라서:

$$\begin{aligned}\text{부피} &= |v \times w| \times \text{투영} \\ &= (v \times w) \cdot [x, y, z]\end{aligned}$$

완벽한 일치!

행렬식 트릭의 정당화

복습: 트릭

$$\begin{aligned}v \times w &= \det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}\end{aligned}$$

쌍대성 관점:

Step 1: 변환 정의

$$f([x, y, z]) = \det \begin{pmatrix} x & v_1 & w_1 \\ y & v_2 & w_2 \\ z & v_3 & w_3 \end{pmatrix}$$

Step 2: 쌍대 벡터

$$p = v \times w \text{ (위에서 계산)}$$

Step 3: 동등성

$$\det \begin{pmatrix} x & v_1 & w_1 \\ y & v_2 & w_2 \\ z & v_3 & w_3 \end{pmatrix} = p \cdot [x, y, z]$$

Step 4: 특별한 선택

$$[x, y, z] = [\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}] \text{로 선택}$$

왜? 기저벡터의 선형결합으로 p 표현

결과:

$$\det \begin{pmatrix} \hat{i} & v_1 & w_1 \\ \hat{j} & v_2 & w_2 \end{pmatrix} = p \cdot \hat{i} = p \text{의 } x\text{성분}$$

$$(\hat{k} \quad v_3 \quad w_3)$$

$$\det \begin{pmatrix} \hat{i} & v_1 & w_1 \\ \hat{j} & v_2 & w_2 \\ \hat{k} & v_3 & w_3 \end{pmatrix} = p \cdot \hat{j} = p \text{의 } y\text{성분}$$

$$\det \begin{pmatrix} \hat{i} & v_1 & w_1 \\ \hat{j} & v_2 & w_2 \\ \hat{k} & v_3 & w_3 \end{pmatrix} = p \cdot \hat{k} = p \text{의 } z\text{성분}$$

행렬 형태:

$$\begin{aligned} p &= [p \cdot \hat{i}] &= \det \begin{pmatrix} \hat{i} & v_1 & w_1 \\ \hat{j} & v_2 & w_2 \\ \hat{k} & v_3 & w_3 \end{pmatrix} \\ &[p \cdot \hat{j}] \\ &[p \cdot \hat{k}] \end{aligned}$$

하지만 코팩터 전개:

$$\det \begin{pmatrix} \hat{i} & v_1 & w_1 \\ \hat{j} & v_2 & w_2 \\ \hat{k} & v_3 & w_3 \end{pmatrix} = \hat{i} \cdot \det(\dots) + \hat{j} \cdot \det(\dots) + \hat{k} \cdot \det(\dots)$$

형식적으로 같은 식!

결론: 행렬식 트릭은 쌍대 벡터를 기저벡터로 표현한 것!

왜 3D만?

차원의 우연한 일치:

일반적 상황:

n차원 공간
n-1개 벡터 → (n-1)차원 subspace

부피 함수:

$$f([x_1, \dots, x_n]) = \det([x_1 \dots x_n \quad v_1 \dots v_{n-1}])$$

쌍대 벡터:

n차원 벡터

2D의 경우:

1개 벡터 (v)
→ 1D subspace (직선)

부피 함수:

$$f([x, y]) = \det \begin{pmatrix} x & v_1 \\ y & v_2 \end{pmatrix}$$

쌍대 벡터:

2D 벡터

하지만:

v 는 이미 2D 벡터
쌍대 벡터도 2D 벡터

새로운 정보 없음!

실제로:

쌍대 벡터 = v 를 90° 회전

3D의 경우:

2개 벡터 (v, w)
→ 2D subspace (평면)

부피 함수:

$$f([x, y, z]) = \det \begin{pmatrix} x & v_1 & w_1 \\ y & v_2 & w_2 \\ z & v_3 & w_3 \end{pmatrix}$$

쌍대 벡터:

3D 벡터 ($v \times w$)

차원 일치:

입력: 2개 벡터 (v, w)
출력: 1개 벡터 ($v \times w$)

완벽한 대응!

4D의 경우:

3개 벡터 (u, v, w)
→ 3D subspace

부피 함수:

$$f([x, y, z, t]) = \det \begin{pmatrix} x & u_1 & v_1 & w_1 \\ y & u_2 & v_2 & w_2 \\ z & u_3 & v_3 & w_3 \\ t & u_4 & v_4 & w_4 \end{pmatrix}$$

쌍대 벡터:

4D 벡터

하지만:

입력: 3개 벡터
출력: 1개 벡터

3 → 1 대응이 이상함!

결론:

2D: 1 → 1 (평범)
3D: 2 → 1 (완벽!)
4D: 3 → 1 (이상)

오직 3D에서만 자연스러움!

일반화: 7차원

놀라운 사실:

7차원에서도 외적 존재!

왜?

차원 일치:

6개 벡터 → 6D subspace
쌍대 벡터 → 7D

Cayley 외적:

- 7차원 전용
- 2개 벡터 입력
- 1개 벡터 출력
- 매우 특수함

일반적 차원:

3D: 매우 특별
7D: 예외적 특별

다른 차원: 외적 없음

수학적 우아함

쌍대성이 설명:

1. 외적의 정의:

$v \times w =$ 특정 $3D \rightarrow 1D$ 변환의 쌍대 벡터

2. 계산 공식:

기저벡터에 변환 적용 \rightarrow 좌표 얻음

3. 행렬식 트릭:

쌍대 벡터를 기저로 표현 = 행렬식 전개

4. 기하학적 의미:

부피 = 밑면 \times 높이 = $|v \times w| \times$ 투영

모든 것이 연결됨!

