Введение в дискретную математику.
Лекция 4 (отношения порядка и решетки).
План-конспект

Н. Л. Поляков

1 Операции над бинарными отношениями (продолжение)

Транзитивное замыкание. Для каждого бинарного отношения $P \subseteq X \times X$ следующим образом определяется *транзитивное замыкание* отношения P:

$$P^* = \bigcup \{P^n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Здесь P^n обозначает отношение $\underbrace{P \circ P \circ \ldots \circ P}_{n \text{ раз}}$.

Пример. Пусть P есть отношение на множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел,

$$x \, P \, y \Leftrightarrow y = x + 1.$$

Тогда $P^* = <$.

2 Отношения порядка и решетки

Определения. Отношением (нестрогого частичного) **порядка** на множестве X называется любое бинарное отношение $\preccurlyeq$ на множестве X, которое *рефлексивно*, *антисимметрично* и *транзитивно*:

- $x \preccurlyeq x$ для всех $x \in X$,
- $(x \preccurlyeq y \wedge y \preccurlyeq x) \Rightarrow x = y$ для всех $x, y \in X$,
- $(x \preccurlyeq y \wedge y \preccurlyeq z) \Rightarrow x \preccurlyeq z$ для всех $x, y, z \in X$.

Алгебраическая структура $(X, \preccurlyeq)$, где $\preccurlyeq$ есть отношение порядка на непустом множестве X, называется *частично упорядоченным множеством* (ч.у.м.)[1]

Простейшие примеры частично упорядоченных множеств это числовые множества со стандартным отношением нестрого неравенства $\leqslant$ в качестве отношения порядка. Следует заметить, что стандартные отношения нестрогого неравенства на числовых множествах удовлетворяют дополнительному условию *полноты*

- $x \preccurlyeq y \vee y \preccurlyeq x$ для всех $x, y \in X$.

Частичный порядок, удовлетворяющий условию полноты, называется *линейным* порядком.

В нашем курсе мы будем в основном рассматривать именно отношения нестрогого частичного и линейного порядка. Наряду с этими типами отношений часто рассматривают отношения *строгого* частичного и линейного порядка, а также отношения предпорядка.

[1] Соответствующий английский термин – *poset* (от **p**artial **o**rdered **set**).

Отношением **строгого частичного порядка** на множестве X называется любое бинарное отношение $\prec$ на множестве X, которое *асимметрично* (а, следовательно, иррефлексивно) и *транзитивно*:

- $x \prec y \Rightarrow \neg\, y \prec x$ для всех $x, y \in X$,
- $(x \prec y \wedge y \prec z) \Rightarrow x \prec z$ для всех $x, y, z \in X$.

Если отношение $\prec$ строгого частичного порядка связное, т.е.

- $x \prec y \vee y \prec x \vee x = y$ для всех $x, y \in X$,

оно называется отношением строгого линейного порядка.

Отношением (нестрогого) предпорядка на множестве X называется любое бинарное отношение $\sqsubseteq$ на множестве X, которое рефлексивно, связно и транзитивно, т.е. удовлетворяет условиям:

- $x \sqsubseteq x$ для всех $x \in X$,
- $x \sqsubseteq y \vee y \sqsubseteq x$ для всех $x, y \in X$,
- $(x \sqsubseteq y \wedge y \sqsubseteq z) \Rightarrow x \sqsubseteq z$ для всех $x, y, z \in X$.

Отношения предпорядка иногда встречаются в моделях теории потребления и социального выбора.

Обозначения. Если нет риска перепутать числовые неравенства с заданным отношением порядка, вместо знака $\preccurlyeq$ используется обычный знак неравенства $\leqslant$.

Если $x \preccurlyeq y$, говорят, что элемент x *предшествует* элементу y, а элемент y *следует* за элементом x. Если $x \preccurlyeq y$ и $x \neq y$, говорят, что x *строго предшествует* y, и пишут $x \prec y$. В связи с отношением порядка $\preccurlyeq$ в естественном смысле используются также знаки $\succ, \npreceq, \nsucceq, \nprec, \nsucc$. На языке операций над бинарными отношениями связь отношений, обозначаемых этими знаками, и отношения $\preccurlyeq$ выражается следующим образом.

$$
\begin{array}{ll}
\succcurlyeq\, = \,\preccurlyeq^{-1} & \qquad \npreceq\, = (X \times X) \setminus \preccurlyeq \\
\succ\, = \,\prec^{-1} & \qquad \nprec\, = (X \times X) \setminus \prec \\
\prec\, = \,\preccurlyeq \setminus E_X & \qquad \nsucceq\, = (X \times X) \setminus \succcurlyeq \\
\succ\, = \,\succcurlyeq \setminus E_X & \qquad \succ\, = (X \times X) \setminus \succ
\end{array}
$$

В случае, если порядок $\preccurlyeq$ *линейный*, верны следующие соотношения:

$$
\begin{array}{ll}
\nsucceq\, = \,\prec & \qquad \nsucc\, = \,\preccurlyeq \\
\npreceq\, = \,\succ & \qquad \nprec\, = \,\succcurlyeq
\end{array}
$$

В общем случае эти соотношения не верны. Например, записи

$$x \npreceq y \text{ и } x \succ y$$

имеют различный смысл для частичных порядков общего вида.

Элементы x и y частично упорядоченного множества $(X, \preccurlyeq)$ называются *сравнимыми*, если

$$x \preccurlyeq y \vee y \preccurlyeq x.$$

Таким образом, линейно упорядоченное множество можно охарактеризовать как такое ч.у.м. $(X, \preccurlyeq)$, что любые два элемента $x, y \in X$ сравнимы.

Примеры ч.у.м.

1. $(\mathbb{N}, \leqslant)$, $(\mathbb{Z}, \leqslant)$, $(\mathbb{R}, \leqslant)$, где $\leqslant$ есть стандартный порядок на числовых множествах.

2. Пусть S есть некоторое множество. Отношение включения $\subseteq$ задает отношение порядка на множестве его подмножеств $X = \mathscr{P}(S)$. Таким образом, для любого множества S алгебраическая структура

$$(\mathscr{P}(S), \subseteq)$$

   есть ч.у.м.

3. Рассмотрим множество натуральных чисел $\mathbb{N}$. Мы говорим, что x *делит* y и пишем $x \mid y$, если $y = qx$ для некоторого $q \in \mathbb{N}$. Отношение $\mid$ является отношением частичного порядка на множестве натуральных чисел, т.е. алгебраическая структура

$$(\mathbb{N}, \mid)$$

   есть ч.у.м.

Отношения порядка из пункта 1 линейные, а из пункта 3 и из пункта 2 (в общем случае) нет. Точнее, для пункта 2 отношение порядка не линейное, если множество S содержит хотя бы два элемента. Действительно, выберем два различных элемента a и b из множества S. Тогда

$$\{a\} \nsubseteq \{b\} \text{ и } \{b\} \nsubseteq \{a\}.$$

Что касается пункта 3, то, например, элементы 2 и 3 из множества $\mathbb{N}$ не сравнимы, т.к. ни один из них не делит другой.

Любой линейный порядок $\preccurlyeq$ на конечном множестве X, содержащем n элементов, можно отождествить с бесповторной последовательностью

$$x_1 x_2 \ldots x_n$$

элементов множества X,

$$i \leqslant j \Leftrightarrow x_i \preccurlyeq x_j.$$

Запись линейный порядков в виде последовательностей есть удобный короткий способ определить линейный порядок. Например, последовательность bca определяет линейный порядок

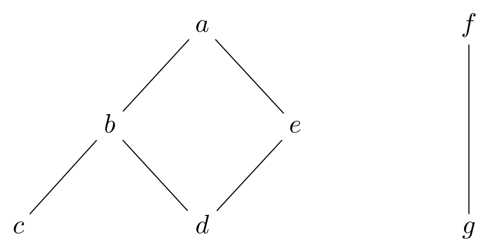
$$\{(a, a), (b, b), (c, c), (b, c), (c, a), (b, a)\}$$

на множестве $\{a, b, c\}$.

Изображения: диаграммы Хассе. Отношения порядка на конечных множествах с небольшим числом элементов удобно представлять с помощью так называемых **диаграмм Хассе**. Пусть $(X, \preccurlyeq)$ – частично упорядоченное множество. Будем говорить, что элемент $x \in X$ **непосредственно предшествует** элементу $y \in X$, а элемент y **непосредственно следует** за элементом x, и писать $x \ll y$, если $x \prec y$ и между x и y нет ни одного элемента из X, т.е. нет элементов $z \in X$, удовлетворяющих неравенствам $x \prec z \prec y$.

На диаграмме Хассе элементам упорядоченного множества соответствуют точки плоскости (мы отождествляем точки и соответствующие им элементы). Точки x и y соединяются дугой, если $x \ll y$. При этом y располагается выше, чем x. Несложно убедиться, что по такой диаграмме исходный порядок на множестве X восстанавливается однозначно.

Пример. На следующем рисунке



представлена диаграмма Хассе, соответствующая ч.у.м. $(X, \preccurlyeq)$, где множество X есть

$$\{a, b, c, d, e, f, g\},$$

а отношение порядка $\preccurlyeq$ задано матрицей

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccccc} a & b & c & d & e & f & g \end{array} \\
\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}.$$

Операции над ч.у.м. Из уже имеющихся частично упорядоченных множеств можно изготавливать новые ч.у.м.

