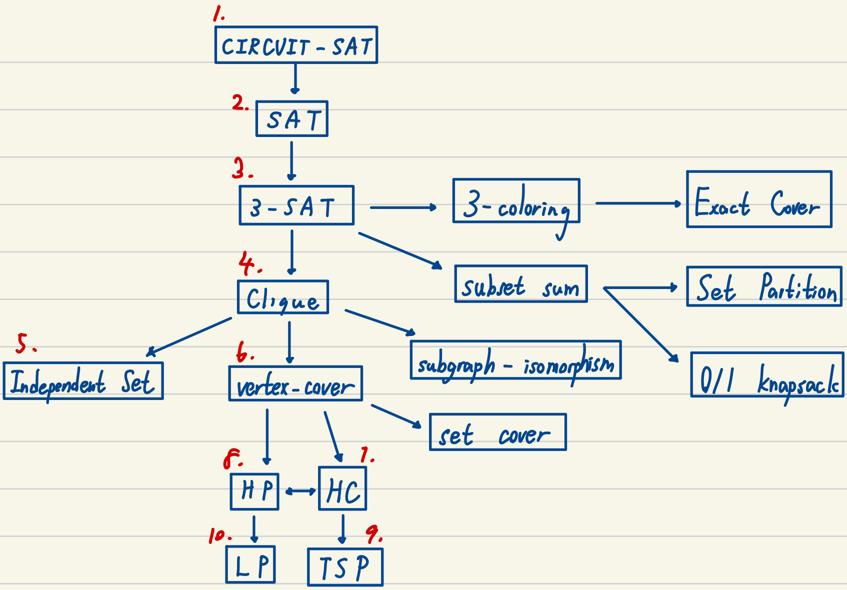


Clique：給定 $\langle G, k \rangle$，問 G 上是否存在 size 為 k 之 Clique

Clique：V'，$\forall u, v \in V'$，$(u,v) \in E$

Independent set：給定 $\langle G, k \rangle$，問 G 上是否存在 size 為 k 之 Independent Set

Independent set：V'，$\forall u, v \in V'$，$(u,v) \notin E$

Vertex Cover：給定 $\langle G, k \rangle$，問 G 上是否存在 size 為 k 之 Vertex Cover

Vertex Cover：V'，$\forall (u,v) \in E$，$u \in V'$ or $v \in V'$

HC：給定 $\langle G \rangle$，問 G 上是否存在 HC

HC：visit G 上所有 vertex 恰一次的 cycle

HP：給定 $\langle G \rangle$，問 G 上是否存在 HP

HP：visit G 上所有 vertex 恰一次的 path

$\equiv$ G 上是否存在 min-degree spanning tree T of max degree two

TSP：給定一 complete graph 為 G 和一 $k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$，$c: E \to \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ 為 cost function

G 中是否存在一 cost 至多為 k 之 tour

1. $3SAT \le_p Clique$

給定 $\langle \phi \rangle$ 為 3SAT 上之 instance

其中：$\phi = C_1 \wedge C_2 \wedge C_3 \wedge \cdots \wedge C_k$

而 $C_i = l_1^r \vee l_2^r \vee l_3^r$, $\forall\ 1 \le r \le k$

建構一 $\langle G, k \rangle$ 為 Clique 上之 instance

建構方法如下：

$G = (V, E)$

其中：每個 ϕ 中 clause 之 literal 对應到 G 上點為 V_1^r, V_2^r, V_3^r, $\forall\ r = 1, \ldots, k$

而 $(V_i^r, V_j^s) \in E \Leftrightarrow r \neq s$ 且 $l_i^r \neq \overline{l_j^s}$ (不屬於相同 clause)

