

問題:

給定  $n$  個排序好的 key 為:  $k_1, \dots, k_n$   
又: 為 BST,  $\therefore n_0 = n_0 - 1 \Rightarrow$  共有  $n+1$  個的 dummy key 為:  $d_0, \dots, d_n$   
設其中:  $k_i$  被 search 到的 freq 為  $p_i, \forall i=1, \dots, n$   
而  $d_i$  被 search 到的 freq 為  $q_i, \forall i=0, \dots, n$   
求 expected search cost 中 最小之 binary search tree 及其 cost.

①. ESC 定義:

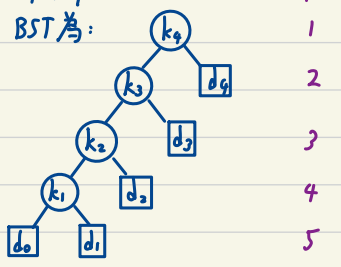
令  $\text{depth}(k_i)$  為 key  $k_i$  之 depth (設以 root level 為 1)

則: 
$$ESC = \sum_{i=1}^n (D(k_i) + 1) p_i + \sum_{i=0}^n (D(d_i) + 1) q_i$$

Example: 給定  $k_1, \dots, k_4$  和  $p_i, q_i$

	0	1	2	3	4
$p_i$		1	2	4	3
$q_i$	3	2	1	5	1

其中 - BST 為:



②. characterize optimal substructure

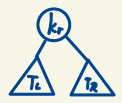
所有 BST 皆為 - root 和 左右子樹構成  
定義  $d[i, j]$  為  $k_i, \dots, k_j$  個 key 下之最小的 ESC

- 則必為下列幾個 case:
- ①  $k_i$  為 root
  - ②  $k_{i+1}$  為 root
  - ⋮
  - ③  $k_j$  為 root

設 OBST 為  $T^*$ , 而 root 為  $k_r$ , 則左子樹為:  $k_i, \dots, k_{r-1}$ ,  $ESC(T_L) = d[i, r-1]$

右子樹為:  $k_{r+1}, \dots, k_j$ ,  $ESC(T_R) = d[r+1, j]$

則  $ESC(T^*) = d[i, r-1] + d[r+1, j] + \sum_{k=i}^{r-1} p_k + \sum_{k=r+1}^j p_k + \sum_{k=i}^{r-1} q_k + p_r$



$$= d[i, r-1] + d[r+1, j] + \sum_{k=i}^{r-1} p_k + \sum_{k=r+1}^j p_k + \sum_{k=i}^{r-1} q_k + p_r$$
$$= d[i, r-1] + d[r+1, j] + w[i, j]$$

其中:  $w[i, j] = \sum_{k=i}^j p_k + \sum_{k=i+1}^j q_k$

recursive relation:

$$w[i,j] = \begin{cases} q_i & \text{if } j = i-1 \\ w[i,j-1] + p_j + q_j & \text{if } i \leq j \end{cases}$$

$$d[i,j] = \begin{cases} q_i & \text{if } j = i-1 \\ \min_{i \leq k \leq j} \{ d[i,k-1] + d[k+1,j] + w[i,j] \} & \text{if } i \leq j \end{cases}$$

操作題: 設有4个key,  $a_1, a_2, a_3, a_4$ , 各有  $d_1, d_2, \dots, d_4$

4, 3, 5, 4

For frequency, 為:

$i$	0	1	2	3	4
$p_i$		5	2	4	3
$q_i$	3	2	3	4	2
		7	5	8	5

$w[i,j]$ :

$i \setminus j$	0	1	2	3	4
1		3	10	15	23
2			2	7	15
3				3	11
4					4
5					

$d[i,j]$ :

$i \setminus j$	0	1	2	3	4
1		3	15	20	56
2			2	12	31
3				3	18
4					4
5					

# 104 交大資工

設有:  $k_1 \sim k_5$  5个 keys

共有:  $d_0 \sim d_5$  6个 dummy keys

令  $p_i$  為  $k_i$  被 search 到的机率

$q_i$  為  $d_i$  :

$i$	0	1	2	3	4	5
$p_i$	X	0.25	0.2	0.05	0.2	0.3
$q_i$	0	0	0	0	0	0

$w[i,j]$ :

$i \setminus j$	0	1	2	3	4	5
1	0	0.35	0.85	0.5	0.7	1.0
2		0	0.2	0.35	0.45	0.75
3			0	0.05	0.25	0.55
4				0	0.2	0.5
5					0	0.3
6						0

$d[i,j]$

$i \setminus j$	0	1	2	3	4	5
1	0	0.35	0.65	0.8	1.25	2.1
2		0	0.2	0.3	0.95	1.35
3			0	0.05	0.3	0.85
4				0	0.2	0.7
5					0	0.3
6						0