Ограничение. Пусть $(X, \preccurlyeq)$ есть ч.у.м. и $Y \subseteq X$. Тогда алгебраическая структура

$$(Y, \preccurlyeq \cap (Y \times Y))$$

есть ч.у.м. При этом, если $\preccurlyeq$ есть линейный порядок, то и $\preccurlyeq \cap (Y \times Y)$ есть линейный порядок. Структура $(Y, \preccurlyeq \cap (Y \times Y))$ называется ограничением ч.у.м. $(X, \preccurlyeq)$ на множество Y.
Пример. Множество четных натуральных чисел с обычным отношением порядка есть ограничение ч.у.м. $(\mathbb{N}, \leqslant)$ на множество

$$2\mathbb{N} = \{2, 4, \ldots\}.$$

Прямое произведение. Пусть $(X_1, \preccurlyeq_1)$ и $(X_2, \preccurlyeq_2)$ – частично упорядоченные множества. Рассмотрим алгебраическую структуру

$$(X_1 \times X_2, P),$$

где P есть бинарное отношение на множестве $X_1 \times X_2$ и

$$(x_1, x_2)\, P\, (y_1, y_2) \Leftrightarrow (x_1 \preccurlyeq y_1 \wedge x_2 \preccurlyeq y_2)$$

для всех $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in X_1 \times X_2$.

Легко показать, что отношение P есть частичный порядок на множестве $X_1 \times X_2$. Полученное ч.у.м. $(X_1 \times X_2, P)$ называется **прямым произведением** частично упорядоченных множеств $(X_1, \preccurlyeq_1)$ и $(X_2, \preccurlyeq_2)$.

Замечание. Если $(X_1, \preccurlyeq_1)$ и $(X_2, \preccurlyeq_2)$ линейно упорядоченные множества, то их прямое произведение не является линейно упорядоченным множеством (за исключением случая, когда какое-то из множеств X_1 и X_2 одноэлементно). Действительно, пусть, например,

$$X_1 = X_2 = \{0, 1\}$$

и

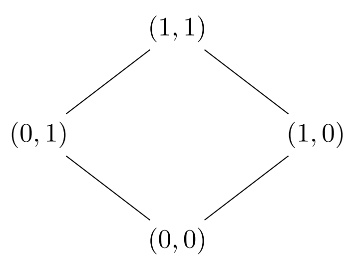
$$\preccurlyeq_1 = \preccurlyeq_2 = \leqslant$$

(т.е. $\preccurlyeq_1$ и $\preccurlyeq_2$ – стандартные порядки на множестве $\{0, 1\}$). Тогда элементы $(0, 1)$ и $(1, 0)$ не сравнимы, поскольку ни одно из утверждений

$$\begin{array}{ll} (a) & 0 \leqslant 1 \wedge 1 \leqslant 0, \\ (b) & 1 \leqslant 0 \wedge 0 \leqslant 1 \end{array}$$

не верно.

Наглядно этот факт можно усмотреть, если представить прямое произведение $(X_1 \times X_2, P)$ ч.у.м. $(X_1, \preccurlyeq_1)$ и $(X_2, \preccurlyeq_2)$ в виде диаграммы Хассе.



Видно, что элементы $(0, 1)$ и $(1, 0)$ не сравнимы.

Лексикографическое произведение. Существует другой стандартный способ, имея два ч.у.м. $(X_1, \preccurlyeq_1)$ и $(X_2, \preccurlyeq_2)$ получить частичный порядок на множестве $X_1 \times X_2$. Это так называемый **лексикографический порядок** P, который определяется следующим образом: для всех $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in X_1 \times X_2$

$$\begin{aligned}(x_1, x_2)\, P\, (y_1, y_2) \Leftrightarrow\ & x_1 \prec_1 y_1 \text{ или} \\ & x_1 = y_1 \text{ и } x_2 \preccurlyeq_2 y_2.\end{aligned}$$

Полученное таким образом ч.у.м. $(X_1 \times X_2, P)$ называют лексикографическим произведением порядков $\preccurlyeq_1$ и $\preccurlyeq_2$. Если оба порядка $\preccurlyeq_1$ и $\preccurlyeq_2$ линейные, то их лексикографическое произведение тоже есть линейный порядок. Наглядно лексикографическое произведение ч.у.м. $(X_1, \preccurlyeq_1)$ и $(X_2, \preccurlyeq_2)$ можно представлять как результат «замены» каждого элемента $x \in X_1$ копией линейного порядка $(X_2, \preccurlyeq_2)$. Лексикографическое произведение частичных порядков существенно зависит от выбора первого и второго элементов: лексикографическое произведение ч.у.м. $(X_1, \preccurlyeq_1)$ и $(X_2, \preccurlyeq_2)$ и лексикографическое произведение ч.у.м. $(X_2, \preccurlyeq_2)$ и $(X_1, \preccurlyeq_1)$, вообще говоря, не изоморфны и мало похожи друг на друга.

Операция прямого произведения и лексикографического упорядочения легко обобщается на произвольное конечное семейство частично упорядоченных множеств.

Прямое произведение ч.у.м.

$$(X_1, \preccurlyeq_1), (X_2, \preccurlyeq_2), \ldots, (X_n, \preccurlyeq_n)$$

есть частично упорядоченное множество $(Z, \preccurlyeq)$, где

$$Z = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$$

и

$$\mathbf{x} \preccurlyeq \mathbf{y} \Leftrightarrow (x_1 \preccurlyeq_1 y_2 \text{ и } x_2 \preccurlyeq y_2 \text{ и } \ldots \text{ и } x_n \preccurlyeq y_n).$$

для всех $\mathbf{x} = (x_1, x_2 \ldots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in Z$.

Лексикографическое произведение ч.у.м.

$$(X_1, \preccurlyeq_1), (X_2, \preccurlyeq_2), \ldots, (X_n, \preccurlyeq_n)$$

есть частично упорядоченное множество $(Z, \preccurlyeq)$, где

$$z = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$$

и

$$\begin{aligned}\mathbf{x} \preccurlyeq \mathbf{y} \Leftrightarrow\ & x_1 \prec_1 y_1, \text{ или} \\ & x_1 = y_1 \text{ и } x_2 \prec_2 y_2, \text{ или} \\ & x_1 = y_1 \text{ и } x_2 = y_2 \text{ и } x_3 \prec_3 y_3, \text{ или} \\ & \ldots \\ & x_1 = y_1 \text{ и } x_2 = y_2 \text{ и } x_3 = y_3 \text{ и } \ldots \text{ и } x_n \preccurlyeq_n y_n.\end{aligned}$$

для всех $\mathbf{x} = (x_1, x_2 \ldots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in Z$.

Продолжение частичного порядка до линейного и порядковые функции. Любой частичный порядок $\preccurlyeq$ на любом множестве X можно продолжить до линейного порядка, т.е. найти такой линейный порядок $\leqslant$ на множестве X, что $\preccurlyeq\ \subseteq\ \leqslant$. Конечно, если сам порядок $\preccurlyeq$ не линейный, то такой линейный порядок $\leqslant$ не единственный.

Следствием из этого (не совсем тривиального) утверждения является возможность для любого конечного ч.у.м. $(X, \preccurlyeq)$, в котором множество X содержит n элементов, построить порядковую функцию, т.е. биективную функцию

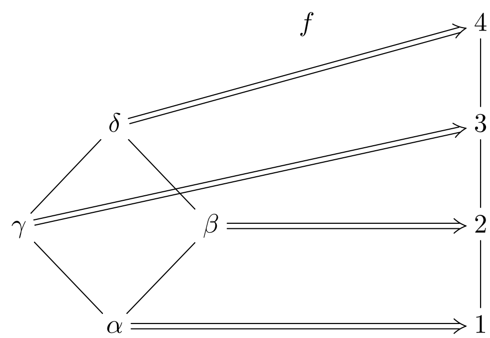
$$f : X \to \{1, 2, \ldots, n\},$$

удовлетворяющую условию

$$x \prec y \Rightarrow f(x) < f(y) \qquad (*)$$

для всех $x, y \in X$.

Пример.



При заданной порядковой функции f частичный порядок $\preccurlyeq$ продолжается до линейного порядка

$$\{(x, y) \in X \times X : f(x) \leqslant f(y)\}.$$

В приведенном примере изображенный посредством диаграммы частичный порядок продолжается до линейного порядка

$$\alpha\beta\gamma\delta$$

(слева направо от меньшего к большему).

В более широком смысле порядковая функция есть любая инъективная функцию

$$f : X \to \mathbb{R},$$

которая удовлетворяет условию $(*)$. Тогда понятие «порядковая функция» имеет смысл и для бесконечных ч.у.м. Однако, не каждое бесконечное частично упорядоченное множество имеет порядковую функцию в этом смысле. Например, можно доказать, что ее нельзя построить для лексикографического упорядочения множества $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Максимальные/минимальные и наибольшие/наименьшие элементы ч.у.м.; точные грани Пусть дано ч.у.м. $(X, \preccurlyeq)$.

Элемент $m \in X$ называется **максимальным** (**минимальным**), если в X нет элементов, которые были бы строго больше (соответственно, меньше), чем m, т.е.

$$(\forall x \in X)\ x \not\succ m \text{ (соответственно, } (\forall x \in X)\ x \not\prec m).$$

Элемент m ч.у.м. $(X, \preccurlyeq)$ называется **наибольшим** (**наименьшим**), если m больше или равен (соответственно, меньше или равен) всем элементам X, т.е.

$$(\forall x \in X)\ m \succcurlyeq x \text{ (соответственно, } (\forall x \in X)\ m \preccurlyeq x).$$

Наибольший элемент в частично упорядоченном множестве X, если он существует, единствен. Наибольший элемент является максимальным. В линейно упорядоченном множестве максимальный элемент является наибольшим. В общем случае, это, вообще говоря, неверно. Аналогичные утверждения верны для наименьших элементов.

