問題：給定整數序列：$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$

找出 $i_1, i_2, \ldots, i_k$ 且滿足：$1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$ 且 $a_{i_1} < a_{i_2} < a_{i_3} < \cdots < a_{i_k}$

之最大 k 值

eg

sequence：< 1, 8, 4, 12, 2, 10, 6 > 要返回 < 1, 8, 12 >

要求設計一个 $O(n^2)$ 的 Algorithm！

暴力法：窮舉所有 subsequence：$O(2^n)$

利用LCS法：設輸入序列為 X，排序後為 X^*

I. 將輸入序列排序 － $O(n \lg n)$

II. 利用 LCS(X, X^*) 可得 X 和 X^* 的 LCS 長度 － $O(n^2)$

III. 此長度即 LIS 長度

Example：X：< 1, 8, 4, 12, 2, 10, 6 >

X^*：< 1, 2, 4, 6, 8, 10, 12 >

而 LCS(X, X^*) 為：< 1, 4, 12 >

∵ X^* 已排序過 必可保證其子序列滿足 increasing 條件

故和 X 之共同子序列必為 LIC

DP法：定義子問題為 $d[i]$ 為 $a_1, \ldots, a_i$ 之以 a_i 結尾之 LIS 長度

而 OPT[i] 為 d[i] 对應之 optimal solution

OPT[i] 為下面几种 case 之一

⓪ $OPT[i] = OPT[0] + a_i$ if $a_0 < a_i$

① $OPT[i] = OPT[1] + a_i$ if $a_1 < a_i$

⋮ ⋮

ⓘ $OPT[i] = OPT[i-1] + a_i$ if $a_{i-1} < a_i$

∵有以 a_i 結尾之定義下，∴必須 $a_j < a_i$ 之 case 才能考慮

否則為自己本身 ⇒ d[i] 初值為 1

$$d[i] = \max\left(d[i],\ \max_{\substack{j<i \\ a[j]<a[i]}} \left(d[j]+1\right)\right)$$

最後 $\max\{d_1, \ldots, d_n\}$ 即為所求

Time Complexity：$O(n^2)$

Example:

$X: \langle 1, 8, 4, 12, 2, 10, 6 \rangle$

i	1	8	4	12	2	10	6
d_i	1	2	2	3	2	3	3

$\therefore$ LIS 長度為 3