Clique Problem

給定一無向圖 $G=(V,E)$，問是否存在一 size 為 k 之 Clique

其中 Clique 為 $V'\subseteq V$, $\forall u,v\in V'$, $(u,v)\in E$

formal definition:

Clique $=\{\langle G,k\rangle \mid G$ 為含 size 為 k 之 Clique 的圖$\}$

bruteforce algorithm:

找出所有 k 個點之 V', $V'\subseteq V \Rightarrow C^n_k$

檢查 V' 是否為 complete subgraph $\Rightarrow k(k-1)$

∴ 為: $\Omega(k^2 C^n_k)$

Theorem: Clique 為 NP-Complete 問題

①. claim: Clique problem $\in$ NP

給定一 $G=(V,E)$ 以及 $V'\subseteq V$，驗證 V' 中是否任兩點皆有邊相連 $\Rightarrow O(n^2)$

∴ 檢查 V' 是否為 size $=k$ 的 clique 為 polynomial-time sovable #.

②. claim: Clique Problem $\in$ NP-Hard

$\Rightarrow$ 3-SAT $\leq_p$ Clique Problem

idea: 將 3-SAT 的 instance 皆对應至 Clique 之 instance 且滿足兩者真偽一致。

給定 $\phi=C_1\wedge C_2\wedge C_3\wedge\cdots\wedge C_k$ 為 3-SAT 之 instance 其中: $C_r=(I_1^r\vee I_2^r\vee I_3^r)$, $\forall r=1,\dots,k$

照下列方法建立一 $G=(V,E)$

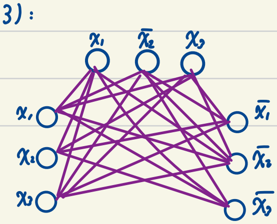
(1). 每个 clause C_r 中的 literal 皆对應至 V 中的 vertex 為: V_1^r, V_2^r, V_3^r, $\forall r=1,\dots,k$

(2). $(V_i^r, V_j^s)\in E \Leftrightarrow r\neq s$ 且 $I_i^r\neq \bar{I}_j^s$

則 (G,k) 為 Clique 之 instance. 此建構過程為 polynomial time 可完成

e.g. $\phi=(x_1\vee x_2\vee x_3)\wedge(x_1\vee \bar{x}_2\vee x_3)\wedge(\bar{x}_1\vee\bar{x}_2\vee\bar{x}_3)$

$(G,3)$:



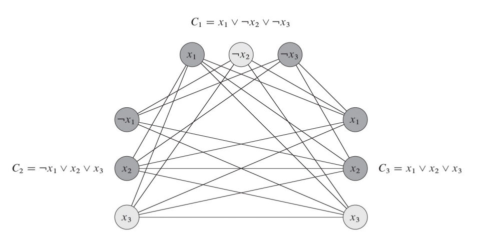


Figure 34.14 The graph G derived from the 3-CNF formula $\phi = C_1 \wedge C_2 \wedge C_3$, where $C_1 = (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3)$, $C_2 = (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3)$, and $C_3 = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)$, in reducing 3-CNF-SAT to CLIQUE. A satisfying assignment of the formula has $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, and x_1 either 0 or 1. This assignment satisfies C_1 with $\neg x_2$, and it satisfies C_2 and C_3 with x_3, corresponding to the clique with lightly shaded vertices.

claim: $\phi = C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_k$ 為 satisfiable $\Leftrightarrow$ G 中具有 size 為 k 之 Clique

$(\Rightarrow)$: 若 ϕ 為 satisfiable，則 C_r 至少有一个 literal 為 true, $\forall r = 1, \ldots, k$

不失一般性假設 I_i^r 為 true，則: $V' = \{V_i^1, V_i^2, \ldots, V_i^k\}$ (取 literal 為 true 之 vertex 為 clique)

而 V' 中所有點間皆有邊相連 ($\because I_i^i \neq \overline{I_i^j}, \forall i \neq j$ 且 $i, j = 1, \ldots k$)

$\therefore$ V' 為一个 size 為 k 的 clique

$(\Leftarrow)$: 設 G 中 size 為 k 之 Clique 為 V'

V' 中每个點皆对應至不同 clause 的 literal ($\because$ 相同 clause 的 literal 对應點間不會有邊相連關係)

不失一般性設這些點对應至 clause C_r 中的 I_i^r

將這些 I_i^r 皆設為 1 ($\because$ 邊相連關係保證了 consistence)

$\therefore$ 每个 clause 皆有 1 個 literal 為 true, $\therefore \phi$ is satisfiable #.