該建構過程為 poly-time 完成

$\Rightarrow$ clique 上之 vertex 对到之不同 clause 的 literal 真值相同

2. $Clique \le_p Independent\ Set$

給定 $\langle G, k \rangle$ 為 clique 上之 instance

建構 $\langle \overline{G}, k \rangle$ 為 independent set 之 instance

其中：$\overline{G} = (V, V \times V - E)$

$\forall\ (u,v) \in V'$, $(u,v) \in E \Rightarrow (u,v) \notin V \times V - E$

$\Rightarrow (u,v) \in V''$, V'' 為 $\overline{G}$ 上 independent set

3. $Clique \le_p Vertex\ Cover$

給定 $\langle G, k \rangle$ 為 clique 上之 instance

建構 $\langle \overline{G}, |V| - k \rangle$ 為 vertex cover 之 instance

$\because$ 設 V' 為 G 上之 clique

V' 為 $\overline{G}$ 上之 independent set

$\forall\ u, v \in V'$, $(u,v) \notin \overline{E}$

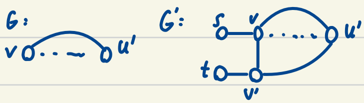
$\therefore \forall\ (u,v) \in \overline{E}$, $u \in V - V'$ or $v \in V - V'$ ($\because$ 不可能有 $u \notin V - V'$ and $v \notin V - V'$)

取 $V - V'$ 為 $\overline{G}$ 上之 vertex cover

4. $HC \le_p HP$

给定 $\langle G \rangle$ 為 HC 上 instance

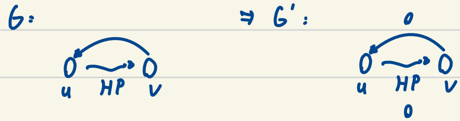
建構 $\langle G' \rangle$ 為 HP 上 instance



若 G 上存在 HC 為 $\langle v, \ldots\ldots, u', v \rangle$

則 G' 上存在 HP 為 $\langle s, v, \ldots, u', v', t \rangle$

5. $HC \le_p TSP$



给定 $\langle G \rangle$ 為 HC 上 instance

建構 $\langle G', c, k \rangle$ 為 TSP 上之 instance

其中: $G' = (V, E')$ 其中: $E' = \{(i,j) \mid i,j \in V$ 且 $i \ne j\}$

定義 $c: E \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ by

$$c(i,j) = \begin{cases} 0 & \text{if } (i,j) \in E \\ 1 & \text{if } (i,j) \notin E \end{cases}$$

取 $k = 0$

6. $HP \le_p LP$

给定 $\langle G \rangle$ 為 HP 上 instance

建構 $\langle G, k \rangle$ 為 LP 上 instance

其中: $k = |V| - 1$

7. $LP \le_p$ Simple SP

给定 $\langle G, k, w \rangle$ 為 LP 上 instance

建構 $\langle G, k, w' \rangle$ 為 SP 上 instance

其中: $w'(i,j) = -w(i,j), \ \forall (i,j) \in E$

8. <u>3-SAT $\le_p$ Subset Sum</u>

給定 $\phi = C_1 \wedge C_2 \wedge C_3 \wedge \dots \wedge C_k$ 為 3-SAT 之 instance 其中: ϕ 含 $x_1, \dots, x_n$ 個 variables

建構一 (S, t) 為 subset sum problem 对應之 instance

不失一般性假設, $\forall C_i$, $x_j \in C_i \Leftrightarrow \bar{x}_j \notin C_i$,若存在 則該 clause 自然為 satisfied

其中: $S = \{V_i \mid i=1,\dots,n\} \cup \{V_i' \mid i=1,\dots,n\} \cup \{S_i \mid i=1,\dots,k\} \cup \{S_i' \mid i=1,\dots,k\}$ $\Rightarrow |S| = 2n+2k$

而 $\forall a \in S$, a 為 10 進制, $n+k$ 個位元數, 而 前 n 個 digit 对應到 $x_1, \dots, x_n$, 後 k 個 digit 对應到 $C_1, \dots, C_k$

