Введение в дискретную математику. Лекция 2 (элементы теории множеств 2; соответствия, функции и бинарные отношения). План-конспект

Н. Л. Поляков

1 Более сложные операции над множествами

1.1 Теоретические сведения

Если задано множество X (состоящее из множеств) или семейство индексированных множеств $\{Y_i\}_{i\in I}$, снабженных индексами из множества I, то используются следующие обозначения:

$$\bigcup X = \{z : (\exists Y \in X)\, z \in Y\}, \qquad \bigcap X = \{z : (\forall Y \in X)\, z \in Y\}$$
$$\bigcup_{i\in I} X_i = \{z : (\exists i \in I)\, z \in Y_i\}, \qquad \bigcap_{i\in I} X_i = \{z : (\forall i \in I)\, z \in Y_i\}.$$

Эти символы обычно используют в случае, когда множество X или семейство $\{Y_i\}_{i\in I}$ бесконечно, поскольку для любого конечного множества $X = \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}$ выполнено

$$\bigcup X = Y_1 \cup Y_2 \cup \ldots \cup Y_n \text{ и } \bigcap X = Y_1 \cap Y_2 \cap \ldots \cap Y_n,$$

например, $\bigcup\{X, Y\} = X \cup Y$ и $\bigcap\{X, Y\} = X \cap Y$.

Символом $\mathscr{P}(X)$ обозначается множество всех подмножеств множества X. Множество $\mathscr{P}(X)$ называется также *множеством-степенью* или *булеаном* множества X:

$$\mathscr{P}(X) = \{Y : Y \subseteq X\}.$$

Пример 1. $\mathscr{P}(\{a, b\}) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.

Можно доказать, что если множество X конечно и содержит n элементов, то множество $\mathscr{P}(X)$ содержит 2^n элементов. Одним из распространенных альтернативных обозначений множества-степени множества X является запись 2^X.

Еще одной важной операцией над множествами является *декартово* (или *прямое*) произведение множеств. Для того, чтобы определить эту операцию, надо сначала ввести понятие *упорядоченной пары*. Содержательно, упорядоченная пара (u, v) множеств u и v это такая их совокупность, в которой за множествами u и v «закреплено соответствующее место»: множество u – «первое», а множество v – «второе». При этом единственным свойством пары является способность однозначно определяться своим первым и вторым членами:

$$(u, v) = (u', v') \leftrightarrow (u = u' \wedge v = v').$$

Один из способов определить упорядоченную пару состоит в том, чтобы положить $(u, v) = \{u, \{u, v\}\}$ (пара по Куратовскому).

Если понятие упорядоченной пары уже определено, то *декартовым* (*или прямым*) *произведением* $X \times Y$ множеств X и Y называется множество всех пар (u, v), первый элемент которых берется из множества X, а второй из множества Y:

$$X \times Y = \{z \colon \exists u \exists v\, (z = (u, v) \wedge u \in X \wedge v \in Y)\}.$$

Пример 2. $\{0, 1, 2\} \times \{0, 1\} = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 1)\}$.

Декартовы произведения числовых множеств X и Y можно изображать фигурами на координатной плоскости: если $X, Y \subseteq \mathbb{R}$, то

$$X \times Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in X \wedge y \in Y\}.$$

Пример 3. Декартово произведение отрезка $[0, 1]$ действительных чисел на себя есть единичный квадрат

$$[0, 1] \times [0, 1] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leqslant x \leqslant 1 \wedge 0 \leqslant y \leqslant 1\}.$$

Можно показать, что если конечные множества X и Y содержат n и m элементов соответственно, то множество $X \times Y$ содержит nm элементов.

Вместо выражения $(X \times Y) \times Z$ обычно записывают $X \times Y \times Z$. Аналогичную группировку скобок подразумевают в любом произведении $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$. Элементы множества $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ называют *кортежами* длины n. Под кортежем $\mathbf{a} \in X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ можно понимать последовательность $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$, …, $x_n \in X_n$. Основное свойство упорядоченных пар распространяется на кортежи произвольной длины:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) \leftrightarrow (x_1 = x'_1 \wedge x_2 = x'_2 \wedge \ldots \wedge x_n = x'_n).$$

Декартово произведение $\underbrace{X \times X \times \ldots \times X}_{n \text{ раз}}$ называют декартовой n-ой степенью множества X и обозначают символом X^n. Множество всех кортежей элементов множества X любой конечной длины часто обозначают символом $X^{<\omega}$:

$$X^{<\omega} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X^n.$$

Для доказательства тождеств, содержащих операции множества-степени, декартова произведения и пр. используются определения и аксиома объемности.

Пример 4. Доказать тождество

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D).$$

Во-первых, докажем включение $(A \times B) \cap (C \times D) \subseteq (A \cap C) \times (B \cap D)$.

1. Пусть z – произвольный элемент множества $(A \times B) \cap (C \times D)$. Тогда по определению пересечения элемент z принадлежит обоим множествам $A \times B$ и $C \times D$.

2. Значит, по определению декартова произведения $z = (a, b)$, где $a \in A$ и $b \in B$, и $z = (c, d)$, где $c \in C$ и $d \in D$.

3. По основному свойству упорядоченных пар имеем $a = c$ и $b = d$. Поэтому $a \in C$ и $b \in D$.

4. Теперь по определению пересечения $a \in A \cap C$ и $b \in B \cap D$.

5. Значит, по определению декартова произведения, $z = (a, b) \in (A \cap C) \times (B \cap D)$.

Включение $(A \times B) \cap (C \times D) \subseteq (A \cap C) \times (B \cap D)$ доказано. Докажем теперь обратное включение.

1. Пусть z – произвольный элемент множества $(A \cap C) \times (B \cap D)$. Тогда по определению декартова произведения, $z = (a, b)$, где $a \in A \cap C$ и $b \in B \cap D$.

2. По определению пересечения имеем $a \in A$, $a \in C$, $b \in B$, $b \in D$.

3. По определению декартова произведения имеем $(a, b) \in A \times B$ и $(a, b) \in C \times D$.

