# Введение в дискретную математику. Лекция 8. Элементы бесконечной комбинаторики. Функции полезности vs отношения предпочтения

Н. Л. Поляков

Высшая Школа Экономики, Факультет экономических наук, Москва

2023 г.

# Понятие о мощности множества

- Мощностью (cardinality) конечного множества называется количество его элементов. Обозначение: $\operatorname{card} X$ или $|X|$.

  **Пример.** $|\{a, b, c\}| = 3$.

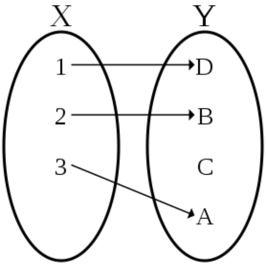
- Можно ли распространить понятие мощности на бесконечные множества? На самом деле, да. Однако, для этого потребуется определить т.н. *кардинальные числа*, что выходит далеко за пределы программы курса. Вместо этого мы научимся сравнивать множества по мощности и познакомимся с некоторыми *маленькими* по мощности бесконечными множествами.

**Напоминание.** Функция $f : X \to Y$ называется

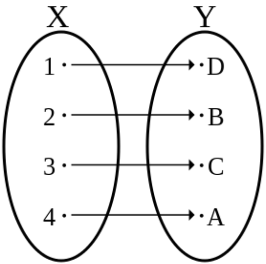
- **инъективной**, если
  $$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$
  для всех $x, y \in X$,
- **взаимно-однозначной** (или **биективной**) если она инъективна и, кроме того, **сюръективна**, т.е. для каждого $y \in Y$ существует $x \in X$, для которого
  $$f(x) = y.$$

Как это связано с мощностью? Для всех конечных множеств $X$ и $Y$

$|X| \leqslant |Y|$ тогда и только тогда, когда существует **инъективная** функция $f : X \to Y$;




$|X| = |Y|$ тогда и только тогда, когда существует **биективная** функция $f : X \to Y$.



Именно это свойство используется для сравнения по мощности произвольных (в т.ч. бесконечных) множеств.

## Определение

Для всех множеств $X$ и $Y$

- $|X| \leqslant |Y|$ тогда и только тогда, когда существует **инъективная** функция $f : X \to Y$,
- $|X| = |Y|$ тогда и только тогда, когда существует **биективная** функция $f : X \to Y$,
- $|X| < |Y|$ тогда и только тогда, $|X| \leqslant |Y|$ и неверно, что $|X| = |Y|$.

Если $|X| = |Y|$, то говорят, что множества $X$ и $Y$ **равномощны**.

**Свойства.** Для всех множеств $X$, $Y$, $Z$

1. $|X| \leqslant |X|$,
2. если $|X| \leqslant |Y|$ и $|Y| \leqslant |Z|$, то $|X| \leqslant |Z|$,
3. если $|X| \leqslant |Y|$ и $|Y| \leqslant |X|$, то $|X| = |Y|$,
4. $|X| \leqslant |Y|$ или $|Y| \leqslant |X|$.

**Замечание.** Последние два свойства далеко не очевидны! Свойство 3 носит название **теорема Кантора-Бернштейна**.

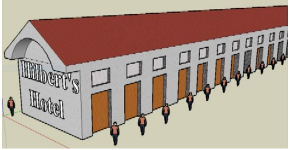
**Новые эффекты.** Для всякого **конечного** множества $Y$ верно следующее:

- Если $X \subseteq Y$ и $X \neq Y$, то $|X| < |Y|$.

Верно ли это для бесконечных множеств?

**Нет**. Это можно наглядно продемонстрировать с помощью т.н. «парадокса Гранд-отеля» (Д. Гильберт, 1928).

Может, если отель имеет бесконечное число номеров (занумерованных натуральными числами).




В отель приезжает новый постоялец. Все номера в отеле заняты. Может ли хозяин отеля разместить постояльца, не ущемляя интересов других жильцов (т.е., не выселяя их из отеля, и не подселяя друг к другу)?

Постоялец из номера $1$ перезжает в номер $2$, постоялец из номера $2$ перезжает в номер $3$, и т.д. Каждый из старых постояльцев оказался в каком-то номере; при этом первый номер освободился для вновь прибывшего.

# Счетные множества

## Замечание

Свойство

$$\forall X\, (X \subsetneqq Y \Rightarrow |X| < |Y|)$$

(словами: множество $Y$ не равномощно никакому своему собственномку подмножеству) характеризует все **конечные** множества. Множества, удовлетворяющие этому свойству называются **конечными по Дедекинду**.

