Independent Set $\le_p$ Subset Sum

給定一 (G,k) 為 independent set 之 instance

建構一 (S,t) 為 subset sum 之 instance

設 $G=(V,E)$，其中：$|V|=n$，$|E|=m$

$S=\{a_i \mid i=1,\dots,n\} \cup \{b_i \mid i=1,\dots,m\}$

而 S 中的元素會取 $n+1$ 進位，每个元素皆為 $m+1$ 个 digit，其中：

a_i 对應到 $v_i \in V$，而 a_i 的前 m 个 digit 对應到 e_j，若 $v_i \in e_j$，則該 digit 為 1 且 a_i 中最後一 digit 為 1

b_i 对應到 $e_i \in E$，而 b_i 的前 m 个 digit 对應到 e_j，若 $i=j$，則該 digit 為 1，且 b_i 中最後一 digit 為 0

t 為一 $m+1$ digit 數為 $111\dots1k$

Example: 給定一 $G=(V,E)$，$V=\{a,b,c,d\}$，$E=\{ab, ac, ad, bc, cd\}$ 且 $k=2$

則：$S=\{a_1,\dots,a_4\} \cup \{b_1,\dots,b_5\}$，則 $\forall a \in S$，a 為 1 5 進位且 6 digit 數

	ab	ac	ad	bc	cd	-
a_1	1	1	1	0	0	1
a_2	1	0	0	1	0	1
a_3	0	1	0	1	1	1
a_4	0	0	1	0	1	1
b_1	1	0	0	0	0	0
b_2	0	1	0	0	0	0
b_3	0	0	1	0	0	0
b_4	0	0	0	1	0	0
b_5	0	0	0	0	1	0
k	1	1	1	1	1	2

取 $\{b,d\}$ 為 independent set

对應之 subset 為 $\{a_2, a_4, b_2\}$

$\because$ independent set 中只含 k 个 vertex，故所有 S 中元素之最後一 digit contribution 和只會為 k

因為 independent set 的點間不會有边相鄰關係，取這些點加入 A

這些點相鄰边对應之 digit 必為 1

之後，再將 digit 為 0 之 digit i，補上 b_i 加入 A

若 G 上存在大小為 k 之 independent set $\Leftrightarrow$ A 為 sum 為 t 之 subset