Vertex Cover Problem

給定一無向圖 $G=(V,E)$，問是否存在一 size 為 k 之 vertex cover

其中 vertex cover 為 $V' \subseteq V$，$\forall (u,v) \in E$，$u \in V'$ 或 $v \in V'$

formal definition:

Vertex Cover $= \{ \langle G, k \rangle \mid G$ 為存在 size 為 k 之 vertex cover 的圖 $\}$

Theorem: vertex cover is NP-Complete

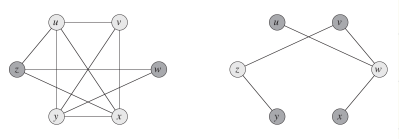
①. claim: vertex-cover problem $\in NP$

給定一 $G=(V,E)$ 和 V'，驗證 $\forall (u,v) \in E$ 看 u,v 是否其中之一屬於 V' 且 $|V'|$ 是否大小為 k：$O(|V||E|)$

會為 polynomial-time solvable，故：vertex-cover problem $\in NP$

②. claim: clique problem $\le_p$ vertex-cover

idea: 若 $G=(V,E)$ 具 clique 為 V'，則 V' 在 $\overline{G}=(V,\overline{E})$ 為 independent set



(a) (b)

令 $V'=\{u,v,x,y\}$

則 $\forall (u,v) \in \overline{E}$，$u \in z$ or w，or $v \in z$ or w

$\therefore$ G^T 存在大小為 2 之 vertex cover

給定 $(G=(V,E), k)$ 為 clique 之 instance，造 $(\overline{G}=(V,\overline{E}), |V|-k)$ 為 vertex cover 之 instance

其中：$\overline{G}$ 為 G 之補圖，顯然為 polynomial-time 可完成建構過程

claim: G 具 size 為 k 之 clique $\Leftrightarrow$ $\overline{G}$ 具 $|V|-k$ 之 vertex cover

$(\Rightarrow)$: 設 G 具 size 為 k 之 clique，令為 V'

則 V' 為 $\overline{G}$ 之 independent set，i.e. V' 中任兩點在 $\overline{G}$ 中必不相連

$\therefore$ $\forall (u,v) \in \overline{E}$，$u \in V-V'$ or $v \in V-V'$，$\therefore$ 取 $V-V'$ 為 $\overline{G}$ 之 vertex cover，且 size 為：$|V|-k$

$(\Leftarrow)$: 設 G^T 具 size 為 $|V|-k$ 之 vertex cover，令為 V'

則：$V-V'$ 為 G^T 之 independent set（$\because$ $V-V'$ 中任兩點在 $\overline{G}$ 中皆不相連）

$\therefore$ $V-V'$ 為 G 中之 clique 且 size 為 $|V|-|V'|=k$