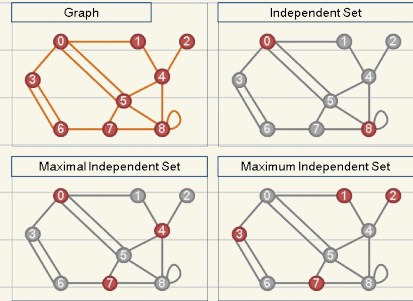


Independent Set Problem

給定 - 無向圖 $G = (V, E)$, 問是否存在 - size 為 k 之 independent set
其中 independent set 為 $V' \subseteq V, \forall u, v \in V', (u, v) \notin E$

formal definition:

Independent Set = $\{ \langle G, k \rangle \mid G \text{ 為存在 size 為 } k \text{ 之 independent set 的圖} \}$



Theorem: Independent set is NP-Complete

① Independent Set $\in NP$

給定 - V' 為 certificate, 驗證 $V' \subseteq V$ 且 $\forall u, v \in V', (u, v) \notin E$ 即可 $\Rightarrow O(C_k^k) = O(n^2)$

故驗證為 polynomially-solvable, 故 Independent set $\in NP$

② Clique \leq_p Independent Set

設 (G, k) 為 Clique 上之 - 組 instance

取 $\bar{G} = (V, V \times V - E)$ 為 G 之補圖, (\bar{G}, k) 為 independent set 上之 - 組 instance

claim: G 上存在 - size 為 k 之 Clique $\Leftrightarrow \bar{G}$ 上存在 size 為 k 之 independent set

(\Rightarrow): 設 G 上之 Clique 為 V' 且 $|V'| = k$

$$\forall u, v \in V', (u, v) \in E \Rightarrow (u, v) \notin V \times V - E$$

$\therefore V'$ 為 \bar{G} 上之 independent set 且 $|V'| = k$

(\Leftarrow): 設 \bar{G} 上之 independent set 為 V' 且 $|V'| = k$

$$\forall u, v \in V', (u, v) \notin V \times V - E \Rightarrow (u, v) \in V \times V - (V \times V - E)$$

$$\Rightarrow (u, v) \in E$$

$\therefore V'$ 為 G 上之 clique

