벡터에 대한 세 가지 관점

벡터를 이해하는 방법은 크게 세 가지가 있습니다:

1. 물리학자의 관점: 화살표

- 벡터는 **공간상의 화살표**입니다
- 길이(크기, magnitude)와 방향(direction)을 가집니다
- 2차원이나 3차원 공간에 존재합니다
- 어디에 위치하든 길이와 방향이 같으면 같은 벡터로 간주합니다

중요한 규칙: 선형대수에서 벡터는 항상 **원점(origin)** 에서 시작한다고 생각합니다. 벡터의 끝점 위치가 벡터를 정의합니다.

2. 컴퓨터과학자의 관점: 숫자 리스트

- 벡터는 **숫자들의 순서있는 목록**입니다
- 예: [3, 2]는 2차원 벡터, [1, -4, 5]는 3차원 벡터
- 각 숫자는 좌표(coordinate)입니다

3. 수학자의 관점: 추상적 개념

- 벡터는 덧셈과 스칼라 곱셈이 정의된 모든 것입니다
- 가장 일반적이고 추상적인 관점
- (이 시리즈의 마지막 강의에서 자세히 다룹니다)

핵심: 선형대수의 유용성은 이 세 관점 사이를 **자유롭게 번역**할 수 있다는 데 있습니다.

좌표계 (Coordinate System)

2차원에서 벡터를 숫자로 표현하려면 좌표계가 필요합니다:

- **x축(x-axis)**: 수평선
- **y축(y-axis)**: 수직선
- **원점(origin)**: 두 축이 만나는 점

벡터 [3, 2]의 의미:

- 첫 번째 숫자(3): x축 방향으로 3만큼
- 두 번째 숫자(2): y축 방향으로 2만큼

기저벡터 (Basis Vectors)

좌표를 다르게 생각하는 방법:

```
[3, 2] = 3 × [1, 0] + 2 × [0, 1]
```

여기서:

- **î** (i-hat) = [1, 0]: x축 방향 단위벡터
- **ĵ** (j-hat) = [0, 1]: y축 방향 단위벡터

이 두 벡터를 **기저벡터(basis vectors)**라고 합니다.

선형대수의 관점: 좌표 [3, 2]는 "î를 3배 스케일하고 ĵ를 2배 스케일한 후 더하라"는 명령입니다.

벡터 연산 1: 벡터 덧셈 (Vector Addition)

기하학적 관점

두 벡터 v와 w를 더하는 방법:

1. w를 v의 끝점으로 이동
2. 원점에서 w의 새 끝점까지 그은 벡터가 v + w

이것을 **"tip-to-tail method"** (꼬리-머리 방법)이라고 합니다.

직관:

- v: "오른쪽으로 3, 위로 1" 이동
- w: "왼쪽으로 2, 위로 2" 이동
- v + w: 두 이동을 차례로 수행한 결과

수치적 관점

각 좌표끼리 더합니다:

```
[x₁] + [x₂] = [x₁ + x₂]
[y₁]   [y₂]   [y₁ + y₂]
```

예:

```
[3 ] + [-2] = [1]
[-1]   [2 ]   [1]
```

기하학적 설명:

- 먼저 오른쪽으로 $x_1 + x_2$만큼
- 그 다음 위로 $y_1 + y_2$만큼

벡터 연산 2: 스칼라 곱셈 (Scalar Multiplication)

스칼라(Scalar)란?

스칼라는 **벡터를 늘리거나 줄이는 숫자**를 의미합니다. 선형대수에서 "숫자"와 "스칼라"는 같은 의미로 사용됩니다.

기하학적 관점

스칼라 곱셈은 벡터를 **늘리거나 줄이거나 뒤집는** 것입니다:

- **2v**: 벡터를 같은 방향으로 2배 늘림

- **0.5v**: 벡터를 같은 방향으로 절반으로 줄임
- **-1.5v**: 벡터를 반대 방향으로 1.5배 늘림
- **0v**: 원점으로 축소 (영벡터)

음수 스칼라: 벡터를 뒤집습니다 (180도 회전 후 스케일)

수치적 관점

각 성분에 스칼라를 곱합니다:

```
c × [x] = [c·x]
    [y]   [c·y]
```

예:

```
2 × [3 ] = [6 ]
    [-1]   [-2]
```

선형대수의 핵심

벡터 덧셈과 스칼라 곱셈은 **선형대수 전체를 관통하는 두 가지 기본 연산**입니다.

