

이 장의 목적

짧은 보충 강의:

- 비정방 행렬(nonsquare matrices)의 기하학적 의미
- 서로 다른 차원 사이의 변환
- 지금까지 배운 개념의 자연스러운 확장

왜 중요한가?

- 행렬 곱셈을 더 깊이 이해
- 선형 시스템을 일반화
- 내적(dot product)의 기초 (다음 장)

지금까지 배운 것

정방 행렬만 다룸:

- 2×2 : $2D \rightarrow 2D$
- 3×3 : $3D \rightarrow 3D$
- $n \times n$: $nD \rightarrow nD$

같은 차원 내 변환:

입력 차원 = 출력 차원

차원 간 변환의 필요성

질문: "서로 다른 차원 사이의 변환은 어떻게 표현하나?"

예:

- $2D \rightarrow 3D$: 평면을 3차원 공간에 임베딩
- $3D \rightarrow 2D$: 3차원을 평면에 투영
- $3D \rightarrow 1D$: 공간을 직선에 투영

여전히 선형:

- 직선은 직선으로
- 격자선 평행 유지
- 원점 고정

행렬 크기 해석

$m \times n$ 행렬:

- n 개 열: 입력 차원 (n 차원 벡터)
- m 개 행: 출력 차원 (m 차원 벡터)

읽는 법:

$$m \times n \text{ 행렬} = nD \rightarrow mD \text{ 변환}$$

예:

- 3×2 : $2D \rightarrow 3D$
- 2×3 : $3D \rightarrow 2D$
- 1×3 : $3D \rightarrow 1D$
- 4×2 : $2D \rightarrow 4D$

$2D \rightarrow 3D$ 변환

예제: 3×2 행렬

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad (3\text{개 행, } 2\text{개 열})$$

의미:

- **2개 열**: 입력 공간이 $2D$ (\hat{i}, \hat{j})
- **3개 행**: 출력이 $3D$ (각 좌표가 3개)

변환:

$$\begin{aligned} \hat{i} &= [1, 0] \rightarrow [2, -1, -2] && (\text{첫 번째 열}) \\ \hat{j} &= [0, 1] \rightarrow [0, 1, 1] && (\text{두 번째 열}) \end{aligned}$$

기하학적 의미:

입력 공간: $2D$ 평면 (xy 평면)

출력 공간: $3D$ 공간

변환 과정:

1. $2D$ 평면의 기저벡터 \hat{i}, \hat{j}
2. 각각이 $3D$ 공간의 어디로 가는지 추적
3. $2D$ 평면 전체가 $3D$ 공간의 평면으로 매핑

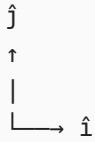
열공간:

$$\text{Col}(A) = \text{span}([2, -1, -2], [0, 1, 1])$$

- $3D$ 공간을 지나는 $2D$ 평면
- 원점을 지남
- 이 평면이 출력의 전부

시각화:

입력 (2D):



출력 (3D):



2D 격자 → 3D 평면에 "붙음"

Full Rank 개념

이 경우:

$$\text{rank}(A) = 2$$

왜 **Full Rank**?

- 입력 공간의 차원 = 2
- 열공간의 차원 = 2
- 정보 손실 없음

일반적 정의:

$$\text{Full rank: rank} = \min(m, n)$$

- 3×2 행렬: full rank는 2
- 2×3 행렬: full rank는 2
- 5×7 행렬: full rank는 5

행렬-벡터 곱셈

2D 벡터를 **3D**로:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + 0y \\ -x + y \\ -2x + y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

의미:

- x, y = 2D 좌표
- 결과 = 3D 좌표
- 2D 평면의 점 → 3D 평면의 점

예:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ & & -5 \end{bmatrix}$$

2D의 점 (3, 1) → 3D의 점 (6, -2, -5)

3D → 2D 변환

예제: 2×3 행렬

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \end{bmatrix} \quad (2\text{개 행}, 3\text{개 열})$$

의미:

