Problem: 给定 $X=\langle x_1,x_2,\dots,x_m\rangle$ $Y=\langle y_1,y_2,\dots,y_n\rangle$ $Z=\langle z_1,\dots z_k\rangle$ 三个string

若存在 $\langle i_1,\dots,i_k\rangle$ 才 $x_{i_j}=z_j, j=1\dots k$ 則Z為X的子序列

若Z為X.Y的子序列稱作共同子序列，求X.Y之最長共同子序列和其長度

ex

$X=BCBAA$ $Y=CABA$ ∴ $Z=CBA$ 為 LCS

暴力法：設 X.Y 長度為：m.n 則最多：$O(2^{\min(m,n)})$

DP解：定義子問題為 $d[i,j]$ 為 X_i 和 Y_j 之最長共同子序列長度

其中 $X_i=\langle x_1,\dots,x_i\rangle$

$Y_j=\langle y_1,\dots,y_j\rangle$

令其对應之OPT為 $OPT[i,j]=Z_k=\langle z_1,\dots,z_k\rangle$

Example: $X=BCBAA$ $Y=CABA$

$X_4=BCBA$ $Y_3=CAB$ $OPT[4,3]=CB$

Optimal substructure:

$OPT[i,j]$ 必為下面几种case其一：

1. $x_i=y_j$ ：則 $OPT[i,j]/\{z_k\}$ 為 $OPT[i-1,j-1]$
2. $x_i\neq y_j$，且 $x_i\neq z_k$ 則：$OPT[i,j]$ 為 $OPT[i-1,j]$
3. $x_i\neq y_j$，且 $y_j\neq z_k$ 則：$OPT[i,j]$ 為 $OPT[i,j-1]$

Derive recursion:

$$d[i,j]=\begin{cases}0 & \text{if } i=0 \text{ or } j=0\\ d[i-1,j-1]+1 & \text{if } x_i=y_j\\ \max\{d[i-1,j],\ d[i,j-1]\} & \text{if } x_i \mathrel{!=} y_j\end{cases}$$

Time Complexity: $O(mn)$

操作題:

$X = BCBAA$ $Y = CABA$

$x_i \backslash y_j$		C	A	B	A
	0	0	0	0	0
B	0	0	0	1	1
C	0	1	1	1	1
B	0	1	1	2	2
A	0	1	2	2	3
A	0	1	2	2	3

∴ CAA