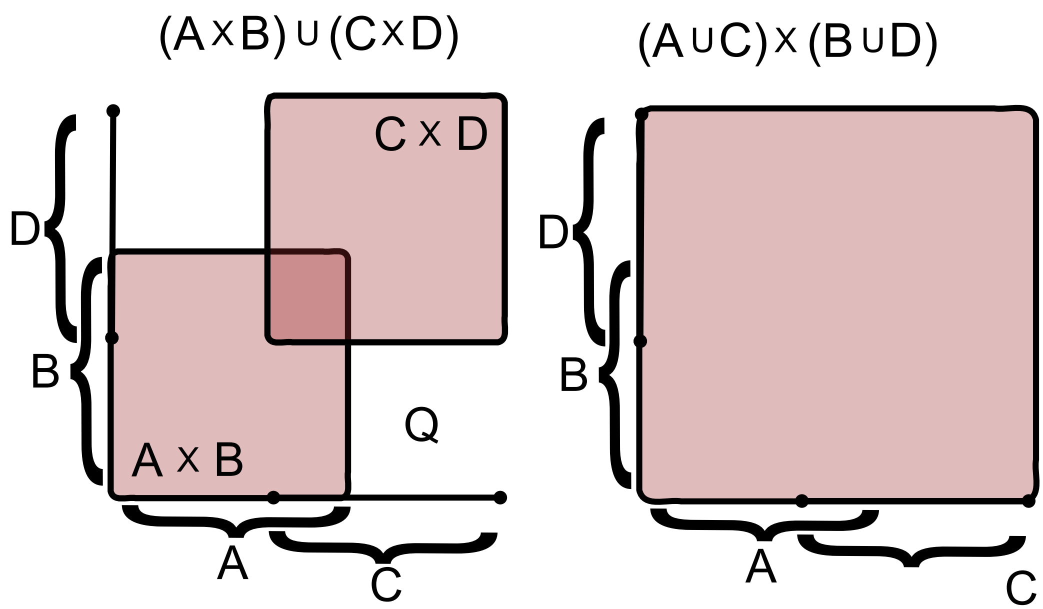
4. По определению пересечения получаем $z = (a, b) \in (A \times B) \cap (C \times D)$.

Доказано включение $(A \cap C) \times (B \cap D) \subseteq (A \times B) \cap (C \times D)$. Теперь тождество $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$ следует из аксиомы объемности.

Для большей наглядности декартовы произведения можно изображать в виде квадратов или прямоугольников, считая, что сомножители являются перпендикулярными отрезками на плоскости. Такие изображения могут помочь при проверке тождеств и отыскании контрпримеров.

Пример 5. Доказать, что тождество $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$ неверно.

Изобразим левую и правую части этого равенства.



Видно, что картинки разные. Для построения контрпримера надо выбрать множества A, B, C, D так, чтобы по крайней мере одна из областей, закрашенных на правом рисунке, но не закрашенных на левом, оказалась не пустой. Возьмем область $Q = (C \setminus A) \times (B \setminus D)$. Для обеспечения условия $Q \neq \varnothing$ достаточно положить $C = B = \{0\}$ и $A = D = \varnothing$. Непосредственным подсчетом убеждаемся в том, что эти множества действительно дают контрпример: $(A \times B) \cup (C \times D) = (\varnothing \times \{0\}) \cup (\varnothing \times \{0\}) = \varnothing \cup \varnothing = \varnothing$, но $(A \cup C) \times (B \cup D) = (\varnothing \cup \{0\}) \times (\{0\} \cup \varnothing) = \{0\} \times \{0\} = \{(0, 0)\} \neq \varnothing$.

1.2 Задачи

1. Дано индексированное семейство множеств $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$:
$$X_1 = \{1, 2, \ldots\}, X_2 = \{2, 3, \ldots\}, \ldots, X_n = \{n, n+1, \ldots\}, \ldots.$$
Найти
$$\bigcap_{i\in\mathbb{N}} X_i.$$

2. Дано индексированное семейство множеств $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$:
$$X_1 = \{1, 2\}, X_2 = \{2, 3\}, \ldots, X_n = \{n, n+1\}, \ldots.$$
Найти
$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} X_i.$$

3. Дано множество $X = \{\bigstar, \blacksquare\}$. Найти множество $\mathscr{P}(X)$.

4. Найти множества $\mathscr{P}(\varnothing)$ и $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\varnothing))$.

5. Может ли множество $\mathscr{P}(X)$ быть пустым для какого-либо множества X? Ответ обосновать.

6. Доказать тождество
$$\bigcup \mathscr{P}(X) = X.$$

7. Чему равно множество
$$\bigcap \mathscr{P}(X)$$
для любого множества X? Ответ обосновать.

8. Доказать тождество
$$\mathscr{P}(X \cap Y) = \mathscr{P}(X) \cap \mathscr{P}(Y).$$

9. Верно ли тождество
$$\mathscr{P}(X \cup Y) = \mathscr{P}(X) \cup \mathscr{P}(X)?$$
Если верно, доказать его, если нет, опровергнуть (привести контрпример).

10. Даны множества
$$A = \{0, 1, 2\} \text{ и } B = \{1, 2, 3\}$$
Найти множества
    (a) $(A \times B) \setminus (B \times A)$
    (b) $(A \cup B) \times (B \cap A)$

(c) $(A \times A) \cap (B \times B)$

11. Дано подмножество $A = \{a, b\}$ универсального множества
$$\Omega = \{a, b, c, d\}.$$
Найти множество $A \times \overline{A}$.

12. Дано множество $A = \{0, 1\}$. Найти множество $A \times A \times A$.

13. Изобразить на координатной плоскости множества:
    (a) $\{0, 2\} \times \{1, 2, 4\}$,
    (b) $[-1, 1] \times [1, 2]$,
    (c) $[1, 3] \times \{-1, 0, 1\}$,
    (d) $([0, 1] \cup [2, 3]) \times ([-1, 0] \cup [1, 2])$.

14. Доказать, что
$$X \times \varnothing = \varnothing \times X = \varnothing$$
для любого множества X.

15. Верно ли, что для всех множеств X, Y декартовы произведения
$$X \times Y \text{ и } Y \times X$$
совпадают? Ответ обосновать.

16. Доказать тождество
$$(A \times B) \setminus (C \times D) = ((A \setminus C) \times B) \cup (A \times (B \setminus D).$$

17. Проверить истинность тождества
$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \times D) \cap (C \times B).$$
Если тождество верно, доказать его, если нет, опровергнуть (привести контрпример).

18. Проверить истинность тождества
$$X \times (Y \cup Z) = (X \times Y) \cup (X \times Z).$$
Если тождество верно, доказать его, если нет, опровергнуть (привести контрпример).

19. Проверить истинность тождества
$$(A \times B) \setminus (C \times D) = (A \setminus C) \times (B \setminus D).$$
Если тождество верно, доказать его, если нет, опровергнуть (привести контрпример).

20. Проверить истинность тождества

$$X \times (Y \triangle Z) = (X \times Y) \triangle (X \times Z).$$

Если тождество верно, доказать его, если нет, опровергнуть (привести контрпример).

1.2.1 Ответы и указания.

