좌표계와 기저

우리가 벡터를 [3, 2]와 같이 숫자로 표현할 때, 이것은 암묵적으로 **표준 기저벡터**를 사용하고 있다는 의미입니다.

- 표준 기저: $\hat{\imath}$ = [1, 0], $\hat{\jmath}$ = [0, 1]
- 벡터 [3, 2] = $3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$

하지만 **기저벡터의 선택은 임의적**입니다. 다른 사람은 다른 기저벡터를 사용할 수 있습니다.

다른 좌표계에서의 같은 벡터

예를 들어, Jennifer라는 사람이 다음과 같은 기저를 사용한다고 가정해봅시다:

- b_1 = [2, 1] (표준 좌표계에서)
- b_2 = [-1, 1] (표준 좌표계에서)

만약 Jennifer가 어떤 벡터를 [3, 2]라고 표현한다면, 이것은:

- Jennifer의 관점: $3b_1 + 2b_2$
- 우리의 표준 좌표계로 변환하면 다른 숫자가 됩니다!

핵심: 같은 벡터(공간상의 같은 화살표)를 서로 다른 좌표계에서는 다른 숫자로 표현합니다.

Jennifer의 언어를 우리 언어로 번역하기

Jennifer가 [3, 2]라고 말할 때, 이것을 우리 좌표계로 변환하려면:

```
3b₁ + 2b₂ = 3[2, 1] + 2[-1, 1]
```

이것은 **행렬-벡터 곱셈**으로 표현할 수 있습니다:

```
[b₁ b₂] × [3]  =  [2  -1] × [3]
          [2]     [1   1]   [2]
```

여기서 행렬 [b_1 b_2]의 열들은 Jennifer의 기저벡터를 우리 좌표계로 표현한 것입니다.

기저변환 행렬의 의미:

- Jennifer의 기저벡터들을 열로 가진 행렬
- Jennifer의 좌표 → 우리 좌표로 변환
- 일종의 "번역기" 역할

반대 방향 변환: 우리 언어를 Jennifer의 언어로

우리가 [5, 4]라는 벡터를 Jennifer의 좌표계로 표현하려면?

역행렬(Inverse Matrix)을 사용합니다:

```
Jennifer의 좌표 = [b₁ b₂]⁻¹ × [우리 좌표]
```

역행렬은 "변환을 거꾸로 재생하는" 것과 같습니다.

선형변환의 기저 변환

벡터뿐만 아니라 **선형변환 자체도** 다른 좌표계에서 다르게 표현됩니다.

예를 들어, 우리 좌표계에서 90도 반시계방향 회전은:

```
M = [0  -1]
    [1   0]
```

하지만 Jennifer의 좌표계에서 같은 변환을 표현하려면?

변환 행렬의 기저 변환 공식

우리 좌표계의 변환 행렬 M을 Jennifer의 좌표계로 변환:

```
M_Jennifer = P⁻¹ M P
```

여기서:

- $P = [b_1\ b_2]$ (기저변환 행렬)
- P^{-1} = 역기저변환 행렬
- M = 우리 좌표계에서의 변환

의미 이해하기 (오른쪽에서 왼쪽으로 읽기):

1. **P**: Jennifer의 벡터를 우리 언어로 번역
2. **M**: 우리 좌표계에서 변환 수행
3. **P^{-1}**: 결과를 다시 Jennifer의 언어로 번역

이것은 일종의 **"수학적 공감(mathematical empathy)"**입니다:

- 가운데 행렬 M: 당신이 보는 변환
- 양 옆의 P^{-1}과 P: 관점의 전환
- 전체 곱 $P^{-1}MP$: 다른 사람이 보는 같은 변환

실전 예제

표준 기저에서 다음 벡터들을 기저로 사용하는 Jennifer가 있다고 가정:

- $b_1 = [2, 1]$
- $b_2 = [-1, 1]$

문제: Jennifer의 [3, 2]를 우리 좌표로 변환

풀이:

```
[2  -1] × [3]  =  [2×3 + (-1)×2]  =  [4]
[1   1]   [2]     [1×3 + 1×2]        [5]
```

답: [4, 5]

역방향: 우리의 [4, 5]를 Jennifer의 좌표로?

