복습: 기저벡터

1장에서 배운 내용을 다시 생각해봅시다:

2차원 좌표계의 **기저벡터(basis vectors)**:

- **î** (i-hat) = [1, 0]: x축 방향 단위벡터
- **ĵ** (j-hat) = [0, 1]: y축 방향 단위벡터

벡터 [3, -2]는 다음과 같이 해석됩니다:

```
[3, -2] = 3î + (-2)ĵ
```

핵심: 좌표는 기저벡터를 스케일하는 스칼라입니다.

기저벡터의 선택은 자유롭다

사실 **어떤 두 벡터든** 기저벡터로 선택할 수 있습니다! (단, 0이 아니고 같은 방향이 아니어야 함)

예를 들어:

- b_1 = [2, 1]
- b_2 = [1, 3]

이 두 벡터를 새로운 기저로 선택하면, 완전히 다른 좌표계가 만들어집니다.

중요: 숫자로 벡터를 표현할 때는 항상 **암묵적으로 선택된 기저벡터**가 있습니다.

선형결합 (Linear Combination)

정의: 벡터들을 스칼라로 곱한 후 더하는 것

일반적으로, 두 벡터 v와 w의 선형결합:

```
av + bw
```

여기서 a와 b는 스칼라입니다.

예시:

```
2[1, 2] + 3[-1, 1] = [2, 4] + [-3, 3] = [-1, 7]
```

왜 "선형"인가?

- 하나의 스칼라를 고정하고 다른 것을 변화시키면, 결과 벡터의 끝점이 **직선**을 그립니다
- 두 스칼라를 모두 변화시키면, 끝점들이 **평면**을 채웁니다

Span (생성)

정의: 주어진 벡터들의 모든 가능한 선형결합의 집합

두 벡터 v와 w의 span:

```
span(v, w) = {av + bw | a, b는 모든 실수}
```

질문: "이 벡터들로 무엇을 만들 수 있나?" **답:** span이 그 답입니다!

2차원에서의 Span

경우 1: 대부분의 벡터 쌍

두 벡터 v와 w가 **같은 방향이 아니면**:

- span(v, w) = **2D 평면 전체**

시각화:

- 스칼라 a를 조절하는 손잡이
- 스칼라 b를 조절하는 손잡이
- 결과 벡터 av + bw의 끝점을 추적하면 평면 전체를 채움

경우 2: 두 벡터가 일직선상에 있을 때

v와 w가 **같은 방향** (또는 정반대 방향):

- span(v, w) = **원점을 지나는 하나의 직선**

예: v = [2, 1], w = [4, 2] (w = 2v)

- 어떤 선형결합을 만들어도 같은 직선 위의 벡터만 생성

경우 3: 영벡터가 포함된 경우

하나 이상이 영벡터 [0, 0]:

- span = **원점만** 또는 **직선**

3차원에서의 Span

두 벡터의 span (3D 공간에서)

3차원 공간의 두 벡터 v, w (같은 방향 아님):

- span(v, w) = **원점을 지나는 평평한 평면**

시각화:

- 두 스칼라를 조절하면
- 결과 벡터의 끝점이 평면을 그림
- 3D 공간을 자르는 2D 시트

세 번째 벡터 추가

경우 1: 세 번째 벡터가 처음 두 벡터의 **span** 위에 있으면

- span은 그대로 평면
- 세 번째 벡터는 "새로운 방향"을 추가하지 못함

경우 2: 세 번째 벡터가 평면 밖에 있으면

- span(v, w, u) = **3D 공간 전체**
- 이제 모든 3차원 벡터에 접근 가능

일반적인 경우:

- 무작위로 세 번째 벡터를 선택하면
- 거의 확실하게 3D 전체를 span함

선형종속 (Linear Dependence)

정의: 벡터 집합에서 하나를 제거해도 span이 변하지 않으면, 그 벡터는 나머지에 **선형종속**입니다.

다른 표현:

- 어떤 벡터가 다른 벡터들의 선형결합으로 표현 가능
- 그 벡터는 이미 다른 벡터들의 span 안에 있음
- 새로운 차원을 추가하지 못함

예시 (2D):

```
v = [2, 1]
w = [4, 2]  (w = 2v)
```

w는 v에 선형종속 → span은 직선

예시 (3D):

```
v = [1, 0, 0]
w = [0, 1, 0]
u = [2, 3, 0]  (u = 2v + 3w)
```

u는 v, w에 선형종속 → span은 xy평면 (3D 전체가 아님)

선형독립 (Linear Independence)

정의: 모든 벡터가 span에 새로운 차원을 추가하면 **선형독립**입니다.