## Определение

Множество называется **счетным**, если оно равномощно множеству всех натуральных чисел.

Иначе говоря, множество $X$ счетно, если все его элементы можно занумеровать (без повторений) натуральными числами, т.е., существует взаимно-однозначное отображение

$$f : \mathbb{N} \to X.$$

Каждое счетное множество, очевидно, бесконечно. Как мы уже поняли, множество $\mathbb{N} \setminus \{1\} = \{2, 3, \ldots\}$ тоже счетно. Расуждая аналогично, можно показать, что множество всех четных натуральных чисел, множество всех кваждатов натуральных чисел, множество всех степеней двойки и т.п. это тоже счетные множества.

Между конечными и счетными множествами нет множеств промежуточной мощности (при некоторых стандарнтных предположениях о структуре универсума всех множеств).

## Теорема

*Каждое подмножество счетного множества либо конечно, либо счетно.*

Теперь попытаемся построить множество, которое по мощности строго больше, чем $\mathbb{N}$. Оказывается, это не так-то просто.

## Утверждение

*Множество $\mathbb{Z}$ целых чисел счетно.*

**Доказательство.** Рассматрим функцию $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$,

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{n-1}{2}, & \text{если } n \text{ нечетно} \\[2ex] -\dfrac{n}{2}, & \text{если } n \text{ четно} \end{cases}$$

Эта функция взаимно-однозначна (**упражнение**). Следовательно,

$$|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|,$$

множество $\mathbb{Z}$ счетно.

## Утверждение

*Множество* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *всех пар натуральных чисел счетно.*

**Доказательство.** (схема). Построим взаимно-однозначное отображение

$$f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}.$$

- Присвоим номер $1$ паре $(1, 1)$.
- Затем в порядке возрастания первого номера перечислим все пары $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ с суммой членов, равной тройке, т.е. продолжим перечисление всех пар натуральных чисел парами

$$(1, 2) \text{ и } (2, 1).$$

- Затем также поступим с парами, сумма членов которых равна $4$ и т.д.

Получим последовательность

$$(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 1), \ldots,$$

в которую попадут все элементы множества $\mathbb{N}^2$.

**Замечание.** Можно показать, что в этой последовательности уникальный номер пары $(x, y)$ есть

$$\frac{(x + y)^2 - x - 3y}{2} + 1.$$

## Следствие

*Множество $\mathbb{Q}$ всех рациональных чисел счетно.*

**Доказательство.** Поскольку $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$, имеем

$$|\mathbb{N}| \leqslant |\mathbb{Q}|.$$

По теореме Кантора-Бернштейна, для доказательства утверждения достаточно найти какое-нибудь счетное множество $X$, для которого $|\mathbb{Q}| \leqslant |X|$. Выберем к вачестве $X$ множество $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$. Оно счетно, т.к. равномощно множеству $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (счетность множества $\mathbb{Z}$ мы уже доказали). Чтобы доказать, что $|\mathbb{Q}| \leqslant |\mathbb{Z} \times \mathbb{N}|$, надо построить инъективную функцию

$$f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}.$$

Это легко сделать. Для для каждого числа $x \in \mathbb{Q}$ существует единственное представление

$$x = \frac{p_x}{q_x}$$

в виде несократимой дроби ($q_x = 1$, если $x$ целое). Положим

$$f(x) = (p_x, q_x).$$

Множества $\mathbb{N}^3$, $\mathbb{N}^4$ и т.д. (троек, четверок и т.д.) натуральных чисел счетны. Это можно доказать по индукции, используя счетность множества $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

## Утверждение

*Множество $\mathbb{N}^{<\infty}$ всех конечных последовательностей натуральных чисел... тоже счетно.*

**Один из вариантов доказательства** следующий. Надо доказать, что существует инъективная функция

$$f : \mathbb{N}^{<\infty} \to \mathbb{N}.$$

Пусть

$$(p_n) = 2, 3, 5, \dots$$

есть последовательность всех простых чисел в порядке возрастания. Для каждой последовательности $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^{<\infty}$ положим

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_n^{a_n}.$$

Например,

$$f(2, 3, 1) = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^1 = 540.$$

Инъективность следует из **основной теоремы арифметики** (каждое натуральное число представляется в виде произведения простых чисел единственным образом с точностью до перестановки сомножителей).

Вообще, имеет место следующее утверждение:

- Конечное или счетное объединение счетных множеств счетно.
- Счетное объединение конечных множеств счетно или конечно.