Для любого множества $Y \subseteq X$ **верхней** (**нижней**) **гранью** множества Y называется любой элемент $c \in X$, который больше или равен (соответственно, меньше или равен) всем элементам $y \in Y$, т.е.

$$(\forall y \in Y)\ c \succcurlyeq y \text{ (соответственно, } (\forall y \in Y)\ c \preccurlyeq y)$$

Точной верхней (**нижней**) **гранью** множества $Y \subseteq X$ называется элемент $c \in X$, для которого

1. c есть верхняя (соответственно, нижняя) грань множества Y,

2. $c \preccurlyeq c'$ для любой верхней грани c' множества Y (соответственно, $c \succcurlyeq c'$ для любой нижней грани c' множества Y).

Точная верхняя (нижняя) грань множества $Y \subseteq X$ единственна, если существует. Точные верхние и нижние грани множества Y обозначаются соответственно символами

$$\sup Y \text{ и } \inf Y$$

или

$$\bigvee Y \text{ и } \bigwedge Y.$$

Кроме того, приняты обозначения

$$\sup\{x, y\} = x \vee y \text{ и } \inf\{x, y\} = x \wedge y.$$

Полурешетки и решетки Частично упорядоченное множество $(X, \preccurlyeq)$ называется

- *верхней полурешеткой*, если для любых двух элементов $x, y \in X$ существует точная верхняя грань $x \vee y$,

- *нижней полурешеткой*, если для любых двух элементов $x, y \in X$ существует точная нижняя грань $x \wedge y$,
- *решеткой*, если для любых двух элементов $x, y \in X$ существует точная верхняя грань $x \vee y$ и точная нижняя грань $x \wedge y$.

В любой верхней полурешетке имеют место следующие тождества:

1. $x \vee x = x$,
2. $x \vee y = y \vee x$,
3. $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$.

В любой нижней полурешетке имеют место следующие тождества:

$1'$. $x \wedge x = x$,

$2'$. $x \wedge y = y \wedge x$,

$3'$. $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$.

Соответственно, в любой решетке выполнены все эти шесть тождеств.

Примеры решеток

- Любое линейно упорядоченное множество есть решетка, $x \vee y = \max\{x, y\}$, $x \wedge y = \min\{x, y\}$.
- Множество $\mathscr{P}(X)$ всех подмножеств произвольного множества X с отношением включения $\subseteq$ есть решетка, $x \vee y = x \cup y$, $x \wedge y = x \cap y$.
- Множество X всех делителей произвольного числа n с отношением $x \,|\, y$ (x делит y), есть решетка, $x \vee y = \text{НОК}(x, y)$, $x \wedge y = \text{НОД}(x, y)$.
- Множество всех подпространств линейного пространства $\mathcal{L}$ с отношением включения есть решетка, $x \vee y = x + y$, $x \wedge y = x \cap y$.

Понятие о решетке понятий. Решетки понятий широко используются в анализе данных и обработке знаний[2]. Пусть даны множество G (объектов), множество M (признаков) и соответствие $I \subseteq G \times M$ ($g\,I\,m \Leftrightarrow$ объект g имеет признак m). Тройка (G, M, I) называется *контекст*. Для каждого подмножества A множества G и каждого подмножества B множества M определяются множества

- $A' = \{m \in M : (\forall g \in A)\ g\,I\,m\} = \overline{\overline{I}(A)}$,
- $B' = \{g \in G : (\forall m \in B)\ g\,I\,m\} = \overline{\overline{I^{-1}}(B)}$,

[2]См. B. Ganter, R. Wille Formal Concept Analysis: Mathematical Foundations. — Springer, 1999

Множества $A \subseteq G$ и $B \subseteq M$ называются замкнутыми если $A'' = A$ и $B'' = B$ (неформально: множество объектов замкнуто, если оно выделяется некоторым множеством признаков, множество признаков замкнуто, если оно выделяет некоторое множество объектов).

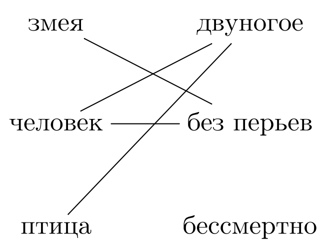
Пара (A, B), где $A \subseteq G$, $B \subseteq G$, $A' = B$, $B' = A$ называется *понятием* (при этом A называется его *объемом*, а B – *содержанием*). Множество понятий частично упорядочено по вложению объемов: $(A, B) \prec (C, D)$, если $A \subseteq C$ (при этом $D \subseteq B$).

Оказывается, множество понятий по этому отношению образуют решетку, причем

- $(A, B) \wedge (C, D) = (A \cap C, (A \cap C)')$,
- $(A, B) \vee (C, D) = ((B \cap D)', B \cap D)$.

Пример.

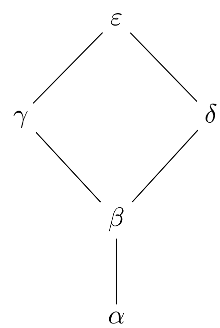
Контекст:



Понятия:

- $\alpha = (\varnothing, \{$двуногое, без перьев, бессмертно$\})$,
- $\beta = (\{$человек$\}, \{$двуногое, без перьев$\})$,
- $\gamma = (\{$человек, птица$\}, \{$двуногое$\})$,
- $\delta = (\{$человек, змея$\}, \{$без перьев$\})$,
- $\varepsilon = (\{$человек, змея, птица$\}, \varnothing)$.

Диаграмма Хассе решетки понятий:



Некоторые типы решеток (для самостоятельного изучения) Решетка $(X, \preccurlyeq)$ называется

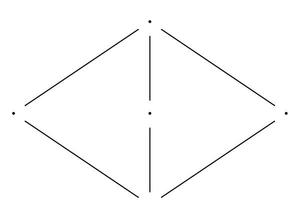
1. *дистрибутивной*, если для всех $x, y, z \in X$ выполнено:
$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \text{ и}$$
$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z).$$

2. *решеткой с нулем и единицей*, если существуют элементы $\inf X \in X$ и $\sup X \in X$; эти элементы обозначаются соответственно, символами 0 и 1 (если не возникает опасности перепутать их с обозначениями обычных нуля и единицы),

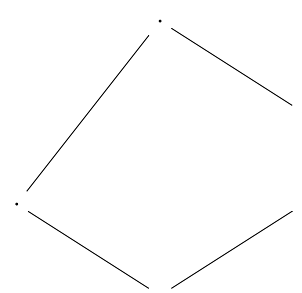
3. *решеткой с дополнениями*, если $(X, \preccurlyeq)$ – решетка с нулем и единицей, и для любого элемента $x \in X$ существует элемент $y \in X$, для которого
$$x \vee y = 1 \text{ и } x \wedge y = 0.$$

Любая конечная решетка есть решетка с нулем и единицей. Для бесконечных решеток это, вообще говоря, не так.

Решетка дистрибутивна, если не содержит подрешеток с диаграммами Хассе



и



Diamond

Pentagone

(подрешеткой решетки $(X, \preccurlyeq)$ называется ограничение ч.у.м. $(X, \preccurlyeq)$ на некоторое множество $Y \subseteq X$, *содержащее все точные верхние и нижние грани элементов* $x, y \in Y$).

В любой решетке $(X, \preccurlyeq)$

$$x \preccurlyeq y \Leftrightarrow x \wedge y = x \Leftrightarrow x \vee y = y.$$

В любой дистрибутивной решетке $(X, \preccurlyeq)$ для каждого элемента $x \in X$ если дополнение существует, то оно единственно. Действительно, пусть y_1 и y_2 – дополнения элемента x. Тогда

$$\begin{aligned} y_1 &= y_1 \wedge 1 = y_1 \wedge (x \vee y_2) = (y_1 \wedge x) \vee (y_1 \wedge y_2) = 0 \vee (y_1 \wedge y_2) = \\ &= (x \wedge y_2) \vee (y_1 \wedge y_2) = (x \vee y_1) \wedge y_2 = 1 \wedge y_2 = y_2. \end{aligned}$$

В дистрибутивных решетках с дополнениями дополнение элемента $x \in X$ обозначается $\overline{x}$.

Решетка $(X, \preccurlyeq)$ называется **булевой**, если она есть дистрибутивная решетка с дополнениями. В любой булевой решетке $(X, \preccurlyeq)$ выполнены следующие тождества:

1. $x \wedge x = x$, $x \vee x = x$ (идемпотентность),
2. $x \wedge y = y \wedge x$, $x \vee y = y \vee x$ (коммутативность),
3. $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$, $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ (ассоциативность),
4. $x \wedge (x \vee y) = x \vee (x \wedge y) = x$ (поглощение)
5. $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$, $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ (дистрибутивность),
6. $\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$, $\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$, $\overline{\overline{x}} = x$ (двойственность),
7. $x \wedge \overline{x} = 0$, $x \vee \overline{x} = 1$ (дополнительность),
8. $x \wedge 0 = 0$, $x \wedge 1 = x$, $x \vee 0 = x$, $x \vee 1 = 1$ (свойства констант),
9. $x \preccurlyeq y \Leftrightarrow x \wedge y = x \Leftrightarrow x \vee y = y \Leftrightarrow x \wedge \overline{y} = 0 \Leftrightarrow \overline{x} \vee y = 1$.