- 3개 열: 입력이 3D (i, j, k)
- 2개 행: 출력이 2D

변환:

$$\begin{aligned} \hat{i} &= [1, 0, 0] \rightarrow [3, 1] && (\text{첫 번째 열}) \\ \hat{j} &= [0, 1, 0] \rightarrow [1, 5] && (\text{두 번째 열}) \\ \hat{k} &= [0, 0, 1] \rightarrow [4, 9] && (\text{세 번째 열}) \end{aligned}$$

기하학적 의미:

입력: 3D 공간

출력: 2D 평면

변환 과정:

- 3D의 세 기저벡터가 2D로
- 3D 공간 전체가 2D 평면으로 "투영"

열공간:

$$\text{Col}(B) = \text{span}([3, 1], [1, 5], [4, 9])$$

하지만 2D에서는:

$$\text{실제 span} = 2\text{D 전체 (세 벡터가 2D를 span)}$$

Full Rank?

$$\text{rank}(B) = 2 \quad (\text{full rank})$$

입력 3D이지만 출력은 최대 2D

3D → 1D 변환

예제: 1×3 행렬

$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ (1개 행, 3개 열)

의미:

- **3개 열:** 입력이 3D
- **1개 행:** 출력이 1D (수직선)

변환:

$\hat{i} = [1, 0, 0] \rightarrow 1$
 $\hat{j} = [0, 1, 0] \rightarrow 2$
 $\hat{k} = [0, 0, 1] \rightarrow 3$

기하학적 의미:

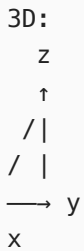
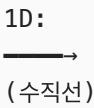
3D 공간 \rightarrow 수직선 (1D)

행렬-벡터 곱셈:

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = x + 2y + 3z$

결과는 숫자 (스칼라)

시각화:

3D:  1D: 

3D 점 \rightarrow 1D 점(숫자)

예:

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 + 0 + 6 = 7$

3D 점 (1, 0, 2) \rightarrow 1D 점 7

특별한 경우: **1×n 행렬**

1×2 행렬:

$D = \begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix}$

의미: $2D \rightarrow 1D$ (수직선)

변환:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 3x - y$$

기하학적:

- 2D 평면의 각 점 \rightarrow 숫자
- 평면 \rightarrow 직선으로 투영

연결: 이것이 바로 내적(dot product)!

$$\begin{bmatrix} 3, & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x, & y \end{bmatrix} = 3x - y$$

$1 \times n$ 행렬 = n 차원 벡터와의 내적 (다음 장에서 상세히)

행렬 곱셈의 확장

차원 호환성:

$$(m \times n) \times (n \times p) = (m \times p)$$

필수 조건:

- 왼쪽 행렬의 열 수 = 오른쪽 행렬의 행 수

예:

$$\begin{aligned} (3 \times 2) \times (2 \times 4) &= (3 \times 4) \quad \checkmark \\ (2 \times 3) \times (3 \times 1) &= (2 \times 1) \quad \checkmark \\ (3 \times 2) \times (3 \times 4) &= ??? \quad \times \end{aligned}$$

기하학적 의미:

예: $(3 \times 2) \times (2 \times 4) = (3 \times 4)$

Step 1: $4D \rightarrow 2D$ (2×4 행렬)
Step 2: $2D \rightarrow 3D$ (3×2 행렬)
합성: $4D \rightarrow 3D$ (3×4 행렬)

중간 차원(2D)이 일치해야 합성 가능!