먼저 역행렬 계산:

```
P⁻¹ = [2  -1]⁻¹ = 1/3 × [1   1]  =  [1/3   1/3]
      [1   1]             [-1  2]      [-1/3  2/3]
```

그러면:

```
[1/3   1/3] × [4]  =  [3]
[-1/3  2/3]   [5]     [2]
```

왜 기저 변환이 중요한가?

다음 장의 미리보기: 고유벡터

어떤 변환의 **고유벡터들을 기저로 사용하면**, 그 변환이 **대각행렬**이 됩니다!

```
복잡한 변환 → 고유기저 사용 → 대각행렬 (매우 간단!)
```

이것이 고유벡터와 고유값이 왜 중요한지 보여주는 핵심 이유입니다.

기하학적 직관

기저 변환은 "같은 공간을 다른 렌즈로 바라보는 것"입니다:

- 벡터 자체(화살표)는 변하지 않음
- 하지만 그것을 **표현하는 숫자**가 달라짐
- 마치 같은 온도를 섭씨와 화씨로 표현하는 것과 비슷

핵심 공식 정리

1. **벡터의 기저 변환**
   - Jennifer → 우리: v_우리 = P × v_Jennifer
   - 우리 → Jennifer: v*Jennifer = P⁻¹* × *v*우리
2. **변환 행렬의 기저 변환**
   - M_Jennifer = P^{-1} M P
3. **기저변환 행렬 P**
   - 열들이 새로운 기저벡터들 (표준 좌표로 표현)

---

2. 퀴즈

문제 1

좌표계와 기저의 관계를 설명하시오. 벡터 [3, 2]가 의미하는 바가 사용하는 기저에 따라 어떻게 달라지는지 구체적으로 서술하시오.

문제 2

기저벡터 $b_1 = [1, 2]$, $b_2 = [3, 1]$을 사용하는 좌표계가 있다. 이 좌표계에서 [2, -1]로 표현되는 벡터를 표준 좌표계로 변환하는 과정을 단계별로 서술하고 계산하시오.

문제 3

기저변환 행렬 P와 그 역행렬 P^{-1}의 기하학적 의미를 설명하시오. 각각이 "번역"한다는 표현의 의미를 구체적으로 서술하시오.

문제 4

선형변환 행렬 M을 다른 기저에서 표현하기 위한 공식 $M_새 = P^{-1}MP$를 "수학적 공감"의 관점에서 설명하시오. 오른쪽에서 왼쪽으로 읽으면서 각 행렬이 하는 역할을 단계별로 서술하시오.

문제 5

다음 두 상황의 차이를 설명하시오: (a) 벡터에 변환 M을 적용: Mv (b) 변환 M을 다른 기저로 표현: $P^{-1}MP$

두 경우 모두 행렬 곱셈을 사용하지만 그 의미가 어떻게 다른지 서술하시오.

---

3. 퀴즈 답

문제 1 답안

좌표계는 벡터를 숫자로 표현하는 방식이며, **기저벡터의 선택에 의해 결정**됩니다.

표준 좌표계에서 [3, 2]는:

- 3 × [1, 0] + 2 × [0, 1]
- x방향으로 3, y방향으로 2만큼 이동

하지만 다른 기저를 사용하면, 같은 [3, 2]라는 표현이 다른 벡터를 의미합니다. 예를 들어, $b_1 = [2, 1]$, $b_2 = [-1, 1]$을 기저로 사용하면:

- [3, 2]는 $3b_1 + 2b_2$를 의미
- = 3[2, 1] + 2[-1, 1] = [4, 5] (표준 좌표로)

핵심: 벡터 자체(공간상의 화살표)는 동일하지만, 어떤 기저를 "자(ruler)"로 사용하느냐에 따라 그것을 표현하는 숫자가 달라집니다. 마치 같은 거리를 미터나 피트로 측정할 때 숫자가 달라지는 것과 같습니다.