1. $\varnothing$. 1. $\mathbb{N}$. 3. $\{\varnothing, \{\bigstar\}, \{\blacksquare\}, \{\bigstar, \blacksquare\}\}$. 4. $\{\varnothing\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$. 5. Нет, т.к. $\varnothing \in \mathscr{P}(X)$. 6. Указание: включение слева направо следует из того, что каждый элемент $z \in \bigcup \mathscr{P}(X)$ принадлежит некоторому подмножеству множества X, а значит, принадлежит X. Включение справа налево следует, например, из того, что $X \in \mathscr{P}(X)$. 7. $\varnothing$ 8. Пусть $z \in \mathscr{P}(X \cap Y)$. Тогда $z \subseteq X \cap Y$ и, далее, $z \subseteq X$ и $z \subseteq Y$. Значит, $z \in \mathscr{P}(X)$ и $z \in \mathscr{P}(Y)$. Следовательно, $z \in \mathscr{P}(X) \cap \mathscr{P}(Y)$. Пусть $z \in \mathscr{P}(X) \cap \mathscr{P}(Y)$. Тогда $z \in \mathscr{P}(X)$ и $z \in \mathscr{P}(Y)$, т.е. $z \subseteq X$ и $z \subseteq Y$. Отсюда $z \subseteq X \cap Y$ и $z \in \mathscr{P}(X \cap Y)$. 9. Тождество не верно. Для контрпримера можно взять $X = \{0\}$ и $Y = \{1\}$. 10. 10a. $\{(0,1),(0,2),(0,3),(1,3),(2,3)\}$, 10b. $\{(0,1),(0,2),(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$. 10c. $\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$. 11. $\{(a,c),(a,d),(b,c),(b,d)\}$.
12. $\{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(0,1,1),(1,0,0),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$. 14. Указание: не существует таких пар (u,v), что $u \in \varnothing$. 15 Нет. Для контрпримера можно взять множества $X = \{0\}$ и $Y = \{1\}$. Воспользоваться основным свойством пар. 16. Указание: если $z \in (A \times B) \setminus (C \times D)$, то $z = (a,b)$ и либо $a \notin C$, либо $b \notin D$ (это можно доказать от противного). Отсюда легко получить включение слева направо. Включение справа налево доказывается тривиально. 17. Указание: воспользоваться Примером 5. 18. Тождество верно. Тривиальное доказательство с использованием аксиомы объемности. 19. Тождество неверно. Для контрпримера можно выбрать любые A, B, C, D, для которых $A = C$ и $B \nsubseteq D$. 20. Тождество верно. Тривиальное доказательство с использованием аксиомы объемности.

2 Соответствия, отношения и функции. Характеристические векторы и матрицы

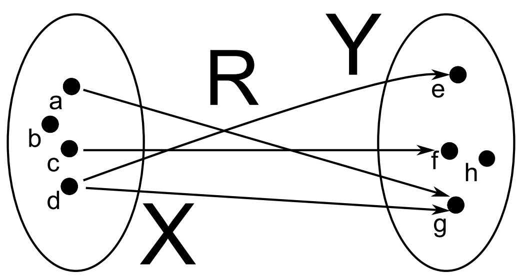
2.1 Теоретические сведения

Соответствием из множества X в множество Y называется любое подмножество декартова произведения $X \times Y$. При этом обычно для каждого соответствия $R \subseteq X \times Y$ множества X и Y считаются заданными (в этом случае более строго можно определить соответствие R из множества X в множество Y как тройку (X, Y, R)). Для наглядности соответствия $R \subseteq X \times Y$ иногда изображают в виде схем, состоящих из изображения множеств X и Y и стрелок, которые соединяют элементы x и y для каждой пары $(x, y) \in R$.

Пример 1. На следующей картинке изображено соответствие

$$R = \{(a, g), (c, f), (d, e), (d, g)\}$$

из множества $X = \{a, b, c, d\}$ в множество $Y = \{e, f, g, h\}$.



Бинарные отношения. Соответствия из множества X в множество X называются *бинарными отношениями* на множестве X. Символ бинарного отношения часто записывают между элементами a и b или слева от пары (a, b), т.е. вместо записи $(a, b) \in P$ используют запись $P(a, b)$ используют запись или $a\,P\,b$. Это соответствует обычной математической практике. Действительно, желая выразить, например, утверждение «один меньше двух», мы записываем «$1 < 2$», а не «$(1, 2) \in <$».

На множестве бинарных отношений P на множестве X определена операция транзитивного замыкания P^*

$$P^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} P^n,$$

где символ P^n обозначает бинарное отношение $\underbrace{P \circ P \circ \ldots \circ P}_{n \text{ раз}}$.

Операции над соответствиями. Соответствия это множества. Поэтому для них определены все теоретико-множественные операции: объединение, пересечение, дополнение и пр. Для соответствий из множества X в множество Y в качестве универсального множества обычно выбирают множество $X \times Y$.

Особая структура соответствий позволяет определить специфические операции образа множества, композиции и обратного соответствия.

- *Образом* множества A при соответствии R называется множество

$$R(A) = \{y \in Y : (\exists x \in A)\,(x, y) \in R\}.$$

  В этом определении часто предполагается, что $A \subseteq X$.

- *Композицией* соответствий R из множества X в множество Y и P из множества U в множество V называется соответствие $R \circ P$ из множества X в множество V, определенное формулой

$$R \circ P = \{(x, v) \in X \times V : (\exists y \in Y \cap U)\,(x, y) \in R \wedge (y, v) \in R\}.$$

  В этом определении часто предполагается, что $Y = U$. Символ «$\circ$» часто опускают: вместо $R \circ P$ записывают просто RP.

- Обратным соответствием к соответствию R из множества X в множество Y называется соответствие R^{-1} из множества Y в множество X, которое определяется формулой

$$R^{-1} = \{(y, x) \in Y \times X : (x, y) \in R\}.$$

Операция композиции соответствий ассоциативна, т.е. $(P \circ Q) \circ R = P \circ (Q \circ R)$ для любых соответствий P, Q, R. Поэтому в записи композиций, состоящих из более чем двух соответствий, скобки опускают: $P \circ Q \circ R = (P \circ Q) \circ R$.

Соответствие «равенства» $\{(x, x) : x \in X\}$ из множества X в множество X обозначается E_X.

Понятие об алгебре отношений. *Алгеброй отношений* (в узком смысле) называют алгебру подмножеств универсального множества $\Omega = X \times X$ с дополнительной константой E (отношение равенства) и дополнительными операциями $\circ$ (композиции отношений) и $^{-1}$ (взятия обратного отношения). В любой алгебре отношений $\mathcal{A}$ выполнены следующие законы:

1. Тождества алгебры множеств.
2. для всех X, Y, Z
   (a) $X \circ (Y \circ Z) = (X \circ Y) \circ Z$.
   (b) $X \circ E = X$.
   (c) $\left(X^{-1}\right)^{-1} = X$.
   (d) $(X \circ Y)^{-1} = Y^{-1} \circ X^{-1}$.

(e) $(X \cup Y) \circ Z = (X \circ Z) \cup (Y \circ Z)$.

(f) $(X^{-1} \circ \overline{X \circ Y}) \cup \overline{X} = \overline{X}$ (равносильно, $X^{-1} \circ \overline{X \circ Y} \subseteq \overline{X}$).

Доказательство последнего тождества на доске.

