Введение в дискретную математику. Лекции 9 – 10. Элементы конечной комбинаторики

Н. Л. Поляков

Высшая Школа Экономики, Факультет экономических наук, Москва

2023 г.

Элементы конечной комбинаторики

В узком смысле слова комбинаторика это наука о вычислении мощностей конечных множеств. Далее мы будем говорить только о конечных множествах и не будем каждый раз особо это оговаривать.

Приложения:

- Комбинаторная теория вероятностей.
- Оценки сложности вычислений.
- Изучение свойств некоторых функций натурального и целого аргумента.
- И др.

Вообще говоря, задача вычисления мощности множества может быть весьма сложной. Для ее решения широко используются следующие принципы.

Принцип взаимной однозначности: если существует биекция $f : X \to Y$, то $|X| = |Y|$.

Принцип суммы

Если

$$X \cap Y = \varnothing,$$

то

$$|X \cup Y| = |X| + |Y|.$$

Этот кажущийся чрезвычайно простым принцип имеет несколько эквивалентных, но значительно менее очевидных формулировок.

Формулировка первая:

$$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|. \tag{1}$$

Покажем, что тождество (1) равносильно принципу суммы (если знать, что $|\varnothing| = 0$).

Действительно, в одну сторону импликация очевидна. Если $X \cap Y = \varnothing$, то $|X \cup Y| = |X| + |Y| - |\varnothing| = |X| + |Y|$.

Докажем утверждение в другую сторону, используя тождества алгебры множеств.

Поскольку
$$X = (X \cap \overline{Y}) \cup (X \cap Y)$$
и
$$(X \cap \overline{Y}) \cap (X \cap Y) = \varnothing,$$
имеем
$$|X| = |X \cap \overline{Y}| + |X \cap Y|,$$
откуда
$$|X \cap \overline{Y}| = |X| - |X \cap Y|.$$
С другой стороны,
$$X \cup Y = (X \cap \overline{Y}) \cup Y$$
и
$$(X \cap \overline{Y}) \cap Y = \varnothing,$$
поэтому
$$|X \cup Y| = |X \cap \overline{Y}| + |Y|.$$
Подставив в это равенство в полученное выше выражение для $|X \cap \overline{Y}|$, получим равенство (1).

Равенство (1) можно обобщить до формулы для нахождения мощности произвольного конечного объединения множеств. Сделаем это вначале для объединения $X_1 \cup X_2 \cup X_3$.

$$|X_1 \cup X_2 \cup X_3| = |X_1 \cup (X_2 \cup X_3)| = |X_1| + |X_2 \cup X_3| - |X_1 \cap (X_2 \cup X_3)| =$$

$$|X_1| + |X_2| + |X_3| - |X_2 \cap X_3| - |(X_1 \cap X_2) \cup (X_1 \cap X_3)| =$$

$$|X_1| + |X_2| + |X_3| - |X_2 \cap X_3| - |X_1 \cap X_2| - |X_1 \cap X_3| +$$

$$|(X_1 \cap X_2) \cap (X_1 \cap X_3)| =$$

$$|X_1| + |X_2| + |X_3| - |X_2 \cap X_3| - |X_1 \cap X_2| - |X_1 \cap X_3| + |X_1 \cap X_2 \cap X_3|.$$

Полученное равенство наталкивает на формулу для общего случая (которую легко доказать с помощью *метода математической индукции*)

$$|X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n| = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} |X_i| - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |X_i \cap X_j| +$$

$$\sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} |X_i \cap X_j \cap X_k| - \ldots + (-1)^{n+1} |X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_n|.$$

Эта формула называется формулой *включений и исключений.*

Пример: вычисление функции Эйлера

Функцией Эйлера называется функция $\varphi(n)\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, которая каждому натуральному числу n сопоставляет количество натуральных чисел $m < n$, взаимно простых с n.

Напомним, что два натуральных числа называются взаимно-простыми, если они не имеют общих делителей, отличных от 1. Например, числа 15 и 49 взаимно просты, а 17 и 34 нет.

Замечания.

- С функцией Эйлера связана формула: если НОД$(a, n) = 1$, то

$$a^{\varphi(n)} = 1 \pmod{n}.$$

- Эта формула (и другие свойства функции Эйлера) используются в некоторых популярных алгоритмах шифрования.

Пусть дано разложение

$$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r}$$

числа n в произведение простых чисел $p_1, p_2, \dots, p_r$ $(i \neq j \to p_i \neq p_j)$.

Найдем $\varphi(n)$.