문제 2 답안

주어진 정보:

- 기저벡터: $b_1 = [1, 2]$, $b_2 = [3, 1]$
- 해당 좌표계에서의 좌표: [2, -1]

단계 1: 의미 이해 [2, -1]은 이 좌표계에서 $2b_1 + (-1)b_2$를 의미합니다.

단계 2: 선형결합으로 전개

```
2b₁ + (−1)b₂ = 2[1, 2] + (−1)[3, 1]
```

단계 3: 성분별로 계산

```
= [2×1, 2×2] + [(−1)×3, (−1)×1]
= [2, 4] + [−3, −1]
= [2−3, 4−1]
= [−1, 3]
```

행렬 형식으로 표현:

```
[b₁ b₂] × [2]    = [1  3] × [ 2]  = [−1]
          [−1]     [2  1]   [−1]    [ 3]
```

답: 표준 좌표계에서 [-1, 3]

문제 3 답안

기저변환 행렬 P:

- P의 열들은 새로운 기저벡터들을 표준 좌표로 표현한 것
- **기하학적 의미:** "새로운 언어 → 표준 언어"로 번역
- P × v는 새로운 좌표계의 좌표 v를 받아서 표준 좌표계의 좌표로 변환

역행렬 P^{-1}:

- **기하학적 의미:** "표준 언어 → 새로운 언어"로 번역
- P^{-1} × v는 표준 좌표계의 좌표 v를 받아서 새로운 좌표계의 좌표로 변환
- P의 변환을 "거꾸로 재생"하는 것

번역의 비유: Jennifer가 프랑스어를 쓰고 우리가 영어를 쓴다면:

- P: 프랑스어 → 영어 사전
- P^{-1}: 영어 → 프랑스어 사전

Jennifer가 "좌표 [3, 2]"라고 말하면 (프랑스어), P를 사용해서 우리 언어(영어)로 번역합니다. 반대로 우리가 말한 좌표를 Jennifer에게 전달하려면 P^{-1}를 사용합니다.

문제 4 답안

공식 $M_새 = P^{-1}MP$는 "같은 변환을 다른 관점에서 보는 것"을 의미하며, **오른쪽에서 왼쪽으로** 다음과 같이 읽습니다:

단계 1: P (가장 오른쪽)

- "새로운 좌표계의 벡터를 우리 언어로 번역"
- Jennifer의 벡터 → 표준 좌표계의 벡터

단계 2: M (가운데)

- "우리 관점에서 변환을 수행"
- 표준 좌표계에서 우리가 이해하는 방식으로 변환 적용

단계 3: P^{-1} (가장 왼쪽)

- "결과를 다시 Jennifer의 언어로 번역"
- 표준 좌표계의 결과 → Jennifer의 좌표계로

"수학적 공감"의 의미: 이것은 다른 사람의 입장이 되어보는 것입니다:

1. Jennifer의 세계로 들어가서 (P)
2. 우리가 아는 방식으로 일을 처리하고 (M)
3. 결과를 다시 Jennifer의 관점으로 번역 (P^{-1})

결국 M_새는 "Jennifer가 직접 보는 같은 변환"입니다. 같은 기하학적 행동이지만, Jennifer의 눈으로 본 행렬 표현입니다.

문제 5 답안

두 상황은 근본적으로 다른 목적을 가집니다:

(a) Mv - 벡터 변환

- **목적:** 벡터를 실제로 변환시킴
- **입력:** 벡터 v
- **출력:** 변환된 새로운 벡터
- **의미:** "공간상에서 벡터를 다른 위치로 이동"
- **예:** 회전, 확대/축소 등을 벡터에 적용

예를 들어, v = [1, 0]이고 M이 90도 회전이면:

- Mv = [0, 1] (실제로 벡터가 회전됨)

(b) $P^{-1}MP$ - 변환 자체를 다시 표현

- **목적:** 같은 변환을 다른 언어로 번역
- **입력:** 변환 행렬 M
- **출력:** 같은 변환을 나타내는 새로운 행렬
- **의미:** "변환의 표현 방식을 바꿈 (변환 자체는 동일)"
- **예:** 같은 회전을 다른 좌표계에서 어떻게 보이는지 표현