Любая алгебраическая структура

$$B = (X, 0, 1, \wedge, \vee, ^{-})$$

удовлетворяющая аксиомам 1 – 7, называется **булевой алгеброй**.[3]

Если в любой булевой алгебре определить отношение $\preccurlyeq$ формулой

$$x \preccurlyeq y \Leftrightarrow x \wedge y = x,$$

то структура $(X, \preccurlyeq)$ есть булева решетка. Таким образом, существует естественное взаимно-однозначное соответствие между булевыми алгебрами и булевыми решетками.

[3] На самом деле, список аксиом может быть уменьшен, т.к. некоторые из них логически следуют из других.

Обычно считается, что ноль и единица булевых решеток (алгебр) не совпадают, т.е. любая булева алгебра (решетка) содержит по крайней мере два элемента.

Примеры булевых решеток (алгебр).

- Алгебра подмножеств данного множества Ω с константами $\varnothing$ (ноль) и Ω (единица) и операциями пересечения, объединения и дополнения (алгебра множеств).

- n-мерный двоичный куб, т.е. множество всех n-ок из нулей и единиц с отношением $\preccurlyeq$, определенным формулой

  $$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \preccurlyeq (y_1, y_2, \ldots, y_n) \Leftrightarrow x_1 \leqslant x_2 \text{ и } y_1 \leqslant y_2 \text{ и } \ldots \text{ и } x_n \leqslant y_n.$$

  (прямое произведение n копий ч.у.м. $(X, \leqslant)$), где $X = \{0,1\}$ $\leqslant$ есть стандартное отношение порядка).

- Алгебра $B_2 = (\{0,1\}, 0, 1, \wedge, \vee, ^-)$, для которой

  $$x \wedge y = \min(x,y),\ x \vee y = \max(x,y),\ \overline{x} = 1 - x.$$

Каждая конечная булева алгебра изоморфна (т.е., неформально, совпадает с точностью до переобозначений) какой-нибудь алгебре подмножеств конечного множества Ω. Для бесконечных булевых алгебр это не верно.

3 Задачи

1. Дано бинарное отношение P на множестве X. Является ли отношение P нестрогим (a) частичным, (b) линейным порядком на множестве X? Ответ обосновать.

   (a) $X = \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$, $x\,P\,y \Leftrightarrow x \geqslant y$.

   (b) $X = \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$, $x\,P\,y \Leftrightarrow (x = y \vee x + 2 \leqslant y)$.

   (c) $X = \{1, 2, 3\}$, $x\,P\,y \Leftrightarrow x = y$.

   (d) $X = \{1, 2, 3\}$, $P = X \times X$.

   (e) $X = \{1, 2, 3\}$, $P = E_X \cup \{(1, 2)\}$.

   (f) $X = \{1, 2, 3\}$, $P = E_X \cup \{(1, 2), (2, 3)\}$.

   (g) $X = \{1, 2, 3\}$, $P = E_X \cup \{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$.

   (h) X есть множество всех треугольников на плоскости, $x\,P\,y \Leftrightarrow$ площадь x меньше или равна площади y.

   (i) $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $(x_1, x_2)\,P\,(y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 + x_2 \leqslant y_1 + y_2$.

   (j) $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $(x_1, x_2)\,P\,(y_1, y_2) \Leftrightarrow (x_1 \leqslant y_1) \vee (x_2 \leqslant y_2)$.

   (k) $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $(x_1, x_2)\,P\,(y_1, y_2) \Leftrightarrow (x_1 \leqslant y_1) \wedge (x_2 \geqslant y_2)$.

   (l) X есть множество делителей числа 30, $x\,P\,y \Leftrightarrow x$ делит y.

   (m) X есть множество делителей числа 125, $x\,P\,y \Leftrightarrow x$ делит y.

   (n) $X = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, отношение P задано характеристической матрицей

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccccc} a & b & c & d & e & f & g \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

2. Проверить истинность утверждения. Если утверждение истинно, доказать его; если нет, опровергнуть (привести контрпример).

   (a) Если $\preccurlyeq$ есть частичный порядок на множестве X, то отношение $\preccurlyeq^{-1}$ тоже есть частичный порядок на множестве X.

   (b) Если $\preccurlyeq$ есть частичный порядок на множестве X, то отношение $E_X \cup (X^2 \setminus \preccurlyeq)$ тоже есть частичный порядок на множестве X.

   (c) Если $\preccurlyeq$ есть линейный порядок на множестве X, то отношение $\preccurlyeq^{-1}$ тоже есть линейный порядок на множестве X.

   (d) Если $\preccurlyeq$ есть линейный порядок на множестве X, то отношение $E_X \cup (X^2 \setminus \preccurlyeq)$ тоже есть линейный порядок на множестве X.

(e) Если $\preccurlyeq_1$ и $\preccurlyeq_2$ есть частичные порядки на множестве X, то отношение $\preccurlyeq_1 \cap \preccurlyeq_2$ тоже есть частичный порядок на множестве X.

(f) Если $\preccurlyeq_1$ и $\preccurlyeq_2$ есть частичные порядки на множестве X, то отношение $\preccurlyeq_1 \cup \preccurlyeq_2$ тоже есть частичный порядок на множестве X.

(g) Если $\preccurlyeq_1$ и $\preccurlyeq_2$ есть линейные порядки на множестве X, то отношение $\preccurlyeq_1 \cap \preccurlyeq_2$ тоже есть линейный порядок на множестве X.

(h) Если $\preccurlyeq_1$ и $\preccurlyeq_2$ есть линейные порядки на множестве X, то отношение $\preccurlyeq_1 \cup \preccurlyeq_2$ есть частичный порядок на множестве X.

(i) Если $\preccurlyeq_1$ и $\preccurlyeq_2$ есть частичные порядки на множестве X, то отношение $\preccurlyeq_1 \circ \preccurlyeq_2$ тоже есть частичный порядок на множестве X.

(j) Если $\preccurlyeq_1$ и $\preccurlyeq_2$ есть линейные порядки на множестве X, то отношение $\preccurlyeq_1 \circ \preccurlyeq_2$ тоже есть линейный порядок на множестве X.

3. Пусть $(X, *)$ есть алгебраическая структура, которая удовлетворяет аксиомам:

   i. $x * (y * z) = (x * y) * z$ для всех $x, y, z \in X$ (ассоциативность),

   ii. $x * y = y * x$ для всех $x, y \in X$ (коммутативность),

   iii. $x * x = x$ для всех $x \in X$ (идемпотентность).[4]

   Докажите, что

   (a) Отношение $\preccurlyeq$ на множестве X, заданное формулой

   $$x \preccurlyeq y \Leftrightarrow x * y = x$$

   есть отношение порядка.

   (b) Алгебраическая структура $(X, \preccurlyeq)$ есть нижняя полурешетка, причем

   $$x \wedge y = x * y$$

   для всех $x, y \in X$.

4. Докажите, что для любых двух линейных порядков $\preccurlyeq_1$ и $\preccurlyeq_2$ на множестве X следующие условия равносильны:

   (a) $\preccurlyeq_1 \cap \preccurlyeq_2 = E_X$,

   (b) $\preccurlyeq_1 \cup \preccurlyeq_2 = X \times X$,

   (c) $\preccurlyeq_2 = \preccurlyeq_1^{-1}$.

   Верно ли это для любых частичных порядков?

5. Докажите, что для любых двух частичных порядков $\preccurlyeq_1$ и $\preccurlyeq_2$ на множестве X если

   $$\preccurlyeq_1 \cup \preccurlyeq_2 = X \times X,$$

   то оба порядка $\preccurlyeq_1$ и $\preccurlyeq_2$ линейные и $\preccurlyeq_1 = \preccurlyeq_2^{-1}$.

[4]Иначе говоря, $(X, *)$ есть абелева идемпотентная полугруппа.

6. Докажите, что частичный порядок $\preccurlyeq$ является линейным тогда и только тогда, когда отношение $E_X \cup (X^2 \setminus \preccurlyeq)$ снова есть частичный порядок.

7. Докажите, что если множество X содержит всего два элемента, то любое полное антисимметричное отношение на множестве X есть линейный порядок. Приведите пример бинарного отношения на трехэлементном множестве, для которого это не так.

8. Доказать, что множество делителей числа n является линейно упорядоченным относительно отношения делимости тогда и только тогда, когда n - степень простого числа.

9. *Цепью* в ч.у.м. $(X, \preccurlyeq)$ называется последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_k$ элементов множества X, для которой
$$x_1 \prec x_2 \prec \ldots \prec x_k.$$
Найти максимальную длину цепи в ч.у.м. $(\mathscr{P}(S), \subseteq)$, если множество S содержит n элементов.

10. *Антицепью* в ч.у.м. $(X, \preccurlyeq)$ называется последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_k$ элементов множества X, в которой различные элементы попарно не сравнимы:
$$i \neq j \Rightarrow (x_i \not\preccurlyeq x_j \wedge x_j \not\preccurlyeq x_i).$$
Найти максимальную длину антицепи в ч.у.м. $(\mathscr{P}(S), \subseteq)$, если
$$S = \{1, 2, 3\}.$$

11. Пусть X – множество точек координатной плоскости, удовлетворяющих условиям $x_1, x_2 \geqslant 0$ и $x_1 + x_2 \leqslant 1$. Зададим отношение порядка на множестве X покоординатно: $(x_1, x_2) \preccurlyeq (x_1', x_2')$ тогда и только тогда, когда $x_1 \leqslant x_1'$ и $x_2 \leqslant x_2'$. Найти множество максимальных и минимальных элементов множества X. Обладает ли множество X (a) наибольшим, (b) наименьшим элементом?

