Problem: 令 ϕ 為 2-CNF-SAT 上之 instance

則 $\phi = C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_k$

其中 C_i 皆為 2个 literal 組成

問是否存在一組 truth assignment $T \rightarrow \phi$ 為 true ?

---

idea: 建構一 $G=(V,E)$ 其中 V 由 ϕ 中 variable : x_i 和 $\bar{x}_i$ 構成

且 $(x,y) \in E \Leftrightarrow$ 存在一 clause $C_j \equiv x \longrightarrow y$

(∵ 每个 clause 皆可視為一个 $p \longrightarrow q$ 之命題 ex: $x \vee \bar{y} \equiv y \longrightarrow x$

$\equiv \bar{x} \longrightarrow \bar{y}$

x	y	$x \vee \bar{y}$	$y \rightarrow x$	$\bar{x} \longrightarrow \bar{y}$
0	0	1	1	1
1	0	1	1	1
0	1	0	0	0
1	1	1	1	1

∴ $|E| = 2k$)

判斷是否為 satisfiable 方法如下:

若 G 中含由 x 至 $\bar{x}$ 之 path

則若 x 為 true, 而 x 至 $\bar{x}$ path 上之所有 variable 皆須為 true

因此 $\bar{x}$ 為 true (※) ∴ x 為 false

反之, 若 G 中含由 $\bar{x}$ 至 x 之 path, 表示 $\bar{x}$ 應設為 false, ∴ x 為 true

因此, 若 instance 中所有變數, 皆滿足由 x 至 $\bar{x}$ 之 path 和 $\bar{x}$ 至 x 的 path 不同時存在則該 instance 為 satisfiable

(∵ x 至 $\bar{x}$ path 和 $\bar{x}$ 至 x 的 path 同時存在 表示無論 x 為 1 或 0, x 至 $\bar{x}$ 之 path, ϕ 皆為 0)

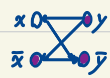
∴ 2-SAT $\in P$ #

ex: $x \vee \bar{y} \equiv y \rightarrow x$

$\equiv \bar{x} \rightarrow \bar{y}$

$\bar{x} \vee \bar{y} \equiv y \rightarrow \bar{x}$

$\equiv x \rightarrow \bar{y}$

∴ 

$y, \bar{x}, \bar{y}$ 皆為 true