## Определение

Действительное число называется *алгебраическим*, если оно является корнем многочлена

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_0$$

положительной степени $n$ с целыми коэффициентами $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_0$.

## Утверждение

*Множество $\mathbb{A}$ всех алгебраических чисел... тоже счетно.*

**Доказательство.** Многочлен $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_0$ однозначно определяется конечной последовательностью коэффициентов $(a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_0)$, поэтому множество $\mathbb{P}$ всех таких многочленов счетно. Из алгебры известно, что каждый многочлен $n$-й степени (с действительными или комплексными коэффициентами) имеет не более $n$ корней. Поэтому множество алгебраических чисел можно представить в виде счетного объединения конечных множеств

$$\bigcup_{p \in \mathbb{P}} \{x \in \mathbb{R} : p(x) = 0\}.$$

## Определение

Действительное число $x$ называется *вычислимым*, если существует алгоритм (программа на некотором языке), который по входу $n$ выдает $n$-ый знак десятичной записи числа $x$ (включая запятую).

## Утверждение

*Множество всех вычислимых чисел... тоже счетно.*

**Доказательство.** Любой язык программирования содержит конечное число символов. Занумеруем их натуральными числами. Тогда каждой программе взаимно-однозначно соответствует некоторая конечная последовательность натуральных чисел. Следовательно, количество программ не более чем счетно. Значит, не более чем счетно и количество программ, которые по входу $n$ выдают $n$-ый знак десятичной записи некоторого числа $x$. А значит, не более чем счетно и множество таких чисел $x$. С другой стороны, их множество не менее чем счетно, поскольку каждое натуральное число вычислимо.

**Может быть, вообще, каждое бесконечное множество счетно?**

# Несчетные множества

## Определение

Бесконечной последовательностью натуральных чисел называется любая функция $a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

## Теорема (Кантора)

*Множество* $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ *бесконечных последовательностей натуральных чисел не счетно, т.е.*

$$|\mathbb{N}| < |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}|.$$

**Доказательство** (диагональным методом Кантора). Допустим, что нам удалось каким-нибудь образом перечислить все бесконечные последовательности натуральных чисел. Расположим их для наглядности в виде «таблицы»:

$$\begin{array}{cccc}
x_1^1 & x_2^1 & x_3^1 & \ldots \\
x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \ldots \\
x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & \ldots \\
. & . & . & . \\
x_1^n & x_2^n & x_3^n & \ldots \\
. & . & . & .
\end{array}$$

Каждая $n$-ая строка этой таблицы есть последовательность с номером $n$, который записан в виде верхнего индекса каждого члена последовательности.

Рассмотрим диагональ этой таблицы, т.е. последовательность

$$x_1^1, x_2^2, x_3^3, \dots x_n^n, \dots$$

и, далее, следующую последовательность $\alpha$

$$x_1^1 + 1, x_2^2 + 1, x_3^3 + 1, \dots x_n^n + 1, \dots$$

По предположению последовательность $\alpha$ присутствует в списке всех перечисленных последовательностей и имеет свой номер $n_0$, т.е. является $n_0$-ой строкой изображенной таблицы

$$x_1^{n_0}, x_2^{n_0}, x_3^{n_0}, \dots x_n^{n_0}, \dots.$$

Таким образом имеют место равенства

$$x_1^{n_0} = x_1^1 + 1, x_2^{n_0} = x_2^2 + 1, \dots, x_n^{n_0} = x_n^n + 1, \dots$$

в частности, равенство

$$x_{n_0}^{n_0} = x_{n_0}^{n_0} + 1,$$

которое, очевидно, противоречиво.

## Утверждение

*Множество всех бесконечных последовательностей из нулей и единиц тоже несчетно.*

**Доказательство** такое же, только вместо последовательности $x_n^n + 1$ надо использовать последовательность $x_n^n \oplus 1$.

## Следствие

*Множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел... несчетно.*

**Доказательство.** Каждое действительное число $x$ из отрезка $[0, 1]$ однозначно задается своей двойчной записью

$$x = 0, x_1 x_2 \dots,$$

т.е. бесконечной последовательностью из нулей и единиц $(x_1, x_2, \dots)$. Поэтому отрезок $[0, 1]$, и, тем более, множество $\mathbb{R}$, есть несчетное (более, чем счетное) множество.

Диагональным методом Кантора можно доказать, что

- для каждого множества $X$ множество всех функций $f : X \to A$, где $|A| \geqslant 2$, по мощности строго больше, чем $X$;
- для каждого множества $X$ множество $\mathscr{P}(X)$ всех подмножеств множества $X$, по мощности строго больше, чем $X$.