예를 들어, M이 표준 좌표계에서 90도 회전이면:

- $P^{-1}MP$ = Jennifer 좌표계에서의 같은 90도 회전
- 기하학적으로 같은 회전이지만, 숫자(행렬 원소)는 다름

핵심 차이:

- (a)는 **벡터를 변화**시킴 → 화살표가 실제로 움직임
- (b)는 **관점을 변화**시킴 → 화살표는 그대로, 설명 방식만 바뀜

이것은 "물리적 행동 vs 관점의 전환"의 차이입니다.

gemini 정리

13장: 기저의 변환 (Change of Basis)

1. 개요 (Introduction)

선형대수학에서 '좌표계'는 절대적인 것이 아니라, 공간을 서술하기 위한 하나의 '언어'에 불과합니다. 서로 다른 기저(Basis)를 사용하는 두 관찰자가 동일한 벡터나 선형 변환을 어떻게 수학적으로 '번역'하여 소통하는지를 이해하는 것이 이번 강의의 핵심입니다.

2. 좌표와 기저의 관계 (Coordinates as Linear Combinations)

2.1. 표준 기저 (Standard Basis)

우리가 흔히 사용하는 좌표계는 암묵적으로 **표준 기저 벡터**를 사용합니다.

- $\hat{i} = [1, 0]^T$: x축 방향 단위 벡터
- $\hat{j} = [0, 1]^T$: y축 방향 단위 벡터

어떤 벡터 $\vec{v} = [3, 2]^T$가 있다는 것은 기저 벡터들의 **선형 결합(Linear Combination)** 을 의미합니다.

$$\vec{v} = 3\hat{i} + 2\hat{j}$$

2.2. 새로운 기저 (Non-standard Basis)

다른 관찰자(영상 속 '제니퍼')가 우리와 다른 기저 벡터 $\vec{b_1}, \vec{b_2}$를 사용한다고 가정해 봅시다.

- 제니퍼의 입장에서 벡터 $[-1, 2]^T$는 다음과 같은 의미를 가집니다.

$$-1\vec{b_1} + 2\vec{b_2}$$

- 하지만 우리의 좌표계에서 보면, 그녀의 그리드(Grid)는 회전되어 있거나 격자 간격이 다를 수 있습니다.

3. 좌표 변환 (Translating Vectors)

서로 다른 언어(기저)를 사용하는 두 관찰자 사이의 벡터 변환을 행렬로 표현할 수 있습니다.

3.1. 다른 기저 $\rightarrow$ 우리 기저 (The Change of Basis Matrix)

제니퍼의 언어로 표현된 좌표 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$를 우리의 좌표 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$로 바꾸는 방법입니다.

1. **기저 행렬 구성 (A):** 제니퍼의 기저 벡터 $\vec{b_1}, \vec{b_2}$를 **우리의 좌표값**으로 표현하여 행렬의 열(Column)로 만듭니다.

$$A = \begin{bmatrix} | & | \\ \vec{b_1} & \vec{b_2} \\ | & | \end{bmatrix}$$

2. **변환 수행:** 행렬-벡터 곱셈을 수행합니다.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

> **직관:** 행렬 벡터 곱셈은 기저 벡터들을 스칼라(x', y')만큼 배수하여 합치는 선형 결합 과정과 동일합니다.

3.2. 우리 기저 $\rightarrow$ 다른 기저 (Inverse Matrix)

우리의 좌표 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$를 제니퍼의 언어 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$로 바꾸려면?

- 변환 행렬 A의 **역행렬 (A^{-1})** 이 필요합니다.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

4. 선형 변환의 변환 (Transforming Linear Maps)

이 챕터의 하이라이트입니다. 벡터뿐만 아니라, **'90도 회전'과 같은 선형 변환(함수) 자체를 다른 기저의 관점에서 표현**하는 방법입니다.