其中: V_i 為 前 n 個 digit, x_i 為 1, x_j 為 0, $\forall j \neq i$, 後 k 個 digit 中, 若 $x_i \in C_j$ 則為 1, 否則為 0 (对應之 variable digit 為

V_i' 為 前 n 個 digit, x_i 為 1, x_j 為 0, $\forall j \neq i$, 後 k 個 digit 中, 若 $\bar{x}_i \in C_j$ 則為 1, 否則為 0 1, 存在的 clause digit=1)

S_i 為 前 n 個 digit 皆為 0, 後 k 個 digit 中, C_i 為 1, 其餘為 0 (对應的 clause digit 為 1)

S_i' 為 前 n 個 digit 皆為 0, 後 k 個 digit 中, C_i 為 2, 其餘為 0 (对應的 clause digit 為 2)

t 為 前 n 個 digit 皆為 1, 後 k 個 digit 皆為 4 　 n 個 1, k 個 4

<u>Note:</u> ①. V_i, V_i' 的值皆唯一, 因為若 $m \neq i$, 則在 MSB 中, V_i 和 V_m 就不同

而若 $V_i = V_i'$ 則 x_i 和 $\bar{x}_i$ 同時在相同 clause, 不滿足假設

②. S_i, S_i' 的值皆唯一, trivial

可見任一 digit 的 sum 皆最大為 6

∵ 3 SAT 中 clause 皆為 3 個 variables

∴ 取 $b \ge 7$ 以上基底, 就不會有相加進位問題

		x_1	x_2	x_3	C_1	C_2	C_3	C_4
v_1	=	1	0	0	1	0	0	1
v_1'	=	1	0	0	0	1	1	0
v_2	=	0	1	0	0	0	0	1
v_2'	=	0	1	0	1	1	1	0
v_3	=	0	0	1	0	0	1	1
v_3'	=	0	0	1	1	1	0	0
s_1	=	0	0	0	$\boxed{1}$	0	0	0
s_1'	=	0	0	0	$\boxed{2}$	0	0	0
s_2	=	0	0	0	0	1	0	0
s_2'	=	0	0	0	0	$\boxed{2}$	0	0
s_3	=	0	0	0	0	0	$\boxed{1}$	0
s_3'	=	0	0	0	0	0	2	0
s_4	=	0	0	0	0	0	0	$\boxed{1}$
s_4'	=	0	0	0	0	0	0	$\boxed{2}$
t	=	1	1	1	4	4	4	4

S'

$\bar{x}_1, \bar{x}_2, x_3 = 1$

Figure 34.19 The reduction of 3-CNF-SAT to SUBSET-SUM. The formula in 3-CNF is $\phi = C_1 \wedge C_2 \wedge C_3 \wedge C_4$, where $C_1 = (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3)$, $C_2 = (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3)$, $C_3 = (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3)$, and $C_4 = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)$. A satisfying assignment of ϕ is $\langle x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1 \rangle$. The set S produced by the reduction consists of the base-10 numbers shown; reading from top to bottom, $S = \{1001001, 1000110, 100001, 101110, 10011, 11100, 1000, 2000, 100, 200, 10, 20, 1, 2\}$. The target t is 1114444. The subset $S' \subseteq S$ is lightly shaded, and it contains v_1', v_2', and v_3, corresponding to the satisfying assignment. It also contains slack variables s_1, s_1', s_2', s_3, s_4, and s_4' to achieve the target value of 4 in the digits labeled by C_1 through C_4.

claim: 3-SAT is satisfiable $\Leftrightarrow \exists S' \subseteq S \ni \sum_{a \in S'} a = t$

($\Rightarrow$) 令 ϕ 為一 satisfying assignment 為 $<x_1, \ldots, x_n>$

若 $x_i = 1$ 則 $V_i \in S'$, $\forall i = 1, \ldots, n$

$\overline{x_i} = 1$ 則 $V_i' \in S'$

$\therefore$ 可知 V_i 和 V_i' 不同時存在 S' 中, $\therefore \sum_{a \in S} a$ 中前 n 个 digit 皆為 1