12. Пусть X есть пятиугольник $ABCDE$ на координатной плоскости с вершинами
$$A(1, -2),\ B(-2, 0),\ C(-2, 3),\ D(2, 3),\ E(4, 1).$$
Зададим отношение порядка на множестве X покоординатно: $(x_1, x_2) \preccurlyeq (x_1', x_2')$ тогда и только тогда, когда $x_1 \leqslant x_1'$ и $x_2 \leqslant x_2'$. Найти множество максимальных и минимальных элементов множества X. Обладает ли множество X (a) наибольшим, (b) наименьшим элементом?

13. Пусть X есть шестиугольник $ABCDEF$ на координатной плоскости с вершинами
$$A(0, -4),\ B(-2, -3),\ C(-3, 0),\ D(-1, 3),\ E(5, 5),\ F(4, -1).$$

Зададим отношение порядка на множестве X покоординатно: $(x_1, x_2) \preccurlyeq (x_1', x_2')$ тогда и только тогда, когда $x_1 \leqslant x_1'$ и $x_2 \leqslant x_2'$. Найти множество максимальных и минимальных элементов множества X. Обладает ли множество X (a) наибольшим, (b) наименьшим элементом?

14. Пусть X есть (невыпуклый) четырехугольник $ABCD$ на координатной плоскости с вершинами

$$A(-4, -4),\ B(3, 3),\ C(0, 0),\ D(5, -5).$$

Зададим отношение порядка на множестве X покоординатно: $(x_1, x_2) \preccurlyeq (x_1', x_2')$ тогда и только тогда, когда $x_1 \leqslant x_1'$ и $x_2 \leqslant x_2'$. Найти множество максимальных и минимальных элементов множества X. Обладает ли множество X (a) наибольшим, (b) наименьшим элементом?

15. Пусть X есть подмножество координатной плоскости. Отношение порядка на множестве X задано покоординатно: $(x_1, x_2) \preccurlyeq (x_1', x_2')$ тогда и только тогда, когда $x_1 \leqslant x_1'$ и $x_2 \leqslant x_2'$. Докажите, что множество максимальных элементов ч.у.м. X лежит на границе множества X. *Границей множества X называется множество ∂X всех точек $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ координатной плоскости, удовлетворяющее условию: в каждой окрестности*

$$O_\varepsilon(\mathbf{a}) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 < \varepsilon\}$$

есть точки как принадлежащие, так и не принадлежащие множеству X.

16. Пусть X – множество натуральных чисел от 10 до 40, частично упорядоченное отношением делимости. Найти все максимальные и минимальные элементы.

17. Существует ли (a) наибольший, (b) наименьший элемент в частично упорядоченном множестве

    (a) натуральных чисел, упорядоченных обычным отношением $\leqslant$,
    (b) натуральных чисел, упорядоченных обычным отношением $\geqslant$,
    (c) натуральных чисел, упорядоченных отношением $|$ (делимости),
    (d) натуральных чисел от 1 до 100, упорядоченных отношением $|$ (делимости),
    (e) делителей числа 100, упорядоченных отношением $|$ (делимости),
    (f) натуральных чисел от 1 до 100, упорядоченных отношением $\preccurlyeq$:

$$x \preccurlyeq y \Leftrightarrow x = y \text{ или } x + 3 \leqslant y.$$

Если наибольший и (наименьший) элемент существует, укажите его.

18. Указать, какие из следующих утверждений верны, а какие нет.

(a) Если упорядоченное множество X содержит единственный максимальный элемент m, элемент m является наибольшим элементом множества X.

(b) Если упорядоченное конечное множество X содержит единственный минимальный элемент m, элемент m является наименьшим элементом множества X.

(c) Линейно упорядоченное множество содержит наибольший элемент.

19. Бинарное отношение R задано на множестве из шести элементов следующей матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Доказать, что отношение R является отношение порядка. Найти число максимальных элементов и число минимальных элементов.

20. Изобразить диаграмму Хассе

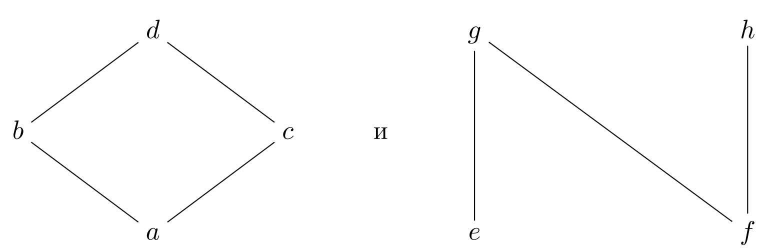
(a) множества делителей числа 18 с отношением делимости,

(b) ч.у.м. $(\mathscr{P}(S), \subseteq)$, где $S = \{a, b, c\}$,

(c) прямого произведения ч.у.м. $X = \{0, 1\}$ с обычным порядком $\leqslant$ и $Y = \{0, 1, 2\}$ с обычным порядком $\leqslant$,

(d) прямого произведения ч.у.м. $(X, \leqslant)$ и $(X, \geqslant)$, где $X = \{1, 2, 3\}$,

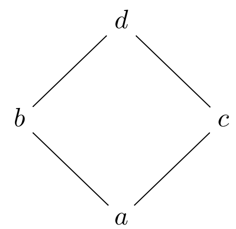
(e) прямого произведения частичных порядков, заданных диаграммами Хассе



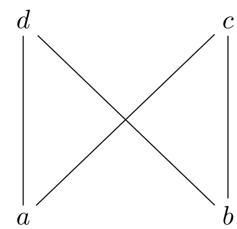
$(X_1, \preccurlyeq_1)$ $(X_2, \preccurlyeq_2)$

(f) Прямого произведения трех копий ч.у.м. $(X, \leqslant)$, где $X = \{0, 1\}$ и $\leqslant$ – стандартный порядок.

(g) Ч.у.м. $(X, \preccurlyeq)$, где $X = \{a, b, c, d\}$, а $\preccurlyeq$ есть пересечение частичных порядков $\preccurlyeq_1$ и $\preccurlyeq_2$, которые заданы диаграммами Хассе

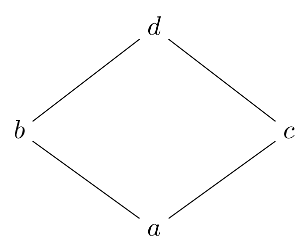


и

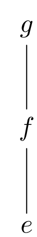


$\preccurlyeq_1$ $\qquad$ $\preccurlyeq_2$

(h) Лексикогрфического произведения ч.у.м. $(X_1, \leqslant_1)$ и $(X_2, \leqslant_2)$ заданных диаграммами Хассе



и



$(X_1, \preccurlyeq_1)$ $\qquad$ $(X_2, \preccurlyeq_2)$

(i) Лексикогрфического произведения ч.у.м. $(X_2, \preccurlyeq_2)$ и $(X_1, \preccurlyeq_1)$ из задачи 20h (первый «сомножитель» теперь $(X_2, \preccurlyeq_2)$, а второй $(X_1, \preccurlyeq_1)$).

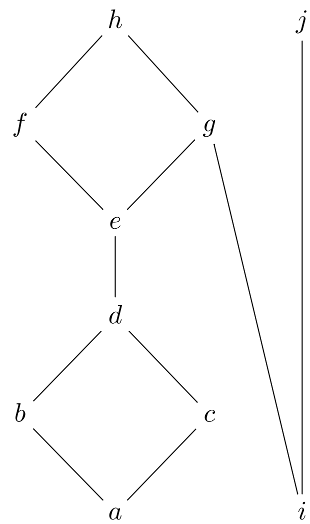
21. Записать в виде последовательности линейный порядок, который есть лексикографическое произведение трех копий обычного отношения $\leqslant$ на множестве $\{0, 1\}$.

22. Пусть
$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$$
есть каноническое разложение натурального числа $n > 1$ в произведение простых чисел (все числа $p_1, p_2, \dots, p_k$ простые, а показатели $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ натуральные). Докажите, что множество делителей числа n, упорядоченное отношением делимости, можно представить в виде прямого произведения линейных порядков на множествах $Y_1, Y_2, \dots, Y_k$, которые содержат соответственно α_1+1, α_2+1, …, α_k+1 элементов.

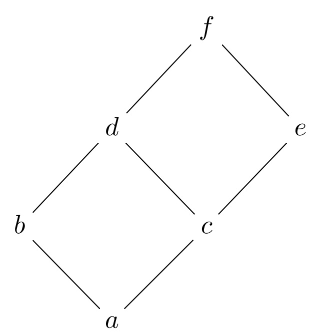
23. Построить какую-нибудь порядковую функцию для частично упорядоченного множества делителей числа 36.

24. Придумайте какое-нибудь продолжение частичного порядка делимости на множестве натуральных чисел до линейного порядка на этом множестве.

25. Построить какую-нибудь порядковую функцию для ч.у.м. $(X, \preccurlyeq)$ с диаграммой Хассе



26. Определить число порядковых функций для ч.у.м. $(X, \preccurlyeq)$ с диаграммой Хассе



27. Найти какую-либо порядковую функцию для прямого произведения линейно упорядоченных множеств $(\{1, 2, 3\}, \leqslant)$ и $(\{1, 2\}, \leqslant)$.

28. Привести пример *конечного* частично упорядоченного множества $(X, \preccurlyeq)$, в котором

    (a) для любых $x, y \in X$ существует верхняя и нижняя грани множества $\{x, y\}$,

(b) для некоторых $x, y \in X$ не существует *точной* верхней и *точной* нижней грани множества $\{x, y\}$ (следовательно, $(X, \preccurlyeq)$ не является решеткой[5]).

