Введение в дискретную математику. Лекция 6 (элементы теории графов 1: основные понятия). План-конспект

Н. Л. Поляков

1 Основные определения

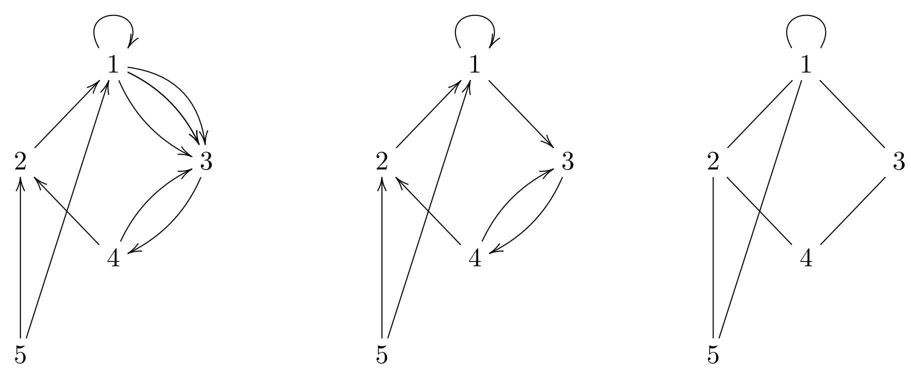
Теория графов это один из самых «классических» разделов дискретной математики. Терминология различных монографий может существенно отличаться. Мы будем использовать следующие определения.

Ориентированным мультиграфом называется тройка (V, G, φ), где V – множество (вершин), G – множество (ребер или дуг), φ – функция из множества G в множество $V \times V$ (которая каждому ребру γ ставит в соответствие пару вершин, являющихся началом и концом ребра γ).

Если функция φ инъективна (т.е. если каждое ребро однозначно определяется своим началом и концом) ориентированный мультиграф $\Gamma = (V, G, \varphi)$ называется просто **ориентированным графом**. Ребра ориентированного графа можно отождествить с (*упорядоченными*) парами вершин, а сам граф просто с парой (V, G), где $G \subseteq V \times V$. Таким образом, ориентированный граф есть, по существу, *бинарное отношение* на множестве вершин V.

Неориентированный граф это пара (V, G), где G есть некоторое подмножество множества $\{X \subseteq V : 1 \leqslant |X| \leqslant 2\}$. Иными словами ребра неориентированного графа это *неупорядоченные пары* вершин.[1] Если угодно, неориентированный граф можно отождествить с ориентированным графом (V, G), множество ребер которого вместе с каждым элементом (v_1, v_2) содержит и элемент (v_2, v_1). Таким образом, неориентированный граф можно рассматривать как *симметричное бинарное отношение* на множестве вершин V.[2]

Графы и мультиграфы традиционно изображают в виде картинок, состоящих из точек и линий. Точки соответствуют вершинам графа, а линии – ребрам. Для ориентированных графов и мультиграфов линии снабжены стрелочками, для неориентированных – нет.



Ориентированный мультиграф Ориентированный граф Неориентированный граф

[1]Здесь к неупорядоченным парам мы относим и пары одинаковых элементов.

[2]Аналогично можно рассматривать более широкое понятие – *неориентированный мультиграф*. Кроме того, изучаются еще и *гиперграфы*: это «графы», в которых «ребра» это подмножества множества вершин фиксированной мощности k или вообще произвольной мощности.

Между ребрами и вершинами графов устанавливается соответствие *инцидентности.*

- Если речь идет об ориентированном мультиграфе (V, G, φ), то ребро $\gamma \in G$ инцидентно вершине $v \in V$, а вершина $v \in V$ инцидентна ребру $\gamma \in G$, если $\varphi(\gamma) = (v_1, v_2) \Rightarrow v \in \{v_1, v_2\}$.
- Если речь идет об ориентированном графе (V, G), то ребро $\gamma \in G$ инцидентно вершине $v \in V$, а вершина $v \in V$ инцидентна ребру $\gamma \in G$, если $\gamma = (v_1, v_2) \Rightarrow v \in \{v_1, v_2\}$.
- Если речь идет о неориентированном графе (V, G), то ребро $\gamma \in G$ инцидентно вершине $v \in V$, а вершина $v \in V$ инцидентна ребру $\gamma \in G$, если $v \in \gamma$.