又 $\because$ 為 satisfied, $\therefore C_1, \ldots C_k$ 必含某些 literal 為 1

$\therefore \forall a \in S, \sum_{a \in S'} a$ 的後 k 个 bit 中的 C_i 对應的 digit 至少有一个 1

而 C_i 中又可能有 1~3 个 literal 為 1, $\therefore$ V_i 貢獻之和中後面 k 个 digit 中 C_i 对應之和為 1~3

又 $\because S_i, S_i'$ 唯一且後 k 个 digit 皆為 $C_i = 1, 2$, 其餘為 0

目前: $S' = \{V_i \mid x_i = 1\} \cup \{V_i' \mid x_i = 0\}$

令 a_i 為 $\sum_{a \in S'} a$ 之第 a 个 digit 之數, 則: $t_i - a_i \in \{1, 2, 3\}$, 令為 b_i

若 $b_i = 1$, $\forall i = 0, \ldots k-1$ 取 S_i 加入 S'

若 $b_i = 2$, $\forall i = 0, \ldots, k-1$ 取 S_i' 加入 S'

若 $b_i = 3$, $\forall i = 0, \ldots, k-1$ 取 S_i, S_i' 加入 S'

最終得到 S' 之 $\sum_{a \in S'} a = t$

($\Leftarrow$): 設 $S' \subseteq S$ 且 $\sum_{a \in S'} a = t$

$\because$ 令 t_i 為 t 的第 i 个 digit 且 $\because t_i = 1$, $\forall i = k, \ldots, n-1$

$\therefore$ 可知 S' 必含恰一个 V_i 或 V_i', $\forall i = 1, \ldots, n$

9. __Vertex Cover $\le_p$ subset-sum__

給定 $\langle G, k \rangle$ 為 vertex cover 上之 instance

建構 $\langle S, t \rangle$ 為 subset sum problem 上之 instance

令 $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ $E = \{e_1, \dots, e_m\}$

其中: $S = \{V_i \mid i=1,\dots,n\} \cup \{S_j \mid j=1,\dots,m\} \ni |S| = n+m$

$\forall a \in S$, a 為 $m+1$ 個 digit 的 4 進位數

其中: V_i 為第 $m+1$ 個 digit 為 1, 且若 $v \in e_i$, $\forall i=1,\dots,m$ 則: 第 i 個 digit 為 1

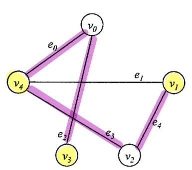
S_j 為第 $m+1$ 個 digit 為 0, 且 $\forall e_i$, digit $i=1$, 其餘為 0

t 為: $k \cdot 4^m + \sum_{i=0}^{m-1} 2 \cdot 4^i$

即: $k\,2222\dots2$

XIII The VERTEX-COVER problem is to find a vertex cover of the size k in a given graph G. In the SUBSET-SUM problem, given a finite set $S \subset \mathbb{N}$ and a target $t \in \mathbb{N}$, we ask whether there is a subset $S' \subseteq S$ whose elements sum to t. The VERTEX-COVER problem is polynomial-time reducible to the SUBSET-SUM problem. Given an instance $< G, k >$ of the VERTEX-COVER problem, one can construct a corresponding instance $< S, t >$ of the SUBSET-SUM problem. Given the following graph G and $k = 3$, $\{v_1, v_3, v_4\}$ is the vertex cover of size $k = 3$. The corresponding set $S = \{1, 4, 16, 64, 256, 1040, 1041, 1093, 1284, 1344\}$ is constructed as the following table. What is the target t? ____(20)____ C