29. Доказать, что в любом из числовых множеств $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, упорядоченном обычным отношением $\leqslant$

$$\sup\{x, y\} = \max(x, y) \text{ и } \inf\{x, y\} = \min(x, y).$$

30. Доказать, что в любом из числовых множеств $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, упорядоченном обычным отношением $\geqslant$

$$\sup\{x, y\} = \min(x, y) \text{ и } \inf\{x, y\} = \max(x, y).$$

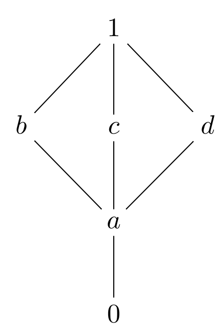
31. Доказать, что в любом множестве $\mathscr{P}(S)$, упорядоченном отношением $\subseteq$

$$\sup\{x, y\} = x \cup y \text{ и } \inf\{x, y\} = x \cap y.$$

32. Доказать, что в множестве $\mathbb{N}$, упорядоченном отношением $|$ (делимости)

$$\sup\{x, y\} = \text{НОК}(x, y) \text{ и } \inf\{x, y\} = \text{НОД}(x, y).$$

33. На рисунке изображена диаграмма Хассе решетки $L = (X, \preccurlyeq)$.



Найти элемент

(a) $(a \vee b) \wedge (c \vee d)$,

(b) $(a \wedge c) \vee (b \wedge d)$,

(c) $\inf\{x \in X : b \vee x = 1\}$,

(d) $\sup\{x \in X : b \wedge x = a\}$

34. Докажите, что прямое произведение решеток снова есть решетка.

35. Докажите, что прямое произведение решеток с нулем и единицей снова есть решетка с нулем и единицей.

[5]и даже полурешеткой.

36. Докажите, что прямое произведение дистрибутивных решеток снова есть дистрибутивная решетка.

37. Докажите, что любая конечная решетка $(X, \preccurlyeq)$ *полна*, т.е. для любого множества $Y \subseteq X$ существуют

$$\sup Y \text{ и } \inf Y.$$

Приведите пример бесконечной решетки с нулем и единицей, в которой это не так.

38. Решетка $(X, \preccurlyeq)$ есть прямое произведение множеств $\{1, 2, \ldots, 10\}$ и $\{1, 2, \ldots, 20\}$, линейно упорядоченных обычным отношением $\leqslant$. Найти элементы

(a) $(a \vee b) \wedge c$, где $a = (3, 5)$, $b = (8, 1)$, $c = (4, 19)$.

(b) $(a \wedge c) \vee (b \wedge d)$, где $a = (2, 7)$, $b = (5, 10)$, $c = (1, 10)$, $d = (8, 16)$.

(c) $\inf\{x \in X : (2, 7) \vee x = (3, 7)\}$,

(d) $\sup\{x \in X : (9, 0) \wedge x = (0, 0)\}$

39. В решетке $(X, |)$ множества делителей числа 120, упорядоченного отношением делимости, найти элементы

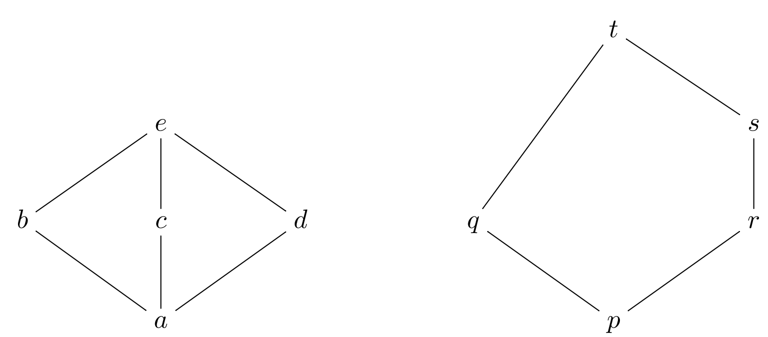
(a) $(15 \vee 10) \wedge 4$.

(b) $(20 \wedge 12) \vee (4 \wedge 30)$.

(c) $\inf\{x \in X : 10 \vee x = 60\}$,

(d) $\sup\{x \in X : 3 \wedge x = 1\}$

40. Докажите, что решетки Diamond и Pentagon



Diamond Pentagon

не дистрибутивны.

41. Доказать, что любое линейно упорядоченное множество есть дистрибутивная решетка.

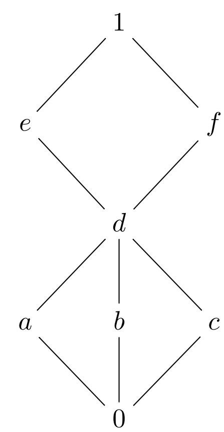
42. Доказать, что множество натуральных чисел $\mathbb{N}$, упорядоченное отношением делимости, есть дистрибутивная решетка.

43. Доказать, что в произвольной решетке L тождества из определения дистрибутивности:

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \text{ и}$$
$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

следуют друг из друга.[6]

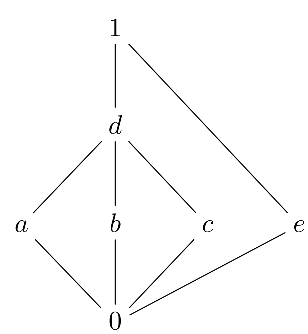
44. В решетке $(X, \preccurlyeq)$ с диаграммой Хассе



Найти все элементы, которые имеют дополнение.

45. Докажите, что в любой решетке с нулем и единицей существуют по крайней мере два элемента, которые имеют дополнение.

46. В решетке $(X, \preccurlyeq)$ с диаграммой Хассе



(a) все дополнения элемента a,

[6] Таким образом, в определении дистрибутивности достаточно оставить одно из них.

(b) все дополнения элемента e,

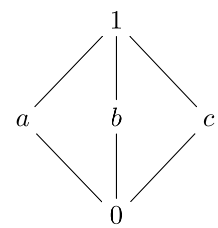
(c) все элементы $x \in X$, которые имеют дополнение,

(d) все элементы $x \in X$, которые имеют единственное дополнение.

47. Решетка $(X, \preccurlyeq)$ есть прямое произведение множеств $\{1, 2, \ldots, 5\}$ и $\{1, 2, \ldots, 10\}$, линейно упорядоченных обычным отношением $\leqslant$. Найти все элементы $x \in X$, которые имеют дополнение.

48. В решетке $(X, |)$ множества делителей числа 60, упорядоченного отношением делимости, найти все элементы $x \in X$, которые имеют дополнение.

49. *Псевдодополнением* элемента y произвольной решетки $L = (X, \preccurlyeq)$ называется элемент $\overline{y} = \sup\{x \in X : y \wedge x = 0\}$, если выполнено $y \wedge \overline{y} = 0$. Показать, что в решетке L с диаграммой Хассе



элемент b не имеет псевдодополнений.

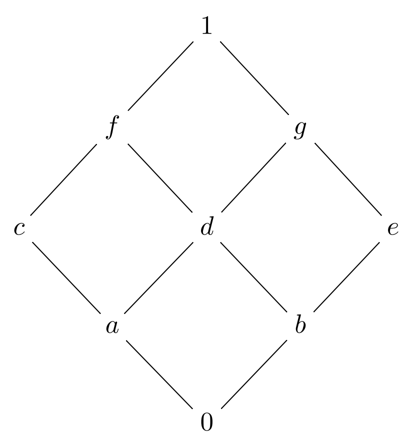
50. Доказать, что в конечной дистрибутивной решетке $(X, \preccurlyeq)$

(a) каждый элемент $x \in X$ имеет псевдодополнение,

(b) для каждого элемента $x \in X$ его дополнение (если оно существует) совпадает с псевдодополнением.

Определение псевдодополнения см. в условии задачи 49.

51. Дана решетка $(X, \preccurlyeq)$ с диаграммой Хассе



(a) Найти псевдодополнение элемента a,

(b) Элемент $\overline{\overline{c} \vee d}$, где символ $^{-}$ обозначает псевдодополнение.

(c) Все элементы $x \in X$, псевдодополнение которых есть 0.

(d) Все элементы, которые имеют дополнение.

Определение псевдодополнения см. в условии задачи 49.

52. Дана решетка $(X, |)$ делителей числа 120 (с отношением делимости).

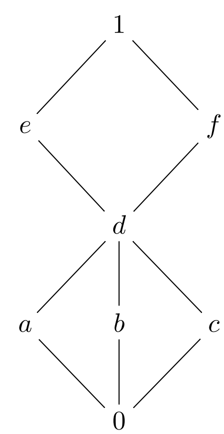
(a) Найти псевдодополнение элемента 10,

(b) Элемент $\overline{\overline{12} \vee 3}$, где символ $^{-}$ обозначает псевдодополнение.

(c) Все элементы $x \in X$, псевдодополнение которых есть число 1 (которое является нулем этой решетки).

Определение псевдодополнения см. в условии задачи 49.

53. В решетке $(X, \preccurlyeq)$ с диаграммой Хассе



Найти все элементы, которые имеют псевдодополнение.
Определение псевдодополнения см. в условии задачи 49.

54. Приведите пример решетки $(X, \preccurlyeq)$ с нулем и единицей, которая

(a) не дистрибутивна, но является решеткой с дополнениями, т.е. для каждого элемента $x \in X$ существует (быть может, не единственное) дополнение $y \in X$,

(b) дистрибутивна, но не является решеткой с дополнениями, т.е. существует элемент $x \in X$, для которого нет дополнения $y \in Y$.

55. Докажите, что линейно упорядоченное множество $(X, \preccurlyeq)$ является булевой решеткой тогда и только тогда X содержит ровно два элемента.

56. Докажите, что прямое произведение булевых решеток снова есть булева решетка.