Любое множество с константами Ω, E и операциями $\cup$, $\cap$, $\overline{}$, $\circ$, ^{-1}, которые удовлетворяют перечисленным выше аксиомам, называется *алгеброй отношений* в широком смысле (А. Тарский) - не путать с *реляционными алгебрами*[1]. К сожалению, соотношение между алгебрами отношений в широком и узком смысле слова не столь хороши, как между алгебрами множеств и абстрактными булевыми алгебрами. Алгебра отношений в узком смысле не может быть задана конечным списком аксиом и содержит тождества, не выводимые из вышеприведенной системы аксиом. Тем не менее эта система аксиом (тождеств) достаточна для вывода «существенной части» теорем алгебры отношений в узком смысле.

Дальнейшие темы перенесены на следующие лекцию.

Типы соответствий. Соответствие R из множества X в множество Y называется

- *всюду определенным*, если
$$(\forall x \in X)(\exists y \in Y)\,(x, y) \in R,$$
эквивалентно $R^{-1}(Y) = X$,
- *функциональным* (или просто *функцией*), если
$$(\forall x \in X)(\forall y, z \in Y)\,((x, y) \in R \wedge (x, z) \in R) \to y = z,$$
эквивалентно, $R^{-1} \circ R \subseteq E_Y$,
- *сюръективным*, если
$$(\forall y \in Y)(\exists x \in X)\,(x, y) \in \mathcal{R},$$
эквивалентно, $R(X) = Y$,
- *инъективным*, если
$$\forall x, z \in X)(\forall y \in Y)\,((x, y) \in \mathcal{R} \wedge (z, y) \in \mathcal{R}) \to x = z,$$
эквивалентно, $R \circ R^{-1} \subseteq E_X$.

В классической математике функции (отображения) f из множества X в множество Y отождествляются со всюду определенными функциональными соответствиями из множества X в множество Y, которые в «естественном понимании» можно понимать как *графики* функций. Запись $f : X \to Y$

[1] Relation algebra и Relational algebra

обозначает, что f есть функция из множества X в множество Y. Символ $f(x)$ обозначает тот единственный для элемента x элемент y, для которого $(x, y) \in f$. Запись $f(x) = y$ используется вместо $(x, y) \in f$. Множество всех функций из множества X множество Y обозначается символом Y^X.

Инъективная и сюръективная функция, т.е. соответствие, обладающее всеми четырьмя указанными выше свойствами, называется *биекцией* (или *биективной* функцией или *биективным* соответствием, или *взаимнооднозначной* функцией/*взаимнооднозначным* соответствием).

Типы бинарных отношений. Бинарное отношение P на множестве X называется

- *рефлексивным*, если $(\forall x \in X)(x \, P \, x)$, равносильно, $E_X \subseteq P$,
- *иррефлексивным*, если $(\forall x \in X)(\neg x \, P \, x)$, равносильно $E_X \cap P = \varnothing$,
- *симметричным*, если выполнено $(\forall x, y \in X)(x \, P \, y \to y \, P \, x)$, равносильно, $P^{-1} = P$,
- *(нестрого) антисимметричным*, если $(\forall x, y \in X)((x \, P \, y \wedge y \, P \, x) \to x = y)$, равносильно, $P \cap P^{-1} \subseteq E_X$,
- *асимметричным*, если $(\forall x, y \in X)(\neg(x \, P \, y \wedge y \, P \, x))$, равносильно, $P \cap P^{-1} = \varnothing$,
- *полным*, если $(\forall x, y \in X)(x \, P \, y \vee y \, P \, x)$, равносильно, $P \cup P^{-1} = X \times X$,
- *связным*, если $(\forall x, y \in X)(x \, P \, y \vee y \, P \, x \vee x = y)$, равносильно, $P \cup P^{-1} \cup E_X = X \times X$,
- *транзитивным*, если $(\forall x, y, z \in X)((x \, P \, y \wedge y \, P \, z) \to x \, P \, z)$, равносильно, $P \circ P \subseteq P$, равносильно, $P^* = P$.

Иррефлексивные отношения называют еще *антирефлексивными*, а асимметричные – *строго антисимметричными*.

Бинарное отношение P на множестве X называется отношением

- *строгого частичного порядка*, если оно транзитивно и асимметрично (следовательно, иррефлексивно),
- *нестрогого частичного порядка*, если оно транзитивно, рефлексивно и антисимметрично,
- *строгого/нестрогого линейного порядка*, если есть отношение строгого/нестрогого частичного порядка и при этом связно,
- *эквивалентности*, если оно транзитивно, симметрично и рефлексивно.

Отношения эквивалентности тесно связаны с разбиениями множеств. *Разбиением* множества X (на непустые подмножества) называется любое подмножество $\mathbb{W}$ множества $\mathscr{P}(X) \setminus \{\varnothing\}$, которое обладает следующими свойствами:

1. $\bigcup \mathbb{W} = X$
2. $(\forall U, V \in \mathbb{W})(U \cap V \neq \varnothing \to U = V)$.

Если даны множество X и разбиение $\mathbb{W}$ множества X, то отношение $P_{\mathbb{W}}$ на множестве X, заданное формулой

$$x \, P_{\mathbb{W}} \, y \leftrightarrow (\exists U \in \mathbb{W})(x \in U \wedge y \in U)$$

есть отношение эквивалентности.

Обратное утверждение тоже верно. Пусть P есть отношение эквивалентности на множестве X. Для каждого элемента $x \in X$ символом $[x]_P$ обозначается его *класс эквивалентности*, т.е. множество

$$\{y \in X : x \, P \, y\}$$

всех элементов множества X, которые *эквивалентны* элементу x. Множество X/P всех классов эквивалентности $[x]_P$ элементов множества X называют *фактор-множеством* множества X по отношению эквивалентности P. Фактор-множество X/P есть разбиение множества X, причем отношение эквивалентности $P_{X/P}$, построенное по этому разбиению совпадает с исходным отношением P. Таким образом, существует взаимно-однозначное соответствие между всеми отношениями эквивалентности на множестве X и всеми разбиениями множества X.

Любое подмножество декартовой степени X^n множества X называют n-арным отношением на множестве X. Если P есть n-арное отношение на некотором множестве X, то натуральное число n называется *арностью* этого отношения. При этом вместо записи $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in P$ часто используют запись $P(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Характеристические векторы. Конечные множества, соответствия и отношения можно кодировать двоичными векторами и матрицами. При этом операции над множествами преобразуются в естественные операции над их кодами. Пусть дано конечное множество Ω, занумерованное натуральными числами: $\Omega = \{a_1, a_1, \ldots, a_n\}$. Характеристическим вектором подмножества $A \subseteq \Omega$ называется последовательность (вектор) $\mathbf{u}_A = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \{0,1\}^n$, для которого

$$u_i = \begin{cases} 1, & \text{если } a_i \in A, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Пример 2. Вектор $\{1, 0, 1\}$ есть характеристический вектор подмножества $\{1, 3\}$ множества $\{1, 2, 3\}$, занумерованного в естественном порядке.