실용적 의의

내적과 외적의 통일:

내적:

$v \cdot w = v$ 의 쌍대 변환을 w 에 적용

외적:

$v \times w = (v, w$ 의 부피 함수)의 쌍대 벡터

둘 다 쌍대성!

계산 vs 기하학:

더 이상 미스터리 아님:

- 계산 = 쌍대 벡터 찾기
- 기하학 = 변환의 의미

쌍대성이 다리!

핵심 직관 정리

1. 부피 함수:

$$f([x, y, z]) = \det \begin{pmatrix} x & v_1 & w_1 \\ y & v_2 & w_2 \\ z & v_3 & w_3 \end{pmatrix}$$

= $[x, y, z], v, w$ 의 평행육면체 부피

2. 선형변환:

f 는 $3D \rightarrow 1D$ 선형변환

3. 쌍대 벡터:

$v \times w = f$ 의 쌍대 벡터

4. 동등성:

$$f([x, y, z]) = (v \times w) \cdot [x, y, z]$$

5. 기하학:

$$\begin{aligned} \text{부피} &= |v \times w| \times \text{높이} \\ &= (v \times w) \cdot [x, y, z] \end{aligned}$$

6. 왜 3D만:

2개 벡터 \rightarrow 2D 평면
쌍대 벡터 \rightarrow 3D (법선)
완벽한 대응!

2. 퀴즈

문제 1

$3D \rightarrow 1D$ 선형변환 f 를 다음과 같이 정의하시오:

$$f([x, y, z]) = \det \begin{pmatrix} x & v_1 & w_1 \\ y & v_2 & w_2 \\ z & v_3 & w_3 \end{pmatrix}$$

(a) 이 함수의 기하학적 의미는 무엇인가? (b) 왜 이 함수가 선형변환인지 행렬식의 성질을 이용하여 증명하시오. (c) 선형변환이므로 쌍대 벡터 p 가 존재한다. 이 쌍대 벡터를 찾는 방법을 설명하시오.

문제 2

외적 $v \times w$ 가 다음 선형변환의 쌍대 벡터임을 증명하시오:

$$f([x, y, z]) = \det \begin{pmatrix} x & v_1 & w_1 \\ y & v_2 & w_2 \\ z & v_3 & w_3 \end{pmatrix}$$

특히: (a) 기저벡터 $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ 에 f 를 적용하여 변환 행렬을 구하시오. (b) 이 변환 행렬로부터 쌍대 벡터를 얻으시오. (c) 이것이 외적 공식과 같음을 보이시오.

문제 3

평행육면체의 부피와 외적의 관계를 설명하시오:

$$\det \begin{pmatrix} x & v_1 & w_1 \\ y & v_2 & w_2 \\ z & v_3 & w_3 \end{pmatrix} = (v \times w) \cdot [x, y, z]$$

(a) 왼쪽(행렬식)의 기하학적 의미 (b) 오른쪽(내적)의 기하학적 의미 (c) 왜 둘이 같은지 "밑면 \times 높이" 관점에서 설명하시오.

문제 4

행렬식 트릭이 왜 작동하는지 쌍대성 관점에서 설명하시오:

$$v \times w = \det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$$

(a) 왜 이 "행렬식"이 수학적으로 이상한가? (b) 쌍대 벡터 p 를 기저벡터로 표현하면 어떻게 되는가? (c) 이것이 행렬식 트릭과 어떻게 연결되는지 서술하시오.

문제 5

왜 외적이 3차원에만 존재하는지 차원 분석을 통해 설명하시오: (a) 2D의 경우: 1개 벡터 \rightarrow 쌍대 벡터는? 왜 "외적"이 아닌가? (b) 3D의 경우: 2개 벡터 \rightarrow 쌍대 벡터는? 왜 완벽한가? (c) 4D의 경우: 3개 벡터 \rightarrow 쌍대 벡터는? 왜 이상한가? (d) 일반적으로 n 차원에서 외적이 존재하려면 어떤 조건이 필요한가?

3. 퀴즈 답

문제 1 답안

3D \rightarrow 1D 선형변환의 정의와 분석:

함수:

$$f([x, y, z]) = \det \begin{pmatrix} x & v_1 & w_1 \\ y & v_2 & w_2 \\ z & v_3 & w_3 \end{pmatrix}$$

여기서 $v = [v_1, v_2, v_3]$, $w = [w_1, w_2, w_3]$ 는 고정된 벡터

(a) 기하학적 의미:

행렬식의 기하학:

3×3 행렬식:

$\det(A) =$ 세 열벡터가 만드는 평행육면체의 부피 (부호 포함)

우리의 경우:

세 열벡터:

- 첫 번째: $[x, y, z]$ (변수)
- 두 번째: v (고정)
- 세 번째: w (고정)

기하학적 의미:

$f([x, y, z]) = [x, y, z], v, w$ 가 만드는 평행육면체의 부피

시각화:



부피 공식:

$V = \text{밑면 넓이} \times \text{높이}$

밑면:

- v 와 w 의 평행사변형
- 넓이 $= |v \times w|$

높이:

- $[x, y, z]$ 의 v, w 평면으로부터의 거리

부호:

