Procesamiento de Señales en Tiempo Discreto

(Contenido Extra)

Ing. Martín N. Gonella
mgonella89@gmail.com

May 15, 2017

UNC Universidad Nacional de Córdoba

FCEFyN Facultad de Ciencias Exactas Físicas y Naturales

LCD Laboratorio de Comunicaciones Digitales

Tabla de contenidos

Tabla de contenidos

Retardo de Fase y Demora de Grupo

- Sea $H(e^{j\Omega})$ la respuesta en frecuencia de un sistema lineal e invariante con el tiempo, dado por $H(e^{j\Omega}) = |H(e^{j\Omega})|e^{j\beta(\Omega)}$.
- Para un rango de frecuencias alrededor de $\Omega = \Omega_0$, la respuesta de la fase puede aproximarse mediante una serie de Taylor, de la siguiente manera:

$$\beta(\Omega) = \beta(\Omega_0) + (\Omega - \Omega_0)\frac{d\beta(\Omega))}{d\Omega}|_{\Omega=\Omega_0} + \cdots \tag{1}$$

- En numerosas aplicaciones es preferible analizar la distorsión de retardo o demora, en lugar de la fase. Para ello se define el retardo de fase como:

$$\tau_p = -\frac{\beta(\Omega_0)}{\Omega_0} \tag{2}$$

- Por su parte, la demora de grupo (GD) en $\Omega = \Omega_0$ se define como $\tau_g = \tau(\Omega_0)$ donde:

$$\tau(\Omega) = -\frac{d\beta(\Omega)}{d\Omega} \tag{3}$$

Retardo de Fase y Demora de Grupo

- De ésta manera, la respuesta del sistema $H(e^{j\Omega})$, puede aproximarse por:

$$H(e^{j\Omega}) \approx |H(e^{j\Omega_0})| e^{-j\left[\Omega_0 \tau_p + (\Omega - \Omega_0)\tau_g\right]} \tag{4}$$

- **Ejemplo 1:** Sea $h[n] = \delta[n - n_d]$, en este caso de variación lineal de la fase, se verifica que todas las componentes en frecuencia de la señal de entrada van a sufrir el mismo retardo, ya que:

$$\tau_p = \tau_g = n_d \tag{5}$$

- **Ejemplo 2:** Sea $x[n] = s[n]e^{j\Omega_0 n}$, una señal de banda angosta centrada en $\Omega = \Omega_0$. La señal de salida se puede expresar como $Y(e^{j\Omega}) = X(e^{j\Omega})H(e^{j\Omega})$. Usando (4):

$$Y(e^{j\Omega}) \approx S(e^{j\Omega}) e^{-j\tau(\Omega_0)} |H(e^{j\Omega_0})| e^{-j\left[\Omega_0 \tau_p + (\Omega - \Omega_0)\tau_g\right]} \tag{6}$$

Luego, la expresión en el dominio del tiempo resulta aproximadamente:

$$y[n] \approx |H(e^{j\Omega_0})| s[n - \tau_g] e^{-j\Omega_0 (n - \tau_p)} \tag{7}$$

Práctico: Retardo de Fase y Demora de Grupo

Se propone desarrollar las siguientes actividades:

- Dado $H(z)$, con $c_k = 0.95e^{j(0.15\pi+0.02\pi k)}$ y $k = 1, 2, 3, 4$

$$H(z) = \frac{(1-0.98e^{j0.8\pi}z^{-1})(1-0.98e^{-j0.8\pi}z^{-1})}{(1-0.8e^{j0.4\pi}z^{-1})(1-0.8e^{-j0.4\pi}z^{-1})} \prod_{k=1}^{4} \left[\frac{(c_k^* - z^{-1})(c_k - z^{-1})}{(1-c_k z^{-1})(1-c_k^* z^{-1})} \right]^2 \tag{8}$$

- Se definen $x_1[n]$, $x_2[n]$ y $x_3[n]$. Con $M = 60$.

$$\begin{aligned} x_1[n] &= w[n]\cos(0.2\pi n), \\ x_2[n] &= w[n]\cos(0.4\pi n - \pi/2), \\ x_3[n] &= w[n]\cos(0.8\pi n + \pi/5), \end{aligned}$$

$$w[n] = \begin{cases} 0.54 - 0.46\cos(2\pi n/M) & 0 \leq n \leq M \\ 0 & otro \end{cases}$$

- Finalmente $x[n] = x_3[n] + x_1[n-M-1] + x_2[n-2M-2]$.