이 시리즈의 거의 모든 주제는 이 두 연산을 중심으로 전개됩니다:

- 선형결합(linear combinations)
- Span
- 기저(basis)
- 선형변환(linear transformations)
- 행렬(matrices)
- 행렬식(determinants)
- 고유벡터(eigenvectors)
- 등등...

관점의 전환 능력

선형대수의 진정한 힘:

1. **데이터 분석가:** 많은 숫자 목록을 시각적으로 개념화
   - 데이터의 패턴을 명확히 볼 수 있음
   - 연산이 무엇을 하는지 전체적 관점에서 이해
2. **물리학자/그래픽 프로그래머:** 공간과 공간의 조작을 숫자로 표현
   - 컴퓨터가 처리할 수 있는 형태로 변환
   - 예: 3D 애니메이션 - 공간에서 무슨 일이 일어나는지 생각한 후, 숫자로 표현하여 픽셀 위치 계산

2차원 vs 3차원

2차원 벡터

```
[x, y]
```

- 평면상의 점/화살표
- 기저: î = [1, 0, 0], ĵ = [0, 1, 0]

3차원 벡터

```
[x, y, z]
```

- 공간상의 점/화살표
- 기저: î = [1, 0, 0], ĵ = [0, 1, 0], k̂ = [0, 0, 1]

연산은 동일:

- 덧셈: 각 성분끼리 더함
- 스칼라 곱셈: 각 성분에 곱함

실전 예제

예제 1: 벡터 덧셈

```
v = [4, -2]
w = [6, 2]
v + w = ?
```

기하학적으로:

1. 오른쪽 4, 아래 2
2. 오른쪽 6, 위 2
3. 총: 오른쪽 10, 위 0

수치적으로:

```
[4 ] + [6] = [10]
[-2]   [2]   [0 ]
```

예제 2: 스칼라 곱셈

```
3 × [2, 1] = ?
```

```
3 × [2] = [6]
    [1]   [3]
```

벡터 [2, 1]을 같은 방향으로 3배 늘린 것입니다.

예제 3: 조합

```
2[1, 2] + 3[-1, 1] = ?
```

```
2[1] + 3[-1] = [2 ] + [-3] = [-1]
 [2]     [1 ]   [4 ]   [3 ]   [7 ]
```

중요한 직관 정리

1. **벡터는 위치가 아니라 이동입니다**
   - 원점에서 시작하는 화살표로 생각
   - 끝점의 위치로 정의됨
2. **좌표는 기저벡터의 스케일 명령입니다**
   - [3, 2] = "î를 3배, ĵ를 2배"
3. **덧셈은 연속된 이동입니다**
   - 한 벡터의 이동 후 다른 벡터의 이동
4. **스칼라 곱셈은 늘림/줄임/뒤집기입니다**
   - 방향은 유지 (또는 반대로)
   - 크기만 변함
5. **관점 전환이 핵심입니다**
   - 기하학 ↔ 수치 변환 능력
   - 직관과 계산을 연결

---

2. 퀴즈

문제 1

벡터를 이해하는 세 가지 관점(물리학자, 컴퓨터과학자, 수학자)을 각각 설명하고, 선형대수에서 이 세 관점 사이를 전환할 수 있는 능력이 왜 중요한지 서술하시오.

문제 2

벡터 [3, 2]를 기저벡터 î와 ĵ를 사용하여 표현하고, 이것이 좌표를 "스칼라의 명령"으로 해석하는 관점과 어떻게 연결되는지 설명하시오.

문제 3

두 벡터 v = [2, 3]과 w = [-1, 4]의 덧셈을 다음 두 가지 방법으로 설명하시오: (a) 기하학적 관점 (tip-to-tail method) (b) 수치적 관점 (성분별 덧셈) 그리고 두 방법이 왜 같은 결과를 주는지 설명하시오.

문제 4

스칼라 곱셈 -2v (여기서 v = [3, 1])가 의미하는 바를 기하학적으로 설명하고, 수치적으로 계산하시오. 음수 스칼라가 벡터에 미치는 영향을 구체적으로 서술하시오.

문제 5

다음 표현을 계산하고, 그 결과를 기하학적으로 해석하시오:

```
3[1, 2] - 2[2, -1]
```

각 단계에서 무슨 일이 일어나는지 설명하고, 최종 벡터가 의미하는 바를 서술하시오.