$\det > 0$: $[x, y, z]$, v, w 가 오른손 좌표계
 $\det < 0$: 왼손 좌표계
 $\det = 0$: $[x, y, z]$ 가 v, w 평면 위

예:

$v = \hat{i} = [1, 0, 0]$
 $w = \hat{j} = [0, 1, 0]$
 $[x, y, z] = \hat{k} = [0, 0, 1]$

$$f(\hat{k}) = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

단위 정육면체의 부피 = 1

(b) 선형성 증명:

선형변환의 조건:

조건 1: 가법성

$$f(u + w) = f(u) + f(w)$$

조건 2: 스케일링

$$f(cu) = c \cdot f(u)$$

행렬식의 성질 이용:

성질 1: 열 가법성

일반적으로:

$$\det \begin{pmatrix} [a+a' & b & c] \\ [d+d' & e & f] \\ [g+g' & h & i] \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} [a & b & c] \\ [d & e & f] \\ [g & h & i] \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} [a' & b & c] \\ [d' & e & f] \\ [g' & h & i] \end{pmatrix}$$

우리의 함수에 적용:

두 벡터 $u = [x_1, y_1, z_1]$, $w = [x_2, y_2, z_2]$

$$\begin{aligned} f(u + w) &= f([x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2]) \\ &= \det \begin{pmatrix} [x_1+x_2 & v_1 & w_1] \\ [y_1+y_2 & v_2 & w_2] \\ [z_1+z_2 & v_3 & w_3] \end{pmatrix} \end{aligned}$$

행렬식의 열 가법성:

$$\begin{aligned} &= \det \begin{pmatrix} x_1 & v_1 & w_1 \\ y_1 & v_2 & w_2 \\ z_1 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} x_2 & v_1 & w_1 \\ y_2 & v_2 & w_2 \\ z_2 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} \\ &= f(u) + f(w) \quad \checkmark \end{aligned}$$

성질 2: 열 스케일링

일반적으로:

$$\det \begin{pmatrix} ka & b & c \\ kd & e & f \\ kg & h & i \end{pmatrix} = k \cdot \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

우리의 함수에 적용:

스칼라 c 와 벡터 $u = [x, y, z]$

$$\begin{aligned} f(cu) &= f([cx, cy, cz]) \\ &= \det \begin{pmatrix} cx & v_1 & w_1 \\ cy & v_2 & w_2 \\ cz & v_3 & w_3 \end{pmatrix} \\ &\text{행렬식의 열 스케일링:} \\ &= c \cdot \det \begin{pmatrix} x & v_1 & w_1 \\ y & v_2 & w_2 \\ z & v_3 & w_3 \end{pmatrix} \\ &= c \cdot f(u) \quad \checkmark \end{aligned}$$

결론:

f 는 가법성과 스케일링을 만족
→ f 는 선형변환!

(c) 쌍대 벡터 찾기:

쌍대성 정리:

$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ (선형)
→ 쌍대 벡터 $p \in \mathbb{R}^3$ 존재

정의:

$$f(x) = p \cdot x \quad (\text{모든 } x \in \mathbb{R}^3)$$

방법: 기저벡터 적용

Step 1: 표준 기저벡터

$$\begin{aligned}\hat{i} &= [1, 0, 0] \\ \hat{j} &= [0, 1, 0] \\ \hat{k} &= [0, 0, 1]\end{aligned}$$

Step 2: 각 기저에 \mathbf{f} 적용

$$\begin{aligned}f(\hat{i}) &= \mathbf{p} \cdot \hat{i} = p_1 \quad (\mathbf{p} \text{의 } x\text{성분}) \\ f(\hat{j}) &= \mathbf{p} \cdot \hat{j} = p_2 \quad (\mathbf{p} \text{의 } y\text{성분}) \\ f(\hat{k}) &= \mathbf{p} \cdot \hat{k} = p_3 \quad (\mathbf{p} \text{의 } z\text{성분})\end{aligned}$$

Step 3: 행렬식으로 계산

$\mathbf{f}(\hat{i})$:

$$f(\hat{i}) = \det \begin{pmatrix} 1 & v_1 & w_1 \\ 0 & v_2 & w_2 \\ 0 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\text{코팩터 전개 (첫 열):} \\ &= 1 \cdot \det \begin{pmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{pmatrix} - 0 + 0 \\ &= v_2 w_3 - v_3 w_2\end{aligned}$$

$\mathbf{f}(\hat{j})$:

$$f(\hat{j}) = \det \begin{pmatrix} 0 & v_1 & w_1 \\ 1 & v_2 & w_2 \\ 0 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\text{코팩터 전개 (첫 열):} \\ &= 0 - 1 \cdot \det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{pmatrix} + 0 \\ &= -(v_1 w_3 - v_3 w_1) \\ &= v_3 w_1 - v_1 w_3\end{aligned}$$

$\mathbf{f}(\hat{k})$:

$$f(\hat{k}) = \det \begin{pmatrix} 0 & v_1 & w_1 \\ 0 & v_2 & w_2 \\ 1 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\text{코팩터 전개 (첫 열):} \\ &= 0 - 0 + 1 \cdot \det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix} \\ &= v_1 w_2 - v_2 w_1\end{aligned}$$

$$= v_1 w_2 - v_2 w_1$$

Step 4: 쌍대 벡터 구성

$$\begin{aligned} p &= [p_1] \quad [f(\hat{i})] \quad [v_2 w_3 - v_3 w_2] \\ [p_2] &= [f(\hat{j})] = [v_3 w_1 - v_1 w_3] \\ [p_3] &= [f(\hat{k})] \quad [v_1 w_2 - v_2 w_1] \end{aligned}$$

이것이 바로 $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$!