4.1. 문제 설정

- 우리의 좌표계에서 어떤 선형 변환을 나타내는 행렬이 M이라고 합시다. (예: 90도 회전)
- 그렇다면, 제니퍼의 기저($\vec{b_1}, \vec{b_2}$)를 사용하는 좌표계에서 **똑같은 변환**을 수행하려면 어떤 행렬을 곱해야 할까요?

4.2. 유도 과정 ($A^{-1}MA$)

이 과정은 일종의 '샌드위치' 연산 혹은 수학적인 '공감(Empathy)' 과정입니다. 제니퍼의 벡터 $\vec{v}_{jen}$에 변환을 적용하는 순서는 다음과 같습니다.

1. A **(우측 곱셈):** 제니퍼의 언어를 우리 언어로 번역합니다.

$$\vec{v}_{our} = A\vec{v}_{jen}$$

2. M **(중간 곱셈):** 우리 언어 상태에서 변환을 수행합니다.

$$\vec{w}_{our} = M(A\vec{v}_{jen})$$

3. A^{-1} **(좌측 곱셈):** 변환된 결과를 다시 제니퍼의 언어로 번역합니다.

$$\vec{w}_{jen} = A^{-1}(MA\vec{v}_{jen})$$

4.3. 결론

따라서 제니퍼의 좌표계에서 해당 선형 변환을 나타내는 행렬은 다음과 같습니다.

$$M_{jen} = A^{-1}MA$$

> **핵심 요약:**
>
> - $A^{-1}MA$ 형태의 식을 보면 **다른 기저의 관점에서 본 선형 변환**임을 즉시 떠올려야 합니다.
> - 가운데 M은 변환의 본질이며, 양쪽의 A^{-1}와 A는 관점을 이동시키는 역할을 합니다.
> - 수학적으로 두 행렬 M과 $A^{-1}MA$는 **닮음(Similar)** 관계에 있다고 합니다.

5. 학습 포인트 (Key Takeaways)

1. **행렬의 열(Column)의 의미:** 행렬의 열은 변환 후의 기저 벡터가 위치하는 좌표를 나타냅니다. (기저 변환 행렬 A의 열은 새로운 기저 벡터 그 자체입니다.)
2. **역행렬의 의미:** 기저 변환 문맥에서 역행렬은 반대 방향으로의 좌표 번역을 의미합니다.
3. $A^{-1}MA$**의 구조:** 이 구조는 선형대수학 전반(특히 고유값 분해, 대각화 등)에서 계속 등장하므로, 단순히 외우지 말고 **번역** $\to$ **변환** $\to$ **역번역**의 흐름으로 이해해야 합니다.

[서술형 퀴즈] 13강: 기저의 변환

문제 1. 좌표의 본질적 의미

우리가 흔히 사용하는 좌표계에서 벡터 $\vec{v} = [3\ 2]$라고 쓰는 것은, 기저 벡터 $\hat{i}$와 $\hat{j}$를 사용하여 기하학적으로 어떤 연산을 수행한다는 의미입니까? '선형 결합(Linear Combination)'이라는 단어를 사용하여 서술하시오.

A. $\hat{i}$를 3만큼 이동 $\hat{j}$ 를 2만큼 이동

문제 2. 기저 변환 행렬의 구성

다른 좌표계를 사용하는 '제니퍼'의 기저 벡터가 $\vec{b_1}$과 $\vec{b_2}$라고 합시다. 제니퍼의 언어(좌표)를 우리의 언어(좌표)로 번역해 주는 **기저 변환 행렬 A**를 만들려고 할 때, 이 행렬의 **첫 번째 열(Column)**과 **두 번째 열**에는 구체적으로 어떤 숫자들이 들어가야 합니까?

문제 3. 행렬 곱셈의 방향성 (번역의 방향)

위에서 만든 행렬 A를 제니퍼의 좌표 벡터 $[x'\ y']$에 곱하는 연산 $A\,[x'\ y']$은, **"우리의 언어를 제니퍼의 언어로"** 바꾸는 것입니까, 아니면 **"제니퍼의 언어를 우리의 언어로"** 바꾸는 것입니까? 그렇게 되는 이유를 직관적으로(기저 벡터의 스칼라배 관점에서) 설명하시오.