57. Докажите, что прямое произведение произвольного количества линейных порядков на двухэлементных множествах есть булева решетка.

58. Доказать, что множество делителей числа n является булевой решеткой относительно отношения делимости тогда и только тогда, когда n *свободно от квадратов*, т.е. не делится ни на один квадрат простого числа.

59. Укажите какое-либо значение n, при котором решетка делителей числа n с отношением делимости является булевой решеткой, содержащей 32 элемента.

60. Докажите, что лексикографическое произведение булевых решеток не является булевой решеткой.

61. *Атомом* решетки $L = (X, \preccurlyeq)$ с нулем 0 называется любой ненулевой элемент $x \in X$, удовлетворяющий условию

$$y \prec x \Rightarrow y = 0$$

для любого элемента $y \in X$. Какие элементы являются атомами:

    (a) булевой решетки $(\mathscr{P}(S), \subseteq)$,
    (b) решетки $(\mathbb{N}, |)$,
    (c) прямого произведения двух копий решетки $(\mathbb{N}, \leqslant)$.

62. Доказать, что в любой конечной булевой решетке $(X, \preccurlyeq)$ для любого элемента $x \in X$, который отличен от нуля и не атом решетки $(X, \preccurlyeq)$, выполнено

$$x = \sup\{y \in X : y \prec x\}.$$

Приведите пример не-булевой решетки, в которой это не выполнено.

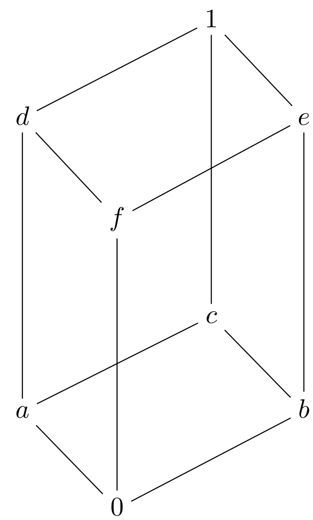
63. *Коатомом* решетки $L = (X, \preccurlyeq)$ с единицей 1 называется любой неединичный элемент $x \in X$, удовлетворяющий условию

$$x \prec y \Rightarrow y = 1$$

для любого элемента $y \in X$. Какие элементы являются коатомами:

    (a) булевой решетки $(\mathscr{P}(S), \subseteq)$,
    (b) решетки делителей числа n с отношением делимости,
    (c) линейной решетки $(\mathbb{N}, \geqslant)$.

64. Дана булева решетка $(X, \preccurlyeq)$ с диаграммой Хассе



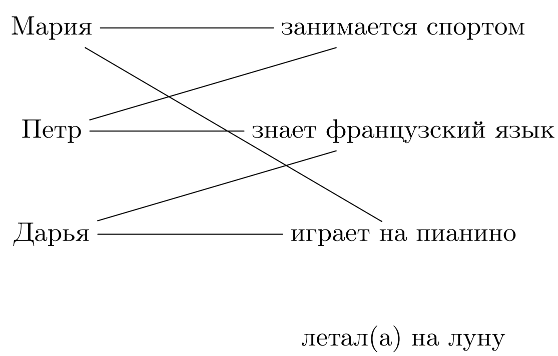
(a) Найти элемент $(a \vee b) \wedge (d \vee e)$,

(b) Найти элемент $\left(\overline{a \vee \overline{c}}\right) \wedge (d \vee c)$,

(c) Указать все атомы,

(d) Построить какую-нибудь порядковую функцию.

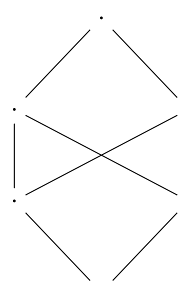
65. Постройте диаграмму Хассе решетки понятий для следующего контекста:



3.0.1 Ответы и указания

1. 1a. линейный порядок, 1b. Частичный порядок, не линейный (1 и 2 не сравнимы), 1c. Частичный порядок, 1d. Нет антисимметричности, 1e. Частичный порядок, не линейный (1 и 3 не сравнимы), 1f. Нет транзитивности, 1g. Линейный порядок, 1h. Нет антисимметричности, 1i. Нет антисимметричности, 1j. Нет транзитивности, 1k. Частичный порядок, не линейный ((1, 2) и (2, 3) не сравнимы), 1l. Частичный порядок, 1m. Линейный порядок. 1n. Нет антисимметричности. 2. 2a. Верно, 2b. Не верно (для контрпримера можно взять в качестве $\preccurlyeq$ отношение равенства на более чем одноэлементном множестве), 2c. Верно, 2d. Верно. Указание: использовать свойство полноты, 2e. Верно, 2f. Не верно (для контрпримера можно взять два разных линейных порядка на двухэлементном множестве), 2g. Не верно, контрпример см. 2f, 2h. Не верно, контрпример см. 2f, 2i. Не верно (для контрпримера можно взять два противоположных линейных порядка на трехэлементном множестве), 2j. Не верно, контрпример см. 2i. 3 Так как $x * x = x$, то $x \preccurlyeq x$, рефлексивность. Если $x \preccurlyeq y$ и $y \preccurlyeq x$, то $x * y = x$ и $y * x = y$, откуда $x = x * y = y * x = y$, антисимметричность. Пусть $x \preccurlyeq y$ и $y \preccurlyeq z$. Тогда $x * y = x$ и $y * z = y$. Получаем: $x * z = (x * y) * z = x * (y * z) = x * y = x$, откуда $x \preccurlyeq z$, транзитивность. Далее, $x * y * x = x * y * y = x * y$, значит, $x * y \preccurlyeq x$ и $x * y \preccurlyeq y$, $x * y$ есть нижняя грань $\{x, y\}$. Пусть z тоже есть нижняя грань $\{x, y\}$. Тогда $z \preccurlyeq x$ и $z \preccurlyeq y$, т.е. $z * x = z$ и $z * y = z$. Тогда $z * x * y = z * y = z$, т.е. $z \preccurlyeq x * y$, $x * y$ есть точная нижняя грань $\{x, y\}$. 4. 4a⇒4c. Пусть $x \preccurlyeq_1 y$. Тогда из 4a следует $x \not\preccurlyeq_2 y$, значит, $y \preccurlyeq_2 x$ из полноты и, далее, $x \preccurlyeq_2^{-1} y$. 4c⇒4b. Из полноты и 4c для любой пары $(x, y) \in X^2$ имеем $x \not\preccurlyeq_1 y \Rightarrow y \preccurlyeq_1 x \Rightarrow x \preccurlyeq_1^{-1} y \Rightarrow x \preccurlyeq_2 y$. 4b⇒4a. От противного. Допустим, $x \prec_1 y$ и $x \prec_2 y$. Тогда $y \not\preccurlyeq_1 x$ и $y \not\preccurlyeq_2 x$ из антисимметричности, противоречие. В общем случае для частичных порядков верны только импликации 4b⇒4a, 4b⇒4c и 4c⇒4a. Контрпримеры. Пусть $X = \{1, 2, 3\}$. Тогда (а) для $\succ_1 = E_X \cup \{(1, 2)\}$ и $\succ_2 = E_X \cup \{(2, 3)\}$ верно 4a, но не верны 4b и 4c, (б) $\succ_1 = E_X \cup \{(1, 2)\}$ и $\succ_2 = E_X \cup \{(2, 1)\}$ верно 4c, но не верно 4b. 5. От противного. Допустим $x \not\preccurlyeq_1 y$ и $y \not\preccurlyeq_1 x$, тогда $x \preccurlyeq_2 y$ и $y \preccurlyeq_2 x$, значит, $x = y$, противоречие. Далее см. 4. 6. Указание: в одну сторону использовать антисимметричность отношения $E_X \cup (X^2 \setminus \preccurlyeq)$. В другую сторону см. 4. 7 Указание: явным образом перечислите все полные антисимметричные отношения на двухэлементном множестве (их всего два). Контрпример для трехэлементного множества $X = \{a, b, c\}$: $E_X \cup \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$. 8. Все делители p^n это числа p^k, $0 \leqslant k \leqslant n$. Они попарно сравнимы относительно делимости. Любые два разных простых делителя числа n не сравнимы относительно делимости. 9. n+1. Доказательство. Множество $\mathscr{P}(S)$ конечно. Пусть $(X_0, X_1, \ldots, X_k)$ $(k < \infty)$ есть цепь. Тогда $0 \leqslant |X_0| < |X_1| < \ldots < |X_k|$, где $|Z|$ есть число элементов (мощность) множества Z. Так как $X_k \subseteq X$, имеем $|X_k| \leqslant n$. Следовательно, числа $|X_0|, |X_1|, \ldots, |X_k|$ составляют подмножество множества $\{0, 1, \ldots, n\}$. Поэтому $k \leqslant n$, так что число элементов цепи не превосходит числа $n + 1$. При любом n можно указать цепь подмножеств множества S, содержащую $n + 1$ элемент. В самом деле, пусть