검증:

임의의 $[x, y, z]$:

$$\begin{aligned} f([x, y, z]) &= \det \begin{pmatrix} x & v_1 & w_1 \\ y & v_2 & w_2 \\ z & v_3 & w_3 \end{pmatrix} \\ p \cdot [x, y, z] &= (v_2 w_3 - v_3 w_2)x + (v_3 w_1 - v_1 w_3)y + (v_1 w_2 - v_2 w_1)z \end{aligned}$$

행렬식 전개로 같음을 보일 수 있음 ✓

결론: 쌍대 벡터 = 외적 $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$

문제 2 답안

외적이 쌍대 벡터임을 증명:

주장:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = f \text{의 쌍대 벡터}$$

여기서:

$$\begin{aligned} f([x, y, z]) &= \det \begin{pmatrix} x & v_1 & w_1 \\ y & v_2 & w_2 \\ z & v_3 & w_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(a) 기저벡터에 f 적용:

$\hat{i} = [1, 0, 0]$:

$$\begin{aligned} f(\hat{i}) &= \det \begin{pmatrix} 1 & v_1 & w_1 \\ 0 & v_2 & w_2 \\ 0 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

코팩터 전개 (첫 열):

$$= 1 \cdot M_{11} - 0 \cdot M_{21} + 0 \cdot M_{31}$$

$$M_{11} = \det \begin{pmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{pmatrix}$$

$$= v_2 w_3 - v_3 w_2$$

따라서:

$$f(\hat{i}) = v_2 w_3 - v_3 w_2$$

$\hat{j} = [0, 1, 0]$:

$$f(\hat{j}) = \det \begin{pmatrix} 0 & v_1 & w_1 \\ 1 & v_2 & w_2 \\ 0 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}$$

코팩터 전개 (첫 열):

$$= 0 \cdot M_{11} - 1 \cdot M_{21} + 0 \cdot M_{31}$$

$$M_{21} = \det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{pmatrix}$$

$$= v_1 w_3 - v_3 w_1$$

따라서:

$$f(\hat{j}) = -(v_1 w_3 - v_3 w_1) = v_3 w_1 - v_1 w_3$$

$\hat{k} = [0, 0, 1]$:

$$f(\hat{k}) = \det \begin{pmatrix} 0 & v_1 & w_1 \\ 0 & v_2 & w_2 \\ 1 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}$$

코팩터 전개 (첫 열):

$$= 0 \cdot M_{11} - 0 \cdot M_{21} + 1 \cdot M_{31}$$

$$M_{31} = \det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix}$$

$$= v_1 w_2 - v_2 w_1$$

따라서:

$$f(\hat{k}) = v_1 w_2 - v_2 w_1$$

변환 행렬:

3D → 1D 선형변환의 행렬:

$$\begin{bmatrix} f(\hat{i}) & f(\hat{j}) & f(\hat{k}) \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} V_2W_3 - V_3W_2 & V_3W_1 - V_1W_3 & V_1W_2 - V_2W_1 \end{bmatrix}$$

(b) 쌍대 벡터:

1×3 행렬 → 3D 벡터:

행 벡터를 열 벡터로:

$$\begin{aligned} p = \begin{bmatrix} f(\hat{i}) \\ f(\hat{j}) \\ f(\hat{k}) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} V_2W_3 - V_3W_2 \\ V_3W_1 - V_1W_3 \\ V_1W_2 - V_2W_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

쌍대성:

$$\begin{aligned} f([x, y, z]) &= \begin{bmatrix} f(\hat{i}) & f(\hat{j}) & f(\hat{k}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \\ &= p \cdot [x, y, z] \end{aligned}$$

(c) 외적 공식과의 일치:

외적 정의:

$$v \times w = \begin{bmatrix} V_2W_3 - V_3W_2 \\ V_3W_1 - V_1W_3 \\ V_1W_2 - V_2W_1 \end{bmatrix}$$

쌍대 벡터:

$$p = \begin{bmatrix} V_2W_3 - V_3W_2 \\ V_3W_1 - V_1W_3 \\ V_1W_2 - V_2W_1 \end{bmatrix}$$

완전히 일치!

$$v \times w = p \quad \checkmark$$

증명 완료:

핵심 단계:

1. 선형변환 정의

$$f(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}) = \det \begin{pmatrix} x & v_1 & w_1 \\ y & v_2 & w_2 \\ z & v_3 & w_3 \end{pmatrix}$$

2. 기저벡터 적용

$$f(\hat{i}), f(\hat{j}), f(\hat{k}) \text{ 계산}$$

3. 변환 행렬 구성

$$\begin{bmatrix} f(\hat{i}) & f(\hat{j}) & f(\hat{k}) \end{bmatrix}$$

4. 쌍대 벡터 추출

$$p = [f(\hat{i}), f(\hat{j}), f(\hat{k})]^T$$

5. 외적과 비교

$$p = v \times w$$

결론: 외적은 (v, w) 의 부피 함수의 쌍대 벡터입니다!

