02

Cyfrowe Przetwarzanie Sygnałów

Transformacje ortogonalne

prof. dr hab. inż. Tomasz Zieliński, dr inż. Jarosław Bułat

2018.03.06

1. Macierze transformacji (1 pkt)

Według poniższego wzoru wygeneruj wzorce kosinusowe w postaci wektorów i utwórz z nich macierz transformaty – macierz analizy $\mathbf{A}$ transformaty DCT-II. Niech

$$w_k(n) = s_k * \cos(\pi * k / N * (n + 0.5)) \quad , N=20,\ k=0 \ldots N\text{-}1,\ n=0 \ldots N\text{-}1, \quad \begin{cases} s_0 = \sqrt{1/N} \\ s_k = \sqrt{2/N} \quad dla \quad k \neq 0 \end{cases}$$

oznacza k-ty wiersz macierzy analizy $\mathbf{A}$ (20x20) będącej bazą pewnej transformaty.

Sprawdź czy wszystkie wektory (wiersze macierzy) są do siebie ortonormalne (czy iloczyn skalarny wszystkich par jest równy zero: suma iloczynów odpowiadających sobie próbek).

Poniżej podano przykład obliczania iloczynu skalarnego różnymi metodami.

```
clear all; close all
w1 = [ 0 0 1 0 0 0 0 0 ];         % Wektor 1
w2 = [ 0 0 0 0 1 0 0 0 ];         % Wektor 2
w12 = w1 .* w2;                   % Iloczyn odpowiadających sobie próbek
prod1 = sum(w12)                  % ,,0'' oznacza że wektory są ortogonalne
prod2 = dot( w1, w2 )             % w przestrzeni Euklidesowej
prod3 = w1*w2'                    % bezpośrednie obliczenie (mnożenie wektorowe)
```

2. Transformacja odwrotna – perfekcyjna rekonstrukcja (1+1 pkt)

Wygeneruj macierz odwrotną (syntezy) $\mathbf{S}$=IDCT do macierzy DCT z pkt. 1 (transponuj macierz $\mathbf{A}$, czyli zamień wiersze na kolumny), sprawdź czy $\mathbf{SA}$==$\mathbf{I}$ (macierz identycznościowa), a następnie mając $\mathbf{A}$ i $\mathbf{S}$ wykonaj analizę:

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}\,\mathbf{x}'$$

oraz rekonstrukcję (syntezę):

$$\mathbf{x}_s = \mathbf{S}\mathbf{X}$$

sygnału sygnału losowego (funkcja `randn()`), sprawdź czy transformacja posiada właściwość perfekcyjnej rekonstrukcji, ($\mathbf{x}_s$==$\mathbf{x}$?).

<u>Dla dociekliwych (+1 pkt):</u> wygeneruj macierz kwadratową $\mathbf{A}$ za pomocą funkcji `randn()` dla N=20. Sprawdź ortonormalność jej wierszy (czy norma wierszy=1). Wyznacz macierz odwrotną `S=inv(A)`. Sprawdź, czy $\mathbf{AS}$==$\mathbf{I}$?, czyli czy sekwencja operacji $\mathbf{y}$=$\mathbf{Ax}$, $\mathbf{x}_s$=$\mathbf{Sy}$ posiada właściwość perfekcyjnej rekonstrukcji. Dokonaj analizy i syntezy dowolnego sygnału losowego jak powyżej oraz sprawdź czy $\mathbf{x}_s$==$\mathbf{x}$?

„Zepsute" DCT: wygeneruj macierz $\mathbf{A}$ dla DCT, podstawiając niepoprawne indeksy (wartości) częstotliwości, np. zastąp „k" przez „k+0.25" (wzór w pkt. 1). Sprawdź ortogonalność tej macierzy, sprawdź wynik analizy oraz perfekcyjną rekonstrukcję na sygnale szumowym i harmonicznym.

3. Analiza częstotliwościowa (3 pkt)

Przyjmij liczbę próbek sygnału N=100 i częstotliwość próbkowania f_s=1000 Hz. Wygeneruj sygnał x będący sumą trzech sinusoid o częstotliwościach f_1=50, f_2=100, f_3=150 Hz i amplitudach A_1=50, A_2=100, A_3=150 (odpowiednio).