의미:

- 어떤 벡터도 다른 벡터들의 선형결합으로 표현 불가
- 각 벡터가 고유한 방향 정보를 제공
- 제거하면 span이 줄어듦

예시 (3D):

```
v = [1, 0, 0]
w = [0, 1, 0]
```

```
u = [0, 0, 1]
```

이 세 벡터는 선형독립 → 3D 전체를 span

기저 (Basis)의 정의

공간의 기저: 다음 두 조건을 만족하는 벡터 집합

1. **선형독립**: 서로 선형독립
2. **Span**: 전체 공간을 span

2차원 공간의 기저:

- 정확히 2개의 선형독립 벡터 필요
- 예: $\hat{\imath}$ = [1, 0], $\hat{\jmath}$ = [0, 1]
- 또는: [2, 1], [1, 3]

3차원 공간의 기저:

- 정확히 3개의 선형독립 벡터 필요
- 예: $\hat{\imath}$ = [1, 0, 0], $\hat{\jmath}$ = [0, 1, 0], $\hat{k}$ = [0, 0, 1]

왜 이 정의가 맞는가?

- 선형독립: 불필요한 중복 없음
- Span: 공간의 모든 점에 도달 가능
- 개수가 딱 맞음: 2D는 2개, 3D는 3개

벡터를 점으로 표현하기

벡터가 많아지면 화살표로 그리기 복잡합니다.

해결책: 벡터를 **끝점(tip)**으로 표현

- 벡터 [3, 2] → 점 (3, 2)
- Span → 점들의 집합 (직선, 평면 등)

언제 사용?

- **단일 벡터:** 화살표로 (방향과 크기 명확)
- **벡터 집합:** 점으로 (시각적으로 깔끔)

예: 직선의 span → 점들이 만드는 직선 예: 평면의 span → 점들이 만드는 평면

부분공간 (Subspace)

암묵적 개념 (강의에서 언급 안 됨): Span은 항상 **원점을 지나는** 집합을 만듭니다.

이것이 **부분공간(subspace)**의 개념으로 이어집니다:

- 벡터 덧셈과 스칼라 곱셈에 대해 닫혀있음
- 항상 원점 포함

핵심 직관 정리

1. **선형결합 = 벡터 레시피**
   - 재료: 기저벡터들
   - 레시피: 스칼라 값들
   - 결과: 새로운 벡터
2. **Span = 도달 가능한 모든 곳**
   - 주어진 벡터들만 사용해서
   - 덧셈과 스칼라 곱셈으로
   - 갈 수 있는 모든 장소
3. **선형종속 = 중복**
   - 어떤 벡터가 다른 것들로 만들어짐
   - 새로운 방향 추가 안 함
   - 제거해도 span 불변
4. **기저 = 최소 완전 집합**
   - 전체 공간을 span
   - 불필요한 벡터 없음
   - n차원 공간 = n개 기저벡터

실전 예제

예제 1: 2D Span 판별

```
v = [3, 1]
w = [6, 2]
```

w = 2v이므로 선형종속 → span = 원점을 지나는 직선

예제 2: 3D Span 판별

```
v = [1, 2, 0]
w = [0, 1, 1]
u = [1, 3, 1]
```

u = v + w이므로 u는 선형종속 → span = 원점을 지나는 평면 (3D 전체 아님)

예제 3: 기저 확인

```
v = [1, 0]
w = [0, 1]
```

- 선형독립? Yes (서로 다른 방향)
- 2D 전체 span? Yes → 2D 공간의 기저

예제 4: 선형독립 확인

```
v = [1, 2, 3]
w = [4, 5, 6]
```

```
u = [7, 8, 9]
```

u = 2w - v가 성립하는지 확인:

```
2[4, 5, 6] - [1, 2, 3] = [8, 10, 12] - [1, 2, 3] = [7, 8, 9] ✓
```

u는 선형종속

---

2. 퀴즈

문제 1

선형결합(linear combination)의 정의를 설명하고, 벡터 v = [2, 1]과 w = [1, 3]의 선형결합 3v - 2w를 계산하시오. 그리고 왜 이것을 "선형"결합이라고 부르는지 기하학적 관점에서 설명하시오.

문제 2

Span의 개념을 정의하고, 다음 세 가지 경우에 대해 2차원 공간에서 두 벡터의 span이 어떻게 달라지는지 설명하시오: (a) v = [1, 2], w = [3, 1] (b) v = [2, 4], w = [1, 2] (c) v = [0, 0], w = [1, 2]

문제 3

3차원 공간에서 다음 세 벡터를 고려하시오:

```
v = [1, 0, 0]
w = [0, 1, 0]
u = [2, 3, 0]
```

이 벡터들이 선형종속인지 선형독립인지 판단하고, 그 이유를 설명하시오. 또한 이 세 벡터의 span이 무엇인지 서술하시오.