문제 3 답안

평행육면체 부피와 외적의 관계:

등식:

$$\det \begin{pmatrix} x & v_1 & w_1 \\ y & v_2 & w_2 \\ z & v_3 & w_3 \end{pmatrix} = (v \times w) \cdot [x, y, z]$$

(a) 왼쪽(행렬식)의 기하학적 의미:

행렬식 = 부피:

3×3 행렬식:

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \text{세 열벡터가 만드는 평행육면체의 부피}$$

우리의 경우:

세 벡터:

- $[x, y, z]$
- $v = [v_1, v_2, v_3]$
- $w = [w_1, w_2, w_3]$

평행육면체:



부피:

$$V = \det \begin{pmatrix} x & v_1 & w_1 \\ y & v_2 & w_2 \\ z & v_3 & w_3 \end{pmatrix}$$

부호:

$\det > 0$: 오른손 좌표계
 $\det < 0$: 왼손 좌표계
 $\det = 0$: 세 벡터가 한 평면 위

(b) 오른쪽(내적)의 기하학적 의미:

내적 복습:

$$\begin{aligned} a \cdot b &= |a| |b| \cos(\theta) \\ &= |a| \times (\text{b를 a로 투영한 길이}) \end{aligned}$$

우리의 경우:

$$(v \times w) \cdot [x, y, z]$$

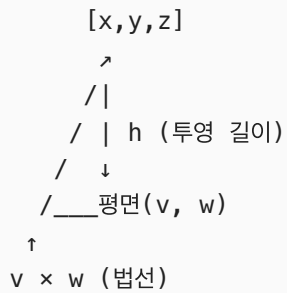
$v \times w$:

- 방향: v 와 w 모두에 수직
- 크기: $|v \times w| = v, w$ 의 평행사변형 넓이

내적 계산:

$$= |\mathbf{v} \times \mathbf{w}| \times [\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}] \text{를 } (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \text{ 방향으로 투영한 길이}$$

시각화:



투영 길이 h :

$$\begin{aligned} h &= [\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}] \text{의 } \mathbf{v}, \mathbf{w} \text{ 평면으로부터의 "높이"} \\ &= [\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}] \text{를 법선 } (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \text{ 방향으로 투영} \end{aligned}$$

내적 결과:

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot [\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}] = |\mathbf{v} \times \mathbf{w}| \times h$$

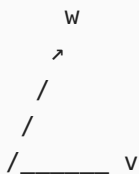
(c) 왜 둘이 같은가: "밑면 \times 높이"

평행육면체 부피 공식:

$$\text{부피} = \text{밑면 넓이} \times \text{높이}$$

밑면:

\mathbf{v} 와 \mathbf{w} 가 만드는 평행사변형:



밑면 넓이:

$$\text{넓이} = |\mathbf{v} \times \mathbf{w}|$$

이것은 외적의 정의!

높이:

$[x, y, z]$ 의 밑면(v, w 평면)으로부터 수직 거리:

$$\begin{array}{c} [x, y, z] \\ \nearrow \\ / | \\ / | h \\ / \downarrow \\ / \text{--- 평면} \end{array}$$

높이 = 법선 방향 투영:

v, w 평면의 법선 $= v \times w$

따라서:

$$\begin{aligned} h &= [x, y, z] \text{를 } (v \times w) \text{ 방향으로 투영} \\ &= (v \times w) \cdot [x, y, z] / |v \times w| \end{aligned}$$

단위 법선이면:

$$\hat{u} = (v \times w) / |v \times w|$$

$$h = \hat{u} \cdot [x, y, z]$$

부피 계산:

$$\begin{aligned} \text{부피} &= \text{밑면} \times \text{높이} \\ &= |v \times w| \times h \\ &= |v \times w| \times ((v \times w) \cdot [x, y, z] / |v \times w|) \\ &= (v \times w) \cdot [x, y, z] \end{aligned}$$

결론:

$$\det \begin{pmatrix} x & v_1 & w_1 \\ y & v_2 & w_2 \\ z & v_3 & w_3 \end{pmatrix} = (v \times w) \cdot [x, y, z]$$

$$\text{왼쪽(부피)} = \text{오른쪽(밑면} \times \text{높이)}$$

시각적 정리:

평행육면체:

- 밑면: v, w 의 평행사변형
- 높이: $[x, y, z]$ 의 수직 거리

$$\begin{aligned} \text{부피} &= \text{밑면} \times \text{높이} \\ &= |v \times w| \times \text{투영} \end{aligned}$$

$$= (v \times w) \cdot [x, y, z]$$

$$= \det([x \ v \ w])$$

이것이 행렬식과 외적의 깊은 연결입니다!

문제 4 답안

행렬식 트릭의 쌍대성 설명:

트릭:

$$v \times w = \det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$$

(a) 수학적으로 이상한 이유:

정상적인 행렬식:

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

모든 원소 = 스칼라

우리의 "행렬식":

$$\det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$$

첫 행 = 벡터!