Для этого обозначим символами X_{p_1}, X_{p_2}, ..., X_{p_r} множества всех натуральных чисел меньших числа n, которые кратны соответственно простым числам p_1, p_2, ..., p_r, а символом Y множество всех натуральных чисел меньших числа n, которые имеют хотя бы один общий множитель с числом n, отличный от единицы.

После непродолжительных размышлений можно заметить, что

$$Y = X_{p_1} \cup X_{p_2} \cup \dots \cup X_{p_r}.$$

Легко заметить, что для любого делителя q числа n мощность множества X_q всех натуральных чисел, меньших n, которые делятся на число q равна $\frac{n}{q}$.

Поэтому

$$|X_{p_1}| = \frac{n}{p_1},\ |X_{p_2}| = \frac{n}{p_2}, \ldots, |X_{p_r}| = \frac{n}{p_r},$$

$$|X_{p_1} \cap X_{p_2}| = |X_{p_1 p_2}| = \frac{n}{p_1 p_2},\ |X_{p_1} \cap X_{p_3}| = |X_{p_1 p_3}| = \frac{n}{p_1 p_3},\ \text{и т.д.}$$

Таким образом, формула включений и исключений дает

$$|Y| = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{n}{p_i} - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{n}{p_i p_j} +$$

$$\sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} \frac{n}{p_i p_j p_k} - \ldots + (-1)^{n+1} \frac{n}{p_1 p_2 \ldots p_r}.$$

Общее количество натуральных чисел, меньших числа n равно n. Поэтому

$$\varphi(n) = n - |Y|.$$

После естественных преобразований получим

$$\varphi(n) = n \left(1 - \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{1}{p_i} + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{1}{p_i p_j} - \right.$$

$$\left. \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} \frac{1}{p_i p_j p_k} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{p_1 p_2 \ldots p_r} \right).$$

Длинная сумма в скобках легко преобразуется в произведение (проверьте!), откуда окончательно получаем:

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right).$$

Пример. Найдем $\varphi(168)$. Для этого разложим число 168 на простые множители. $168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$. Поэтому

$$\varphi(168) = 168 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{7}\right) = 168 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{7} = 48.$$

Принцип произведения.

Этот принцип используется для подсчета мощностей некоторых подмножеств прямых произведений $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ каких-либо множеств $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Пусть $Y \subseteq X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$.

Для каждой последовательности

$$(a_1, a_2, \ldots, a_k) \in X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_k$$

будем говорить, что ее *можно продолжить до некоторой последовательности из Y m способами*, если существует ровно m различных элементов b множества X_{k+1}, для которых некоторая последовательность

$$(a_1, a_2, \ldots, a_k, b, c_1, c_2, \ldots, c_{n-k-1})$$

принадлежит множеству Y.

Каждую последовательность

$$(a_1, a_2, \ldots, a_k) \in X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_k,$$

которую можно продолжить до некоторой последовательности из Y положительным числом способов, назовем Y-последовательностью.

Пусть
– пустую последовательность можно продолжить до некоторой последовательности из Y m_1 способами,
– любую Y-последовательность (x_1) можно продолжить до некоторой последовательности из Y m_2 способами,
– любую Y-последовательность (x_1, x_2) можно продолжить до некоторой последовательности из Y m_3 способами,
....
– любую Y-последовательность $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ можно продолжить до некоторой последовательности из Y m_n способами.

Тогда $|Y| = m_1 m_2 \ldots m_n$.

Некоторые важные мощности

Простейшим следствием принципа произведения является равенство

$$|X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n| = |X_1| \cdot |X_2| \cdot \ldots \cdot |X_n|.$$

Множество всех функций из множества X в множество Y часто обозначается символом Y^X. Найдем мощность этого множества. Для этого каким-нибудь способом занумеруем элементы множества X: $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_{|X|}\}$.

Тогда каждой функции $f\colon X \to Y$ можно взаимно-однозначно поставить в соответствие последовательность $(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_{|X|}))$.

Поскольку значение $f(x_i)$, $1 \leqslant i \leqslant |X|$, может быть произвольным, получим

$$|Y^X| = |\underbrace{Y \times Y \times \ldots \times Y}_{|X| \text{ раз}}| = |Y|^{|X|}.$$

Найдем теперь мощность множества всех подмножеств $\mathscr{P}(X)$ множества X.

Для этого каждому подмножеству $Y \subseteq X$ поставим в соответствие его характеристическую функцию $\chi_Y : X \to \{0, 1\}$, которая задается соотношением

$$\chi_Y(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in Y \\ 0 & \text{если } t \notin Y. \end{cases}$$

Очевидно, отображение, которое ставит в соответствие каждому подмножеству Y множества X его характеристическую функцию, есть взаимно-однозначная функция из множества $\mathscr{P}(X)$ в множество $\{0, 1\}^X$.