문제 4

"기저(basis)"의 정의를 선형독립과 span의 개념을 사용하여 설명하시오. 그리고 왜 2차원 공간의 기저는 정확히 2개의 벡터를 가져야 하는지 논리적으로 서술하시오.

문제 5

다음 두 벡터가 3차원 공간에서 주어졌을 때:

```
v = [1, 2, 1]
w = [0, 1, 2]
```

이 두 벡터의 span을 기하학적으로 설명하고, 여기에 어떤 벡터 u를 추가하면 3차원 공간 전체를 span할 수 있는지 예를 들어 설명하시오. u가 만족해야 할 조건은 무엇인가?

---

3. 퀴즈 답

문제 1 답안

선형결합의 정의: 선형결합은 벡터들을 각각 스칼라로 곱한 후 모두 더하는 것입니다. 일반적으로 벡터 $v_1, v_2, ..., v_n$의 선형결합은:

```
a₁v₁ + a₂v₂ + ... + aₙvₙ
```

여기서 $a_1, a_2, ..., a_n$은 스칼라입니다.

계산:

```
3v - 2w = 3[2, 1] - 2[1, 3]
        = [6, 3] - [2, 6]
        = [6-2, 3-6]
        = [4, -3]
```

"선형"이라는 이름의 기하학적 의미:

"선형(linear)"이라는 단어는 "직선(line)"과 관련이 있습니다:

1. **하나의 스칼라를 고정:**
   - 예: 3v + bw에서 b를 변화시키면
   - 결과 벡터: 3v + 0w, 3v + 1w, 3v + 2w, ...
   - 이 벡터들의 끝점은 **직선**을 그립니다
2. **두 스칼라를 모두 변화:**
   - av + bw에서 a와 b를 모두 변화시키면
   - 결과 벡터들의 끝점은 평면을 채웁니다
   - 하지만 각각을 따로 보면 **직선**들의 집합

선형결합의 핵심은 **스칼라를 변화시킬 때 결과가 직선을 따라 움직인다**는 것입니다. 이것이 "선형" 대수학의 근본입니다 - 모든 것이 직선과 평면으로 이루어져 있습니다.

문제 2 답안

Span의 정의: 벡터들의 span은 그 벡터들의 모든 가능한 선형결합의 집합입니다. 즉, 주어진 벡터들을 스케일하고 더해서 도달할 수 있는 모든 벡터의 집합입니다.

(a) v = [1, 2], w = [3, 1]

두 벡터가 **서로 다른 방향**을 가리킵니다 (하나가 다른 것의 스칼라 배수가 아님).

- **선형독립 확인:** $w \neq cv$ (어떤 스칼라 c에 대해서도)
- **Span: 2차원 평면 전체**

설명:

- 스칼라 a, b를 자유롭게 조절하면
- av + bw의 끝점이 평면 전체를 채웁니다
- 어떤 2D 벡터든 이 두 벡터의 선형결합으로 표현 가능

(b) v = [2, 4], w = [1, 2]

w = 0.5v이므로 두 벡터가 **같은 방향**입니다.

- **선형종속:** w는 v의 스칼라 배수
- **Span: 원점을 지나는 하나의 직선**

설명:

- av + bw = av + b(0.5v) = (a + 0.5b)v
- 결과는 항상 v 방향의 벡터
- 끝점들이 직선 위에만 존재

(c) v = [0, 0], w = [1, 2]

v가 **영벡터**입니다.

- **선형종속:** v는 모든 벡터에 선형종속
- **Span: 원점을 지나는 하나의 직선** (w 방향)

설명:

- av + bw = a[0, 0] + bw = bw
- 첫 번째 벡터는 아무 기여도 안 함
- 결과는 w의 스칼라 배수만 가능

문제 3 답안

주어진 벡터:

```
v = [1, 0, 0]
w = [0, 1, 0]
u = [2, 3, 0]
```

선형종속/독립 판단:

이 벡터들은 **선형종속**입니다.

증명: u가 v와 w의 선형결합으로 표현되는지 확인:

```
u = av + bw
[2, 3, 0] = a[1, 0, 0] + b[0, 1, 0]
[2, 3, 0] = [a, b, 0]
```

따라서 a = 2, b = 3일 때:

```
u = 2v + 3w ✓
```

u는 v와 w로 표현 가능하므로, u는 v, w에 **선형종속**입니다.

Span:

세 벡터의 span은 **xy평면** (z = 0인 평면)입니다.