$S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Положим $X_0 = \varnothing$, $X_1 = \{x_1\}$, $X_2 = \{x_1, x_2\}$, …, $X_n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.10 3. 11. Дуга $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1, x_2 \geqslant 0,\ x_1^2 + x_2^2 = 1\}$. Наименьший элемент $(0, 0)$. Наибольшего нет. Указание: изобразите множество X на плоскости. Максимальными будут все точки (x_1, x_2) полученной фигуры (на самом деле, ее границы), для которых фигура имеет единственное пересечение с прямым углом $\{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1 \geqslant x_1, y_2 \geqslant x_2\}$, минимальными – все точки (x_1, x_2) фигуры (на самом деле, ее границы), для которых фигура имеет единственное пересечение с прямым углом $\{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1 \leqslant x_1, y_2 \leqslant x_2\}$, наибольшей (если она есть) – такая точка (x_1, x_2) фигуры (на самом деле, ее границы), для которой фигура целиком лежит в прямом угле $\{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1 \leqslant x_1, y_2 \leqslant x_2\}$, наименьшей (если она есть) – такая точка (x_1, x_2) фигуры (на самом деле, ее границы), для которой фигура целиком лежит в прямом угле $\{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1 \geqslant x_1, y_2 \geqslant x_2\}$. 12. См. указание к задаче 11. 13. См. указание к задаче 11. 14. См. указание к задаче 11. 15. От противного. Если $\mathbf{x} \in X \setminus \partial X$, то существует окрестность $O_\varepsilon(\mathbf{x})$, лежащая внутри X. В этой окрестности можно выбрать точку $\mathbf{y}$, для которой $\mathbf{x} \preccurlyeq \mathbf{y}$. 16. Минимальные: все числа от 10 до 19, а также 21, 23, 25, 27, 29, 31, 35, 37. Максимальные: все числа от 21 до 40. 17. 17a. Наименьший есть (1), наибольшего нет, 17b. Наибольший есть (1), наименьшего нет, 17c. Наименьший есть (1), наибольшего нет, 17d. Наименьший есть (1), наибольшего нет, 17e. Наименьший есть (1), наибольший есть (100), 17f. Наименьшего нет, наибольшего нет. 18. Верно только второе утверждение. 19. Указание: изобразите отношение R или его диаграмму Хассе. 21. $(0,0,0)(0,0,1)(0,1,0)(0,1,1)(1,0,0)(1,0,1)(1,1,0)(1,1,1)$. 22. Указание. Каждый делитель x числа n имеет каноническое разложение $x = p_1^{s_1^x} p_2^{s_2^x} \ldots p_k^{s_k^x}$, где $0 \leqslant s_1 \leqslant \alpha_1$, $0 \leqslant s_2 \leqslant \alpha_2$, …, $0 \leqslant s_n \leqslant \alpha_k$. Поставим в соответствие каждому делителю x числа n кортеж $\mathbf{s}_x = (s_1^x, s_2^x, \ldots, s_k^x)$. Это соответствие взаимно однозначно. Остается показать, что для всех делителей x, y числа n выполнено $x \,|\, y \Leftrightarrow s_1^x \leqslant s_1^y \wedge s_2^x \leqslant s_2^y \wedge \ldots \wedge s_k^x \leqslant s_k^y$. 23. Указание $x \,|\, y \Rightarrow x \leqslant y$. 26. 4. 28.



. 29. Указание: рассмотрев отдельно два возможных случая: $x \leqslant y$ и $y < x$ и используя определение $\max(x, y) = \begin{cases} y, & \text{если } x \leqslant y \\ x & \text{иначе} \end{cases}$, сначала покажите, что $x \leqslant \max(x, y)$ и $y \leqslant \max(x, y)$ ($\max(x, y)$ есть верхняя грань $\{x, y\}$), а затем $(x \leqslant z \wedge y \leqslant z) \Rightarrow \max(x, y) \leqslant z$. Аналогично для $\min(x, y)$. 30. Аналогично 29. 32. Удобно использовать указание к задаче 22. 33. 33a. b, 33b. a, 33c. a, 33d.

1. 34. Указание: докажите, что $\inf\{(x,y),(x_1,y_1)\} = (\inf\{x,x_1\}, \inf\{y,y_1\})$ и $\sup\{(x,y),(x_1,y_1)\} = (\sup\{x,x_1\}, \sup\{y,y_1\})$. 35. Указание: используйте 34 и, дополнительно, докажите, что 0 и $0'$ есть нули и 1 и $1'$ есть единицы двух решеток, то $(0,0')$ и $(1,1')$ есть, соответственно, ноль и единица их прямого произведения. 36. Указание: непосредственной проверкой. 37. Указание: докажите, что $\inf\{y_1,y_2,\dots,y_k\} = y_1 \wedge y_2 \wedge \ldots \wedge y_k$ и $\sup\{y_1,y_2,\dots,y_k\} = y_1 \vee y_2 \vee \ldots \vee y_k$. Контрпример для бесконечных решеток: $(\mathbb{Q}, \leqslant)$. 38. 38a. $(4,5)$, 38b. $(5,10)$, 38c. $(3,0)$, 38d. $(0,20)$. 39. 39a. 2, 39b. 4, 39c 12, 39d. 40. 40. $b \vee (c \wedge d) = b \vee a = b$, $(b \vee c) \wedge (b \vee d) = e \wedge e = e$, $r \vee (q \wedge s) = r \vee p = r$, $(r \vee q) \wedge (r \vee s) = t \wedge s = s$. 41. Указание: для доказательства дистрибутивности рассмотрите все случаи взаимного расположения элементов x, y, z. 42. Воспользуйтесь задачами 22, 41 и 36. 43. Указание: чтобы доказать, что из первого тождества следует второе, нужно применить первое тождество к элементам $x \vee y$, x и z. 44. 0 и 1. 45. Указание: проверьте, что в решетке с нулем и единицей дополнение нуля есть единица, а дополнение единицы есть ноль. 46. 46a. $\{e\}$, 46b. $\{a,b,c,d\}$, 46c. Все элементы решетки, 46d. $\{0,1,a,b,c,d\}$. 47. $(1,1),(1,10),(5,1),(5,10)$. 48. Все числа вида $2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma$, где $\alpha \in \{0,2\}$, $\beta,\gamma \in \{0,1\}$ (всего восемь элементов). 49. $\sup\{x \in X : b \wedge x = 0\} = \sup\{0,a,c\} = 1$, $b \wedge 1 = b \neq 0$. 50. 50a. Используйте указание к задаче 34 и дистрибутивность. 50b. Пусть $\overline{x}$ есть дополнение x, а x^* есть псевдодополнение x. Поскольку $x \wedge \overline{x} = 0$, $\overline{x} \in \{y \in X : x \wedge y = 0\}$, значит, $\overline{x} \preccurlyeq x^*$. С другой стороны, $x^* \preccurlyeq x^* \wedge 1 = x^* \wedge (x \vee \overline{x}) = (x^* \wedge x) \vee (x^* \wedge \overline{x}) = 0 \vee (x^* \wedge \overline{x}) = x^* \wedge \overline{x} \preccurlyeq \overline{x}$. 51. 51a. e, 51b. 0, 51c. $1, g, f, d$, 51d. $0, 1, c, e$. 52. 52a 3, 52b 8, 52c $30, 60, 120$. 53. $0, d, e, f, 1$. 54. 54a. Напр, Diamond, 54a. Напр, линейный порядок на трехэлементном множестве. 55. Указание: проверить, что линейный порядок на двухэлементном множестве порождает булеву решетку (можно воспользоваться задачами 41 и 45); далее показать, что в линейно упорядоченном множестве ни один элемент, кроме нуля и единицы не имеет дополнения. 56. Указание: воспользоваться задачами 35 и 36; затем показать, что элемент $(\overline{x}, \overline{y})$ есть дополнение элемента (x,y). 57. Указание: использовать задачи 55 и 56. 58. Пусть число n свободно от квадратов. Тогда можно использовать указание к задаче 22 и задачу 56; если число n делится на p^2, покажем, что p не имеет дополнения. Действительно, если НОД$(p,x) = 1$, то x не делится на p, а значит, НОК$(p,x) = px$ не делится на p^2, следовательно, НОК$(p,x) \neq n$. 59. Напр., $n = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2310$. 60. В частном случае возьмем две копии линейного порядка на двухэлементном множестве. Их лексикографическое произведение есть линейный порядок, далее используем задачу 55. В общем случае для булевых решеток $(X_1, \preccurlyeq_1)$ с нулем 0 и единицей 1 и $(X_2, \preccurlyeq_2)$ с нулем $0'$ и единицей $1'$ покажите, что элемент $(0,1')$ их лексикогрфического произведения $(X, \preccurlyeq)$ не имеет дополнения, т.к. $(0,1') \wedge (x,y) = (0,0) \Rightarrow x = 0$. 61. 61a. Одноэлементные подмножества S (*синглетоны*), 61b. Простые числа, 61c. $(2,1),(1,2)$. 63. 62. Обозначим $x' = \sup\{y \in X : y \prec x\}$. Тогда $x' \preccurlyeq x$ по определению точной верхней грани. Допустим, $x' \neq x$. Тогда $x' \wedge x = x' \prec x$. Случай 1: $\overline{x'} \wedge x = x$. Тогда $x \preccurlyeq \overline{x'}$ и, следовательно, $x' \preccurlyeq \overline{x}$ (докажите!). Из этого неравенства и неравенства $x' \preccurlyeq x$ имеем $x' = 0$. Зна-

чит, $\{y \in X : y \prec x\} = \{0\}$, x – атом, противоречие. Случай 2: $\overline{x'} \wedge x \neq x$. Тогда имеем $x' \wedge x \prec x$ и $\overline{x'} \wedge x \prec x$. Значит, $x = (x' \wedge x) \vee (\overline{x'} \wedge x) \preccurlyeq x'$ по определению верхней грани. Следовательно, $x = x'$. Для контрпримера подойдет линейный порядок на трехэлементном множестве. 63a. Подмножества S, содержащие все элементы S, кроме одного, 63b. Числа $\frac{n}{p}$, где p – простой делитель n, 63c. 2. 64. 64a. c, 64b. b, 64c. a, b, f, 64d. Например,

0	a	b	c	d	e	f	1
1	2	3	5	6	7	4	8

.