문제 4. 선형 변환의 번역 (A−1MA)

우리의 좌표계에서 '90도 회전'을 나타내는 행렬이 M이고, 기저 변환 행렬이 A일 때, 제니퍼의 좌표계에서 동일한 '90도 회전'을 수행하는 행렬은 A−1MA로 표현됩니다. 이 식에서 입력 벡터 $\vec{x}$가 들어왔을 때 연산이 수행되는 순서대로(오른쪽에서 왼쪽으로) **A, M, A^{-1}가 각각 어떤 역할을 수행하는지** 단계별로 서술하시오.

문제 5. 닮음 (Similarity)

선형대수학에서 두 행렬 C와 D가 D=P−1CP의 관계를 가질 때, 이 두 행렬은 **"닮음(Similar)"** 관계에 있다고 합니다. 13강의 내용을 바탕으로, 두 행렬이 '닮았다'는 것은 기하학적으로(혹은 선형 변환의 관점에서) 무엇이 같다는 뜻인지 서술하시오.

[모범 답안 및 해설]

답안 1.

좌표 $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$는 첫 번째 기저 벡터 $\hat{i}$를 3배 늘리고, 두 번째 기저 벡터 $\hat{j}$를 2배 늘려서 더한 결과, 즉 $3\hat{i} + 2\hat{j}$**라는 선형 결합**을 의미한다. 좌표값은 각 기저 벡터에 곱해지는 스칼라(Scalar) 값이다.

답안 2.

행렬 A의 **첫 번째 열**에는 제니퍼의 첫 번째 기저 벡터 $\vec{b_1}$을 **우리의 좌표계로 표현한 좌표값**이 들어가야 하고, **두 번째 열**에는 그녀의 두 번째 기저 벡터 $\vec{b_2}$를 **우리의 좌표계로 표현한 값**이 들어가야 한다.

즉, $A = \begin{bmatrix} | & | \\ \vec{b}_{1(\text{our view})} & \vec{b}_{2(\text{our view})} \\ | & | \end{bmatrix}$ 이다.

답안 3.

"제니퍼의 언어를 우리의 언어로" 바꾸는 것이다.
이유: 행렬-벡터 곱셈은 행렬의 열들을 벡터의 성분만큼 배수하여 더하는 것이다. 즉, $x'\vec{b_1} + y'\vec{b_2}$를 계산하는 과정인데, 여기서 $\vec{b_1}, \vec{b_2}$가 이미 '우리의 언어'로 적혀 있으므로, 계산 결과도 우리의 좌표계로 나온다.

답안 4.

수식 $A^{-1}MA\vec{x}_{jen}$의 처리 순서는 다음과 같다.

1. A **(우측):** 제니퍼의 좌표($\vec{x}_{jen}$)를 받아서 **우리의 좌표로 번역**한다.
2. M **(중간):** 번역된 벡터를 우리 좌표계 상에서 **변환(회전)시킨다.**
3. A^{-1} **(좌측):** 변환된 결과를 다시 **제니퍼의 좌표계로 번역(복귀)**한다.

답안 5.

두 행렬이 닮았다는 것은, **"서로 다른 기저(좌표계)를 사용하고 있을 뿐, 본질적으로는 '똑같은 선형 변환'을 나타내고 있다"**는 뜻이다.
(예를 들어, 나에게는 $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$으로 보이는 90도 회전이, 다른 기저를 쓰는 사람에게는 전혀 다른 숫자의 행렬로 보일 수 있지만, 두 행렬은 같은 물리적 변환을 나타내므로 '닮음' 관계이다.)

```
Dataview (inline field '[2×1, 2×2] + [(−1)×3, (−1)×1]
= [2, 4] + [−3, −1]
= [2−3, 4−1]
= [−1, 3]'): Error:
-- PARSING FAILED --------------------------------------------------

> 1 | [2×1, 2×2] + [(−1)×3, (−1)×1]
    |    ^
  2 | = [2, 4] + [−3, −1]
  3 | = [2−3, 4−1]

Expected:

list ('[1, 2, 3]')
```