문제:

1. 타입 불일치

첫 행: 벡터 (3차원)
나머지: 스칼라

2. 행렬식의 정의

$\det: (n \times n \text{ 스칼라 행렬}) \rightarrow \text{스칼라}$

하지만:

우리의 "행렬식": ??? \rightarrow 벡터

3. 수학적으로 정의되지 않음

벡터를 원소로 하는 행렬의 행렬식
= 표준 정의에 없음

공식적으로:

- 이것은 행렬식이 아님
- 표기법의 남용
- 기억법 장치

하지만:

- 올바른 답을 줌
- 매우 유용함
- 쌍대성으로 정당화됨

(b) 쌍대 벡터를 기저벡터로 표현:

쌍대 벡터:

$$\mathbf{p} = v \times w = [p_1, p_2, p_3]$$

기저 표현:

모든 3D 벡터는:

$$\mathbf{p} = p_1 \hat{\mathbf{i}} + p_2 \hat{\mathbf{j}} + p_3 \hat{\mathbf{k}}$$

성분 추출:

내적 이용:

$$\begin{aligned} p_1 &= \mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{i}} \\ p_2 &= \mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{j}} \\ p_3 &= \mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{k}} \end{aligned}$$

쌍대성 이용:

\mathbf{p} 는 f 의 쌍대 벡터:

$$f([x, y, z]) = \mathbf{p} \cdot [x, y, z]$$

특별한 입력:

$$[x, y, z] = \hat{\mathbf{i}} = [1, 0, 0]$$

$$f(\hat{\mathbf{i}}) = \mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{i}} = p_1$$

하지만 f 의 정의:

$$f(\hat{i}) = \det \begin{pmatrix} 1 & v_1 & w_1 \\ 0 & v_2 & w_2 \\ 0 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}$$

마찬가지로:

$$p_2 = f(\hat{j}) = \det \begin{pmatrix} 0 & v_1 & w_1 \\ 1 & v_2 & w_2 \\ 0 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}$$

$$p_3 = f(\hat{k}) = \det \begin{pmatrix} 0 & v_1 & w_1 \\ 0 & v_2 & w_2 \\ 1 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}$$

벡터 표현:

$$\begin{aligned} p &= p_1 \hat{i} + p_2 \hat{j} + p_3 \hat{k} \\ &= f(\hat{i}) \cdot \hat{i} + f(\hat{j}) \cdot \hat{j} + f(\hat{k}) \cdot \hat{k} \\ &= \det \begin{pmatrix} 1 & v_1 & w_1 \\ 0 & v_2 & w_2 \\ 0 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} \cdot \hat{i} + \det \begin{pmatrix} 0 & v_1 & w_1 \\ 1 & v_2 & w_2 \\ 0 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} \cdot \hat{j} + \det \begin{pmatrix} 0 & v_1 & w_1 \\ 0 & v_2 & w_2 \\ 1 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} \cdot \hat{k} \end{aligned}$$

(c) 행렬식 트릭과의 연결:

관찰:

위 식에서 $[1, 0, 0]$, $[0, 1, 0]$, $[0, 0, 1]$ 을: $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ 로 형식적으로 대체:

$$p = \det \begin{pmatrix} \hat{i} & v_1 & w_1 \\ 0 & v_2 & w_2 \\ 0 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} \cdot \hat{i} + \det \begin{pmatrix} \hat{j} & v_1 & w_1 \\ 0 & v_2 & w_2 \\ 0 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} \cdot \hat{j} + \det \begin{pmatrix} \hat{k} & v_1 & w_1 \\ 0 & v_2 & w_2 \\ 0 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} \cdot \hat{k}$$

하지만 이것은:

$$\det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \text{를 첫 행으로 코팩터 전개한 것!}$$

코팩터 전개 (첫 행):

$$\det = \hat{i} \cdot \det \begin{pmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{pmatrix} - \hat{j} \cdot \det \begin{pmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{pmatrix} + \hat{k} \cdot \det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{pmatrix}$$

벡터 형태:

$$\begin{aligned}
 &= \hat{i} \cdot (v_2 w_3 - v_3 w_2) + \hat{j} \cdot (v_3 w_1 - v_1 w_3) + \hat{k} \cdot (v_1 w_2 - v_2 w_1) \\
 &= \begin{bmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{bmatrix} \\
 &= \mathbf{v} \times \mathbf{w}
 \end{aligned}$$

정확히 일치!

정당화:

1. 쌍대 벡터는:

$$\mathbf{p} = p_1 \hat{i} + p_2 \hat{j} + p_3 \hat{k}$$

2. 성분은:

$$\begin{aligned}
 p_i &= f(\text{기저벡터}_i) \\
 &= \det(\text{기저벡터}_i \text{를 첫 열에})
 \end{aligned}$$

3. 형식적 대체:

기저벡터를 $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ 기호로 대체
 → "행렬식" 표기

4. 코팩터 전개:

형식적 행렬식을 전개
 → 실제 쌍대 벡터

결론:

행렬식 트릭은:

1. 표기법의 남용 (공식적으로)
2. 쌍대 벡터의 기저 표현 (본질적으로)
3. 우아한 기억법 (실용적으로)

쌍대성 덕분에 작동합니다!

문제 5 답안

왜 외적이 3차원에만 존재하는가:

일반적 설정:

n차원 공간에서:

- (n-1)개 벡터
- → (n-1)차원 subspace
- → 부피 함수 정의

부피 함수:

$$f([x_1, \dots, x_n]) = \det([x_1 \dots x_n \quad v_1 \dots v_{n-1}])$$

쌍대 벡터:

n차원 벡터

질문: 외적이 의미 있는가?

