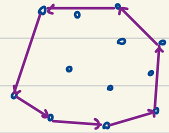
n個點的Convex Hull



Problem: 給定 n 個點之 set Q，則包含 Q 之最小凸多邊形

即 Q 之 convex hull，記作 CH(Q)

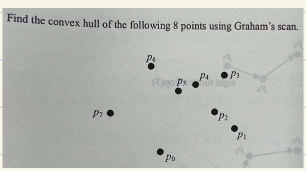
求 CH(Q) 之頂點，並以 counterclockwise 順序輸出

Graham's Scan Algorithm:

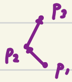
1. 令 p_0 為 Q 中 y 座標最小之點（若有多點相同，取 x 坐標最小點）
2. 將其餘 Q 中點以相對於 p_0 之 polar angle 逆時針方向排序
   令排序後之點為 $p_0, p_1, \dots, p_m$
3. Let $S = \phi$ be a new stack
4. push(p_0, S)
5. push(p_1, S)
6. push(p_2, S)
7. for $i = 3$ to m
8. $\quad t_1 = $ top(S)
9. $\quad t_2 = $ next_to_top(S)
10. $\quad$ while from $\overline{t_2 t_1}$ to $\overline{t_1 p_i}$ isn't a left turn
11. $\quad\quad$ pop(S)
12. $\quad$ push(p_i, S)
13. return S

1. 找 y 坐標最小的點為 P_0
2. 根據 P_0 之左旋角度排序 $P_1 \sim P_7$
3. 排序後，依序確認是否左旋，是時，push 至 stack S
4. 若否，則 pop 當前元素
5. 確認下一點是否可 push 至 stack
6. return stack 反向輸出

Example:



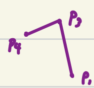
$i=3$:



isn't left turn

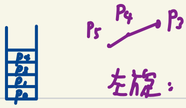
pop(S), push(S, p_3)

$i=4$:



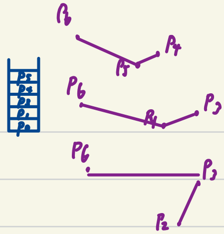
左旋 ⇒ push(S, p_4)

$i=5$:



左旋: push(S, p_5)

$i=6$

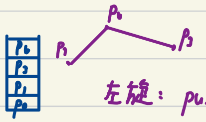


右旋 ⇒ pop(S)

右旋 ⇒ pop(S)

push(S, p_6)

$i=7$



左旋: push(S, p_7)

∴ $CH(Q) = p_0\, p_1\, p_3\, p_6\, p_7$

☆☆☆☆☆.

Theorem: 給定 $|Q| = n$, 則解 The convex hull problem 需要至少 $\Omega(n \lg n)$ 時間

<pf>: 設給定 $x_1, \dots, x_n$ 為 sorting problem 上之一組 instance

轉換 $(x_1, x_1^2), (x_2, x_2^2), \dots, (x_n, x_n^2)$ 為 convex hull problem 上之一組 instance

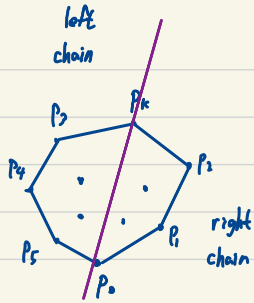
此轉換需 $O(n)$

∵ $f(x) = x^2$ 為一凸函數, (x_i, x_i^2) 皆在 $CH(Q)$ 上, $\forall i$

故 $CH(Q)$ 依序輸出即為 $x_1, \dots, x_n$ 排序結果

故如果 $CH(Q)$ 為 $o(n \lg n)$ 則排序為 $o(n \lg n)$ (—×—)

∴ $CH(Q)$ 為 $\Omega(n \lg n)$



Jarvis's March (Package Wrapping) Method

idea: 設 CH(Q) 有 h 個點
取 y 坐標最小點放入 CH(Q)，令為 p_0
選擇相對 p_0 polar angle 最小之點，令為 p_1，放入 CH(Q)
選擇相對 p_1 polar angle 最小之點，令為 p_2，放入 CH(Q)
以此類推，直至 y 坐標最大之點 p_k 放入 CH(Q)
而 $\langle p_0, p_1, p_2, \dots, p_k \rangle$ 形成 right chain
同上方法，可得 $\langle p_k, p_{k+1}, \dots, p_{h-1} \rangle$ 形成 left chain
最終 $\langle p_0, \dots, p_{h-1} \rangle$ 為 CH(Q)

Time Complexity: $T(n) = O(nh)$

Note: (1). 計算 polar angle 可利用 cross product 比較
(2). Graham's Scan 為 $O(n\lg n)$
Jarvis's march 為 $O(nh)$