---

3. 퀴즈 답

문제 1 답안

세 가지 관점:

1. **물리학자의 관점 - 화살표:** 벡터는 공간상의 화살표로, 길이(크기)와 방향을 가집니다. 선형대수에서는 항상 원점에서 시작하며, 끝점의 위치로 벡터를 정의합니다. 이동이나 속도처럼 크기와 방향이 있는 물리적 양을 표현합니다.
2. **컴퓨터과학자의 관점 - 숫자 리스트:** 벡터는 순서가 있는 숫자들의 목록입니다. 예를 들어 [3, 2]는 2차원 벡터이며, 각 숫자는 좌표를 나타냅니다. 데이터를 저장하고 계산하기에 효율적입니다.
3. **수학자의 관점 - 추상적 개념:** 벡터는 덧셈과 스칼라 곱셈이 정의된 모든 것입니다. 화살표나 숫자 목록뿐만 아니라, 함수나 다른 수학적 객체도 벡터가 될 수 있습니다. 가장 일반적이고 포괄적인 정의입니다.

관점 전환의 중요성:

선형대수의 진정한 힘은 이 관점들 사이를 자유롭게 전환할 수 있다는 데 있습니다:

- **데이터 분석가**: 많은 숫자(데이터)를 기하학적으로 시각화하여 패턴을 발견하고 연산의 의미를 직관적으로 이해할 수 있습니다.
- **물리학자/프로그래머**: 공간에서 일어나는 일을 먼저 생각한 후, 이를 숫자로 변환하여 컴퓨터가 계산하고 화면에 표시할 수 있게 합니다.

즉, 기하학적 직관(시각화)과 수치적 계산(실제 계산)을 연결하는 다리 역할을 하며, 이것이 선형대수를 강력하고 유용하게 만듭니다.

문제 2 답안

기저벡터 표현:

벡터 [3, 2]는 다음과 같이 표현됩니다:

```
[3, 2] = 3î + 2ĵ
       = 3[1, 0] + 2[0, 1]
```

여기서:

- $\hat{i}$ = [1, 0]: x축 방향의 단위 기저벡터
- $\hat{j}$ = [0, 1]: y축 방향의 단위 기저벡터

"스칼라의 명령"으로서의 좌표:

이 표현은 좌표를 다음과 같이 해석합니다:

- 첫 번째 좌표 3: "$\hat{i}$를 3배 스케일하라"
- 두 번째 좌표 2: "$\hat{j}$를 2배 스케일하라"
- 그리고 이 둘을 더하라

즉, 좌표 [3, 2]는 단순히 "x는 3, y는 2"라는 위치 정보가 아니라:

1. î를 3배로 늘려서 [3, 0] 만들기 (스칼라 곱셈)
2. ĵ를 2배로 늘려서 [0, 2] 만들기 (스칼라 곱셈)
3. 두 결과를 더하기 (벡터 덧셈)
4. 최종 결과: [3, 2]

연결:

이것은 좌표를 수동적인 "위치 데이터"가 아니라 능동적인 "구성 명령"으로 보는 관점입니다. 모든 벡터는 기저벡터들의 **선형결합(linear combination)**으로 표현되며, 좌표는 각 기저벡터에 곱할 스칼라 값입니다.

이 관점은 선형대수 전체에서 매우 중요하며, 특히 기저 변환, 선형변환, 행렬 곱셈 등을 이해하는 데 핵심이 됩니다.

문제 3 답안

주어진 벡터:

- v = [2, 3]
- w = [-1, 4]

(a) 기하학적 관점 (tip-to-tail method):

1. **벡터 v를 그립니다:**
    - 원점에서 시작
    - 오른쪽으로 2, 위로 3 이동
    - 끝점: (2, 3)
2. **벡터 w를 v의 끝점에서 시작하도록 이동합니다:**
    - v의 끝점 (2, 3)에서 시작
    - 왼쪽으로 1, 위로 4 이동
    - 새 끝점: (2-1, 3+4) = (1, 7)
3. **결과 벡터 v + w:**
    - 원점에서 (1, 7)까지의 벡터
    - v + w = [1, 7]

직관: v의 이동을 수행한 후 w의 이동을 계속하면, 전체 이동은 두 이동을 합친 것입니다.