# Функции полезности vs отношения предпочтения

Основные понятия теории потребления это

- множество альтернатив $X$ (здесь и далее мы рассматриваем только случай $X = \mathbb{R}_+^n$),
- способ **оценивать** или **сравнивать** альтернативы.

В первом случае мы имеем **функцию полезности** $f : X \to \mathbb{R}$, во втором – бинарное **отношение предпочтения** $\succcurlyeq$ на множестве $X$, которое (как правило) удовлетворяет условиям

1. *Рефлексивность*: для всех $\boldsymbol{x} \in X$
$$\boldsymbol{x} \succcurlyeq \boldsymbol{x};$$
2. *Транзитивность*: для всех $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in X$
$$(\boldsymbol{x} \succcurlyeq \boldsymbol{y} \wedge \boldsymbol{y} \succcurlyeq \boldsymbol{z}) \Rightarrow \boldsymbol{x} \succcurlyeq \boldsymbol{z};$$
3. *Полнота* (или *совершенность*): для всех $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$
$$\boldsymbol{x} \succcurlyeq \boldsymbol{y} \vee \boldsymbol{y} \succcurlyeq \boldsymbol{x}.$$

По любой функции полезности $f$ можно построить отношение предпочтения $\succcurlyeq_f$:

$$\boldsymbol{x} \succcurlyeq_f \boldsymbol{y} \Leftrightarrow f(\boldsymbol{x}) \geqslant f(\boldsymbol{y}).$$

Каждое такое отношение $\succcurlyeq_f$ предпочтения удовлетворяет свойствам 1. – 3. (рефлексивность, транзитивность и полнота), какова бы ни была функция $f$.

Верно ли обратное? Т.е. можно ли по любому отношению предпочтения $\succcurlyeq$ на множестве $X = \mathbb{R}^n_+$ построить такую функцию $f_{\succcurlyeq} : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$, чтобы выполнялось

$$\boldsymbol{x} \succcurlyeq \boldsymbol{y} \Leftrightarrow f_{\succcurlyeq}(\boldsymbol{x}) \geqslant f_{\succcurlyeq}(\boldsymbol{y})?$$

# Лексикографические предпочтения

Пусть есть только два товара, но первый из них представляет для потребителя **бесконечно бóльшую ценность, чем второй** (количество второго товара может повлиять на выбор потребителя только при фиксированном количестве первого товара). Тогда отношение предпочтения определяется так:

$$(x_1, x_2) \succcurlyeq (y_1, y_2) \Leftrightarrow (x_1 > y_1) \vee (x_1 = y_1 \wedge x_2 \geqslant y_2).$$

Такое отношение предпочтения называется **лексикографическим порядком**.

Этот пример может быть обобщен на любое количество товаров $n$: на множестве альтернатив $\mathbb{R}^n_+$ можно следующим образом определить отношение предпочтения $\succcurlyeq$:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \succcurlyeq (y_1, y_2, \ldots, y_n) \Leftrightarrow$$
$$x_1 > y_1 \text{ или}$$
$$(x_1 = y_1 \text{ и } x_2 > y_2) \text{ или}$$
$$(x_1 = y_1 \text{ и } x_2 = y_2 \text{ и } x_3 > y_3) \text{ или}$$
$$\ldots$$
$$(x_1 = y_1 \text{ и } x_2 = y_2 \text{ и } \ldots \text{ и } x_{n-1} = y_{n-1} \text{ и } x_n > y_n) \text{ или}$$
$$(x_1 = y_1 \text{ и } x_2 = y_2 \text{ и } \ldots \text{ и } x_{n-1} = y_{n-1} \text{ и } x_n = y_n).$$

# Теорема

*Пусть* $\succcurlyeq$ *есть лексикографический порядок на множестве* $\mathbb{R}^2_+$. *Тогда не существует такой функции* $f : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$, *что*

$$(x_1, x_2) \succcurlyeq (y_1, y_2) \Leftrightarrow f(x_1, x_2) \geqslant f(y_1, y_2).$$

**Схема доказательства.** Пусть, напротив, такая функции $f$ существует. Сопоставим каждому действительному числу $x$ рациональное число $r(x)$ по правилу, которое излагается ниже.