2 Способы задания графов

Помимо прямого теоретико-множественного описания и рисунка (который тоже с натяжкой может быть признан способом задания графа), граф может быть задан с помощью *матрицы смежности* и *матрицы инцидентности.*

Матрицы смежности. Пусть $\Gamma = (V, G)$ есть конечный ориентированный граф, причем его вершины занумерованы натуральными числами: $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Тогда его матрица смежности есть матрица (a_{ij}) размера $n \times n$ из нулей и единиц, которая определяется следующим образом:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } (v_i, v_j) \in G \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Аналогично, если $\Gamma = (V, G)$ есть конечный неориентированный граф, вершины которого занумерованы натуральными числами: $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, то его матрица смежности есть матрица (a_{ij}) размера $n \times n$ из нулей и единиц, которая определяется так:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } \{v_i, v_j\} \in G \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Замечания.

- Легко заметить, что матрица смежности ориентированного графа $\Gamma = (V, G)$ это просто характеристическая матрица отношения G, а матрица смежности неориентированного графа $\Gamma = (V, G)$ есть характеристическая матрица соответствующего симметричного отношения.
- Для ориентированных мультиграфов Γ можно ввести аналогичное понятие: элемент (a_{ij}) матрицы смежности мультиграфа Γ (с занумерованными вершинами $v_1, v_2, \ldots, v_n$) есть *количество* ребер с началом v_i и концом v_j.

Матрицы инцидентности. Пусть $\Gamma = (V, G)$ есть конечный ориентированный граф без петель (т.е. без ребер, начало и конец которых совпадают), причем его вершины занумерованы натуральными числами: $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, и ребра тоже занумерованы натуральными числами: $G = \{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m\}$. Тогда его матрица инцидентности есть матрица (b_{ij}) размера $n \times m$ из нулей, единиц и минус единиц, которая определяется следующим образом:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } v_i \text{ есть начало ребра } \gamma_j, \text{ т.е. } \gamma_j = (v_i, v) \text{ для некоторого } v \in V \\ -1, & \text{если } v_i \text{ есть конец ребра } \gamma_j, \text{ т.е. } \gamma_j = (v, v_i) \text{ для некоторого } v \in V \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Если граф Γ содержит петли, то состав символов в матрице инцидентности расширяют (например, символом 2) и помещают этот символ на пересечении i-ой строки и j-го столбца, если γ_j есть петля с началом и концом v_i.[3]

Замечание. Матрица инцидентности может быть определена и для мультиграфов совершенно аналогичным образом.

Если $\Gamma = (V, G)$ есть конечный неориентированный граф, вершины и ребра которого занумерованы натуральными числами: $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ и $G = \{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m\}$, то его матрица инцидентности есть матрица (a_{ij}) размера $n \times m$ из нулей и единиц, которая определяется так:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если вершина } v_i \text{ инцидентна ребру } \gamma_j \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

3 Дополнительные определения

В литературе можно найти огромное количество понятий и характеристик, связанных с графами. Постараемся ограничиться минимумом. О мультиграфах мы более говорить не будем. Некоторые понятия можно определить для ориентированных и для неориентированных графов в одних и тех же терминах: мы так и будем делать. Напомним, что терминология может варьировать от монографии к монографии; в книгах можно найти определения, которые несколько отличаются от тех, что даны ниже.

- *Петлей* графа Γ называется его ребро, которое инцидентно только одной вершине графа Γ. Во многих случаях рассматривают только графы без петель.

- *Изолированной вершиной* графа Γ называется вершина, не инцидентная ни одному ребру графа Γ.

- *Висячей вершиной* графа Γ называется вершина, инцидентная только одному ребру графа Γ.

[3] Вообще, символы, используемые в матрицах инцидентности, как правило, не важны (чего не скажешь о матрицах смежности).

- *Степенью* вершины *неориентированного* графа Γ называют количество ребер, которые ей инцидентны. Обозначение: $\deg(v)$. Таким образом, изолированные вершины неориентированного графа это вершины степени ноль, а висячие вершины неориентированного графа это вершины степени один. Определение степени вершины иногда немного корректируют для графов с петлями: каждую петлю считают два раза.

- Для вершин неориентированного графа Γ вводят понятие *(полу)степени захода* (indegree) и *(полу)степени исхода* (outdegree): степень захода вершины v графа Γ есть количество ребер графа Γ с концом v, а степень исхода вершины v графа Γ есть количество ребер графа Γ с началом v. Обозначения: $\operatorname{indeg}(v)$ и $\operatorname{outdeg}(v)$.

4 Формула суммы степенней и лемма о рукопожатиях

Пусть $\Gamma = (V, G)$ есть конечный неориентированный граф без петель. Тогда:

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2 \cdot |G|.$$

Если при вычислении степеней вершин каждую петлю считать два раза, то формула верна и для графов с петлями.

Следствие (лемма о рукопожатиях): в любом неориентированном конечном графе без петель число вершин с нечетной степенью четно.