Práctico: Retardo de Fase y Demora de Grupo

1. Simular en MATLAB el sistema descripto anteriormente. Utilizar la herramienta *fvtool()*, para poder observar la fase, la demora de grupo, etc.
2. ¿Qué conclusiones se pueden extraer acerca de la demora de grupo?
3. ¿Por qué es importante tener un sistema con fase cero ó a lo sumo fase lineal?

Práctico: Retardo de Fase y Demora de Grupo

- Sabiendo que la salida de un SLIT $H(z)$, con entrada dada por $x[n] = s[n]e^{j\Omega_0 n}$ (de banda angosta) centrada en $\Omega = \Omega_0$, se puede aproximar a la señal $y[n] \approx |H(e^{j\Omega_0})|s[n-\tau_g]e^{-j\Omega_0(n-\tau_p)}$.
  1. Grafique en MATLAB, la salida $y[n]$ para un sistema LIT de fase cero donde, $\beta(\Omega) = 0$, magnitud unitaria y entrada $x[n] = \cos((\Omega_0/100)n)\cos(\Omega_0 n)$.
  2. Grafique en MATLAB, la salida $y[n]$ para un sistema LIT de fase lineal, donde $\beta(\Omega) = -\Omega n_d$ con $n_d = 30$, magnitud unitaria y entrada $x[n] = \cos((\Omega_0/100)n)\cos(\Omega_0 n)$.
  3. Grafique en MATLAB, la salida $y[n]$ para un sistema LIT de fase no lineal donde, $\beta(\Omega) = -\Omega^2 n_d$ con $n_d = 30$, magnitud unitaria y entrada $x[n] = \cos((\Omega_0/100)n)\cos(\Omega_0 n)$.
  4. Comente los resultados.

- Considere el sistema estable dado por:

$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}} = z^{-1}\frac{1 - a^* z}{1 - az^{-1}} \tag{9}$$

- Nótese la existencia de un cero en $z = 1/a^*$ y un polo en $z = a$. La respuesta en frecuencia resulta:

$$H(e^{j\Omega}) = e^{-j\Omega}\frac{1 - a^* e^{j\Omega}}{1 - ae^{-j\Omega}} \tag{10}$$

- Es simple verificar que $|H_{ap}(e^{j\Omega})| = 1$ (i.e., numerador y denominador son complejos conjugados), por lo que se denomina sistema pasatodo. Para un sistema pasatodo con respuesta al impulso real, se tiene:

$$H_{ap}(z) = A\prod_{k=1}^{M_r}\frac{z^{-1} - d_k}{1 - d_k z^{-1}}\prod_{k=1}^{M_i}\frac{(z^{-1} - e_k^*)(z^{-1} - e_k)}{(1 - e_k z^{-1})(1 - e_k^* z^{-1})} \tag{11}$$

donde A es una constante positiva, d_k y e_k son los polos reales y complejos de $H_{ap}(z)$, respectivamente. Nótese que $\angle H_{ap}(1) = 0$.