$2D \rightarrow 1D$ 변환의 시각화

설정:

$$\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = ax + by$$

시각화 방법:

입력 공간: 2D 평면에 균등한 점들

변환:

각 점 $(x, y) \rightarrow$ 숫자 $(ax + by)$

출력 공간: 수직선에 점들

관찰:

- 2D 직선 \rightarrow 1D 점
- 평행선 \rightarrow 균등 간격 유지
- 원점 $\rightarrow 0$

예:

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x$

- 세로선($x = c$) \rightarrow 점 c
- 평면이 수직선에 "접힘"

계수(Rank)의 재해석

비정방 행렬의 경우:

$\text{rank} = \text{출력 공간의 차원}$

예:

- 3×2 행렬, $\text{rank} = 2$: 3D 공간의 2D 평면
- 2×3 행렬, $\text{rank} = 2$: 2D 평면 전체
- 1×3 행렬, $\text{rank} = 1$: 수직선

Full Rank:

$\text{rank} = \min(\text{행 수}, \text{열 수})$

- 정보 손실이 최소
- 입력 차원을 최대한 보존

응용 예시

1. 컴퓨터 그래픽스:

3D \rightarrow 2D 투영:

- 3D 모델을 2D 화면에

- 2×3 행렬로 표현
- 카메라 투영 행렬

2. 데이터 과학:

차원 축소:

- 고차원 데이터 \rightarrow 저차원
- 예: PCA (주성분 분석)
- $m \times n$ 행렬 ($m < n$)

3. 로보틱스:

센서 데이터:

- 3D 공간의 측정
- 1D 거리 센서
- 1×3 행렬로 투영

4. 물리학:

투영 연산자:

- 3D 벡터를 평면에 투영
- 3×3 행렬이지만 $\text{rank} = 2$
- 한 차원 "제거"

행렬 표기법 해독

행렬을 볼 때:

3×5 행렬:

"5차원 벡터를 입력으로 받아
3차원 벡터를 출력"

7×2 행렬:

"2차원 벡터를 입력으로 받아
7차원 벡터를 출력"

$1 \times n$ 행렬:

"n차원 벡터를 입력으로 받아
숫자(스칼라)를 출력"

다음 장 예고: 내적

$1 \times n$ 행렬의 특별함:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$$

이것은:

$$[a_1, a_2, \dots, a_n] \cdot [x_1, x_2, \dots, x_n]$$

내적 = 1×n 행렬 변환

다음 장에서 이 관계를 깊이 탐구!

핵심 직관 정리

1. 행렬 크기 = 입출력 차원

$m \times n$ 행렬: $nD \rightarrow mD$

2. 열 = 입력 기저벡터의 도착지

- n개 열 = n개 입력 기저
- 각 열 = m차원 좌표

3. 차원 간 변환도 선형

- 직선 \rightarrow 직선
- 격자선 평행
- 원점 고정

4. Full rank = 입력 차원 보존

$$\text{rank} = \min(m, n)$$

5. 행렬 곱셈 = 변환 합성

- 차원 호환성 중요
- $(m \times n)(n \times p) = (m \times p)$

2. 퀴즈

문제 1

$m \times n$ 행렬의 기하학적 의미를 설명하시오. 특히 m (행의 개수)과 n (열의 개수)이 각각 무엇을 나타내는지, 그리고 왜 그런지 서술하시오.

문제 2

다음 행렬을 기하학적으로 해석하시오:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

입력과 출력의 차원, 각 기저벡터가 어디로 매핑되는지, 그리고 열공간이 무엇인지 설명하시오.

문제 3

3×2 행렬이 $2D \rightarrow 3D$ 변환을 나타낸다고 할 때: (a) 이 변환이 full rank인 경우 열공간은 무엇인가? (b) 왜 이 경우를 "full rank"라고 부르는가? (c) rank가 1이라면 어떤 의미인가?

문제 4

$1 \times n$ 행렬(1개 행, n 개 열)의 특별한 의미를 설명하시오. 이러한 행렬과 벡터의 곱셈이 무엇을 나타내는지, 그리고 이것이 다음 장에서 배울 내적(dot product)과 어떤 관계가 있는지 서술하시오.

문제 5

행렬 곱셈 $(m \times n) \times (p \times q)$ 가 정의되기 위한 조건을 차원 간 변환의 합성 관점에서 설명하시오. 특히 $n = p$ 여야 하는 이유를 기하학적으로 서술하고, 결과 행렬의 크기가 $m \times q$ 인 이유를 설명하시오.