Для двоичных векторов одной размерности определены операции поэлементной булевой дизъюнкции и конъюнкции. Кроме того, для любого двоичного вектора определена операция булева отрицания (инверсии).

Если даны логические векторы $\mathbf{u} = (u_1, u_1, \ldots, u_n), \mathbf{v} = (v_1, v_1, \ldots, v_n) \in \{0, 1\}^n$, то

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{u} \vee \mathbf{v} = (u_1 \vee v_1, u_2 \vee v_2, \ldots, u_n \vee v_n)\\
&\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = (u_1 \wedge v_1, u_2 \wedge v_2, \ldots, u_n \wedge v_n)\\
&\overline{\mathbf{u}} = (\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_n).
\end{aligned}
$$

Пример 3.

$$(1, 0, 1) \vee (0, 1, 1) = (1, 1, 1), \quad (1, 0, 1) \wedge (0, 1, 1) = (0, 0, 1), \quad \overline{(1, 0, 1)} = (0, 1, 0).$$

Для всех подмножеств A, B занумерованного конечного множества Ω выполнено:

$$\mathbf{u}_{A\cup B} = \mathbf{u}_A \vee \mathbf{u}_B \quad \mathbf{u}_{A\cap B} = \mathbf{u}_A \wedge \mathbf{u}_B \quad \mathbf{u}_{\overline{A}} = \overline{\mathbf{u}}_A.$$

Пример 4. Подмножества $A = \{0, 3\}$ и $B = \{0, 2\}$ множества $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, занумерованного в естественном порядке, имеют характеристические векторы $(1, 0, 0, 1, 0)$ и $(1, 0, 1, 0, 0)$ соответственно. Тогда множество $A \cup B$ имеет характеристический вектор $(1, 0, 0, 1, 0) \vee (1, 0, 1, 0, 0) = (1 \vee 1, 0 \vee 0, 0 \vee 1, 1 \vee 0, 0 \vee 0) = (1, 0, 1, 1, 0)$. Значит, $A \cup B = \{0, 2, 3\}$ (конечно, это можно было установить и непосредственно).

Характеристические матрицы. Пусть даны конечные множества X и Y, занумерованное натуральными числами:

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}, \quad Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$$

Характеристической матрицей соответствия R из множества X в множество Y называется двоичная матрица $A = A_R$ размера $n \times m$, для которой

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } (x_i, y_j) \in R, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Пример 5. Пусть $X = \{x_1, x_2, x_3\}, Y = \{y_1, y_2\}, R = \{(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_3, y_1)\}$. Тогда $A_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Для двоичных матриц одной и той же размерности тоже определены операции покомпонентной булевой дизъюнкции и конъюнкции, а для любой булевой матрицы определена операция булева отрицания (инверсии). Если даны логические матрицы A и B одной и той же размерности, то матрицы $C = A \vee B$, $D = A \wedge B$, $F = \overline{A}$ это матрицы той же размерности, причем

$$c_{ij} = a_{ij} \vee b_{ij}, \quad d_{ij} = a_{ij} \wedge b_{ij}, \quad f_{ij} = \overline{a}_{ij}$$

Пример 6.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\overline{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Кроме того, для двоичных векторов и матриц вводятся операции логического умножения. Если дана двоичная матрица A размера $m \times n$ и двоичный вектор $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$, то $\mathbf{u} \circ A$ есть двоичный вектор $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, для которого

$$v_i = (u_1 \wedge a_{1i}) \vee (u_2 \wedge a_{2i}) \vee \ldots \vee (u_m \wedge a_{mi}).$$

Пример 7.

$$(0,1,1) \circ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (0,1).$$

Если даны двоичные матрицы A размера $m \times k$ и B размера $k \times n$, то матрица $A \circ B$ есть матрица C размера $m \times n$, для которой

$$c_{ij} = (a_{i1} \wedge b_{1j}) \vee (a_{i2} \wedge b_{2j}) \vee \ldots \vee (a_{ik} \wedge b_{km}).$$

Пример 8.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Наконец, для всех двоичных матриц определена операция транспонирования.

Пример 9.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для любых соответствий R, Q из множества X в множество Y, множества $C \subseteq X$ и соответствия P из множества Y в множество Z

$$\begin{array}{lll} A_{R\cup Q} = A_R \vee A_Q, & A_{R\cap Q} = A_R \wedge A_Q, & A_{\overline{R}} = \overline{A_R} \\ \mathbf{u}_{R(C)} = \mathbf{u}_C \circ A_R, & A_{R\circ P} = A_R \circ A_P, & A_{R^{-1}} = (A_R)^{\mathrm{T}} \end{array}$$

Пример 10. Используя характеристическую матрицу соответствия $R = \{(a,b),(a,c),(b,f),(c,c),(c,b)\}$ из множества $X = \{a,b,c\}$ в множество $Y = \{b,c,d,e,f\}$, найти образ множества $A = \{a,c\}$.

Решение. Если множества X и Y занумерованы в естественном порядке, то характеристическая матрица соответствия R равна $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, а характеристический вектор множества $\{a, c\}$ есть $(1, 0, 1)$. Вычисляем

$$(1, 0, 1) \circ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (1, 1, 0, 0, 0).$$

Значит, $R(\{a, c\}) = \{b, c\}$.

2.2 Задачи

1. Даны множества

$$X = \{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\} \text{ и } Y = \{\vartriangle, \triangledown, \square\}$$

   и соответствия

$$R = \{(\clubsuit, \vartriangle), (\clubsuit, \square), (\diamondsuit, \triangledown), (\heartsuit, \vartriangle)\} \text{ и}$$
$$P = \{(\clubsuit, \square), (\diamondsuit, \triangledown), (\spadesuit, \square)\}$$

   из множества X в множество Y. Найти соответствия

   (a) $R \cap P$,
   (b) $R \cup P$,
   (c) $R \setminus P$,
   (d) $R \vartriangle P$.

2. В условиях задачи 1 найти множество

   (a) $R(\{\clubsuit, \diamondsuit\})$,
   (b) $P(\{\clubsuit, \heartsuit, \spadesuit\})$.

3. В условиях задачи 1 найти соответствие

   (a) R^{-1},
   (b) P^{-1}.

4. Даны множества

$$X = \{1, 2, 3\},\ Y = \{4, 5, 6\} \text{ и } Z = \{7, 8\}$$

   и соответствия

$$P = \{(1, 4), (1, 5), (2, 5)\}$$

   из множества X в множество Y и

$$Q = \{(4, 8), (4, 7), (3, 8), (3, 7)\}$$

   из множества Y в множество Z.
   Найти соответствие $P \circ Q$.