Поэтому

$$|\mathscr{P}(X)| = |\{0, 1\}|^{|X|} = 2^{|X|}.$$

Найдем теперь мощность множества всех инъективных функций $f\colon X \to Y$, предполагая при этом что $|X| \leqslant |Y|$.

Занумеруем опять элементы множества $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_{|X|}\}$ и поставим в соответствие каждой функции $f\colon X \to Y$ последовательность $(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_{|X|})) \in Y^{|X|}$.

После непродолжительных раздумий заметим, что каждой инъективной функции оказывается взаимно-однозначно сопоставлена последовательность без повторяющихся элементов.

Такие последовательности называются *размещениями*, более конкретно, последовательности элементов n-элементного множества длины k без повторений называются *размещениями из* n *по* k.

Несложно подсчитать количество всех размещений из n по k. Первый член размещения "можно выбрать" $|Y|$ способами, второй $|Y|-1$ способами (т.к. нельзя выбрать тот же элемент, что и первый), третий $|Y|-2$ способами и т.д.

Таким образом, если $|Y|=n$, а $|X|=k$, то число инъективных функций $f\colon X \to Y$ (равное числу размещений из n по k) есть

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Частным случаем размещения является размещение из n по n, которое называется *перестановкой*. Число таких размещений совпадает с числом инъективных (а следовательно, взаимно-однозначных функций $f\colon X \to X$ для любого n-элементного множества X).

Очевидно, оно равно

$$n(n-1)(n-2)\ldots 1 = n!$$

Множество k-элементных подмножеств множества X мощности n называется множеством *сочетаний из n по k*.

Число сочетаний из n по k обозначается символом C_n^k или $\binom{n}{k}$. Числа $\binom{n}{k}$ называются биномиальными коэффициентами.

Для вычисления значения $\binom{n}{k}$ рассмотрим отношение следующее отношение $\sim$ на множестве всех размещений из n по k.

$$(x_1, x_2, \dots x_k) \sim (y_1, y_2, \dots y_k) \Leftrightarrow$$

$$y_1 = x_{\sigma(1)} \wedge y_2 = x_{\sigma(2)} \wedge \dots \wedge y_k = x_{\sigma(k)}$$

для некоторой подстановки σ множества $\{1, 2, \dots, k\}$.

Иначе говоря, пара последовательностей $(x_1, x_2, \dots x_k)$ и $(y_1, y_2, \dots y_k)$ принадлежит отношению $\sim$ тогда и только тогда, когда вторая из них получена из первой перестановкой ее членов.

Легко проверить, что отношение $\sim$ является отношением эквивалентности.

Каждый класс эквивалентности $[\alpha]_\sim$ любого размещения α равномощен числу перестановок k-элементного множества, следовательно, имеет $k!$ элементов.

Кроме того, каждый такой класс эквивалентности $[\alpha]_\sim$ взаимно-однозначно характеризуется k-элементным множеством $\{\alpha_i\colon 1 \leqslant i \leqslant k\}$ членов последовательности α.

Поэтому число классов $[\alpha]_\sim$ равно $\binom{n}{k}$.

Поскольку классы эквивалентности образуют разбиение множества, из сказанного следует, что

$$A_n^k = \sum_{1 \leqslant i \leqslant \binom{n}{k}} k! = \binom{n}{k} \cdot k!,$$

откуда

$$\binom{n}{k} = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k!)}.$$

Дальнейшие свойства биномиальных коэфиициентов

Многие свойства биномиальных коэффициентов легко следуют из определения. Например:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}. \tag{2}$$

Действительно, поставим в соответствие каждому k-элементному Y подмножеству некоторого n-элементного множества X его дополнение $\overline{Y}$.

Очевидно, это отображение есть взаимно-однозначная функция из множества всех k-элементных подмножеств множества X в множество всех его $(n-k)$-элементных подмножеств.

Поэтому эти множества равномощны, что и утверждает равенство (2).

Другой пример

$$\sum_{0\leqslant k\leqslant n}\binom{n}{k}=2^n. \tag{3}$$

Действительно, в левой части этого равенства последовательно подсчитаны все подмножества n-элементного множества X мощности 0, мощности 1 и т.д. до мощности n, т.е. все подмножества множества X вообще. Однако общее их количество, равное выражению в правой части равенства, уже было нами вычислено.