Заметим, что условие

$$\boldsymbol{x} \succcurlyeq \boldsymbol{y} \Leftrightarrow f(\boldsymbol{x}) \geqslant f(\boldsymbol{y}).$$

влечет условие

$$\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y} \Leftrightarrow f(\boldsymbol{x}) > f(\boldsymbol{y}),$$

где $\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y}$ т.т.т. $\boldsymbol{x} \succcurlyeq \boldsymbol{y}$ и неверно, что $\boldsymbol{y} \succcurlyeq \boldsymbol{x}$. Тогда поскольку для каждого неотрицательного числа $x$ выполнено условие

$$(x, 2) \succ (x, 1),$$

выполнено и условие

$$f(x, 2) > f(x, 1).$$

Поэтому существует рациональное число $r(x)$, для которого

$$f(x, 2) > r(x) > f(x, 1).$$

Зафиксируем такое число $r(x)$ для каждого $x \in \mathbb{R}_+$.

Изучим свойства функции $r(x)$. Для каждых неотрицательных действительных чисел $x, y$ выполнено: если $x > y$, то

$$(x, 1) \succ (y, 2).$$

Поэтому если $x > y$, то $f(x, 1) > f(y, 2)$ и, значит,

$$r(x) > f(x, 1) > f(y, 2) > r(y).$$

Итак,

$$x > y \Rightarrow r(x) > r(y).$$

Поэтому функция $r(x)$ инъективна. Вспомним, что область определения функции $r$ есть множество всех неотрицательных действительных чисел, а область значений функции $r$ лежит в множестве рациональных чисел.

Множество неотрицательных действительный чисел несчетно (иначе было бы счетным и множество всех действительных чисел, что противоречит теореме Кантора). Множество всех рациональных чисел (и любое его бесконечное подмножество) счетно. Противоречие.

Впрочем, существует довольно широкий класс отношений предпочтения, который допускает представление с помощью функции полезности $f$.

## Определение

Отношение предпочтения $\succcurlyeq$ на множестве $\mathbb{R}^n_+$ называется *непрерывным*, если выполнено условие: для любых сходящихся последовательностей $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots$ и $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots$ точек множества $\mathbb{R}^n_+$, таких что

$$\boldsymbol{x}_1 \succcurlyeq \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{x}_2 \succcurlyeq \boldsymbol{y}_2, \ldots$$

выполнено $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n \succcurlyeq \lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{y}_n$.

## Утверждение

*Для любого отношения предпочтения $\succcurlyeq$ на множестве $\mathbb{R}^n_+$ следующие условия равносильны:*

1. *$\succcurlyeq$ есть непрерывное отношение предпочтения.*
2. *Для каждого $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+$ множества*

$$L^+(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n_+ : \boldsymbol{y} \succcurlyeq \boldsymbol{x}\} \text{ и } L^-(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n_+ : \boldsymbol{x} \succcurlyeq \boldsymbol{y}\}$$

   *замкнуты.*
3. *Для каждых $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n_+$ если $\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y}$, то существуют такие $\varepsilon$-окрестности $V_\varepsilon(\boldsymbol{x})$ и $V_\varepsilon(\boldsymbol{y})$ точек $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ соответственно, что $\boldsymbol{x}' \succ \boldsymbol{y}'$ для всех $\boldsymbol{x}' \in V_\varepsilon(\boldsymbol{x})$ и $\boldsymbol{y}' \in V_\varepsilon(\boldsymbol{y})$.*

## Пример

Пусть

$$\boldsymbol{x} \succcurlyeq \boldsymbol{y} \Leftrightarrow |\boldsymbol{x}| \geqslant |\boldsymbol{y}|,$$

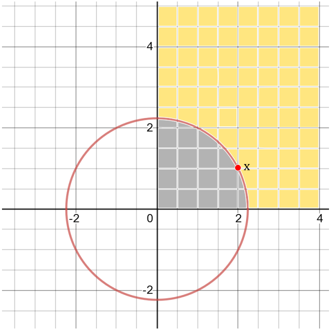
где $|\boldsymbol{z}|$ – длина вектора $\boldsymbol{z}$, т.е.

$$(x_1, x_2) \succcurlyeq (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 \geqslant y_1^2 + y_2^2.$$

Пусть $\boldsymbol{x}_0 = (2, 1)$. Тогда

$$L^+(\boldsymbol{x}_0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : x^2 + y^2 \geqslant 5\}$$
$$L^-(\boldsymbol{x}_0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : x^2 + y^2 \leqslant 5\}$$

Оба эти множества замкнуты.




## Теорема (Дебре о непрерывных предпочтениях)

*Пусть отношение предпочтения* $\succcurlyeq$ *на множестве* $\mathbb{R}_+^n$ *непрерывно. Тогда существует непрерывная функция* $f : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}$, *для которой*

$$\boldsymbol{x} \succcurlyeq \boldsymbol{y} \Leftrightarrow f(\boldsymbol{x}) \geqslant f(\boldsymbol{y})$$

*для всех* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}_+^n$.