5. Даны множества

$$X = \{1, 2, 3, 4\} \text{ и } Y = \{a, b, c, d, e\}$$

   и соответствия

$$R = \{(1, d), (2, a), (2, b), (4, d), (4, e)\} \text{ и } P = \{(1, b), (2, c), (2, d), (3, e)\}$$

   из множества X в множество Y.
   Найти соответствия

(a) $P \circ R^{-1}$,
(b) $R^{-1} \circ P$,
(c) $R \circ P^{-1}$,
(d) $P^{-1} \circ R$.

6. В условиях задачи 5 найти
   (a) множество $R(A)$, где $A = \{1, 4\}$,
   (b) множество $P^{-1}(B)$, где $B = \{a, c, e\}$,
   (c) соответствие $P^{-1} \circ (P \cap R)$,
   (d) соответствие $(P \setminus R) \circ (R^{-1} \setminus P^{-1})$,
   (e) множество $P \circ P^{-1}(C)$, где $C = \{2\}$,
   (f) соответствие $P \circ R^{-1} \circ P \circ R^{-1}$.

7. Дано бинарное отношение $P = \{(a, b), (a, a), (b, c), (b, a), (b, d)\}$ на множестве $X = \{a, b, c, d\}$. Найти:
   (a) бинарное отношение $P \circ P$,
   (b) бинарное отношение $(P \cup P^{-1}) \circ (P \cap P^{-1})$,
   (c) бинарное отношение $P^4 = P \circ P \circ P \circ P$,
   (d) множество $P \circ P \circ P(\{b, c, d\})$.

8. На множестве W всех населенных пунктов земли заданы бинарные отношения

   $P = \{(x, y) \in W^2 : x$ и y связаны регулярным воздушным сообщением$\}$
   $Q = \{(x, y) \in W^2 : x$ и y связаны регулярным ж.-д. сообщением$\}$

   Принадлежит ли пара населенных пунктов (Серпухов, Нью-Йорк) отношению
   (a) $P \circ Q$,
   (b) $Q \circ P$?

9. На множестве всех людей M заданы бинарные отношения

$$P = \{(x, y) \in M^2 : y - \text{жена } x\}$$
$$Q = \{(x, y) \in M^2 : y - \text{брат } x\}$$

   В каком отношении родства находятся люди u и v, для которых выполнено
   (a) $u\,(P \circ Q)\,v$,
   (b) $u\,(Q \circ P)\,v$?

10. На множестве всех людей M заданы бинарные отношения

$$P = \{(x, y) \in M^2 : y \text{ – отец } x\}$$
$$Q = \{(x, y) \in M^2 : y \text{ – мать } y\}$$

С помощью операций над бинарными отношениями выразить через отношения P и Q отношение

(a) $R = \{(x, y) \in M^2 : y$ – родной брат или сестра $x\}$,

(b) $R = \{(x, y) \in M^2 : y$ – сводный брат или сестра $x\}$.

11. Соответствие R связывает множество клиентов K интернет-магазина и множество продаваемых им товаров T:

$$(X, y) \in R,$$

если клиент $X \in K$ купил товар $y \in T$. Выразить с помощью операций над бинарными отношениями бинарное отношение P между товарами:

$$P = \{(x, y) \in T^2 : \text{вместе с товаром } x \text{ покупают товар } y\}.$$

12. Дано универсальное множество K клиентов интернет-магазина, подмножество

$$W \subseteq K$$

клиентов прекрасного пола, подмножество

$$U \subseteq K$$

клиентов в возрастной группе до 20 лет, множество товаров интернет магазина T и соответствие R из множества K в множество T:

$$(X, y) \in R,$$

если клиент $X \in K$ купил товар $y \in T$.
На множестве всех соответствий из K в T универсальное множество есть $K \times T$.
Описать на естественном языке множества товаров

(a) $R(W)$,

(b) $R(W \cap U)$,

(c) $R(W) \cap R(U)$,

(d) $R(\overline{W})$,

(e) $\overline{R(W)}$,

(f) $\overline{R(\overline{W})}$,

(g) $\overline{R}(W)$,

(h) $\overline{\overline{R}(W)}$,

(i) $\overline{R}(\overline{W})$,

(j) $\overline{\overline{R}(\overline{W})}$.

13. Доказать тождество

$$P(X \cup Y) = P(X) \cup P(Y).$$

14. Проверить тождество

$$P(X \cap Y) = P(X) \cap P(Y).$$

Если оно верно, доказать его. Если нет, привести контрпример.

15. Проверить тождество

$$P(X \setminus Y) = P(X) \setminus P(Y).$$

Если оно верно, доказать его. Если нет, привести контрпример.

16. Докажите тождество алгебры отношений (в узком смысле):

$$(X^{-1} \circ \overline{X \circ Y}) \cup \overline{X} = \overline{X}$$

(равносильно, $X^{-1} \circ \overline{X \circ Y} \subseteq \overline{X}$).

17. Докажите следующие равносильности (де Морган):

$$X \circ Y \subseteq \overline{Z} \Leftrightarrow X^{-1} \circ Z \subseteq \overline{Y} \Leftrightarrow Z \circ Y^{-1} \subseteq \overline{X}$$

(а) в алгебре отношений в узком смысле, (б) в алгебре отношений в широком смысле (используя последнюю аксиому).

18. Проверить свойства (всюду определенность, функциональность, сюръективность, инъективность) соответствия R из множества X в множество Y. Ответ обосновать.

(a) $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{4, 5, 6\}$, $R = \{(1, 4), (1, 5), (1, 6)\}$,

(b) $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{4, 5, 6\}$, $R = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4)\}$,

(c) $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{4, 5, 6\}$, $R = \{(1, 4), (2, 4), (3, 4)\}$,

(d) $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{4, 5, 6\}$, $R = \{(1, 4), (2, 5)\}$,

(e) $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{4, 5, 6\}$, $R = X \times Y$,

(f) $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{4, 5, 6\}$, $R = \varnothing$,

(g) $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{N}$, $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N} : y < x\}$.

(h) $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathscr{P}(\mathbb{N})$,

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathscr{P}(\mathbb{N}) : (\forall z \in y)\, z < x\},$$

(i) X и Y есть множество всех людей, когда-либо живших на свете,

$$R = \{(x, y) \in X \times Y : x - \text{сын или дочь } y\}.$$

(j) X и Y есть множество всех людей, когда-либо живших на свете,

$$R = \{(x, y) \in X \times Y : y - \text{мать } x\}.$$

(k) X есть множество всех квадратов на плоскости, Y есть множество всех прямоугольников на плоскости,

$$x\,R\,y \leftrightarrow \text{площади } x \text{ и } y \text{ равны}.$$

19. Проверить свойства (сюръективность, инъективность) функции $f : X \to Y$. Ответ обосновать.

