Traveling Salesman Problem (TSP)

Define: 給定一 Complete Graph 為 $G=(V,E)$, $k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$

$c: E \rightarrow \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ 為 cost function.

G中是否存在一 cost function 至多為 k 之 travelling salesman tour?

(i.e. 經G上所有點恰一次, $cost = \sum_{e \in E} c(e)$)

Theorem: TSP 為 NP-Complete

① claim: $TSP \in NP$

給定一 travelling salesman tour, 驗證是否經 G 上所有點恰一次, 且 cost function $\leq k$

為 polynomial-time solvable, $\therefore TSP \in NP$ #.

② claim: $HC \leq_p TSP$

令 $G=(V,E)$ 為 HC 之 instance, 建構 $G'=(V,E')$, 其中 $E'=\{(i,j) \mid i,j \in V$ 且 $i \neq j\}$

定義 cost function $c: E' \longrightarrow \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ by,

$$c(i,j) = \begin{cases} 0 & \text{if } (i,j) \in E \\ 1 & \text{if } (i,j) \notin E \end{cases}$$

令 $k=0$, 則 (G', c, k) 為 TSP 之 instance, 此一 reduction 只需 polynomial time

claim: G 具 HC $\Leftrightarrow$ G' 具 cost 至多為 k 之 tour

($\Rightarrow$): 若 $G=(V,E)$ 具 HC, 不失一般性設為: $V_1, V_2, V_3, \ldots, V_n, V_1$,

則 G' 中之 cost function 為: $c(V_1,V_2) = c(V_2,V_3) = \cdots = c(V_n,V_1) = 0$

故取 $V_1, V_2, \ldots, V_n, V_1$ 為一 cost 至多為 0 之 tour #.

($\Leftarrow$): 若 G' 具 cost 至多為 0 之 tour, 表示存在一條 cycle 經過所有點恰一次且 cost 為 0

又 cost 為 0, $\therefore \forall (u,v) \in E'$, $(u,v) \in E$, 故該 cycle 會為 G 之 HC