# Задачи I

1. Докажите, что если $X \subseteq Y$, то $|X| \leqslant |Y|$.
2. Найдите номер пары $(3, 12)$ в последовательности всех пар натуральных чисел из теоретической части.
3. Доказать, что множество $\mathbb{Z}$ целых чисел счетно, явным образом предъявив биективное отображение
$$\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}.$$
(задача рассмотрена в теоретической части)
4. Используя счетность множества $\mathbb{N}^2$ и теорему Кантора-Бернштейна, докажите счетность множества $\mathbb{Q}$ всех рациональных чисел (задача рассмотрена в теоретической части).
5. Докажите, что множество всех чисел вида $p + q\sqrt{2}$, где $p$ и $q$ рациональные числа, счетно.
6. Построить явным образом инъективное отображение
$$\varphi : \mathbb{N}^{<\omega} \to \mathbb{N}.$$
Используя теорему Кантора-Бернштейна, вывести, что множество $\mathbb{N}^{<\omega}$ счетно (задача рассмотрена в теоретической части).

# Задачи II

7. Действительное число называется *алгебраическим*, если оно является корнем многочлена

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_0$$

   положительной степени $n$ с целыми коэффициентами $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_0$. Используя счетность счетного объединения конечных или счетных множеств, докажите, что множество всех алгебраических чисел счетно (задача рассмотрена в теоретической части).

8. Действительное число $x$ называется *вычислимым*, если существует алгоритм (программа на некотором языке), который по входу $n$ выдает $n$-ый знак десятичной записи числа $x$ (включая запятую).[1] Доказать, что множество вычислимых чисел счетно (задача рассмотрена в теоретической части).

9. Пусть $U$ есть некоторое множество *непересекающихся* интервалов $(x; y)$ на числовой прямой. Доказать, что $U$ конечно или счетно. **Замечание.** Множество пересекающихся интервалов, конечно, может быть и несчетным.

# Задачи III

10. Используя диагональный метод Кантора, докажите, что множество всех бесконечных последовательностей из нулей и единиц не счетно.
11. Докажите, что множество всех взаимно-однозначных функций
$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
(последовательностей без повторений) не счетно.
12. Докажите, что множество всех строгих линейных порядков на множестве $\mathbb{N}$ не счетно.
13. Докажите, что множество всех отношений эквивалентности на множестве $\mathbb{N}$ не счетно.
14. Докажите, что интервал $(0; 1)$ равномощен всей числовой прямой $\mathbb{R} = (-\infty; \infty)$, причем взаимно-однозначное отображение $\varphi : (0; 1) \to \mathbb{R}$ можно выбрать непрерывным.
15. Докажите, что отрезок $[0; 1]$ равномощен всей числовой прямой $\mathbb{R} = (-\infty; \infty)$.

# Задачи IV

16. Докажите, что числовая прямая $\mathbb{R} = (-\infty; \infty)$ равномощна числовой плоскости $\mathbb{R}^2$.
17. Докажите, что множество всех непрерывных функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ равномощно множеству действительных чисел $\mathbb{R}$.
    **Замечание.** Если исключить слово «непрерывных», то утверждение перестанет быть верным:
    $$|\mathbb{R}| < |\mathbb{R}^{\mathbb{R}}|.$$
18. Докажите, что для каждого счетного множества $X$ действительных чисел существует такое действительное число $a$, что множества $X$ и $\{a + x : x \in X\}$ имеют пустое пересечение.
    *Указание.* Рассмотрите образ множества $X \times X$ при отображении $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x - y$.
19. Как известно, ни для одного натурального числа $n \geqslant 3$ уравнение $x^n + y^n = z^n$ не имеет решений в натуральных числах[2] (великая теорема Ферма). Временно назовем действительное число $\alpha$ *показателем Ферма*, если уравнение $x^\alpha + y^\alpha = z^\alpha$ не имеет решений в натуральных числах. Докажите, что существует бесконечно много *иррациональных* показателей Ферма.

# Задачи V

20. Докажите, что ни одно множество не равномощно множеству своих подмножеств (теорема Кантора).

21. $(*)$ Докажите теорему Кантора-Бернштейна: для любых множеств $X$ и $Y$ если существует инъективная функция $f : X \to Y$ и инъективная функция $g : Y \to X$, то существует и биективная функция $h : X \to Y$. Используйте для этого следующую схему.