Важной формулой, содержащей биномиальные коэффициенты, является формула бинома Ньютона

$$(1+x)^n=\sum_{0\leqslant k\leqslant n}\binom{n}{k}x^k$$

и ее следствие

$$(x+y)^n=\sum_{0\leqslant k\leqslant n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}.$$

Доказательство формулы бинома Ньютона также может быть получено из комбинаторных соображений. Действительно, рассмотрим выражение

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (1 + x_1)(1 + x_2)\ldots(1 + x_n).$$

При раскрытии скобок (и, при необходимости, изменении порядка сомножителей) будет получена сумма произведений вида $x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}$, где $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ и $0 \leqslant k \leqslant n$ (при $k = 0$ считаем, что это произведение равно единице), причем каждое такое произведение войдет в эту сумму ровно один раз.

Поэтому

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1 + \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j +$$

$$\sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} x_i x_j x_k + \ldots + x_1 x_2 \ldots x_n.$$

Обозначим сумму

$$\sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}$$

символом Σ_k.

Сколько она содержит членов?

Очевидно, столько же, сколько существует упорядоченных по возрастанию последовательностей длины k элементов множества $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Однако каждая такая последовательность взаимно-однозначно определяется множеством ее членов (k-элементным).

Поэтому каждая сумма Σ_k содержит $\binom{n}{k}$ членов.

Положив $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x$, получим $\Sigma_k = \binom{n}{k} x^k$, что сразу влечет формулу бинома.

Из этой формулы можно получить дальнейшие следствия, например,

$$\sum_{0\leqslant k\leqslant n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

Действительно,

$$0 = 0^n = (1+(-1))^n = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} \binom{n}{k} (-1)^k.$$

Взяв полусумму и полуразность этого равенства и равенства (3), получим новые равенства

$$\sum_{0\leqslant 2k\leqslant n} \binom{n}{2k} = \sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant n} \binom{n}{2k+1} = 2^{n-1}.$$

Полиномиальные коэффициенты

Полиномиальные коэффициенты $\binom{n}{k_1,k_2,\ldots,k_m}$, $k_1+k_2+\ldots+k_m=n$ это обобщение биномиальных. Их можно определить следующими способами:

- $\binom{n}{k_1,k_2,\ldots,k_m}$ есть коэффициент при $x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_m^{k_m}$ в многочлене

$$(x_1+x_2+\ldots+x_m)^n :$$

$$(x_1+x_2+\ldots+x_m)^n = \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_m=n} \binom{n}{k_1,k_2,\ldots,k_m} x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_m^{k_m}$$

- $\binom{n}{k_1,k_2,\ldots,k_m}$ есть число последовательностей $a_1 a_2 \ldots a_n$ символов из множества $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$, которые для каждого номера i, $1 \leqslant i \leqslant m$, содержат ровно k_i различных вхождений символов x_i,
- $\binom{n}{k_1,k_2,\ldots,k_m}$ есть число упорядоченных разбиений множества X мощности n на m подмножеств мощностей $k_1, k_2, \ldots, k_m$.

Явная формула

$$\binom{n}{k_1,k_2,\ldots,k_m} = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!}$$

Замечание.

$$\binom{n}{k, n-k} = \binom{n}{n-k, k} = \binom{n}{k}, \quad \binom{n}{1,1,\ldots,1} = n!$$

Подсчеты с помощью биномиальных и полиномиальных коэффициентов

Задача 1. Сколько существует последовательностей, которые содержат 3 символа a, 2 символа b и 2 символа c (и не содержат других символов)?

Подсчеты с помощью биномиальных и полиномиальных коэффициентов

Задача 1. Сколько существует последовательностей, которые содержат 3 символа a, 2 символа b и 2 символа c (и не содержат других символов)?

Ответ.

$$\binom{3+2+2}{3,2,2} = \frac{7!}{3!\cdot 2!\cdot 2!} = \frac{5040}{6\cdot 2\cdot 2} = 210$$

Подсчеты с помощью биномиальных и полиномиальных коэффициентов

Задача 1. Сколько существует последовательностей, которые содержат 3 символа a, 2 символа b и 2 символа c (и не содержат других символов)?

Ответ.

$$\binom{3+2+2}{3,2,2} = \frac{7!}{3!\cdot 2!\cdot 2!} = \frac{5040}{6\cdot 2\cdot 2} = 210$$

Задача 2 Сколькими способами 6 баранов можно распределить по 3 загонам?

Подсчеты с помощью биномиальных и полиномиальных коэффициентов

Задача 1. Сколько существует последовательностей, которые содержат 3 символа a, 2 символа b и 2 символа c (и не содержат других символов)?

Ответ.

$$\binom{3+2+2}{3,2,2} = \frac{7!}{3!\cdot 2!\cdot 2!} = \frac{5040}{6\cdot 2\cdot 2} = 210$$

Задача 2 Сколькими способами 6 баранов можно распределить по 3 загонам?