(a) 2D의 경우:

설정:

1개 벡터: $v = [v_1, v_2]$
 → 1D subspace (직선)

부피 함수:

$$f([x, y]) = \det \begin{pmatrix} x & v_1 \\ y & v_2 \end{pmatrix}$$

기하학:

$[x, y]$ 와 v 가 만드는 평행사변형의 넓이

선형변환:

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

쌍대 벡터:

$$p \in \mathbb{R}^2 \text{ (2차원 벡터)}$$

계산:

$$\begin{aligned} f(\hat{i}) &= \det \begin{pmatrix} 1 & v_1 \\ 0 & v_2 \end{pmatrix} = v_2 \\ f(\hat{j}) &= \det \begin{pmatrix} 0 & v_1 \\ 1 & v_2 \end{pmatrix} = -v_1 \end{aligned}$$

$$p = [v_2, -v_1]$$

관계:

$$p = v \text{를 } 90^\circ \text{ 반시계 회전한 벡터}$$

왜 "외적"이 아닌가:

입력 vs 출력:

입력: 1개 벡터 (v)

출력: 1개 벡터 (p)

문제:

- v 자체가 이미 2D 벡터
- p 도 2D 벡터
- p 는 v 의 단순 회전
- 새로운 정보 없음!

"외적" 의미 없음:

$$v \text{ "x" ???} = p$$

하지만 p 는 v 에서 직접 나옴
두 번째 벡터 불필요

결론: 2D에는 외적 없음 (회전만 있음)

(b) 3D의 경우:

설정:

2개 벡터: v, w
→ 2D subspace (평면)

부피 함수:

$$f([x, y, z]) = \det \begin{pmatrix} x & v_1 & w_1 \\ y & v_2 & w_2 \\ z & v_3 & w_3 \end{pmatrix}$$

기하학:

$[x, y, z], v, w$ 의 평행육면체 부피

선형변환:

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

쌍대 벡터:

$$p \in \mathbb{R}^3 \text{ (3차원 벡터)}$$

계산:

$$p = \begin{bmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{bmatrix} = v \times w$$

왜 완벽한가:

입력 vs 출력:

입력: 2개 벡터 (v, w)
출력: 1개 벡터 (p)

차원 일치:

2개 3D 벡터 \rightarrow 1개 3D 벡터

기하학적 의미:

- v, w 가 평면 정의
- p 는 평면에 수직
- p 의 크기 = 평행사변형 넓이
- 완벽한 대응!

새로운 정보:

$p = v, w$ 에서 유일하게 결정
 p 는 v, w 와 독립적
 p 는 v, w 의 "직교 보완"

외적의 정의:

$$v \times w = p$$

자연스럽고 의미 있음!

결론: 3D는 외적에 완벽 ($2 \rightarrow 1$ 대응)

(c) 4D의 경우:

설정:

3개 벡터: u, v, w
→ 3D subspace

부피 함수:

$$f([x, y, z, t]) = \det \begin{pmatrix} x & u_1 & v_1 & w_1 \\ y & u_2 & v_2 & w_2 \\ z & u_3 & v_3 & w_3 \\ t & u_4 & v_4 & w_4 \end{pmatrix}$$

기하학:

$[x, y, z, t]$, u, v, w 의 4D 초평행육면체 부피

선형변환:

$$f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$$

쌍대 벡터:

$$p \in \mathbb{R}^4 \text{ (4차원 벡터)}$$

왜 이상한가:

입력 vs 출력:

입력: 3개 벡터 (u, v, w)
출력: 1개 벡터 (p)

문제:

$3 \rightarrow 1$ 대응이 부자연스러움

외적 정의?

$$u \times v \times w = p \quad ???$$

이상한 점:

1. 연산자 모호:

$$(u \times v) \times w \text{ vs } u \times (v \times w)$$

2. 입력 개수 불일치:

3D: 2개 \rightarrow 1개 (이항 연산)
4D: 3개 \rightarrow 1개 (삼항 연산?)

3. 일반화 불가:

각 차원마다 다른 연산?

결론: 4D는 외적에 부적합 ($3 \rightarrow 1$ 대응 이상)

(d) 일반적 조건:

외적이 존재하려면:

조건 1: 차원 일치

입력: $(n-1)$ 개 벡터
출력: 1개 벡터
쌍대 벡터: n 차원

조건 2: 자연스러운 대응

$(n-1) \rightarrow 1$ 대응이 의미 있어야 함

분석:

$n = 2$:

$1 \rightarrow 1$ (평범, 새 정보 없음)

$n = 3$:

$2 \rightarrow 1$ (완벽!)

$n = 4$:

$3 \rightarrow 1$ (이상함)

일반 $n > 3$:

$(n-1) \rightarrow 1$ (점점 이상)

예외: **$n = 7$**

놀랍게도 7차원에서도 외적 존재!

이유:

- 8원수 (octonions) 대수 구조
- 특수한 대칭성
- 매우 예외적

Cayley 외적:

7D에서 2개 벡터 \rightarrow 1개 벡터
매우 특수한 경우

최종 결론:

외적이 존재하는 차원:

$n = 3$: 표준 외적 (가장 자연스러움)
 $n = 7$: Cayley 외적 (예외적)

일반적 n :

외적 없음

이유:

$n = 3$: $(n-1) = 2$, 쌍대 벡터 = 3D
 \rightarrow 2개 벡터가 1개 벡터로 완벽 대응

$n \neq 3$: 대응이 부자연스러움

3차원의 특별함: 차원의 우연한 일치로 외적이 자연스럽게 정의됩니다!

```
Dataview (inline field '[x, y, z], v, w로 만든 평행육면체의 부피'): Error:
-- PARSING FAILED -----
```

```
> 1 | [x, y, z], v, w로 만든 평행육면체의 부피
    |           ^
```