(a) $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{4, 5, 6\}$, $f(x) = x + 3$,

(b) $X = \{-1, 0, 1\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$, $f(x) = x^2 + 1$,

(c) $X = \{0, 1, 2, 3\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$, $f(x) = \min\{x + 1, 3\}$,

(d) $X = \{0, 1, 2\}$, $Y = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $f(x) = x^2$,

(e) $X = Y = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$,

(f) $X = Y = \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$,

(g) $X = Y = \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant 0\}$, $f(x) = x^2$,

(h) $X = Y = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $f(x) =$ остаток от деления $3x$ на 5,

(i) $X = \mathscr{P}(\{a, b, c, d\})$, $Y = \mathscr{P}(\{b, c, d, e\})$, $f(x) = (x \cup \{e\}) \setminus \{a\}$,

(j) X есть множество всех треугольников на плоскости, Y есть множество всех окружностей на плоскости, $f(x) =$ окружность, описанная вокруг треугольника x

(k) X есть множество всех кругов на плоскости, $Y = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, $f(x) =$ площадь круга x,

(l) X – множество всех студентов Университета, $Y = \mathbb{N}$, $f(x) =$ номер студенческого билета студен

(m) $X = Y = \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (3x - 2y, x + y)$,

(n) $X = Y = \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (2x + y + z, x + 3y + z, 3x + 4y + 2z)$,

(o) $X = \mathbb{R}^2$, $Y = \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = (x + 2y, 3x - y, 4x + y)$,

(p) $X = \mathbb{R}^3$, $Y = \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (x - y + z, 2x + y + z)$,

(q) $X = \mathbb{R}^2$, $Y = \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^3 + 5xy$.

20. Доказать, что если соответствие P функционально, то

$$P^{-1}(A \cap B) = P^{-1}(A) \cap P^{-1}(B).$$

21. Доказать, что для любых множеств X, Y, Z и соответствий P из множества X в множество Y и R из множества Y в множество Z

(a) если соответствия P и R всюду определенные, то и соответствие $P \circ R$ всюду определенное,

(b) если соответствия P и R функциональные, то и соответствие $P \circ R$ функциональное,

(c) если соответствия P и R инъективные, то и соответствие $P \circ R$ инъективное,

(d) если соответствия P и R сюръективные, то и соответствие $P \circ R$ сюръективное,

(e) соответствие P сюръективное тогда и только тогда, когда соответствие P^{-1} всюду определенное,

(f) соответствие P инъективное тогда и только тогда, когда соответствие P^{-1} функциональное.

22. Доказать, что для любой функции $f : X \to Y$ обратное соответствие является функцией тогда и только тогда, когда f биекция.

23. Описать транзитивное замыкание P^* бинарного отношения P на множестве X.

(a) $X = \mathbb{N}$, $P = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : x + 1 = y\}$,

(b) $X = \mathbb{N}$, $P = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : x + 2 = y\}$,

(c) $X = \mathbb{N}$, $P = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : x \neq y\}$,

(d) X есть множество всех людей, когда либо живших на свете, $P = \{(x, y) \in X^2 : y$ есть сын или дочь $x\}$,

(e) X есть множество всех людей, когда либо живших на свете, $P = \{(x, y) \in X^2 : y$ есть брат или сестра $x\}$,

(f) $X = \mathbb{N}$, $P = \leqslant$,

(g) X есть множество $\mathscr{P}_2(U)$ всех двухэлементных подмножеств множества $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$,

$$x\,P\,y \leftrightarrow \text{ пересечение } x \cap y \text{ содержит ровно один элемент.}$$

24. Проверить свойства (рефлексивность, иррефлексивность, симметричность, асимметричность, антисимметричность, полнота, связность, транзитивность) бинарного отношения R на множестве X. Указать, является ли R отношением строгого/нестрогого частичного/линейного порядка, отношением эквивалентности. Для отношений эквивалентности описать множество соответствующее разбиение на классы эквивалентности. Ответ обосновать.

(a) $X = \{1, 2, 3\}$; $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}$,

(b) $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$; $x\,R\,y \leftrightarrow x$ делится на y,

(c) $X = \mathbb{Z}$, $x\,R\,y \leftrightarrow x - y$ делится на 5,

(d) $X = \mathbb{N}$, $x \, R \, y \leftrightarrow x + 3 \leqslant y$,

(e) $X = \mathbb{N}$, $x \, R \, y \leftrightarrow x + y = 5$,

(f) $X = \mathbb{N}$, $x \, R \, y \leftrightarrow x + y = 10$,

(g) $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$; $(x, y) \, R \, (x', y') \leftrightarrow x + y = x' + y'$,

(h) $X = \mathscr{P}(\mathbb{N})$, $R = \subseteq$,

(i) $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $(x, y) \, R \, (x', y') \leftrightarrow x + y' = x' + y$,

(j) $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $(x, y) \, R \, (x', y') \leftrightarrow xy' = x'y$,

(k) $X = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$; $(x, y) \, R \, (x', y') \leftrightarrow xy' = x'y$,

(l) X есть множество всех прямых на плоскости, $l_1 \, R \, l_2 \leftrightarrow l_1$ параллельна l_2,

(m) X есть множество всех треугольников на плоскости, $\triangle_1 \, R \, \triangle_2 \leftrightarrow \triangle_1$ и $\triangle_2$ имеют по крайне мер

(n) X есть множество действительных матриц размера 2×2, $A \, R \, B \leftrightarrow$ существует невырожденная действительная матрица C размера 2×2, для которой $B = CAC^{-1}$,

(o) X есть множество всех дифференцируемых функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \, R \, g \leftrightarrow f'(0) = g'(0)$,

(p) X множество всех людей, когда либо живших на свете, $u \, R \, v \leftrightarrow$ u и v имеют по крайней мере одного общего дедушку или по крайней мере одну общую бабушку.

25. Построить бинарное отношение на множестве $\{0, 1, 2\}$, которое

    (a) рефлексивно, симметрично, но не транзитивно,

    (b) рефлексивно, транзитивно, но не симметрично,

    (c) симметрично, транзитивно, но не рефлексивно.

26. Доказать, что для любых множеств X, Y функции $f : X \to Y$ бинарное отношение

$$R = \{(x, y) : f(x) = f(y)\}$$

на множестве X есть отношение эквивалентности.

27. Составить характеристическую матрицу бинарного отношения

$$P = \{(\clubsuit, \diamondsuit), (\clubsuit, \heartsuit), (\spadesuit, \diamondsuit), (\spadesuit, \spadesuit), (\diamondsuit, \clubsuit)\}$$

на множестве

$$X = \{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\},$$

если нумерация этого множества (от меньшего к большему) есть

   (a) $\clubsuit\diamondsuit\heartsuit\spadesuit$,

   (b) $\spadesuit\clubsuit\heartsuit\diamondsuit$.

28. Решить задачи 1–7, используя характеристические векторы и матрицы входящих в них параметров.

29. Матрица бинарного отношения P на занумерованном множестве X имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(на главной диагонали и выше единицы, а ниже главной диагонали нули). Какими свойствами обладает отношение P?