- Para un filtro pasatodo con un polo simple en $z = re^{j\theta}$, la fase resulta:

$$\angle H_{ap}(e^{j\Omega}) = -\Omega - 2\arctan\frac{r\sin(\Omega-\theta)}{1 - r\cos(\Omega-\theta)} \tag{12}$$

- Por su parte, la demora de grupo resulta:

$$\tau_{ap}(\Omega) = \frac{1 - r^2}{|1 - re^{j\theta}e^{j\Omega}|^2} \tag{13}$$

- Para un sistema estable y causal (i.e., $r < 1$), nótese que:

$$\tau_{ap}(\Omega) > 0 \tag{14}$$

- Este resultado es válido para sistemas pasatodo de mayor órden. Además, teniendo en cuenta que $\angle H_{ap}(e^{j0}) = 0$, puede verificarse que para un sistema pasatodo causal y estable se tiene:

$$\angle H_{ap}(e^{j\Omega}) \leq 0, \qquad 0 \leq \Omega < \pi \tag{15}$$

Se propone desarrollar las siguientes actividades:

- Sea $H_{ap}(z)$ un sistema pasa todo de primer órden, con un polo en $z = 0.9$.
  1. Hallar las expresiones generales de la magnitud, fase y retardo de grupo de $H_{ap}(e^{j\Omega})$ de primer órden.
  2. Graficar en MATLAB, la magnitud, la fase y el retardo de grupo de $H_{ap}(e^{j\Omega})$.
  3. ¿Qué información se puede extraer de la fase y el retardo de grupo de $H_{ap}(e^{j\Omega})$?
  4. Repetir las gráficas, para $H_{ap}(z)$ con polo en $z = -0.9$ y comentar.

Tabla de contenidos

- Uno de los sistemas de gran interés para diversas aplicaciones es aquel que tiene los polos y ceros dentro del círculo unitario.
- Estos sistemas se denominan de fase mínima y tienen varias propiedades de gran utilidad como se verá a continuación. Cualquier función racional $H(z)$, de un sistema estable y causal (sin ceros en el círculo unitario) puede expresarse como:

$$H(z) = H_{min}(z) H_{ap}(z) \tag{16}$$

donde $H_{min}(z)$ es un sistema de fase mínima y $H_{ap}(z)$ es un sistema pasa todo. En efecto, suponga que $H(z)$ tiene un cero fuera del círculo unitario en $z = 1/c^*$ con $|c| < 1$ tal que:

$$H(z) = H_1(z)(z^{-1} - c^*) \tag{17}$$

con $H_1(z)$ siendo de fase mínima. Operando,

$$H(z) = \underbrace{H_1(z)(1 - cz^{-1})}_{\text{Fase Mínima}} \underbrace{\frac{(z^{-1} - c^*)}{(1 - cz^{-1})}}_{\text{Pasa Todo}} \tag{18}$$

Sistemas de Fase Mínima

- Sea un SLIT estable (i.e., todos los polos dentro del círculo unitario) definido por: $H(z) = H_{min}(z)H_{ap}(z)$.
- Siguiendo la metodología mostrada en la página anterior, es posible derivar un sistema estable de fase no mínima (i.e., con ceros afuera del círculo unitario) a partir de un sistema estable de fase mínima (i.e., por conjugación e inversión de ceros dentro del círculo), y viceversa.
- En cualquier caso, se verifica que las respuestas en frecuencia de ambos sistemas tienen la misma magnitud.
- Una propiedad importante de los sistemas de fase mínima $H_{min}(z)$ es que son perfectamente invertibles con sistema inverso también de fase mínima.
- Además, un filtro pasatodo no puede ser de fase mínima.

Propiedades de los Sistemas de Fase Mínima

1. Teniendo en cuenta que $\angle H_{ap}(e^{j\Omega} \leq 0)$ para $0 \leq \Omega \leq \pi$, y considerando que $H(e^{j0})$ es real con $H(e^{j0}) = \sum_n h[n] > 0$. Se concluye que la reflexión de ceros que están dentro del círculo unitario para obtener un sistema de fase no mínima $H(e^{j\Omega})$, incrementa el valor negativo de la fase, respecto a la fase del sistema de fase mínima $H_{min}(e^{j\Omega})$.
2. Puesto que la demora de grupo de un sistema pasatodo es siempre positiva, i.e.,