Решение. Каждое распределение можно однозначно записать в виде последовательности из 6 символов s (баран) и двух символов f (разделитель загонов). Таким образом искомое количество равно

$$\binom{6+2}{6,2} = \binom{8}{2} = \frac{8!}{2!\cdot 6!} = \frac{8\cdot 7}{2} = 28$$

Задача 3. Сколько натуральных решений имеет уравнение

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9?$$

Задача 3. Сколько натуральных решений имеет уравнение

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9?$$

Решение. Каждое решение можно однозначно записать в виде последовательности из 9 символов 1 и трех символов $+$ (x_1 есть число единиц в первом блоке единиц, x_2 есть число единиц во втором блоке единиц и т.д.). Таким образом искомое количество равно

$$\binom{9+3}{9,3} = \binom{12}{3} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 220$$

Задача 3. Сколько натуральных решений имеет уравнение

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9?$$

Решение. Каждое решение можно однозначно записать в виде последовательности из 9 символов 1 и трех символов $+$ (x_1 есть число единиц в первом блоке единиц, x_2 есть число единиц во втором блоке единиц и т.д.). Таким образом искомое количество равно

$$\binom{9+3}{9,3} = \binom{12}{3} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 220$$

Задача 4. Сколько натуральных решений имеет неравенство $x + y \leqslant 11$?

Задача 3. Сколько натуральных решений имеет уравнение

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9?$$

Решение. Каждое решение можно однозначно записать в виде последовательности из 9 символов 1 и трех символов $+$ (x_1 есть число единиц в первом блоке единиц, x_2 есть число единиц во втором блоке единиц и т.д.). Таким образом искомое количество равно

$$\binom{9+3}{9,3} = \binom{12}{3} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 220$$

Задача 4. Сколько натуральных решений имеет неравенство $x + y \leqslant 11$?

Решение. Столько же, сколько натуральных решений имеет уравнение

$$x + y + z = 11$$

(докажите!), т.е.

$$\binom{13}{11,2} = \binom{13}{2} = \frac{13 \cdot 12}{1 \cdot 2} = 78.$$

Задача 5. Сколькими способами можно составить расписание сессии, если она длится неделю (7 дней) и состоит из трех экзаменов? В любой день недели может быть назначено от нуля до трех экзаменов, при этом очередность экзаменов, назначенных в один день, важна.

Задача 5. Сколькими способами можно составить расписание сессии, если она длится неделю (7 дней) и состоит из трех экзаменов? В любой день недели может быть назначено от нуля до трех экзаменов, при этом очередность экзаменов, назначенных в один день, важна.

Решение. Каждое расписание можно однозначно записать в виде последовательности из названий сдаваемых дисциплин (каждая из которых встречается по одному разу) и шести символов разделителей дней. Значит, искомое количество равно

$$\binom{9}{1,1,1,6} = \frac{9!}{1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 6!} = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504.$$

Задача 5. Сколькими способами можно составить расписание сессии, если она длится неделю (7 дней) и состоит из трех экзаменов? В любой день недели может быть назначено от нуля до трех экзаменов, при этом очередность экзаменов, назначенных в один день, важна.

Решение. Каждое расписание можно однозначно записать в виде последовательности из названий сдаваемых дисциплин (каждая из которых встречается по одному разу) и шести символов разделителей дней. Значит, искомое количество равно

$$\binom{9}{1,1,1,6} = \frac{9!}{1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 6!} = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504.$$

Задача 6 Найти коэффициент при x^3 в развернутой записи многочлена $p(x) = (2 - 3x)^5$.

Задача 5. Сколькими способами можно составить расписание сессии, если она длится неделю (7 дней) и состоит из трех экзаменов? В любой день недели может быть назначено от нуля до трех экзаменов, при этом очередность экзаменов, назначенных в один день, важна.

Решение. Каждое расписание можно однозначно записать в виде последовательности из названий сдаваемых дисциплин (каждая из которых встречается по одному разу) и шести символов разделителей дней. Значит, искомое количество равно

$$\binom{9}{1,1,1,6} = \frac{9!}{1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 6!} = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504.$$

Задача 6 Найти коэффициент при x^3 в развернутой записи многочлена $p(x) = (2 - 3x)^5$.

Решение. $p(x) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant 5} \binom{5}{k} (-3x)^k \cdot 2^{5-k}$. Третью степень переменной x содержит только слагаемое

$$\binom{5}{3} (-3x)^3 \cdot 2^{5-3} = \left(\frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot (-3)^3 \cdot 2^2 \right) x^3 =$$
$$= (10 \cdot (-27) \cdot 4) x^3 = -1080x^3$$

Ответ. -1080.

