Problem: 给定 $A_1, A_2, \ldots A_n$, where $A_i \in F^{p_{i-1} \times p_i}$, 求括号法使得純量乘法次數最少.

Input: $A_1 \ldots A_n$ 的 dimension 為 $l_1, l_2, \ldots, l_{n+1}$

Output: Minimal 乘法次數

Example: $A_1 = \mathbb{R}^{10 \times 20}$ ①. $(A_1 A_2) A_3$ 之乘法次數: $10 \times 20 \times 30 + 10 \times 30 \times 40 = 18000$

$A_2 = \mathbb{R}^{20 \times 30}$ ②. $A_1 (A_2 A_3)$ 之乘法次數: $20 \times 30 \times 40 + 10 \times 20 \times 40 = 30000$

$A_3 = \mathbb{R}^{30 \times 40}$

(1). Bruteforce: $A_1, \ldots, A_n$ 之矩陣乘法方法數為: $\frac{1}{n} \binom{2(n-1)}{n-1}$

遍歷所有方法, 計算各乘法之成本取最小之成本

(2). Dynamic Programming: 定義子問題為 $d[i,j]$ 為 $A_i, \ldots, A_j$ 之矩陣乘法最小成本

令 $d[i,j]$ 对應之 optimal solution 為 $OPT[i,j]$

$OPT[i,j]$ 可能由下面構成:

① $OPT[i,i] + OPT[i+1,j]$

② $OPT[i,i+1] + OPT[i+2,j]$

$\vdots \qquad \vdots$

⊖ $OPT[i,j-1] + OPT[j,j]$

∴ 可寫出 recursive function:

$$d[i,j] = \begin{cases} 0 & \text{if } i \geq j \\ \min\limits_{i \leq k \leq j-1} \{ d[i,k] + d[k+1,j] + l_i \cdot l_{k+1} \cdot l_j \} \end{cases}$$

Time Complexity: $O(n^2) \cdot O(n) = O(n^3)$

操作題：

e.g.

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
Dim	30×40	40×20	20×5	5×10	10×20	20×30

i \ j	1	2	3	4	5	6
1	$\boxed{0}$	$\boxed{24000}$				
2	0	0	$\boxed{4000}$			
3	0	0	$\boxed{0}$	1000		
4	0	0	0	0	1000	
5	0	0	0	0	0	6000
6	0	0	0	0	0	0