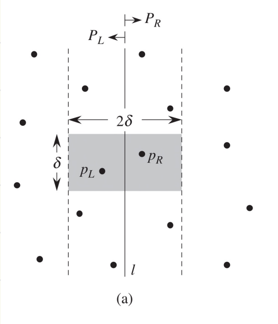
Problem: 在一坐標平面二維空間，給定n個points，求這n個points中可以構成之最短直線距離之值



(a)

bruteforce: 計算 all-pairs distance，取 min: $O(C^n_2)=O(n^2)$

divide & conquer:

1. 將點 (x_i, y_i) 各別依 x_i, y_i 排序得 X, Y : $O(n\lg n)$
2. divide: 取X中位數m，而利用 $l: x_i-m=0$ 把點分為兩堆 P_L, P_R : $O(n)$
3. conquer: 遞迴求解 P_L, P_R 之 shortest distance，令為 d_L, d_R，令 $\delta=\min(d_L, d_R)$
4. combine: 考慮一個points在 P_L 和一個在 P_R 的情形

   "限制條件: 此兩點之距離小於δ，且落於 $[l-\delta, l+\delta]$ 區間內

   但可能所有點皆在 $[l-\delta, l+\delta]$ 中，則 level cost 為 $O(\frac{n}{2}\cdot\frac{n}{2})=O(n^2)$

   ⇒ 依序取出Y滿足: $|p_x-m|\le\delta$ 的點p 而 $p=(p_x, p_y)$

   檢查Y排序中p之後的7個點p'，看是否滿足 $d(p,p')<\delta$，若有，則: $\delta=d(p,p')$ ⇒ $O(1)\cdot n=O(n)$

   直至掃完Y，則δ即為最短直線距離

Algorithm: Preprocessing

將點 (x_i, y_i) 各別依 x_i, y_i 排序得 X, Y

Closest_pair(P, X, Y)

1. 建立一垂直x軸直線為 $l: x-m=0$，而m為X的median，令 P_L 和 P_R 代表左右點集
2. 遞迴求得 P_L, P_R 之 closest pair 的值 d_L, d_R，令 $\delta=\min(d_L, d_R)$
3. 依序取出Y之滿足 $|p_x-m|\le\delta$ 之點，計算後面緊連之7個點之距離 $d(p,p')$
   看是否滿足分別在L&R且 $d(p,p')<\delta$，若有，$\delta=d(p,p')$
4. return d

Time Complexity: $T(n)=2T(\frac{n}{2})+O(n)$

$=O(n\lg n)$

Theorem: 在 closest_pair(P, X, Y) 之 line 3 時，只需考慮p後面緊連之7個點即可

∵ $\delta=\min(d_L, d_R)$，可知對 P_L 而言，所有點間distance不小於δ

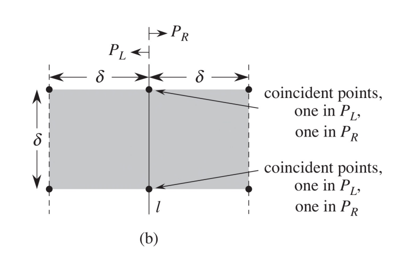
考慮左邊 δ×δ 正方形，可知最多只能擺4個點

同理，考慮右邊 δ×δ 正方形，可知最多只能擺4個點

故考慮 2δ×δ 長方形，可知最多只能擺8個點

∴ 在Y中，對任一點皆可畫出 2δ×δ 長方形

而緊連p後的點距離小於δ之點不超過7個



(b)