Set Partition Problem

給定一S，是否存在一分割為 $X, \bar{X}$ → $S = X \cup \bar{X}$ 且 $\sum_{x \in X} x = \sum_{x \in \bar{X}} x$

Theorem: Set Partition ∈ NPC

① Set Partition ∈ NP

給定一X為 certificate，驗證 $\sum_{x \in X} x = \sum_{x \in S-X} x$ 是否相等為 poly-time

∴ Set Partition ∈ NP

② Subset Sum $\le_p$ Set Partition

給定一 $\langle S, t \rangle$ 為 subset sum 之 instance

欲建構 $\langle S' \rangle$ 使得 S上存在 subset X, $\sum_{x \in X} x = t \Leftrightarrow S'$上存在 X → $\sum_{x \in X} x = \sum_{x \in S'-X} x$

建構方式如下:

idea 1. 設 S上存在 X → $\sum_{x \in X} x = t$，則將 $S' = X \cup \{t\}$ 即可

但不行，∵ X 無法從 instance 得到 (等於要解 subset sum)

idea 2. 令 $s = \sum_{x \in S} x$ 則取:

$S' = S \cup \{s - 2t\}$，而 $\langle S' \rangle$ 為 subset partition 之 instance

Example: $S = \{1, 2, 3, 4, 7\}$ $t = 6$

$s = 17$ $s - 2t = 5$

$S' = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$

取 $X = \{1, 2, 3, 5\} \Rightarrow t + s - 2t \Rightarrow s - t$

又∵在原S中 $\{4, 7\}$ 為 $s - t$

∴ $\sum_{x \in X} x = \sum_{x \in \bar{X}} x$

claim: S上存在 subset X, $\sum_{x \in X} x = t \Leftrightarrow S'$上存在 X → $\sum_{x \in X} x = \sum_{x \in S'-X} x$

(⇒) 若S上存在X, $\sum_{x \in X} x = t$，則取 $X' = X \cup \{s - 2t\}$

則 $\sum_{x \in X'} x = \sum_{x \in S'-X} x$，∴ S'上存在X' → $\sum_{x \in X'} x = \sum_{x \in S'-X} x$

構造證法:

①. Subset Sum $\leq_p$ Set Partition

給定一 $<S, t>$ 為 subset sum 之 instance

欲建構 $<S'>$ 使得 S 上存在 subset X, $\sum_{x \in X} x = t \Leftrightarrow S'$ 上存在 $X \rightarrow \sum_{x \in X} x = \sum_{x \in S'-X} x$

建構方式如下:

設 $s = \sum_{x \in S} x$ 則取 $S' = S \cup \{a\}$ 其中: $a = \begin{cases} s-2t & \text{if } s-t \geq t \\ 2t-s & \text{if } s-t < t \end{cases}$

$\Rightarrow \sum_{x \in S'} x = \begin{cases} 2s-2t & \text{if } s-t \geq t \\ 2t & \text{if } s-t < t \end{cases}$

Ex: $S = \{1, 2, 4, 5\}$ $t = 9$

$S' = \{1, 2, 4, 5, 6\}$

取 $A = \{4, 5\}$, $\bar{A} = \{1, 2, 6\}$

Ex: $S = \{1, 2, 4, 5, 10\}$ $t = 9$

$S' = \{1, 2, 4, 4, 5, 10\}$

取 $A = \{4, 5\} \cup \{s-2t\}$

$= \{4, 4, 5\}$

变形: 給定一S, 是否存在一X 使 $\sum_{x\in X} x = \frac{1}{2}\sum_{x\in S} x$, 令該 problem 為 partition

claim: subset-sum $\le_p$ partition

給定一$\langle S, t\rangle$ 為 subset sum 上之一 instance

令 $s = \sum_{x\in S} x$

建構一$\langle S'\rangle$ 為 partition problem 上之一 instance

建構方式如下:

$S' = S \cup \{2s-t\} \cup \{s+t\}$

則 $\sum_{x\in S'} x = 4s$

claim: S上存在X, $X\subseteq S$ 且 $\sum_{x\in X} x = t \Leftrightarrow S'$ 存在X', $\sum_{x\in X'} x = \frac{1}{2}\sum_{x\in S'} x$

($\Rightarrow$): 設 $X\subseteq S$ 且 $\sum_{x\in X} x = t$

則取 $X' = X \cup \{2s-t\}$

則: $\sum_{x\in X'} x = 2s = \frac{1}{2}\sum_{x\in S'} x$