(b) 수치적 관점 (성분별 덧셈):

각 좌표를 개별적으로 더합니다:

```
v + w = [2 ] + [-1] = [2 + (-1)] = [1]
        [3 ]   [4 ]   [3 + 4   ]   [7]
```

- x 성분: 2 + (-1) = 1
- y 성분: 3 + 4 = 7
- 결과: [1, 7]

두 방법이 같은 이유:

기하학적으로 생각해보면:

- v의 이동: 오른쪽 2, 위 3

- w의 이동: 왼쪽 1 (= 오른쪽 -1), 위 4

전체 이동을 x와 y 방향으로 분해하면:

- x 방향 총 이동: 2 + (-1) = 1
- y 방향 총 이동: 3 + 4 = 7

이것이 바로 성분별 덧셈입니다! 각 방향의 이동을 독립적으로 합산하는 것이 tip-to-tail 방법과 동일한 최종 위치를 줍니다.

문제 4 답안

주어진 식:

- v = [3, 1]
- -2v = ?

수치적 계산:

```
-2v = -2 × [3] = [-2 × 3] = [-6]
            [1]   [-2 × 1]   [-2]
```

기하학적 의미:

1. **스칼라 2의 효과:**
   - 벡터 v를 같은 방향으로 2배 늘립니다
   - 원래 길이가 $\sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$이었다면
   - 새 길이는 $2\sqrt{10}$이 됩니다
2. **음수 부호의 효과:**
   - 벡터를 180도 회전시킵니다 (반대 방향으로 뒤집음)
   - v = [3, 1]이 오른쪽 위를 가리킨다면
   - -2v = [-6, -2]는 왼쪽 아래를 가리킵니다
3. **전체 효과:**
   - 벡터를 반대 방향으로 뒤집고 2배 늘립니다
   - 시각적으로: v와 정확히 반대 방향이지만 2배 더 긴 화살표

음수 스칼라의 일반적 영향:

- **양수 스칼라 ($c > 0$):** 벡터를 같은 방향으로 c배 늘림
- **음수 스칼라 ($c < 0$):** 벡터를 반대 방향으로 |c|배 늘림
- **특별한 경우:**
  - c = 1: 벡터 그대로
  - c = -1: 방향만 반대로 (크기 동일)
  - c = 0: 영벡터 [0, 0]

결론: -2v = [-6, -2]는 원래 벡터 v의 반대 방향을 가리키며 길이는 2배입니다.

문제 5 답안

주어진 식:

```
3[1, 2] - 2[2, -1]
```

단계별 계산:

단계 1: 스칼라 곱셈 수행

첫 번째 항:

```
3[1] = [3]
 [2]    [6]
```

두 번째 항:

```
2[2 ] = [4 ]
 [-1]    [-2]
```

단계 2: 뺄셈을 덧셈으로 변환

뺄셈은 음수를 더하는 것과 같습니다:

```
3[1, 2] - 2[2, -1] = 3[1, 2] + (-2)[2, -1]
                    = [3] + [-4]
                      [6]   [2 ]
```

단계 3: 벡터 덧셈

```
[3] + [-4] = [3 + (-4)] = [-1]
[6]   [2 ]   [6 + 2   ]   [8 ]
```

최종 답: [-1, 8]

기하학적 해석:

1. **3[1, 2] = [3, 6]:**
   - 벡터 [1, 2]를 3배로 늘립니다
   - 오른쪽 3, 위 6 이동
2. **2[2, -1] = [4, -2]:**
   - 벡터 [2, -1]을 2배로 늘립니다
   - 오른쪽 4, 아래 2 이동
3. **뺄셈 (반대 방향으로 더하기):**
   - 2[2, -1]을 빼는 것 = [-4, 2]를 더하는 것
   - 왼쪽 4, 위 2 이동
4. **전체 이동:**
   - 먼저: 오른쪽 3, 위 6
   - 그 다음: 왼쪽 4, 위 2
   - 총합: 왼쪽 1 (= 오른쪽 -1), 위 8

최종 벡터의 의미:

결과 벡터 [-1, 8]은:

- 원점에서 시작
- x 방향으로 -1 (왼쪽으로 1)
- y 방향으로 8 (위로 8)
- 거의 수직에 가까우며 왼쪽으로 약간 기울어진 벡터

이 문제는 선형대수의 핵심 연산들(스칼라 곱셈, 벡터 덧셈/뺄셈)이 어떻게 조합되어 새로운 벡터를 만드는지 보여줍니다. 이런 조합을 **선형결합(linear combination)** 이라고 하며, 다음 강의의 핵심 주제입니다.