(A) 2389	(B) 3417	(C) 3754	(D) 3758



modified based 4 / *decimal*

			e_4	e_3	e_2	e_1	e_0		
x_0	=	1	0	0	1	0	1	=	1041
x_1	=	1	1	0	0	1	0	=	1284
x_2	=	1	1	1	0	0	0	=	1344
x_3	=	1	0	0	1	0	0	=	1040
x_4	=	1	0	1	0	1	1	=	1093
y_0	=	0	0	0	0	0	1	=	1
y_1	=	0	0	0	0	1	0	=	4
y_2	=	0	0	0	1	0	0	=	16
y_3	=	0	0	1	0	0	0	=	64
y_4	=	0	1	0	0	0	0	=	256
		3	2	2	2	2	2	=	3754

Vertex cover : $V' \subseteq V$, $\forall (u,v) \in E$, $u \in V'$ or $v \in V'$

$\therefore$ t 中 $x_0 \sim x_4$ 對 $e_0 \sim e_4$ 之貢獻, 非 1 即 2

10. <u>Independent Set $\le_p$ Subset Sum</u>

給定一 (G,k) 為 independent set 之 instance

建構一 (S,t) 為 subset sum 之 instance

設 $G=(V,E)$，其中：$|V|=n$，$|E|=m$

$S=\{a_i \mid i=1,\dots,n\} \cup \{b_i \mid i=1,\dots,m\}$

而 S 中的元素會取 $n+1$ 進位，每個元素皆為 $m+1$ 個 digit，其中：

a_i 對應到 $v_i \in V$，而 a_i 的前 m 個 digit 對應到 e_j，若 $v_i \in e_j$，則該 digit 為 1 且 a_i 中最後一 digit 為 1

b_i 對應到 $e_i \in E$，而 b_i 的前 m 個 digit 對應到 e_j，若 $i=j$，則該 digit 為 1，且 b_i 中最後一 digit 為 0

t 為一 $m+1$ digit 數為 $111\cdots1k$

<u>Example:</u> 給定一 $G=(V,E)$，$V=\{a,b,c,d\}$，$E=\{ab, ac, ad, bc, cd\}$ 且 $k=2$

則：$S=\{a_1,\dots,a_4\} \cup \{b_1,\dots,b_5\}$，則 $\forall a \in S$，a 為 1 5 進位且 6 digit 數

	ab	ac	ad	bc	cd	-
a_1	1	1	1	0	0	1
a_2	1	0	0	1	0	1
a_3	0	1	0	1	1	1
a_4	0	0	1	0	1	1
b_1	1	0	0	0	0	0
b_2	0	1	0	0	0	0
b_3	0	0	1	0	0	0
b_4	0	0	0	1	0	0
b_5	0	0	0	0	1	0
k	1	1	1	1	1	2

取 $\{b,d\}$ 為 independent set

對應之 subset 為 $\{a_2, a_4, b_2\}$

$\because$ independent set 中只含 k 個 vertex，故所有 S 中元素之最後一 digit contribution 和只會為 k

因為 independent set 的點間不會有邊相鄰關係，取這些點加入 A

這些點相鄰邊對應之 digit 必為 1

之後，再將 digit 為 0 之 digit i，補上 b_i 加入 A

若 G 上存在大小為 k 之 independent set $\Leftrightarrow$ A 為 sum 為 t 之 subset

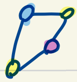
11. <u>subset sum $\le_p$ knapsack problem</u>

給定 $\langle S, t \rangle$ 為 Subset sum 之 instance

建構 $\langle T, W, V, K \rangle$ 為 knapsack 上之 instance

設 $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ $\quad W_i = S_i \quad W = t$

$T = \{a_1, \ldots, a_n\}$ $\quad V_i = W_i \quad K = t$



12. 3-SAT $\leq_p$ 3-coloring

給定 ϕ 為 3-SAT 之 problem instance

欲建構一 G 為 3-coloring 之 problem intance

使得: ϕ is satisfiable $\Leftrightarrow$ G上存在3-coloring

建構方式如下:

設 ϕ 中有k个clause, 即: $\phi = C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_k$