30. Матрица бинарного отношения P на занумерованном множестве X имеет блочный вид, т.е. состоит из квадратных подматриц, состоящих из одних единиц, расположенных по главной диагонали (вне этих подматриц все элементы раны нулю), например,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Какими свойствами обладает отношение P?

31. Матрица A бинарного отношения P на занумерованном множестве X удовлетворяет условию $A^{\mathrm{T}} = A$. Каким свойством обладает отношение P?

32. Бинарное отношение P на занумерованном множестве X задано характеристической матрицей A. Известно, что все элементы матрицы

$$A^{\mathrm{T}} \vee A$$

единицы. Каким свойством обладает отношение P?

2.2.1 Ответы и указания

1. 1a. $\{(\clubsuit, \square), (\diamondsuit, \triangledown)\}$, 1b. $\{(\clubsuit, \triangle), (\clubsuit, \square), (\diamondsuit, \triangledown), (\heartsuit, \triangle), (\spadesuit, \square)\}$, 1c. $\{(\clubsuit, \triangle), (\heartsuit, \triangle)\}$, 1d. $\{(\clubsuit, \triangle), (\heartsuit, \triangle), (\spadesuit, \square)\}$. 2. 2a. $\{\triangle, \square, \triangledown\}$, 2b. $\{\square\}$. 3. 3a. $\{(\triangle, \clubsuit), (\square, \clubsuit), (\triangledown, \diamondsuit), (\triangle, \heartsuit)\}$ 3b. $\{(\square, \clubsuit), (\triangledown, \diamondsuit), (\square, \spadesuit)\}$. 4. $\{(1, 8), (1, 7)\}$. 5. 5a. $\{(1, 2), (2, 1), (3, 4)\}$, 5b. $\{(d, b), (a, c), (a, d), (b, c), (b, d)\}$, 5c. $\{(1, 2), (2, 1), (4, 2), (4, 3)\}$, 5d. $\{(b, d), (c, a), (c, b), (d, a), (d, b)\}$. 6. 6a. $\{d, e\}$, 6b. $\{2, 3\}$, 6c. $\varnothing$, 6d. $\{(1, 2), (2, 1), (3, 4)\}$, 6e. $\{2\}$, 6f. $\{(1, 1), (2, 2)\}$. 7. 7a. $\{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (b, a), (b, b)\}$, 7b. $\{(a, a), (a, b), (c, a), (d, a)\}$, 7c. $\{(a, a), (b, b), (a, b), (b, a)\}$, 7d. $\{a, b\}$. 8. 8a. Нет, 8b. Да. 9. 9a. Шурин (брат жены), 9b. Невестка (жена брата). 10. 10a. $(R \circ R^{-1} \cap P \circ P^{-1}) \setminus E_M$, 10b. $(R \circ R^{-1} \triangle P \circ P^{-1}) \setminus E_M$. 11 $(P^{-1} \circ P) \setminus E_T$. 12. Множество товаров, которые 12a приобрела хотя бы одна клиентка, 12b приобрела хотя бы одна юная клиентка, 12c приобрела хотя бы одна клиентка и хотя бы один клиент или клиентка в возрасте до 20 лет, 12d приобрел хотя бы один клиент (мужского пола), 12e не приобрела ни одна клиентка (приобрели только клиенты мужского пола или вовсе никто), 12f не приобрел ни один клиент мужского пола (приобрели только клиентки или вовсе никто), 12g не приобрела хотя бы одна клиентка, 12h приобрела каждая клиентка, 12i не приобрел хотя бы один клиент мужского пола, 12j приобрел каждый клиент мужского пола. 13. Пусть $z \in P(X \cup Y)$. Значит, существует такое $u \in X \cup Y$, что $(u, x) \in P$. Если $u \in X$, имеем $x \in P(X)$. Если $u \in Y$, имеем $x \in P(Y)$. В обоих случаях $x \in P(X) \cup P(Y)$. Наоборот, пусть $z \in P(X) \cup P(Y)$. Если $z \in P(X)$, то существует такое $u \in X$, что $(u, x) \in P$. Поскольку $u \in X$, $u \in X \cup Y$. Значит, $z \in P(X \cup Y)$. Если $z \in P(Y)$, рассуждения аналогичны. 14. Тождество неверно. Возможный контрпример: $X = \{0\}$, $Y = \{1\}$, $Z = \{a\}$, $P \subseteq (X \cup Y) \times Z$, $P = \{(0, a), (1, a)\}$. 15. Тождество неверно. Возможный контрпример: $X = \{0\}$, $Y = \{1\}$, $Z = \{a\}$, $P \subseteq (X \cup Y) \times Z$, $P = \{(0, a), (1, a)\}$. 18. Указаны только те свойства, которыми функция обладает. Если функция не обладает никаким из требуемых свойств, ответ в списке отсутствует. 18a сюръективно, 18b биективно, 18c функционально и всюду определено (R – функция), 18d функционально, но не всюду определено (R – частичная функция), 18e сюръективно и всюду определено, 18f инъективно и функционально, 18g сюръективно, 18h всюду определенная функция, 18i всюду определенное, 18j всюду определенная функция, 18k всюду определенное и сюръективное. 19. В основном указаны только те свойства, которыми соответствие обладает. 19a биекция, 19c сюръекция, 19d инъекция, 19f биекция, 19g биекция, 19h биекция, 19j сюръекция, 19k сюръекция, 19l инъекция, 19m биекция, 19o инъекция, 19p сюръекция, 19q сюръекция. 20 Указание: функциональность используется при доказательстве включения справа налево. 23. 23a $<$, 23b $\{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : x < y \wedge y - x$ делится на два$\}$, 23c $\mathbb{N}^2$, 23d $\{(x, y) \in X^2 : y$ потомок $x\}$, 23e $\{(x, y) \in X^2 : x = y$ или y есть брат или сестра $x\}$, 23f $\leqslant$, 23g $\mathscr{P}_2(U) \times \mathscr{P}_2(U)$. 24. Указаны только основные свойства. 24a отношение эквивалентности, 24b отношение нестрогого частичного порядка, 24c отношение эквивалентности, 24d отношение строго частичного порядка, 24e иррефлексивное и симметричное, 24f симметричное, 24g рефлек-

сивное и симметричное, 24h отношение нестрого частичного порядка, 24i отношение эквивалентности, 24j рефлексивное и симметричное, 24k отношение эквивалентности, 24l иррефлексивное и симметричное, 24m рефлексивное и симметричное, 24n отношение эквивалентности, 24o отношение эквивалентности, 24i рефлексивное и симметричное. 25. Например, 25a. $\{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,a),(b,c),(c,b)\}$, 25b. $\{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b)\}$, 25c. $\varnothing$. 27. 27a. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 27b. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. 29. Нестрогий линейный порядок. 30 Отношение эквивалентности. 31. Симметричное. 32. Полное.