Zbuduj macierze $\mathbf{A}$=DCT i $\mathbf{S}$=IDCT dla N=100 (patrz wzór w ćwiczeniu 1). Wyświetl w pętli wartości wszystkich wierszy macierzy $\mathbf{A}$ i kolumn macierzy $\mathbf{S}$, tzn. pierwszy wiersz $\mathbf{A}$, poniżej pierwsza kolumna $\mathbf{S}$, drugi wiersz macierzy $\mathbf{A}$ i druga kolumna macierzy $\mathbf{S}$, itd. Wyświetlaj oba przebiegi na jednym wykresie, użyj pętli i instrukcji `pause`.

Wykonaj analizę $\mathbf{y}$=$\mathbf{Ax}$ i wyświetl wartości `y(1:N)`: porównaj wartości współczynników niezerowych z wartościami amplitud składowych sygnału oraz porównaj numery współczynników niezerowych z wartościami częstotliwości składowych sygnału. Wyskaluj oś poziomą w częstotliwości: zastąp `n=1:N` przez `f=(0:N-1)*fs/N`. Czy teraz wynik analizy (pokazywane częstotliwości i amplitudy składowych sygnału) jest poprawny? Sprawdź perfekcyjną rekonstrukcję ($\mathbf{x}_r$=$\mathbf{Sy}$, $\mathbf{x}_r$==$\mathbf{x}$?).

Zmień częstotliwość f_2=100 Hz drugiej składowej sygnału na f_2=105 Hz, wykonaj analizę sygnału sumarycznego ($\mathbf{y}$=$\mathbf{Ax}$) i wyświetl wyskalowany w hercach wykres $y(f)$. Składowa o f_2=105 Hz jest teraz rozmyta, ponieważ jej wzorca nie ma w zestawie funkcji bazowych (w wierszach macierzy $\mathbf{A}$). Sprawdź czy mimo to jest możliwa perfekcyjna rekonstrukcja sygnału ($\mathbf{x_r}$=$\mathbf{Sy}$, $\mathbf{x_r}$==$\mathbf{x}$?).

Zwiększ wszystkie częstotliwości sygnału o 2.5 Hz (przesunięcie spowodowane przez zastosowanie niepoprawnej częstotliwości w konwerterze sygnału telekomunikacyjnego do pasma podstawowego wokół 0 Hz). Wyświetl wynik analizy. Zwróć uwagę na rozmycie wszystkich składowych.

Dlaczego niektóre współczynniki analizy ($\mathbf{y}$) mają duże wartości? Ponieważ analizowany sygnał dobrze koreluje się (iloczyn skalarny) z niektórymi wierszami macierzy $\mathbf{A}$ (wzorcami częstotliwości).

Dlaczego możliwa jest rekonstrukcja sygnału? Ponieważ wiedząc „ile” ($\mathbf{y}$) każdego wzorca częstotliwości jest w sygnale (wzorce znamy), można te wzorce częstotliwości wymnożyć przez „ile” i zsumować przeskalowane sygnały ($\mathbf{x_r}$=$\mathbf{By}$), odtwarzając w ten sposób analizowany sygnał (pierwsza próbka sygnału zrekonstruowanego jest sumą pierwszych próbek wszystkich przeskalowanych wzorców, druga ... sumą drugich, itd.; w kolumnach macierzy B mamy wzorce, które są wykorzystywane do rekonstrukcji, y to informacja o „ile”).

4. Sygnały rzeczywiste (opcjonalnie – dla dociekliwych) (+1 pkt)

Wczytaj do Matlaba sygnał z pliku `mowa.wav`, lub inny własny plik, wykorzystując funkcję `[x, fs] = audioread('mowa.wav')` i wyświetl go (w osi x numer próbki). Następnie wybierz wzrokowo z tego sygnału M=10 różnych fragmentów x_k=$x(n_1$:$n_2)$ o długości N=256 próbek, k=1,2,3,..M, oblicz dla nich $y_k = Ax_k$. Następnie wyświetl w pętli dane na podzielonym rysunku: góra – k-ty fragment $x_k(n_1$:$n_2)$, dół – wynik analizy $y_k(f)$, wyskalowany w hercach. Jako macierz analizy przyjmij DCT z punktu 1.