Задача 7. Найти свободное от x слагаемое в развернутой записи выражения $p(x) = \left(x^2 + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^{15}$.

Задача 7. Найти свободное от x слагаемое в развернутой записи выражения $p(x) = \left(x^2 + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^{15}$.

Решение. По формуле бинома Ньютона имеем:

$$p(x) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant 15} \binom{15}{k} \left(x^2\right)^k \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^{15-k} =$$

$$\sum_{0 \leqslant k \leqslant 15} \binom{15}{k} \cdot 2^{15-k} \cdot x^{2k - \frac{15-k}{2}}$$

Для того, чтобы k-ое слагаемое в этой сумме было свободно от переменной x должно выполняться условие:

$$2k - \frac{15-k}{2} = 0,$$

откуда $k = 3$.
Значит, это слагаемое есть

$$\binom{15}{3} \cdot 2^{15-3} = \frac{15!}{12! \cdot 3!} \cdot 2^{12} = 455 \cdot 4096 = 1863680$$

Ответ. 1863680.

Задача 8. Упростить выражение $A = (3 - 2\sqrt{3})^4$.

Задача 8. Упростить выражение $A = (3 - 2\sqrt{3})^4$.

Решение. По формуле бинома Ньютона имеем:

$$A = \sum_{0 \leqslant k \leqslant 4} \binom{4}{k} \cdot 3^k \cdot \left(-2\sqrt{3}\right)^{4-k} =$$

$$= \binom{4}{0} \cdot 3^0 \cdot \left(-2\sqrt{3}\right)^4 + \binom{4}{1} \cdot 3^1 \cdot \left(-2\sqrt{3}\right)^3 +$$

$$+ \binom{4}{2} \cdot 3^2 \cdot \left(-2\sqrt{3}\right)^2 + \binom{4}{3} \cdot 3^3 \cdot \left(-2\sqrt{3}\right)^1 + \binom{4}{4} \cdot 3^4 \cdot \left(-2\sqrt{3}\right)^0$$

Вычисляем:

$$A = 144 - 288\sqrt{3} + 648 - 216\sqrt{3} + 81 =$$

$$= 873 - 504\sqrt{3}$$

Ответ. $873 - 504\sqrt{3}$.

Задача 9. Найти коэффициент при x^3y^2 в развернутой записи многочлена

$$p(x,y) = (2 - x + y)^7.$$

Задача 9. Найти коэффициент при x^3y^2 в развернутой записи многочлена

$$p(x,y) = (2 - x + y)^7.$$

Решение. По формуле полинома имеем:

$$p(x,y) = \sum_{a+b+c=7} \binom{7}{a,b,c} 2^a \cdot (-x)^b \cdot y^c.$$

Сомножитель x^3y^2 содержится только в том слагаемом, в котором $b = 3$ и $c = 2$.

Из условия $a + b + c = 7$ получаем $a = 2$. Поэтому слагаемое, содержащее x^3y^2, есть

$$\left(\binom{7}{2,3,2} 2^2 \cdot (-1)^3\right) x^3y^2 = \left(-\frac{7!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} \cdot 2^2\right) x^3y^2 = -840x^3y^2.$$

Ответ. -840.

Задача 10. Найти коэффициент при x^3 в развернутой записи многочлена

$$p(x) = (3 - 2x + x^2)^5.$$

Задача 10. Найти коэффициент при x^3 в развернутой записи многочлена

$$p(x) = (3 - 2x + x^2)^5.$$

Решение. По формуле полинома имеем:

$$p(x) = \sum_{a+b+c=5} \binom{5}{a,b,c} 3^a \cdot (-2x)^b \cdot \left(x^2\right)^c =$$

$$= \sum_{a+b+c=5} \binom{5}{a,b,c} 3^a \cdot (-2)^b \cdot x^{b+2c}.$$

Третью степень переменной x содержат все те слагаемые, для которых $b + 2c = 3$. Кроме того, у нас есть условие $a + b + c = 5$. Поэтому для установления нужных нам слагаемых необходимо решить в натуральных числах (включая ноль) систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} & & b & + & 2c & = & 3 \\ a & + & b & + & c & = & 5 \end{array} \right.$$

Получаем два решения: $a = 3, b = 1, c = 1$ и $a = 2, b = 3, c = 0$.

Значит, третью степень переменной x содержат слагаемые

$$\binom{5}{3,1,1}3^3 \cdot (-2)^1 \cdot x^3 \text{ и } \binom{5}{2,3,0}3^2 \cdot (-2)^3 \cdot x^3.$$

Поэтому коэффициент при x^3 равен

$$\binom{5}{3,1,1}3^3 \cdot (-2)^1 + \binom{5}{2,3,0}3^2 \cdot (-2)^3 =$$
$$= -20 \cdot 27 \cdot 2 - 10 \cdot 9 \cdot 8 = -1800$$

Ответ. -1800.