3. 퀴즈 답

문제 1 답안

$m \times n$ 행렬의 기하학적 의미:

일반적 형태:

$$m \times n \text{ 행렬} = nD \rightarrow mD \text{ 변환}$$

의미:

- n 차원 벡터를 입력으로 받음
- m 차원 벡터를 출력으로 내보냄

n (열의 개수)의 의미:

1. 입력 공간의 차원:

$$n \text{개의 열} = n \text{개의 기저벡터}$$

이유:

- n 차원 공간은 n 개의 기저벡터 필요
- $\hat{i}_1, \hat{i}_2, \dots, \hat{i}_n$

- 각 기저벡터가 어디로 가는지를 기록

2. 각 열 = 변환된 기저벡터:

n차원 입력 벡터:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \hat{i}_1 + x_2 \hat{i}_2 + \dots + x_n \hat{i}_n$$

변환 후:

$$\begin{aligned} Ax &= x_1(\text{변환된 } \hat{i}_1) + x_2(\text{변환된 } \hat{i}_2) + \dots + x_n(\text{변환된 } \hat{i}_n) \\ &= x_1(1\text{열}) + x_2(2\text{열}) + \dots + x_n(n\text{열}) \end{aligned}$$

따라서:

- n개 열 = n개 입력 기저벡터의 도착지
- 입력 차원 = n

m(행의 개수)의 의미:

1. 출력 공간의 차원:

m개의 행 = m차원 좌표

이유:

- 각 변환된 기저벡터는 m차원 공간에 존재
- m개 좌표로 표현

2. 각 행 = 출력 좌표의 한 성분:

변환된 기저벡터:

$$\text{변환된 } \hat{i}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \leftarrow m\text{개 좌표}$$

따라서:

- m개 행 = m차원 출력 좌표
- 출력 차원 = m

구체적 예:

3×2 행렬:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} \quad (3\text{행}, 2\text{열})$$

해석:

- 2열: 입력은 2D (i, j)
- 3행: 출력은 3D

변환:

$$2D \text{ 평면} \xrightarrow{A} 3D \text{ 공간}$$

기저벡터:

$$\begin{aligned} \hat{i} &= [1, 0] \rightarrow [a, c, e] \quad (3D) \\ \hat{j} &= [0, 1] \rightarrow [b, d, f] \quad (3D) \end{aligned}$$

행렬-벡터 곱:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \\ ex + fy \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} a \\ c \\ e \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} b \\ d \\ f \end{bmatrix}$$

2D 입력 (x, y) → 3D 출력

일반적 원리:

행렬의 구조:

$$\begin{array}{ccccccc} [\leftarrow m\text{차원} \rightarrow] & & & & & & \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \uparrow & & \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & | & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & n\text{개 열} & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & \downarrow & & \end{array}$$

각 열:

- n차원 입력 기저벡터의 변환
- m차원 좌표로 표현

행렬 전체:

- n차원 → m차원 변환 완전 설명

결론: 행렬의 크기 $m \times n$ 은 변환의 입출력 차원을 직접적으로 나타내며, 이는 선형변환의 본질적인 특성입니다.

문제 2 답안

주어진 행렬:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad (2\text{행}, 3\text{열})$$

(1) 입력과 출력의 차원:

행렬 크기 분석:

- 3개 열: 입력이 3차원
- 2개 행: 출력이 2차원

변환:

$$3D \rightarrow 2D$$

입력: 3차원 벡터 $[x, y, z]$ 출력: 2차원 벡터

(2) 각 기저벡터의 매핑:

3차원 표준 기저벡터:

$$\begin{aligned}\hat{i} &= [1, 0, 0] \\ \hat{j} &= [0, 1, 0] \\ \hat{k} &= [0, 0, 1]\end{aligned}$$

변환 후 위치:

\hat{i} 의 변환 (첫 번째 열):

$$\hat{i} = [1, 0, 0] \rightarrow [2, 1]$$

\hat{j} 의 변환 (두 번째 열):

$$\hat{j} = [0, 1, 0] \rightarrow [-1, 0]$$

\hat{k} 의 변환 (세 번째 열):

$$\hat{k} = [0, 0, 1] \rightarrow [3, 4]$$

(3) 기하학적 의미:

3D 공간의 기저벡터들:

- x축 단위벡터 → 2D의 [2, 1]
- y축 단위벡터 → 2D의 [-1, 0]
- z축 단위벡터 → 2D의 [3, 4]

변환 과정:

- 3D 공간 전체가 2D 평면으로 "투영"
- 3D의 격자선이 2D 평면에 그려짐
- 차원 축소

(4) 행렬-벡터 곱셈:

$$\begin{matrix} A & \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 2x - y + 3z \\ x + 4z \end{bmatrix} \end{matrix}$$

선형결합 형태:

$$\begin{aligned} \text{결과} &= x \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \\ &= x(\text{변환된 } \hat{i}) + y(\text{변환된 } \hat{j}) + z(\text{변환된 } \hat{k}) \end{aligned}$$

(5) 열공간 (Column Space):

정의:

$$\text{Col}(A) = \text{span}([2, 1], [-1, 0], [3, 4])$$

분석:

세 벡터 확인:

- [2, 1]
- [-1, 0]
- [3, 4]

선형독립성:

2차원에서 최대 2개 벡터만 선형독립 가능.

확인해보자:

$[3, 4]$ 가 $[2, 1]$ 과 $[-1, 0]$ 의 선형결합인가?

$$\begin{aligned} a[2, 1] + b[-1, 0] &= [3, 4] \\ [2a - b, a] &= [3, 4] \end{aligned}$$

$$a = 4$$

$$2a - b = 3 \rightarrow 8 - b = 3 \rightarrow b = 5$$

$$\text{확인: } 4[2, 1] + 5[-1, 0] = [8, 4] + [-5, 0] = [3, 4] \checkmark$$

따라서 세 번째 열은 앞 두 열의 선형결합!

실제 열공간:

$$\text{Col}(A) = \text{span}([2, 1], [-1, 0])$$

차원 확인:

$[2, 1]$ 과 $[-1, 0]$ 이 선형독립인가?

$$\begin{aligned} a[2, 1] + b[-1, 0] &= [0, 0] \\ [2a - b, a] &= [0, 0] \end{aligned}$$

$$a = 0$$

$$2a - b = 0 \rightarrow b = 0$$

유일해 $(0, 0) \rightarrow$ 선형독립 \checkmark

결론:

$$\begin{aligned} \text{Col}(A) &= 2D \text{ 평면 전체} \\ \text{rank}(A) &= 2 \end{aligned}$$

(6) Full Rank:

$$\text{rank} = 2 = \min(2, 3) \checkmark$$

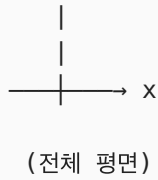
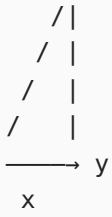
의미:

- 출력 공간(2D)을 완전히 span
- 2D 평면의 모든 점에 도달 가능
- 입력 3D이지만 출력 2D를 모두 활용

시각화:

입력 (3D):
z
↑

출력 (2D):
y
↑



(전체 평면)

3D 공간 \rightarrow 2D 평면 (전체)

결론: 이 행렬은 3D 공간을 2D 평면 전체로 투영하는 full rank 변환입니다.