    (1) Определим по рекурсии множество $Z \subseteq X$. Положим

        i. $Z_0 = X \setminus g(Y)$.

        ii. $Z_{n+1} = g(f(Z_n))$ для всех натуральных $n \geqslant 0$.

        iii. $Z = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Z_n$.

    (2) Определим функцию $h : X \to Y$ так:

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in Z \\ g^{-1}(x), & \text{иначе} \end{cases}$$

    Покажем, что функция определена корректно (для этого нужно, чтобы выполнялось $X \setminus Z \subseteq Y$).

# Задачи VI

(3) Покажем, что функция $h$ сюръективна, т.е. что у каждого $y \in Y$ есть прообраз (иначе говоря, что для любого $y \in Y$ существует $x \in X$, для которого $y = f(x)$). Для этого отдельно рассмотрим случаи (a) $y \in f(Z)$ и (b) $y \notin f(Z)$.

(4) Покажем, что функция $h$ инъективна, т.е. что у каждого $y \in Y$ не более одного прообраза (иначе говоря, что $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ для любых $x_1, x_2 \in X$). Для этого отдельно рассмотрим случаи (a) $x_1, x_2 \in Z$, (b) $x_1, x_2 \notin Z$ и $x_1 \in Z, x_2 \notin Z$.

---

[1] Существуют и другие определения множества вычислимых чисел.

[2] Здесь ноль мы не считаем натуральным числом.

# Ответы и указания I

1. Функция $f(x) = x$ из $X$ в $Y$ инъективна. 2. 94. 3. Например,

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{2}, & \text{если } x\text{– нечетное} \\ -\frac{x}{2}, & \text{иначе} \end{cases}$$

4. Поскольку $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$, имеем $|\mathbb{N}| \leqslant |\mathbb{Q}|$. Для доказательства обратного неравенства достаточно найти какую-либо инъективную функцию $\varphi$ из $\mathbb{Q}$ в какое-либо счетное множество $U$. Пусть $U = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ (счетность множества $\mathbb{Z}$ доказана в решении задачи 3, поэтому из счетности $\mathbb{N}^2$ следует счетность $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$). Для для каждого числа $x \in \mathbb{Q}$ существует единственное представление $x = \frac{p_x}{q_x}$ в виде несократимой дроби ($q_x = 1$, если $x$ целое). Положим $\varphi(x) = (p_x, q_x)$. 5. Мощность этого множества не превосходит мощности множества $\mathbb{Q}^2$. Остается воспользоваться счетностью множеств $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{N}^2$. 6. Пусть $(p_n) = 2, 3, 5, \ldots$ есть последовательность всех простых чисел в порядке возрастания. Положим $\varphi(a_1, a_2, \ldots, a_n) = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_n^{a_n}$, например, $\varphi(2, 3, 1) = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^1 = 540$. Инъективность следует из основной теоремы арифметики. 7. Многочлен $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_0$ однозначно определяется последовательностью коэффициентов $(a_{n-1}, a_{n-1}, \ldots, a_0)$, поэтому множество $\mathbb{P}$ всех таких многочленов счетно (см. решение задачи 6). Из алгебры известно, что каждый многочлен $n$-й степени (с действительными или комплексными коэффициентами) имеет не более $n$ корней. Поэтому множество алгебраических чисел можно

# Ответы и указания II

представить в виде счетного объединения конечных множеств $\bigcup_{p\in\mathbb{P}}\{x\in\mathbb{R} : p(x)=0\}$. 8. Любой язык программирования содержит конечное число символов. Занумеруем их натуральными числами. Тогда каждой программе взаимно-однозначно соответствует некоторая конечная последовательность натуральных чисел. Следовательно, количество программ не более чем счетно. Значит, не более чем счетно и количество программ, которые по входу $n$ выдают $n$-ый знак десятичной записи некоторого числа $x$. А значит, не более чем счетно и множество таких чисел $x$. С другой стороны, их множество не менее чем счетно, поскольку каждое натуральное число вычислимо. 9. Внутри каждого интервала выберем рациональную точку. Поскольку интервалы не пересекаются, эта точка взаимно-однозначно определяет интервал. Остается воспользоваться счетностью множества $\mathbb{Q}$. 10. Указание: воспользоваться схемой доказательства из теоретической части, взяв в качестве $\alpha$ последовательность $x_1^1\oplus 1, x_2^2\oplus 1, x_3^3\oplus 1, \ldots x_n^n\oplus 1, \ldots$. 11. Указание: пусть $\sigma$ есть нумерация всех конечных последовательностей натуральных чисел (см. задачу 6). Тогда для каждой последовательности $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ натуральных чисел последовательность $\sigma(a_1), \sigma(a_1, a_2), \sigma(a_1, a_2, a_3)$ есть последовательность без повторений. Таким образом, множество всех последовательностей натуральных чисел инъективно вложено в множество всех последовательностей натуральных

