knapsack problem

問題：給定n个物品為 $S=\{a_1,\dots,a_n\}$ 和其对應之 value：$V_i, \forall i=1,\dots,n$ 且 $V_i, W_i \ge 0$

weight：$W_i, \forall i=1,\dots,n$

和負重 W，價值 K，求是否存在一 $S'\subseteq S$ 滿足：(i). $\sum_{a_i\in S'} W_i \le W$

(ii). $\sum_{a_i\in S'} V_i \ge K$

---

claim: knapsack problem $\in NP$

給定一 certificate S'，計算 $\sum_{a_i\in S'} W_i$，$\sum_{a_i\in S'} V_i$ 為 polynomially solvable，可驗證是否滿足

故 $KS \in NP$

claim: Subset Sum $\le_p$ knapsack

給定 (S, t) 為 subset sum problem 之一 instance，建構一 (T, W, K) 為 knapsack problem 之 instance 如下

設 $S=\{S_1, S_2,\dots,S_n\}$，則令 $T=\{a_1,\dots,a_n\}$，取 $W_i = S_i \ \forall i=1,\dots,n$

$V_i = W_i \ \forall i=1,\dots,n$

而 $W=t$，$K=t$

claim: S 存在一 $S'\subseteq S$ 且 $\sum_{a\in S'} a = t \Leftrightarrow$ 存在一 $A\subseteq T$ 滿足：(i). $\sum_{a_i\in A} W_i \le W$

(ii). $\sum_{a_i\in A} V_i \ge K$

$(\Rightarrow)$：已知 S' 為 $\sum_{a\in S'} a = t$，取 $A=\{a_i \mid S_i \in S'\}$

則：$\sum_{a_i\in A} W_i = \sum_{S_i\in S'} S_i = t = W \le W$

$\sum_{a_i\in A} V_i = \sum_{S_i\in S'} S_i = t = K \ge K$

∴ 得證

$(\Leftarrow)$：已知 $A\subseteq T$ 滿足 (i). $\sum_{a_i\in A} W_i \le W$，表示一 $S'=\{W_i \mid a_i \in A\}$

(ii). $\sum_{a_i\in A} V_i \ge K$

則 $\sum_{S_i\in S'} S_i = \sum_{a_i\in A} W_i \le W = \sum_{a\in S'} a \le t$

$\sum_{S_i\in S'} S_i = \sum_{a_i\in A} V_i \ge K = \sum_{a\in S'} a \ge t$

$\therefore \sum_{a\in S'} a = t$ #.