Proof: vertex cover $\le_p$ subset sum

給定 $(G=(V,E), k)$ 為 vertex-cover 的 instance，欲建構 (S,t) 為 subset sum problem

令 $V=\{V_1,\dots,V_n\}$ $E=\{e_1,\dots,e_m\}$

建構 - (S,t)

其中: $S=\{V_i \mid i=1,\dots,n\} \cup \{S_j \mid j=1,\dots,m\} \Rightarrow |S|=n+m$

$\forall a\in S$, a 為 $m+1$ 個 digit 的 4 進位數

其中: V_i 為第 $m+1$ 個 digit 為 1，且若 $v\in e_i$, $\forall i=1,\dots,m$ 則: 第 i 個 digit 為 1

S_j 為第 $m+1$ 個 digit 為 0，且 $\forall e_i$, digit $i=1$，其餘為 0

t 為: $k\cdot 4^m + \sum_{i=0}^{m-1} 2\cdot 4^i$

即: $k222\dots2$

claim: G上有 size 為 k 的 vertex cover $\Leftrightarrow$ S中具 S', $S'\subseteq S$ 且 $\sum_{a\in A} a = t$

$(\Rightarrow)$, 令 VC 為 G 上之 vertex cover, $|VC|=k$

定義 - S' 為: $\{V_i \mid V_i\in VC\} \cup \{S_j \mid \forall (u,v)$, u或v 恰有一點在 VC 上$\}$

則: 令 $\sum_{a\in S'} a = s$，而 a_i 為 s 之第 i 個 digit, $i=1,\dots,m+1$

$\because$ 只有 V_i MSB 為 1，又 VC 上只有 k 個點

$\therefore a_{m+1}=k$

而 $\forall e_i\in E$, ① 若 e_i 有 2 點在 VC 上

則 e_i 对應之 $S_i \notin S'$

則 V_i, $\forall i=1,\dots,n$ 需貢獻 2 在 a_i 上

又 $\because$ e_i 有 2 點在 VC 上

表示有 S' 2 點具 e_i 這边，該 digit 值為 1, $\therefore a_i=2$

② 若 e_i 有 1 點在 VC 上

則 e_i 对應之 $S_i\in S'$

則 V_i $\forall i=1,\dots,n$ 需貢獻 1 在 a_i 上

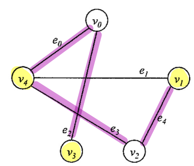
又 $\because$ e_i 有 1 點在 VC 上

$\therefore$ 表示 S' 有 1 點具 e_i 這边，該 digit 值為 1, $\therefore a_i=2$

$\therefore \sum_{a\in S'} a = t$，得證 #.

XIII The VERTEX-COVER problem is to find a vertex cover of the size k in a given graph G. In t SUBSET-SUM problem, given a finite set $S \subset \mathbf{N}$ and a target $t\in\mathbf{N}$, we ask whether there a subset $S' \subseteq S$ whose elements sum to t. The VERTEX-COVER problem is polynomial-ti reducible to the SUBSET-SUM problem. Given an instance $< G, k >$ of the VERTEX-COVE problem, one can construct a corresponding instance $< S, t >$ of the SUBSET-SUM problem. Giv the following graph G and $k=3$, $\{v_1, v_3, v_4\}$ is the vertex cover of size $k=3$. The correspondi set $S=\{1,4,16,64,256,1040,1041,1093,1284,1344\}$ is constructed as the following table. What the target t? ______(20)______ C

(A) 2389	(B) 3417	(C) 3754	(D) 3758



			modified based 4						*decimal*
			e_4	e_3	e_2	e_1	e_0		
x_0	=	1	0	0	1	0	1	=	1041
x_1	=	1	1	0	0	1	0	=	1284
x_2	=	1	1	1	0	0	0	=	1344
x_3	=	1	0	0	1	0	0	=	1040
x_4	=	1	0	1	0	1	1	=	1093
y_0	=	0	0	0	0	0	1	=	1
y_1	=	0	0	0	0	1	0	=	4
y_2	=	0	0	0	1	0	0	=	16
y_3	=	0	0	1	0	0	0	=	64
y_4	=	0	1	0	0	0	0	=	256
		3	2	2	2	2	2	=	3754

$(\Leftarrow)$: 已知 $S' \subseteq S$ 且 $\sum_{a \in S'} a = t$, $\therefore$ 存在一 $G' = (V', E')$ 且 $V' \subseteq V$ 和 $E' \subseteq E$ $\longrightarrow$ $\sum V_i + \sum S_i = k \cdot 4^m + \sum_{i=0}^{m-1} 2 \cdot 4^i$

令 $\sum_{a \in S} a$ 中 a_i 為第 i 个 digit, $\forall i = 1, \ldots, m+1$

$\because$ S_i 只貢獻 a_i 為 1

$\therefore$ $\forall e_i \in E$, 至少有一边在 V' 中, 故 V' 為 vertex cover

且 $\because$ a_{m+1} 為 k $\therefore$ $|V'| = k$