

Problem: 给定一无向连通图 $G=(V, E)$, 求其最小的 edge cover 为 $G'=(V, E')$

其中 $E' \subseteq E$ 且 $\forall u \in V, \exists (a, b) \in E' \rightarrow a=u$ or $b=u$

idea: 解 edge cover 问题可化作求 maximal matching 解决

可以利用下面之性质得到 Algorithm

$\therefore \text{maximum matching} \subseteq \text{minimal edge cover}$, 记作 $E_M \subseteq E_C$

而 $G_M=(V_M, E_M)$, 其中 $\forall e \in E_M$, e 为 matched edge

①. $\forall u \in V - V_M$, u 必定会被 E_M 中的某个 edge 所 cover, 否则就可得更大的 E_M

②. $\forall e \in E_M$, e cover 2 vertex

$\forall e \in E_C - E_M$, e cover 1 vertex

可利用 Gallai's Theorem 知, 求 minimum edge cover 等便於求 G 上之 maximum matching

$\therefore |E'| + |E_M| = |V|$ 即可得 $|E'|$

又 maximum matching 为 poly-time solvable

Algorithm 如下: minimum-edge-cover(G)

1. 確認 G 上有無 isolated vertex, 若有 return "無 edge cover" $\Rightarrow O(|V| + |E|)$
2. G 上求 maximum matching $\Rightarrow O(|V|^2)$
3. return $|V| - |E|$