# Ответы и указания III

чисел без повторений. Существование обратного вложения очевидно. 12. Указание: каждой взаимно-однозначной функции $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ можно однозначно поставить в соответствие некоторый строгий линейный порядок $\prec$ на $\mathbb{N}$: $x \prec y \leftrightarrow \varphi(x) < \varphi(y)$. Количество взаимно-однозначных функций $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ несчетно (см. задачу 11). 13. Каждому отношению эквивалентности на $\mathbb{N}$ можно взаимно-однозначно поставить в соответствие некоторое разбиение $\mathbb{N}$. По каждой бесконечной последовательности $\alpha = (n_1, n_2, \ldots)$ натуральных чисел построим разбиение $\mathbb{W}_\alpha = \{S_1, S_2, \ldots\}$ множества $\mathbb{N}$ следующим образом $S_1 = \{1, 2, \ldots, n_1\}$, $S_2 = \{n_1 + 1, n_1 + 2, \ldots, n_1 + n_2\}$, .... Полученное отображение из множества всех последовательностей натуральных чисел в множество разбиений $\mathbb{N}$ инъективно. Остается вспомнить, что множество всех последовательностей натуральных чисел несчетно. 14. Указание: например, рассмотреть функцию $f(x) = \operatorname{tg}\left(\pi\left(x - \frac{1}{2}\right)\right)$. 15. В виду задачи 14 достаточно построить взаимно-однозначное отображение $\varphi : [0, 1] \to (0; 1)$. Воспользовавшись счетностью множества рациональных чисел, рассмотрим последовательность $(q_1, q_2, \ldots)$ всех рациональных чисел из отрезка $[0; 1]$. Без ограничения общности будем считать, что $q_1 = 0$ и $q_2 = 1$. Для всех рациональных чисел $p_i \in [0; 1]$ положим $\varphi(p_i) = p_{i+2}$. Для всех иррациональных $x \in [0; 1]$ чисел положим $\varphi(x) = x$. 16. Пусть $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Представим каждое из чисел $x$, $y$ в виде

# Ответы и указания IV

суммы целой и дробной части, дробные части запишем в виде бесконечных десятичных дробей: $x = [x] + 0, a_1 a_2 \ldots$, $y = [y] + 0, b_1 b_2 \ldots$. Пусть $c(x, y)$ есть взаимно-однозначное отображение из $\mathbb{Z}^2$ в $\mathbb{Z}$ (оно существует в силу счетности множеств $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{N}^2$. Положим $\varphi(x, y) = c([x], [y]) + 0, a_1 b_1 a_2 b_2 \ldots$. Легко проверить, что $\varphi$ – биекция. 17. Для простоты рассуждений, возьмем какое-либо непрерывное взаимно-однозначное отображение $\varphi : (0; 1) \to \mathbb{R}$ (см. задачу 14) и каждой непрерывной функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ поставим в соответствие функцию $f^* = \varphi^{-1}(f(\varphi(x)))$. Мы получили биекцию между множеством всех непрерывных функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и множеством всех непрерывных функций $f : (0; 1) \to (0; 1)$. Значит, достаточно построить биекцию из последнего множества в $\mathbb{R}$. Пусть $(q_1, q_2, \ldots)$ есть последовательность всех рациональных чисел из интервала $(0; 1)$. Для каждой непрерывной функции $f : (0; 1) \to (0; 1)$ запишем ее значение в точке $q_i$ в виде бесконечной десятичной дроби: $f(q_i) = 0, a_1^i a_2^i \ldots$. Выберем какое-нибудь взаимно-однозначное отображение $c(x, y) : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$. Обозначим $c^{-1}(n) = (l(n), r(n))$. Поставим каждой функции $f$ в соответствие число $x_f = 0, a_{r(1)}^{l(1)} a_{r(2)}^{l(2)} \ldots$. Из математического анализа известно, что каждая непрерывная функция однозначно определяется своими значениями в рациональных точках. Поэтому отображение $f \to x_f$ есть взаимно-однозначное отображение множества всех непрерывных функций

# Ответы и указания V

$f : (0;1) \to (0;1)$ в интервал $(0;1)$. Остается вновь воспользоваться взаимно-однозначным отображением $\varphi : (0;1) \to \mathbb{R}$.