

Problem: 設有一  $n \times m$  之矩陣為  $A$ , 而  $A = [V_{ij}]_{n \times m}$ , 其中  $V_{ij}$  為 value 且  $V_{ij} \in \mathbb{Z}^+$ ,  $V_{i,j}$

有一石匠可從 column 1 的任一 row 進入該矩陣

而只能走:  $\rightarrow, \nearrow, \searrow$

求石匠可得之 max value:  $\sum_{j=1}^m V_{i,j}$

idea 1. 建立  $G = (V, E)$ , 其中  $|V| = nm + 2$

$\forall V_{ij} \in A, V_{ij} \in V$ , 且  $\{s, t\} \in V$  其中  $s$ : source,  $t$ : sink

而所有點和原  $A$  中右, 右上, 右下的點有邊相連關係

而  $s$  連至  $V_{i1}, V_{i=1, \dots, n}, V_{im}$  連至  $t, V_{i=1, \dots, n}$

而每個 vertex 上具 weight 為  $V_{ij}, V_{i,j}$ , 而  $w(s, V_{i1}) = 0, V_{i1}, w(V_{im}, t) = 0, V_{i1}$



求 max value 等同求  $G$  上  $s$  至  $t$  的 critical path

idea 2. 定義  $D[i, j]$  為石匠走至第  $i$  個 row, 第  $j$  個 col 時之 max value

設其 optimal solution 為 OPT

case 1. OPT 包含  $V_{i,j-1} \Rightarrow D[i, j] = D[i, j-1] + V_{i,j}$

case 2. OPT 包含  $V_{i-1,j} \Rightarrow D[i, j] = D[i-1, j] + V_{i,j}$

case 3. OPT 包含  $V_{i+1,j-1} \Rightarrow D[i, j] = D[i+1, j-1] + V_{i,j}$

$\therefore$  recursion function:

$$D[i, j] = \begin{cases} V_{ij} & \text{if } j = 1 \\ \max \{ D[i-1, j-1] + V_{i,j}, D[i, j-1] + V_{i,j}, D[i+1, j-1] + V_{i,j} \} & \text{otherwise} \end{cases}$$

最終  $\max_{1 \leq i \leq n} D[i, m]$  為所求

e.g.  $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 5 & 8 \\ 2 & 3 & 12 \\ 0 & 8 & 12 \end{bmatrix} \therefore \text{max value} = 12$