5 Пути на графе

5.1 Основные определения

Многие задачи теории графов связаны с путями на графах. Пусть $\Gamma = (V, G)$ – граф.

- *Путь* на графе (из вершины a_1 в вершину a_{n+1}) это последовательность
$$v_1\gamma_1v_2\gamma_2\dots v_n\gamma_nv_{n+1},$$
где $1 \leqslant n < \infty$, $v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1} \in V$, $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \in G$, причем,
  - если граф Γ неориентированнный, то $\gamma_i = \{v_i, v_{i+1}\}$ для всех i, $1 \leqslant i \leqslant n$,
  - если граф Γ ориентированнный, то $\gamma_i = (v_i, v_{i+1})$ для всех i, $1 \leqslant i \leqslant n$.[4]

[4]Как всегда, в литературе можно встретить иные определения пути, которые отличаются некоторыми деталями.

- *Длина пути* есть количество входящих в него ребер.
- *Циклический* путь это такой путь $v_1\gamma_1 v_2\gamma_2 \ldots v_{n-1}\gamma_{n-1}v_n,$, что $a_1 = a_{n+1}$.
- Путь называется *цепью*, а циклический путь *циклом*, если все входящие в него ребра (не вершины!) различны.
- *Простая цепь* это цепь, в которой вершины не повторяются. *Простой цикл* это цикл, в котором не повторяются никакие вершины, кроме первой и последней.
- Неориентированный граф называется *связным*, если для любых двух его вершин v_1 и v_2 существует путь из вершины v_1 в вершину v_2.
- В неориентированном графе $\Gamma = (V, G)$ бинарное отношение на множестве вершин

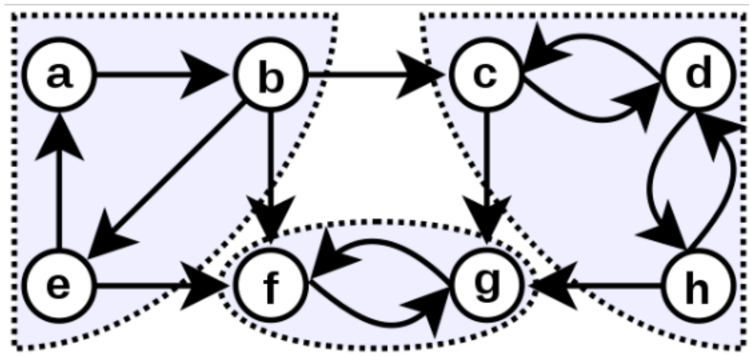
  $$v_1 \sim v_2 \Leftrightarrow v_1 = v_2 \text{ или существует путь из } v_1 \text{ в } v_2$$

  есть отношение эквивалентности. Классы эквивалентности относительно этого отношения (или порождаемые ими подграфы) называются *компонентами связности* графа Γ.
- Ориентированный граф $\Gamma = (V, G)$ называется *слабо связным*, если соответствующий неориентированный граф[5] является связным.
- Ориентированный граф $\Gamma = (V, G)$ называется *сильно связным*, если для любых двух его вершин v_1 и v_2 существует путь из вершины v_1 в вершину v_2 (а, значит, и обратно тоже).
- В неориентированном графе $\Gamma = (V, G)$ бинарное отношение на множестве вершин

  $$v_1 \sim v_2 \Leftrightarrow v_1 = v_2 \text{ или существуют пути из } v_1 \text{ в } v_2 \text{ и из } v_2 \text{ в } v_1$$

  есть отношение эквивалентности. Классы эквивалентности относительно этого отношения (или порождаемые ими подграфы) называются *компонентами сильной связности* графа Γ.

[5] Т.е. граф $\Gamma^* = (V, G^*)$, где $G^* = \{\{x, y\} : (x, y) \in G\}$.



Ориентированный граф с показанными компонентами сильной связности

Замечание. Все вышеперечисленные понятия можно естественным образом определить и для мультиграфов (как ориентированнных, так и неориентированнных).

5.2 Теорема об n-ой степени матрицы смежности графа

Теорема. Пусть Γ есть (ориентированный или неориентированный) граф с занумерованными вершинами $v_1, v_2, \dots, v_k$, A есть его матрица смежности и $B = A^n$. Тогда b_{ij} равно количеству путей длины n из вершины v_i в вершину v_j.

Замечание. Это утверждение верно и для мультиграфов (напомним: элемент b_{ij} матрицы смежности ориентированного мультиграфа с занумерованными вершинами $v_1, v_2, \dots, v_k$ есть количество ребер с началом v_i и концом v_j).

Упражнение 1. Докажите эту теорему (воспользуйтесь методом математической индукции).