문제 3 답안

3×2 행렬의 기하학적 분석:

일반 형태:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} \quad (3\text{행}, 2\text{열})$$

변환: 2D \rightarrow 3D

(a) Full rank인 경우의 열공간:

Full rank 조건:

$$\text{rank}(A) = \min(3, 2) = 2$$

의미:

- 두 열벡터가 선형독립
- 입력 2D의 정보를 모두 보존

열벡터:

$$\begin{aligned} v_1 &= [a, c, e] \quad (\text{첫 번째 열}) \\ v_2 &= [b, d, f] \quad (\text{두 번째 열}) \end{aligned}$$

Full rank이면: v_1 과 v_2 가 선형독립

- $v_2 \neq k \cdot v_1$ (어떤 스칼라 k 에 대해서도)

열공간:

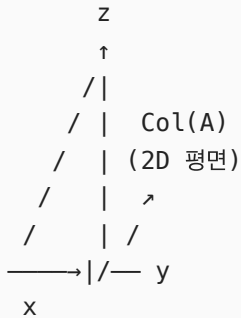
$$\text{Col}(A) = \text{span}(v_1, v_2)$$

기하학적 의미:

3D 공간에서:

- 두 선형독립 벡터의 span = 평면
- 원점을 지나는 2차원 평면
- 3D 공간을 "잘라" 지나감

시각화:



결론: Full rank 3×2 행렬의 열공간은 **3D** 공간을 지나는 **2D** 평면입니다.

(b) 왜 "Full Rank"인가?

Rank의 정의:

rank = 열공간의 차원

3×2 행렬의 경우:

최대 가능 rank:

$$\max \text{rank} = \min(\text{행 수}, \text{열 수}) = \min(3, 2) = 2$$

이유:

1. 입력 차원 제약:

- 입력이 2D
- 2개 기저벡터만
- 최대 2차원 span 가능

2. 출력 차원 여유:

- 출력은 3D
- 2차원 평면을 담기에 충분

Full rank = 최대 rank 달성:

$$\text{rank}(A) = 2 = \max \text{rank}$$

의미:

- 입력 공간의 차원을 완전히 보존
- 정보 손실 없음
- 2D 정보가 모두 3D 평면에 담김

대조: **Not full rank (rank = 1):**

- 두 열벡터가 선형종속
- 예: $v_2 = 2v_1$
- 정보 손실 발생
- $2D \rightarrow 1D$ (직선)로 압축

왜 "**Full**"이라는 표현?

- 입력 차원을 "완전히(fully)" 활용
- 가능한 최대치
- 정보 보존 최대화

(c) **rank = 1**인 경우의 의미:

조건:

$$\text{rank}(A) = 1 < \min(3, 2) = 2$$

Rank deficient!

원인:

두 열벡터가 선형종속
 $v_2 = k \cdot v_1$ (어떤 k 에 대해)

예:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$v_2 = [4, 2, -2] = 2[2, 1, -1] = 2v_1$$

열공간:

$$\text{Col}(A) = \text{span}([2, 1, -1])$$

기하학적 의미:

3D 공간에서:

- 하나의 벡터의 span = 직선

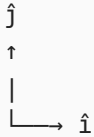
- 원점을 지나는 1차원 직선

변환 과정:

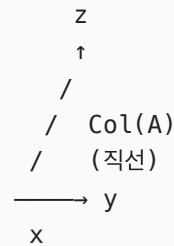
2D 평면 \xrightarrow{A} 3D 직선

시각화:

입력 (2D):



출력 (3D):



정보 손실:

- $2D \rightarrow 1D$ 압축
- 한 차원 "소멸"
- 2D 평면의 무수히 많은 점들이 직선 위 같은 점으로

영공간:

$\text{Null}(A) \neq \{0\}$

- 원점으로 가는 벡터들이 존재
- 직선에 "수직"인 방향
- 1차원 직선

계수-영성 정리:

$\text{rank} + \text{nullity} = 2$
 $1 + 1 = 2 \checkmark$

응용:

- 투영(projection) 연산
- 정보 압축
- 차원 축소

결론: rank = 1인 3×2 행렬은 2D 평면을 3D 공간의 1D 직선으로 압축하며, 이는 정보 손실을 동반합니다.