설명:

- v와 w는 xy평면을 span합니다 (z성분이 모두 0)
- u도 xy평면 위에 있습니다 (z = 0)
- 어떤 선형결합 av + bw + cu를 만들어도:
  ```
  a[1,0,0] + b[0,1,0] + c[2,3,0] = [a+2c, b+3c, 0]
  ```
  z성분은 항상 0

결론:

- 3차원 공간에 3개 벡터가 있지만
- 선형종속이므로 3D 전체를 span하지 못함
- span은 2차원 부분공간 (xy평면)
- 세 번째 벡터는 새로운 차원을 추가하지 못함

문제 4 답안

기저의 정의:

공간의 기저는 다음 두 조건을 동시에 만족하는 벡터들의 집합입니다:

1. **선형독립 (Linearly Independent):**
   - 어떤 벡터도 다른 벡터들의 선형결합으로 표현 불가
   - 각 벡터가 독립적인 방향 제공
   - 중복이 없음
2. **전체 공간을 Span:**
   - 그 벡터들의 모든 선형결합이 공간의 모든 벡터를 만들 수 있음
   - 도달 불가능한 곳이 없음

2차원 공간의 기저가 정확히 2개인 이유:

너무 적으면 (1개):

- 하나의 벡터 v만으로는 직선만 span
- 2차원 평면 전체에 도달 불가
- 예: v = [1, 0] → x축만 span
- 조건 2 위반 (전체 공간을 span 못함)

딱 맞으면 (2개):

- 두 개의 선형독립 벡터 v, w
- 예: v = [1, 0], w = [0, 1]
- av + bw로 모든 [x, y] 표현 가능
- 조건 1, 2 모두 만족 ✓

너무 많으면 (3개 이상):

- 2차원 공간에 3개 이상의 벡터

- 적어도 하나는 다른 두 개로 표현 가능 (비둘기집 원리)
- 예: v = [1, 0], w = [0, 1], u = [1, 1]
  - u = v + w (선형종속)
- 조건 1 위반 (선형독립 아님)

일반 원리:

- n차원 공간의 기저 = 정확히 n개 벡터
- 이것이 차원(dimension)의 정의
- 2D = 2개, 3D = 3개, nD = n개

결론: 2차원 공간의 기저는 정확히 2개여야 하는 이유:

- 1개: 공간 전체를 못 채움
- 2개: 완벽 (선형독립 + 전체 span)
- 3개 이상: 불필요한 중복 (선형종속 발생)

문제 5 답안

주어진 벡터:

```
v = [1, 2, 1]
w = [0, 1, 2]
```

두 벡터의 Span (기하학적 설명):

v와 w의 span은 **원점을 지나는 평면**입니다.

왜 평면인가?

1. **2개의 벡터 (3D에서):**
   - 3차원 공간에서 2개의 선형독립 벡터는 평면을 span
   - v와 w가 같은 방향이 아니므로 선형독립
2. **시각화:**
   - v를 스케일: v의 방향으로 직선 생성
   - w를 스케일: w의 방향으로 직선 생성
   - 두 스칼라를 모두 조절: av + bw
   - 결과 벡터들의 끝점이 평면을 채움
3. **평면의 특징:**
   - 원점을 지남 (0v + 0w = [0, 0, 0])
   - v와 w를 포함
   - 두 벡터에 의해 "펼쳐진" 2D 시트

3D 전체를 span하려면:

세 번째 벡터 u는 **v와 w의 span(평면) 밖에 있어야** 합니다.

조건: u ≠ av + bw (모든 스칼라 a, b에 대해)

즉, u는 v와 w로 표현 불가능해야 합니다.

예시 1: 간단한 선택

```
u = [0, 0, 1]
```

확인:

- v = [1, 2, 1], w = [0, 1, 2]의 선형결합:
  - av + bw = [a, 2a+b, a+2b]
  - 세 번째 성분: a + 2b
- u = [0, 0, 1]을 만들려면:
  - a = 0, 2a+b = 0 → b = 0
  - a + 2b = 0 + 0 = 0 ≠ 1 ✗
- u는 평면 밖에 있음 ✓

예시 2: 다른 선택

```
u = [1, 0, 0]
```

확인:

- av + bw = [a, 2a+b, a+2b] = [1, 0, 0]
- a = 1, 2a+b = 0 → b = -2
- a + 2b = 1 - 4 = -3 ≠ 0 ✗
- u는 평면 밖에 있음 ✓

일반적 방법: v와 w에 선형독립인 벡터를 찾으려면:

1. 외적(cross product) 사용: u = v × w
2. 또는 평면에 수직인 임의의 벡터
3. 또는 무작위로 선택 (거의 확실히 평면 밖)

최종 답:

- v, w의 span: 원점을 지나는 평면
- u의 조건: 이 평면 밖의 아무 벡터 (v, w에 선형독립)
- 예: u = [0, 0, 1] 또는 u = [1, 0, 0]
- {v, w, u}는 3D 전체를 span (3D 공간의 기저)