Expected one of the following:

'(', '*', '/' or '%', '+', '-', '.', '>=' or '<=' or '!=' or '=' or '>' or '<', '[', 'and' or 'or', EOF

```
Dataview (inline field '1·det([v₂ w₂]) - 0 + 0
                        ([v₃ w₃])
```

```
= v₂w₃ - v₃w₂'): Error:
-- PARSING FAILED -----
```

```

> 1 | 1·det([v2 w2]) - 0 + 0
    | ^
    2 | ([v3 w3])
    3 |

```

Expected one of the following:

'(', '*', '/' or '%', '+', '-', '.', '>=' or '<=' or '!=' or '=' or '>' or '<', '[', 'and' or 'or', EOF

Dataview (inline field '|v × w| × [x, y, z]를 (v × w) 방향으로 투영'): Error:
 --- PARSING FAILED -----

```

> 1 | |v × w| × [x, y, z]를 (v × w) 방향으로 투영
    | ^

```

Expected one of the following:

'(', 'null', boolean, date, duration, file link, list ('[1, 2, 3]'), negated field, number, object ('{ a: 1, b: 2 }'), string, variable

Dataview (inline field '1·M₁₁ - 0·M₂₁ + 0·M₃₁

$$M_{11} = \det \begin{pmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{pmatrix}$$

$$= v_2 w_3 - v_3 w_2$$

따라서:

f(*i*) = v₂w₃ - v₃w₂): Error:

--- PARSING FAILED -----

```

> 1 | 1·M11 - 0·M21 + 0·M31
    | ^
    2 |
    3 | M11 = det([v2 w2])

```

Expected one of the following:

'(', '*', '/' or '%', '+', '-', '.', '>=' or '<=' or '!=' or '=' or '>' or '<', '[', 'and' or 'or', EOF

Dataview (inline field '0·M₁₁ - 1·M₂₁ + 0·M₃₁

$$M_{21} = \det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{pmatrix}$$

$$= v_1 w_3 - v_3 w_1$$

따라서:

$$f(\hat{j}) = -(v_1 w_3 - v_3 w_1) = v_3 w_1 - v_1 w_3): \text{Error:}$$

-- PARSING FAILED -----

$$\begin{array}{l} > 1 \mid 0 \cdot M_{11} - 1 \cdot M_{21} + 0 \cdot M_{31} \\ \quad \mid \quad ^ \\ 2 \mid \\ 3 \mid M_{21} = \det([v_1 \quad w_1]) \end{array}$$

Expected one of the following:

'(', '*', or '/' or '%', '+' or '-', '.', '>=' or '<=' or '!=' or '=' or '>' or '<', '[', 'and' or 'or', EOF

Dataview (inline field ' $0 \cdot M_{11} - 0 \cdot M_{21} + 1 \cdot M_{31}$

$$M_{31} = \det([v_1 \quad w_1]) \\ ([v_2 \quad w_2])$$

$$= v_1 w_2 - v_2 w_1$$

따라서:

$$f(\hat{k}) = v_1 w_2 - v_2 w_1): \text{Error:}$$

-- PARSING FAILED -----

$$\begin{array}{l} > 1 \mid 0 \cdot M_{11} - 0 \cdot M_{21} + 1 \cdot M_{31} \\ \quad \mid \quad ^ \\ 2 \mid \\ 3 \mid M_{31} = \det([v_1 \quad w_1]) \end{array}$$

Expected one of the following:

'(', '*', or '/' or '%', '+' or '-', '.', '>=' or '<=' or '!=' or '=' or '>' or '<', '[', 'and' or 'or', EOF

Dataview (inline field ' $|v \times w| \times [x, y, z]$ 를 $(v \times w)$ 방향으로 투영한 길이'): Error:

-- PARSING FAILED -----

$$\begin{array}{l} > 1 \mid |v \times w| \times [x, y, z] \text{를 } (v \times w) \text{ 방향으로 투영한 길이} \\ \quad \mid \quad ^ \end{array}$$

Expected one of the following:

```
(' ', 'null', boolean, date, duration, file link, list ('[1, 2, 3]'),  
negated field, number, object ('{ a: 1, b: 2 }'), string, variable
```

```
Dataview (inline field ' $\hat{i} \cdot (v_2 w_3 - v_3 w_2) + \hat{j} \cdot (v_3 w_1 - v_1 w_3) + \hat{k} \cdot (v_1 w_2 - v_2 w_1)$ '  
v2w1)
```

```
= [v2w3 - v3w2]  
   [v3w1 - v1w3]  
   [v1w2 - v2w1]
```

```
= v × w'): Error:
```

```
-- PARSING FAILED -----
```

```
> 1 |  $\hat{i} \cdot (v_2 w_3 - v_3 w_2) + \hat{j} \cdot (v_3 w_1 - v_1 w_3) + \hat{k} \cdot (v_1 w_2 - v_2 w_1)$   
   | ^  
   2 |  
   3 | = [v2w3 - v3w2]
```

Expected one of the following:

```
(' ', '*' or '/' or '%', '+' or '-', '.', '>=' or '<=' or '!=' or '=' or  
'>' or '<', '[', 'and' or 'or', /[0-9\p{Letter}_-]/u, EOF, text
```