1. 證明 Comparison-based Sorting Algorithm 的 lower bound 為 $\Omega(n \lg n)$

設 T 為 input size 為 n 对應的 decision tree, $\because$ 共有 n! 个 排列方法 $\therefore$ T 的 leaf nodes 至少為 n! 个

$\Rightarrow n! \leq 2^h \Rightarrow h \geq \lg n! = \theta(n \lg n)$

$\therefore$ 比較次數 至少為 $n \lg n$ #.

2. $T(n) = T(\frac{n}{2}) + T(\frac{2}{3}n) + n$

$\therefore T(n) = \theta(n \lg n)$

3. $T(n) = a T(\frac{n}{4}) + n^2$

$= \theta(\max(\log_4 a, n^2))$ if $a \neq 16$

又 $T(n) = 7 T(\frac{n}{2}) + n^2$

$= \theta(\log_2 7)$

$\because \log_4 a < \log_2 7$

$\Rightarrow \log_2 \sqrt{a} < \log_2 7$

$\Rightarrow \sqrt{a} < 7 \Rightarrow a < 49$.