Задача 11. Найти свободное от x слагаемое в развернутой записи выражения

$$p(x) = \left(2 - x^2 + \frac{3}{x}\right)^6.$$

Задача 11. Найти свободное от x слагаемое в развернутой записи выражения

$$p(x) = \left(2 - x^2 + \frac{3}{x}\right)^6.$$

Решение. По формуле полинома имеем:

$$p(x) = \sum_{a+b+c=6} \binom{5}{a,b,c} 2^a \cdot (-x^2)^b \cdot \left(\frac{3}{x}\right)^c =$$

$$= \sum_{a+b+c=5} \binom{5}{a,b,c} 2^a \cdot (-1)^b \cdot 3^c \cdot x^{2b-c}.$$

Свободны от переменной x все те слагаемые, для которых $2b - c = 0$. Кроме того, у нас есть условие $a + b + c = 6$. Поэтому для установления нужных нам слагаемых необходимо решить в натуральных числах (включая ноль) систему уравнений

$$\begin{cases} \phantom{a + {}} 2b - c = 0 \\ a + b + c = 6 \end{cases}$$

Получаем три решения:
$a = 0, b = 2, c = 4$,
$a = 3, b = 1, c = 2$,
$a = 6, b = 0, c = 0$.

Значит, свободны от переменной x слагаемые

$$\binom{6}{0,2,4}2^0\cdot(-1)^2\cdot 3^4,\ \binom{6}{3,1,2}2^3\cdot(-1)^1\cdot 3^2 \text{ и } \binom{6}{6,0,0}2^6\cdot(-1)^0\cdot 3^0.$$

Окончательный подсчет:

$$\binom{6}{0,2,4}2^0\cdot(-1)^2\cdot 3^4+\binom{6}{3,1,2}2^3\cdot(-1)^1\cdot 3^2+$$
$$+\binom{6}{6,0,0}2^6\cdot(-1)^0\cdot 3^0=$$
$$=15\cdot 81-60\cdot 8\cdot 9+64=-3041$$

Ответ. -3041.

Сюръективные функции

Подсчитаем число сюръективных функций $f\colon X \to Y$. Это число не равно нулю только если $|Y| \leqslant |X|$.

Пусть $|X| = n$ и $|Y| = m$. Мы уже общее подсчитали общее количество функций $f\colon X \to Y$. Оно равно m^n.

Найдем мощность множества F всех *несюръективных* функций из X в Y.

Для каждого $Z \subseteq Y$ обозначим символом F_Z множество всех функций $f\colon X \to Y$, которые не принимают значения из Z. Очевидно,

$$F_{Z_1} \cap F_{Z_2} \cap \ldots \cap F_{Z_n} = F_{Z_1 \cup Z_2 \cup \ldots \cup Z_n}.$$

Кроме того, множество F_Z это множество всех функций $f\colon X \to Y \setminus Z$.

Поэтому, если $|Z| = k$, то

$$|F_Z| = (m-k)^n.$$

Каждая функция $f \in F$ не принимает некоторого значения $a \in Y$. Пусть $Y = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$. Тогда

$$F = F_{\{a_1\}} \cup F_{\{a_2\}} \cup \ldots \cup F_{\{a_m\}}.$$

Используя формулу включений и исключений имеем

$$|F| = \sum_{1 \leqslant i \leqslant k} |F_{\{a_i\}}| - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant k} |F_{\{a_i, a_j\}}| +$$

$$\sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} |F_{\{a_i, a_j, a_k\}}| - \ldots + (-1)^{m+1} |F_Y|.$$

Количество слагаемых в суммах

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant k}|F_{\{a_i\}}|,\ \sum_{1\leqslant i<j\leqslant k}|F_{\{a_i,a_j\}}|,\ \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}|F_{\{a_i,a_j,a_k\}}|,\ldots,|F_Y|.$$

равно, соответственно, числу одно-, двух-, трех и т.д. элементных подмножеств множества Y, т.е.

$$\binom{m}{1},\binom{m}{2},\binom{m}{3},\ldots,\binom{m}{m},$$

а каждое из слагаемых в этих суммах равно, соответственно,

$$(m-1)^n,(m-2)^n,(m-3)^n,\ldots,(m-m)^n.$$

Значит,

$$|F| = \binom{m}{1}(m-1)^n - \binom{m}{2}(m-2)^n + \binom{m}{3}(m-3)^n - \dots$$

$$\dots + (-1)^m \binom{m}{m-1} 1^n + (-1)^{m+1}\binom{m}{m} 0^n =$$

$$\sum_{1 \leqslant k \leqslant m} (-1)^{m+k+1} \binom{m}{m-k} k^n = \sum_{1 \leqslant k \leqslant m} (-1)^{m+k+1} \binom{m}{k} k^n$$

(в последнем равенстве использовано выведенное раньше соотношение для биномиальных коэффициентов).

