Problem：給定 Array 為 $A[1,\dots,n]$，求其中第 k 大之數，其中 $k=1,2,\dots,n$

Note：當 $k=\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor$ 時，等同求 median

Algorithm：

① **brute force**：將這 n 个數做排序 (quick sort or heap sort)，而 $A[k]$ 即為所求 $\Rightarrow \Theta(n\lg n)$

② **prune-and-search**：把問題中不影响求解部份丟掉，e.g. binary search

(1). **random choice of pivot**：

任選一數做為 pivot，設做完 partition algorithm 後

所有在 pivot 前的都小於等於 pivot，所有在 pivot 後的都大於等於 pivot

則利用 pivot 的 index p 和 k 相比，若 $k>p$，表示所求 $A[k]$ 在 pivot 後的 subarray

若 $k<p$，表示所求 $A[k]$ 在 pivot 前的 subarray

若 $k=p$，則 p 為所求

$\Rightarrow$ **Algorithm**：

```
select(A, k)
    p = partition(A)
    if p = k   return A[p]
    else if k < p   return select(A[1,...,p-1], k)
    else   return select(A[p+1,...,n], k-p+1)
```

$\Rightarrow$ **Time complexity**：

Worst case：$T(n)=T(n-1)+\theta(n) \Rightarrow T(n)=\theta(n^2) \Rightarrow$ pivot 挑到極值

Best case：$T(n)=\theta(n)$ (直接 $p=k$)

Avg case：$T(n)=\theta(n\lg n)$ (同 quick sort 分析)

和 brute force 比沒比較好

可用 middle of three or median-of-medians 的方法，重點在 pivot 選取

☆☆☆☆☆.

(2). **median-of-medians**：

① 將輸入分為 $\lfloor\frac{n}{5}\rfloor$ 堆，每一堆皆有 5 个數 (except 最後一堆) $\Rightarrow O(1)$

② 对每一堆做排序，求得每一堆的 median $\Rightarrow \frac{n}{5}\cdot O(1)$ ($\because$ 对已知个數 array 排序為 const)

③ 遞迴求解這些中位數的中位數 p，取其為 pivot，而 index 為 x $\Rightarrow T(\frac{n}{5})$

④ 求出 S_1, S_2 $\Rightarrow$ $S_1=\{x \mid x<p\}$，$S_2=\{x \mid x>p\}$ $\Rightarrow O(n)$

⑤ 若 $k=x$ 則 return p $\Rightarrow$ 遞迴求得解 #. $\Rightarrow T(\frac{3}{4}n)$ ($\because \max(|S_1|,|S_2|)\le\frac{7}{10}n$)

$k<x$ 則丟掉 S_2

$k>x$ 則丟掉 S_1

$\therefore T(n)=T(\frac{n}{5})+T(\frac{3}{4}n)+\theta(n)$ or $T(n)\le T(\lfloor\frac{n}{5}\rfloor)+T(\frac{7n}{10})+\theta(n)$

By recursion tree：$T(n)=\theta(n)$

Note：至少得分為 5 堆，若為 4 堆：$T(n)=T(\frac{n}{4})+T(\frac{3}{4}n)+\theta(n)$

$=\theta(n\lg n)$

(3). <u>middle of three</u>:

設做 partition(A, l, r), 則比較 $A[l], A[r], A[\frac{l+r}{2}]$, 取中間值做為pivot 做 partition

可避免取到極值發生 $T(n) = T(n-1) + O(n)$ 情形

(4). <u>randomized_partition</u>:

取 random(p, r) 為 pivot, 其中 random(p, r) 為 Uniform distribution

$E[T(n)] = O(n)$