$$\tau_{ap}(\Omega) > 0, \tag{19}$$

se concluye que la demora de grupo del sistema de fase mínima es menor que la de cualquier sistema de fase no mínima derivado del mismo.
3. Sean $h[n]$ y $h_{min}[n]$ las respuestas al impulso de los sistemas con respuestas en frecuencia $H(e^{j\Omega})$ y $H_{min}(e^{j\Omega})$, respectivamente, tal que:

$$|H(e^{j\Omega})| = |H_{min}(e^{j\Omega})| \tag{20}$$

los pulsos $h[n]$ y $h_{min}[n]$ tienen la misma energía total.

Propiedades de los Sistemas de Fase Mínima

4 Sea un sistema estable y causal definido por:

$$H(z) = H_{min}(z)H_{ap}(z) = H_{min}(z)\frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}} \tag{21}$$

con $H_{min}(z)$ siendo de fase mínima y $|a| < 1$. Es posible demostrar a partir del teorema del valor inicial que:

$$|h[0]| = |\lim_{z\to\infty} H(z) \leq |h_{min}[n]|, \tag{22}$$

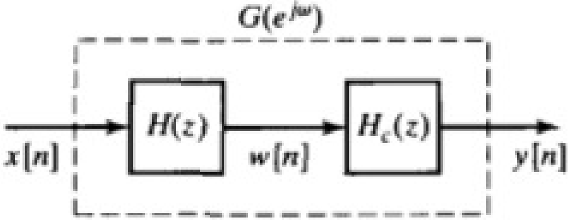
5 Además, un sistema estable y causal de fase no mínima expresado por (20), con $|a| < 1$. Se puede demostrar que:

$$\sum_{m=0}^{n} |h_{min}[m]|^2 \geq \sum_{m=0}^{n} |h[m]|^2 \qquad \forall n, \tag{23}$$

lo que conoce como Mínima Demora de Energía.

Se propone desarrollar las siguientes actividades:

- No es posible obtener un sistema inverso, causal y estable (compensador perfecto) de un sistema de fase no mínima. En este problema se estudia una solución para compensar únicamente el módulo de la respuesta en frecuencia de un sistema de fase no mínima. Suponga que un sistema en tiempo discreto, lineal e invariante con el tiempo de fase no mínima y con $H(z) = (1 - 0.8e^{j0.3\pi}z^{-1})(1 - 0.8e^{-j0.3\pi}z^{-1})(1 - 1.2e^{j0.7\pi}z^{-1})(1 - 1.2e^{-j0.7\pi}z^{-1})$, se conecta en cascada con un sistema compensador $H_c(z)$, de la siguiente manera:



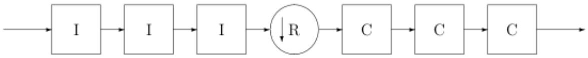
Práctico: Sistemas de Fase Mínima

1. ¿Cómo se deberá escoger $H_c(z)$ de forma que éste sea estable y causal y que el módulo de la respuestra en frecuencia global $G(e^{j\Omega})$, sea la unidad?
2. Obtenga las expresiones de $H_{min}(z)$, $H_{ap}(z)$, $H_c(z)$ y $G(z)$.
3. Grafique el diagrama de polos y ceros correspondiente de $H_{min}(z)$, $H_{ap}(z)$, $H_c(z)$ y $G(z)$.
4. Utilizando la herramienta de MATLAB, *fvtool()*, observe la fase, la demora de grupo y la respuesta al impulso de $H(z)$, $H_{min}(z)$ y $H_{ap}(z)$. ¿Qué conclusiones se pueden extraer de dichos resultados? ¿Puede $H_{ap}(z)$, ser un sistema de fase mínima? (Justifíque).
5. Demostrar analíticamente, las 5 propiedades de los sistemas de Fase Mínima.

