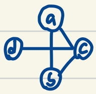
Problem: 給定一 $G=(V,E)$，令 $S\subseteq V$，若 S 為 k-plex 則 $\forall v\in S$，$deg(v)$ 至少為 $|S|-k$

故 k-plex problem 為 給定 G, k, p

G 上是否存在一 S，$|S|=p$ 且 S 為 k-plex

Example:



令 $S=\{a,b,c\}$ 則 S 為 2-plex

而 $S'=\{a,b,c,d\}$ S^* 不為 2-plex

Theorem: k-plex problem $\in$ NPC

①. k-plex $\in$ NP

給定一 S 為 k-plex 之 certificate，判斷 $S\subseteq V$ 為 poly-solvable

判斷是否 $\forall v\in S$，$deg(v)\geq |S|-k$ 為 poly-solvable

故 k-plex $\in$ NP

②. Clique $\leq_p$ k-plex problem

給定 (G,k) 為 clique 上之 instance

欲建構 (G',k',p) 為 k-plex problem 之 instance

其中 $G'=G$，$p=k$，$k'=1$

則 G 上存在 size 為 k 之 clique $\Leftrightarrow$ G' 上存在一 S，$S\subseteq V'$ 且 $|S|=k$ 且 $\forall v\in S$，$deg(v)\geq k-1$

claim: G 上存在 size 為 k 之 clique $\Leftrightarrow$ G' 上存在一 S，$S\subseteq V'$ 且 $|S|=k$ 且 $\forall v\in S$，$deg(v)\geq k-1$

$(\Rightarrow)$: G 上存在 size 為 k 之 clique，令該 clique 為 C

則取 C 為 G' 上之 S，$\because$ C 為 clique，$\therefore$ C 為一 k-complete graph

$\forall v\in C$，$deg(v)=k-1\geq |S|-k'$，又 $|S|=k$

$\therefore$ G' 上存在一 S $S\subseteq V'$ 且 $|S|=k$ 且 $\forall v\in S$，$deg(v)\geq k-1$

$(\Leftarrow)$: G' 上存在一 S $S\subseteq V'$ 且 $|S|=k$ 且 $\forall v\in S$，$deg(v)\geq k-1$

$\because$ $\forall v\in S$，$deg(v)\geq k-1$，$\therefore$ S 為一 k-complete graph，又 $S\subseteq V'$

$\therefore$ S 為 G' 上一 size 為 k 之 clique

$\Rightarrow$ 取 S 為 $G=G'$ 上之 clique 且 $|S|=k$

$\Rightarrow$ G 上存在 size 為 k 之 clique