0-1 integer programming:

給定一 $A\in\mathbb{Z}^{m\times n}$ 和一 vector $\vec{b}\in\mathbb{Z}^{m\times 1}$

是否存在一 vector $\vec{x}\in\mathbb{Z}^{n\times 1}$ 滿足 $A\vec{x}\le\vec{b}$, $\vec{x}=[x_i]$

且 $\forall x_i$, $i=1,\dots,n$, $x_i\in\{0,1\}$

Theorem: 0-1 integer programming $\in$ NPC

(1). 0-1 integer programming $\in$ NP

給定一 $\vec{x}$ 為 certificate，而計算 $A\vec{x}$，再和 $\vec{b}$ 一一比对，即可驗證是否 $A\vec{x}\le\vec{b}$

此 verify 為 poly-time solvable

$\therefore$ 0-1 integer programming $\in$ NP

(2). 0-1 integer programming $\in$ NPHard

claim: 3-SAT $\le_p$ 0-1 programming

給定一 $\phi=C_1\wedge C_2\wedge\cdots\wedge C_k$ 為 3-SAT 之一 instance 其中: $C_i = x_1^i \vee x_2^i \vee x_3^i$, $\forall i$

不失一般性設, variable 為: $x_1,\dots,x_n$

欲建構一 $\langle A,\vec{b}\rangle$ 為 0-1 programming 之 instance

使得: ϕ is satisfiable $\Leftrightarrow$ 存在一 $\vec{x}$, $A\vec{x}\le\vec{b}$

建構方式為:

將 $x_1,\dots,x_n$ 之 variable 对應至 $z_1,\dots,z_n$

且 $\forall i=1,\dots,n$, $0\le z_i\le 1$

而 $C_1,\dots,C_k$ 之 clause 則对應至 k 个不等式

方式為: $\vee$ 替換為 $+$, x_i 替換為 z_i, $\bar{x}_i$ 替換為 $1-z_i$

舉例來說, $C_1 = x_1\vee\bar{x}_4\vee\bar{x}_7 \Leftrightarrow z_1+(1-z_4)+(1-z_7)>0$

$\therefore$ 可以得到一 k 个式子, 建構出 $A\vec{z}\le\vec{b}$ 之 $\langle A,\vec{b}\rangle$ 為 0-1 integer programming 之 instance

e.g. $\phi=(x_1\vee\bar{x}_3\vee x_4)\wedge(\bar{x}_1\vee\bar{x}_2\vee x_3)$

則:
$$\begin{cases} z_1+(1-z_3)+z_4>0 \Rightarrow z_1-z_3+z_4>-1 \\ (1-z_1)+(1-z_2)+z_3>0 \Rightarrow -z_1-z_2+z_3>-2 \end{cases}$$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix}\ge\begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$