5. DAB (+2 pkt)

W zadaniu 4 laboratorium 1 analizowano odebrany sygnał czasowy radia DAB, idealny i zniekształcony. Wykorzystywano w nim funkcję `PhaseRefSymbGen()`, która zwraca referencyjny sygnał czasowy `sigPhaseRefSymb`, występujący w sygnale DAB, oraz jego widmo Fouriera `PhaseRefSymb`. Widmo to jest otrzymywane za pomocą równania $\mathbf{X}$=$\mathbf{Ax'}$ z sygnału czasowego (jak wyżej, gdzie $\mathbf{x}$ to końcowe 2048 wartości sygnału `sigPhaseRefSymb`; pierwsze 504 wartości odrzucamy, gdyż są one specjalnie wykonanym powtórzeniem ostatnich 504 próbek sygnału; jest to tzw. cykliczny prefiks). W tym przypadku macierz $\mathbf{A}$ jest przeskalowaną macierzą $\mathbf{F}$ dyskretnej transformacji Fouriera (patrz zadanie 2 w ćwiczeniu 4 TOwNiT). Wygeneruj macierz $\mathbf{F}$ dla N=2048, podstaw $\mathbf{A}=\sqrt{N}\mathbf{F}$, oblicz $\mathbf{X}$=$\mathbf{Ax'}$ i porównaj wynik z `PhaseRefSymb` (alternatywnie w Matlabie: `X=fft(x)`). Następnie obróć każdą NIEZEROWĄ wartość wektora $\mathbf{X}$ (zespoloną) o losowo wybrany jeden kąt $\phi(k)$ ze zbioru: $\{+\pi/4, \; +3\pi\;/4, \; +5\pi/4 \; albo \; +7\pi/4\}$ (czyli wykonaj mnożenie $Y(k)=X(k)e^{j\phi(k)}$), co odpowiada przesłaniu na każdej używanej częstotliwości jednej z par bitów {00, 01, 10 albo 11} metodą różnicowej modulacji fazowej 4-DQPSK (*Differential Quadrature Phase Shift Keying*). Otrzymany w ten sposób wektor oznacz jako $\mathbf{Y}$. Potem oblicz $\mathbf{y}$=$\mathbf{SY}$ dla $\mathbf{S}=\mathbf{F}^{-1}/\sqrt{N}$ (alternatywnie w Matlabie: `y=ifft(Y)`) oraz skopiuj na początek jego ostatnich 504 wartości. Oznacz sygnał otrzymany w ten sposób przez `SigSymb` (2552 próbki). W taki sposób był otrzymany sygnał DAB, który analizowałeś w zadaniu 4 laboratorium DSP nr 1. W radiostacji zaczynano od widma Fouriera `PhaseRefSymb`, a następnie je obracano kątowo po raz pierwszy, kodując bity w tych obrotach, potem wynik pierwszego obrotu obracano jeszcze raz, itd., (łącznie 75 razy). Łącznie mieliśmy 76 bloków po 2552 próbki (prefiks 504 + sygnał 2048).

Co dalej? Znasz sygnały `sigPhaseRefSymb` oraz `SigSymb`, w sygnale DAB występują one jeden za drugim (przed nimi jest `NullSymbol`). Wykorzystaj je do obliczenia jaką sekwencję bitów otrzymano i porównaj ją z sekwencją bitów nadaną. W tym celu oblicz: widma obu sygnałów metodą macierzową (po usunięciu cyklicznego prefiksu, czyli ich pierwszych 504 wartości), ich obrót kątowy względem siebie i przelicz kąty na bity (za pomocą funkcji `sign()`, działającej na części rzeczywistej `real()` i urojonej `imag()` obliczonych zespolonych mnożników kątowych). Co się stanie jeśli:

a) do sygnałów `sigPhaseREfSymb` oraz `SigSymb` dodał się szum gaussowski (w Matlabie funkcja `randn()`) o amplitudzie równej 1%, 5%, 10% albo 25% amplitudy sygnału przesyłanego?

b) jesteś źle zsynchronizowany, tzn. źle odcinasz cykliczny prefiks i nie zaczynasz od 505 próbki tylko np. od 500. Dlaczego przesunięcie to nie pogarsza wyniku detekcji bitów?