而有 $x_1, \ldots, x_n$, n个 variable

建構一 $G = (V, E)$

其中 V為 每个x_i对應至1个 vertex v_i

: $\bar{x}_i$: 1个 vertex $\bar{v}_i$

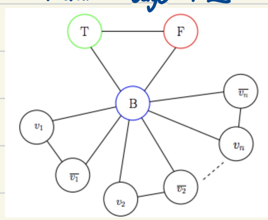
每个C_i : 5个 vertex

和 3个特別的 vertex 為: true, false, base

E分為2類: I. literal edge: 和 clause 無關, 會令 special vertex 構成 triangle 且讓 $v_i, \bar{v}_i$, base 構成 triangle

II. clause edge: 和 clause 相關之 edge

literal edge 示意:

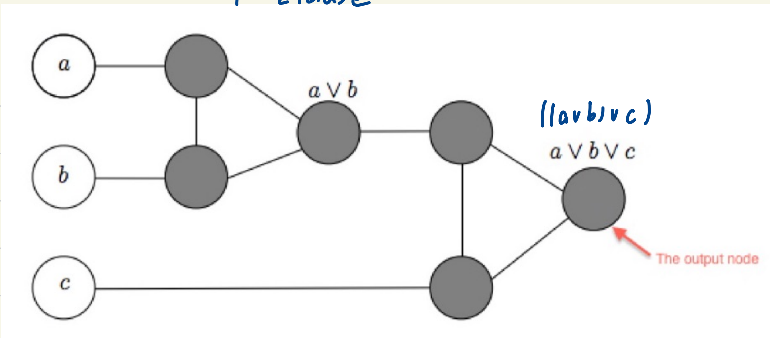


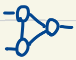
因此可以見得, G為 3-colorable $\Leftrightarrow$ x_i為T 或 $\bar{x}_i$為T

再來每个clause 建構一个 clause satisfability widget

如下圖所示, 會用到 clause 对應之5个vertex 和 clause edge

一个 clause



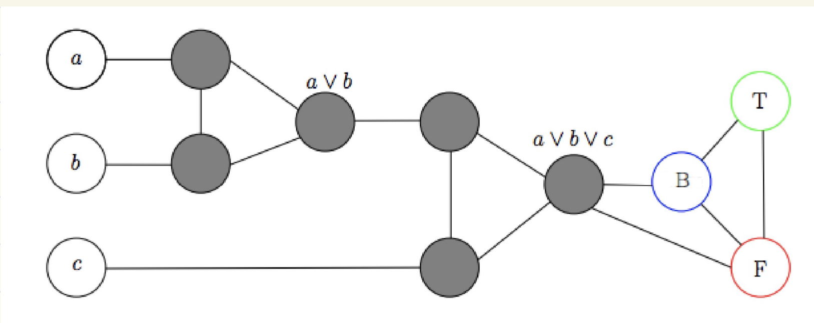
可以把  視為是一个 OR GATE

可以發現 widget 滿足下面之性質:

①. 若 a,b,c 皆為 F color, 則 OR widget 之 output vertex 亦為 F color

②. 若 a,b,c 其1為 T color, 則 OR widget 之 output vertex 亦為 T color

∴ 每个 clause 可以 build 一个对應之 widget, 並將 widget 之 output vertex 連接至 base, false vertex 如下所示:



claim: ϕ is satisfiable $\Leftrightarrow$ G上存在3-coloring

(⇒) 已知 ϕ is satisfiable, 令該 assignment 為 $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$

若 x_i^* 為 true, 則將 V_i 著色為 T, $\bar{V}_i$ 著色為 F

又 ϕ 為 satisfiable, ∴所有 clause C_i 皆為 satisfiable

表示 $C_i = x_1^i \vee x_2^i \vee x_3^i$ 至少有一 variable 為 true

故所有 clause 对應之 widget 之 output vertex 為 T color

最終可得 G上之一 3-coloring