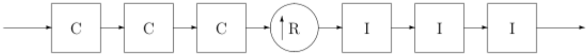
Tabla de contenidos

Filtros CIC para Interpolación y Diezmado

- Un filtro CIC consiste de uno ó más *integradores* y pares de filtros *comb*. En el caso de un decimador, la señal de entrada alimenta la cascada de integradores, luego el submuestreo seguido de una cascada de filtros comb (en igual número que los integradores). En cambio, un interpolador CIC, posee una estructura revertida con respecto al diezmador, primero los filtros comb, luego el sobremuestreo seguido de los integradores (en igual número que los comb). Los filtros CIC tienen características de frecuencia de paso bajo, mientras que los filtros FIR pueden tener características de paso bajo, paso alto o frecuencia de paso de banda. Los filtros del CIC utilizan solamente la adición y la resta, mientras que los filtros FIR utilizan suma, resta, pero la mayoría de los filtros FIR también requieren multiplicación.



Three Stage Decimating CIC Filter

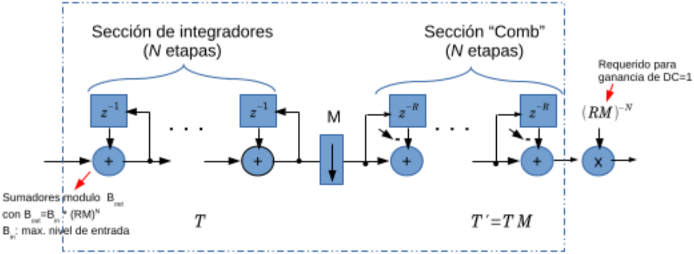


Three Stage Interpolating CIC Filter

- La respuesta referenciada a alta frecuencia es:

$$H(z) = \left[\frac{1 - z^{-RM}}{1 - z^{-1}}\right]^N \to |H(e^{j\Omega})| = \left\|\frac{\sin(RM\Omega/2)}{\sin(\Omega/2)}\right\|^N \tag{24}$$

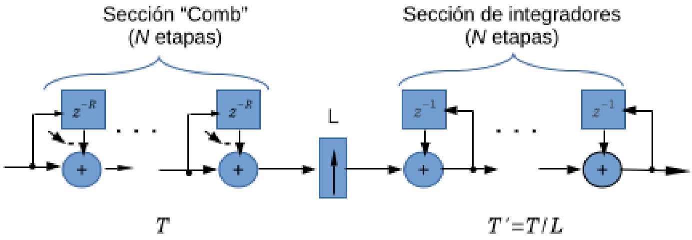
- Además, $|H(e^{j\Omega})|$ tiene ceros en mpultiplos de $\Omega = \frac{2\pi}{RM}$.



- La respuesta referenciada a alta frecuencia es:

$$H(z) = \left[\frac{1 - z^{-RL}}{1 - z^{-1}}\right]^N \rightarrow |H(e^{j\Omega})| = \left\|\frac{\sin(RL\Omega/2)}{\sin(\Omega/2)}\right\|^N \tag{25}$$

- Además, $|H(e^{j\Omega})|$ tiene ceros en mpultiplos de $\Omega = \frac{2\pi}{RL}$.



Práctico: Análisis de un Diezmador CIC

Se propone desarrollar las siguientes actividades:

- Analice con MATLAB, las respuestas en frecuencia de un Filtro Integrador y un Filtro Comb, para $N = 1$.
- Con los Filtros anteriores, defina la respuesta en frecuencia de un diezmador CIC de órden N.
- Varíe los parámetros R, M y N. Comente como afecta dicha variación al rechazo al aliasing del sistema.
- ¿Qué sucede con la estabilidad del filtro CIC, teniendo en cuenta que un filtro integrador es inestable, por presentar un polo en $z = 1$?

Bibliografía

- *Discrete Time Signal Processing*, A. Oppenheim, R. Schaefer, Prentice Hall, 1999 (Versiones en Inglés y en Español).
- *Fundamental of Signals and Systems Using the Web and Matlab.*, E. Kamen y B. Heck, R. Schaefer, Prentice Hall, 2007.