Возвращаемся к исходной задаче. Число сюръективных функций $f\colon X \to Y$ равно числу всех функций $f\colon X \to Y$ минус числу всех несюръективных функций $f\colon X \to Y$, т.е.

$$m^n - |F| = m^n - \sum_{1 \leqslant k \leqslant m} (-1)^{m+k+1} \binom{m}{k} k^n =$$

$$\sum_{0 \leqslant k \leqslant m} (-1)^{m+k} \binom{m}{k} k^n.$$

Пример. Если $|X| = n \geqslant 2$, то то число сюръективных функций $f\colon X \to \{1, 2\}$ равно

$$\sum_{0 \leqslant k \leqslant 2} (-1)^{2+k} \binom{2}{k} k^n = -2 + 2^n.$$

Это, впрочем, легко подсчитать и непосредственно: сюръективны все функции $f\colon X \to \{1, 2\}$, кроме двух: одна из них тождественно равна 0, а вторая 1.

Числа Стирлинга второго рода

Числом Стирлинга второго рода $S(n, m)$ называется число всех неупорядоченных разбиений множества X мощности n на m непустых подмножеств.

Каждому такому разбиению можно естественным образом сопоставить сюръективную функцию $f\colon X \to \{1, 2, \ldots, m\}$, которая принимает постоянное значение на каждом элементе этого разбиения.

Например, если $\mathbb{W} = \{X_1, X_2, \ldots, X_m\}$ есть разбиение множества X, то ему можно по этому принципу сопоставить функцию $f\colon X \to \{1, 2, \ldots, m\}$, которая принимает значение 1 на всех элементах множества X_1, значение 2 на всех элементах множества X_2, и т.д.

Такое сопоставление не является однозначным. Например, разбиению $\mathbb{W} = \{X_1, X_2, \dots, X_m\}$ множества X можно по этому принципу сопоставить функцию $f\colon X \to \{1, 2, \dots, m\}$, которая принимает значение m на всех элементах множества X_1, значение $m-1$ на всех элементах множества X_2, и т.д.

Однако любые две функции f и g, сопоставленные одному и тому же разбиению $\mathbb{W}$, отличаются только перестановкой значений:

> существует перестановка σ множества $\{1, 2, \dots, m\}$,
> для которой $f(x) = \sigma(g(x))$ для всех $x \in X$

Поэтому множество всех неупорядоченных разбиений множества X мощности n на m непустых подмножеств взаимно однозначно отображается на множество классов эквивалентности сюръективных функций $f\colon X \to \{1, 2, \dots, m\}$ по отношению $\sim$, заданному формулой

$$f \sim g \leftrightarrow (\exists \sigma \in S_{\{1,2,\dots,m\}})\,(\forall x \in X) f(x) = \sigma(g(x))$$

(Символом S_A часто обозначается множество всех перестановок множества A)

Число элементов в каждом классе эквивалентности совпадает с числом перестановок множества $\{1, 2, \ldots, m\}$, т.е. с $m!$. Поэтому

$$S(n,m) = \frac{1}{m!} \sum_{0 \leqslant k \leqslant m} (-1)^{m+k} \binom{m}{k} k^n$$

Пример. Если $|X| = n \geqslant 2$, то то число разбиений множества X на два непустых множества равно

$$\frac{1}{2!} \sum_{0 \leqslant k \leqslant 2} (-1)^{2+k} \binom{2}{k} k^n = \frac{-2 + 2^n}{2} = 2^{n-1} - 1.$$

Числа Стирлинга первого рода, числа Белла

Числа Стирлинга первого рода $s(n,m)$ это коэффициенты многочлена

$$x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1) = \sum_{0\leqslant m\leqslant n} s(n,m)x^m$$

Числа Стирлинга первого рода $s(n,m)$ в некотором смысле двойственны числам Стирлинга второго рода. Точнее, имеет место формула многочлена

$$x^n = \sum_{0\leqslant m\leqslant n} S(n,m)(x)_m,$$

где $(x)_m = x(x-1)(x-2)\dots(x-m+1)$.

Числом Белла B_n называется число всех неупорядоченных разбиений n-элементного множества X на непустые подмножества.

$$B_n = \sum_{0\leqslant m\leqslant n} S(n,m)$$

Задачи I

1.

Ответы и указания I