

3- coloring problem:

给定 $G=(V, E)$, G 上是否存在三着色

3-coloring 為 - function, $c: V \longrightarrow \{1, 2, 3\}$

$$\rightarrow \forall (u, v) \in E, c(u) \neq c(v)$$

Theorem: 3-coloring \in NPC

Q. 3-coloring $\in NP$

给定 c 为 certificate, 驗證 $\forall (u, v) \in E, c(u) = c(v)$ 为 poly-time solvable

Is 3-coloring $\in NP$?

④ 3-coloring \in NP Hard

claim: $3\text{-SAT} \leq_p 3\text{-coloring}$



给定 ϕ 為 3-SAT 之 problem instance

欲建構 - G 為 3-coloring 之 problem instance

使得: ϕ is satisfiable $\Leftrightarrow G$ 上存在 3-coloring

建構方式如下：

設 ϕ 中有 k 个 clause, 即: $\phi = C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_k$

而有 x_1, \dots, x_n , n 个 variable

建構 - $G = (V, E)$

其中 V 為每個 x_i 對應至 1 個 vertex v_i

$$= \bar{x}_2 = 1 \uparrow \text{vertex } \bar{v}_2$$

每个 C_i : 5个 vertex

和 3 个特别的 vertex 为: true, false, base

E 分為 2 類: ^{1.} internal edge: 和 claw 無關, 會令 special vertex 構成 triangle 且讓

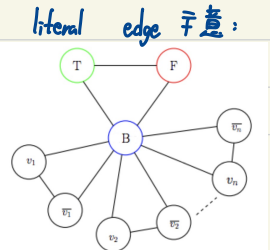
V_i, \bar{V}_i have 構成 triangle

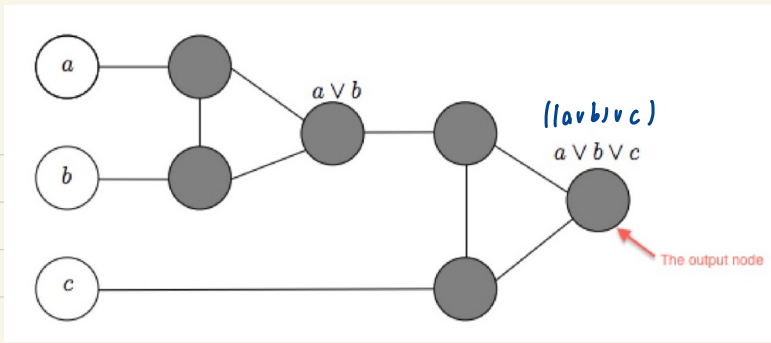
II. claw edge: 和 claw 相關之 edge


因此可以見得, G 為 3-colorable $\Leftrightarrow x_i$ 為 T 或 x_i 為 F

再來每個 clause 建構一個 clause satisfiability widget

如下圖所示, 會用到 clause 對應之 5 個 vertex 和 clause edge



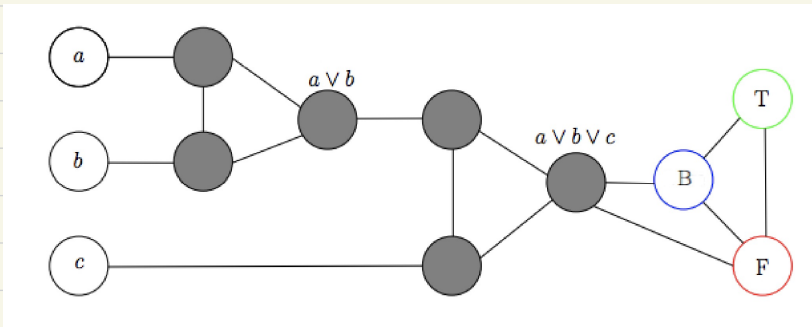


可以把  視為是一個 OR GATE

可以發現 widget 滿足下面之性質:

- ① 若 a, b, c 皆為 F color, 則 OR widget 之 output vertex 亦為 F color
- ② 若 a, b, c 其 1 為 T color, 則 OR widget 之 output vertex 亦為 T color

∴ 每個 clause 可以 build 一個對應之 widget, 並將 widget 之 output vertex 連接至 true, false vertex 如下所示:



claim: ϕ is satisfiable $\Leftrightarrow G$ 上存在 3-coloring

(\Rightarrow) 已知 ϕ is satisfiable, 令該 assignment 為 $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$

若 x_i^* 為 true, 則將 V_i 著色為 T, \bar{V}_i 著色為 F

又 ϕ 為 satisfiable, \therefore 所有 clause C_i 皆為 satisfiable

表于 $C_i = x_i \vee x_i \vee x_i$ 至少有一 variable 為 true

故所有 clause 對應之 widget 之 output vertex 為 T color

最終可得 G 上之一 3-coloring

(\Leftarrow) 已知 G 為 3-colorable, 則令 c 為一 3-coloring

若 $c(V_i) = T$, 則令 x_i 為 true, 反之, 令 x_i 為 false

設該 assignment 中存在一 clause $C_i = a \vee b \vee c$ 為 false

表示該 clause 對應之 widget 之 output node 為 false, 不為 3-coloring (—×—)

故 3-coloring \in NPC.