문제 4 답안

$1 \times n$ 행렬의 특별한 의미:

일반 형태:

$$A = [a_1 \ a_2 \ a_3 \ \dots \ a_n] \quad (1\text{행}, n\text{열})$$

(1) 기하학적 해석:

차원 분석:

- **n개 열:** 입력이 n차원
- **1개 행:** 출력이 1차원 (수직선, 스칼라)

변환:

$$nD \rightarrow 1D \quad (\text{숫자})$$

의미:

- n차원 벡터를 받아서
- 숫자 하나를 출력

(2) 행렬-벡터 곱셈:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$$

결과:

- 벡터가 아닌 스칼라
- 각 성분의 가중합

(3) 기하학적 의미:

n차원 공간 \rightarrow 수직선

변환 과정:

예 (2D \rightarrow 1D):

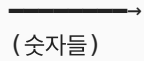
$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 3x - y$$

시각화:

입력 (2D 평면):



출력 (1D 수직선):



(숫자들)

각 2D 점 $(x, y) \rightarrow$ 숫자 $(3x - y)$

특성:

- 2D 직선 \rightarrow 1D 점
- 평행선 \rightarrow 균등 간격 유지
- 원점 $\rightarrow 0$

(4) 내적(Dot Product)과의 관계:

핵심 관찰:

$1 \times n$ 행렬과 n 차원 벡터의 곱:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$$

이것은 정확히 내적!

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$$

표기법 변환:

행 벡터 ($1 \times n$ 행렬):

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix}$$

열 벡터 ($n \times 1$ 벡터):

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

[:]
[a_n]

관계:

행 벡터 × 열 벡터 = 내적

(5) 다음 장 예고:

내적의 기하학적 의미:

투영(Projection):

$$a \cdot x = |a| |x| \cos(\theta)$$

- x를 a 방향으로 투영
- 1×n 행렬 = 특정 방향으로의 투영 연산

선형 함수로서의 내적:

모든 선형 함수 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 는:

$$f(x) = a \cdot x \text{ (어떤 벡터 } a \text{에 대해)}$$

즉, 1×n 행렬로 표현 가능!

쌍대성(Duality):

- n차원 벡터 ↔ 1×n 행렬
- 기하학적 객체 ↔ 선형 함수
- 다음 장의 핵심 주제

(6) 구체적 예:

2D 예:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 2x + 3y$$

기하학적:

- [2, 3] 방향으로의 "투영"
- 각 점의 "높이" 측정

3D 예:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = x + z$$

기하학적:

- xz평면에 투영 후 거리
- y 좌표는 무시

결론:

1×n 행렬은:

1. n차원 → 숫자 변환
2. 내적 연산과 동일
3. 선형 함수를 행렬로 표현
4. 다음 장(내적과 쌍대성)의 기초

이는 선형대수에서 가장 중요한 통찰 중 하나입니다!

문제 5 답안

행렬 곱셈의 차원 호환성:

조건:

$$(m \times n) \times (p \times q) \text{가 정의되려면:}$$

$$n = p$$

(1) 기하학적 설명:

행렬 곱셈 = 변환의 합성

A: m×n 행렬

n차원 → m차원 변환

B: p×q 행렬

q차원 → p차원 변환

합성 **AB**:

먼저 B 적용, 그 다음 A 적용

변환 순서:

q차원 \xrightarrow{B} p차원 \xrightarrow{A} m차원

차원 연결:

B의 출력 차원 = A의 입력 차원
즉, $p = n$

왜 필요한가?

B의 출력이 A의 입력으로 들어가야 하므로:

- B가 p차원 벡터를 출력
- A가 n차원 벡터를 입력으로 받음
- **$p = n$ 이어야 연결 가능!**

(2) 구체적 예:

가능한 경우:

예 1:

A: 3×2 (2D \rightarrow 3D)
B: 2×4 (4D \rightarrow 2D)

AB: $(3 \times 2) \times (2 \times 4)$
 $\uparrow \quad \uparrow$
 같음! ($n = p = 2$)

합성:

4D \xrightarrow{B} 2D \xrightarrow{A} 3D

결과:

AB: 3×4 (4D \rightarrow 3D)

예 2:

A: 2×3 (3D \rightarrow 2D)
B: 3×5 (5D \rightarrow 3D)

AB: $(2 \times 3) \times (3 \times 5)$
 $\uparrow \quad \uparrow$
 같음! ($n = p = 3$)

합성:

5D \xrightarrow{B} 3D \xrightarrow{A} 2D

결과:

AB: 2×5 (5D \rightarrow 2D)

불가능한 경우:

예:

A: 3×2 (2D \rightarrow 3D)

B: 4×5 (5D \rightarrow 4D)

AB: $(3 \times 2) \times (4 \times 5)$

$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ 2 & \neq 4 \end{array}$

문제:

5D \xrightarrow{B} 4D \xrightarrow{A} ???

- B는 4차원 벡터를 출력
- A는 2차원 벡터를 입력으로 원함
- 차원 불일치!

합성 불가능 \rightarrow 행렬 곱셈 정의 안 됨

(3) 결과 행렬의 크기: $m \times q$

왜 $m \times q$ 인가?

합성 변환:

q차원 \xrightarrow{B} (중간) \xrightarrow{A} m차원

입력: q차원 출력: m차원

결과 행렬:

AB는 q차원 \rightarrow m차원 변환
따라서 $m \times q$ 행렬

행과 열의 의미:

- **q개 열:** 입력 차원 (B의 입력)
- **m개 행:** 출력 차원 (A의 출력)

(4) 파이프 비유:

행렬 = 파이프의 한 부분

A: [n차원 입구] → [m차원 출구]
 B: [q차원 입구] → [p차원 출구]

연결하려면:

B의 출구 크기 = A의 입구 크기
 즉, $p = n$

연결 후:

AB: [q차원 입구] → [m차원 출구]

파이프가 맞아야 연결 가능!

(5) 일반적 규칙:

차원 확인:

$$(m \times n) \times (p \times q)$$

└───┘
 같아야 함

결과:

$$\begin{array}{c} m \times q \\ \boxed{} \\ (m \times n)(n \times q) = (m \times q) \end{array}$$

외곽 차원이 남음:

- 최종 입력: q (B의 입력)
- 최종 출력: m (A의 출력)

(6) 3개 이상 행렬의 곱:

예:

A: 2×3
B: 3×4
C: 4×5

$$ABC = (2 \times 3)(3 \times 4)(4 \times 5)$$

순서대로 확인:

$$\begin{aligned} BC &= (3 \times 4)(4 \times 5) = (3 \times 5) \checkmark \\ A(BC) &= (2 \times 3)(3 \times 5) = (2 \times 5) \checkmark \end{aligned}$$

또는:

$$\begin{aligned} AB &= (2 \times 3)(3 \times 4) = (2 \times 4) \checkmark \\ (AB)C &= (2 \times 4)(4 \times 5) = (2 \times 5) \checkmark \end{aligned}$$

최종:

$$5D \rightarrow 4D \rightarrow 3D \rightarrow 2D$$

(7) 실용적 의미:

컴퓨터 그래픽스:

모델링: $3D \rightarrow 3D$ (회전)
뷰: $3D \rightarrow 3D$ (카메라)
투영: $3D \rightarrow 2D$ (화면)

$$\text{합성: } (2 \times 3)(3 \times 3)(3 \times 3)$$

차원이 맞아야 합성 가능!

데이터 과학:

데이터: $m \times n$ (m 개 샘플, n 개 특징)
변환 1: $n \times p$
변환 2: $p \times q$

$$\text{최종: } m \times q$$

결론:

행렬 곱셈의 차원 호환성($n = p$)은:

1. 변환 합성의 기하학적 필연성
2. 출력-입력 차원 일치
3. 파이프 연결의 자연스러운 조건

결과 크기($m \times q$)는:

1. 최종 입출력 차원
2. 외곽 차원의 보존

이는 선형변환의 합성이라는 기하학적 의미에서 자연스럽게 나옵니다!