5.3 Эйлеровы пути и графы

Пусть $\Gamma = (V, G)$ есть граф

- *Эйлеров путь* на графе Γ это путь, содержащий все ребра графа, причем каждое ровно по одному разу[6].
- *Эйлеров цикл* на графе Γ это циклический путь, содержащий все ребра графа, причем каждое ровно по одному разу[7].

[6]Значит, Эйлеров путь это цепь.
[7]Значит, Эйлеров цикл это действительно цикл.

- Граф Γ называется полуэйлеровым, если на графе Γ есть эйлеров путь и эйлеровым, если на нем есть эйлеров цикл.

Оказывается, существует простой критерий эйлеровости и полуэйлеровости для ориентированных и неориентированных графов. А именно:

- Неориентированный граф без петель и изолированных вершин[8] эйлеров тогда и только тогда, когда он связный и не содержит вершин нечетной степени (теорема Эйлера).

- Неориентированный граф без петель и изолированных вершин полуэйлеров тогда и только тогда, когда он связный и содержит не более двух вершин нечетной степени (а, значит, одну или ни одной).

- Ориентированный граф без петель и изолированных вершин эйлеров тогда и только тогда, когда он сильно связный и для каждой его вершины v выполнено:
$$\operatorname{indeg} v = \operatorname{outdeg} v$$

- Ориентированный граф без петель и изолированных вершин полуэйлеров тогда и только тогда, когда он либо эйлеров, либо слабо связный и для вершин выполнено следующее свойств: существуют такие вершины u и w, что
$$\operatorname{indeg} u = \operatorname{outdeg} u + 1 \text{ и } \operatorname{indeg} w = \operatorname{outdeg} w - 1,$$
а для остальных вершин v имеет место равенство
$$\operatorname{indeg} v = \operatorname{outdeg} v.$$

Понятие эйлеровости можно легко распространить на мультиграфы, причем все утверждения выше остаются в силе.

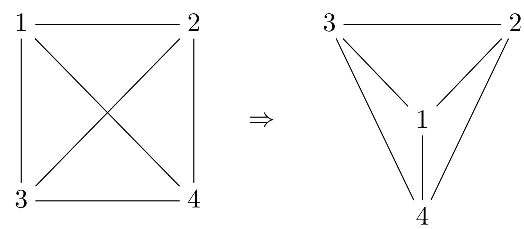
6 Планарные графы

Неориентированный граф без петель называется *планарным*, если его можно изобразить на плоскости так, чтобы его ребра не пересекались[9]. Надо понимать, что планарность есть достаточно нетривиальное понятие: если граф нарисован на плоскости с пересекающимися вершинами, это еще не

[8] Добавление и исключение петель и изолированных вершин, очевидно, не влияет на эйлеровость и полуэйлеровость.

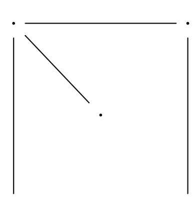
[9] Мы не будем пытаться строго определить это понятие.

значит, что его нельзя перерисовать без пересечений.



В планарных графах помимо ребер и вершин появляется новый объект: *грани* (или области). Грань это часть плоскости, ограниченная последовательностью ребер[10]. Следует понимать, что

- Каждая грань ограничена не менее, чем тремя ребрами.
- «Внешняя часть» планарного графа это тоже грань. Таким образом, грани планарного графа образуют разбиение плоскости.
- Иногда для подсчета числа ребер, ограничивающих грань, некоторые ребра приходится считать дважды:



Формула Эйлера. Пусть (V, G) есть планарный граф. Тогда

$$\text{В} - \text{Р} + \Gamma = 2,$$

где В есть число вершин, Р есть число ребер, а Г есть число граней графа.

Следствие. Любой планарный граф удовлетворяет неравенству

$$\text{Р} \leqslant 3\text{В} - 6.$$

Упражнение 2. Докажите.

[10]Снова не будем пытаться дать формальное определение.

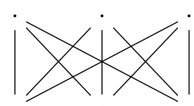
Полный неориентированный граф с n вершинами обозначается символом K_n (полным неориентированным графом называется граф, в котором любые две различные вершины соединены ребром).

Следствие. Граф K_5 не планарный.

Упражнение 3. Докажите.

Неориентированный граф (V, G) называется *двудольным*, если множество его вершин V можно представить в виде объединения $V_1 \cup V_2$ непересекающихся множеств («доль») V_1 и V_2, таких, что граф не содержит ребер, которые инцидентны вершинам, принадлежащим одному и тому же из множеств V_1 и V_2, т.е. $G \subseteq \{\{x, y\} : x \in V_1, y \in V_2\}$. Символом $K_{n,m}$ обозначается двудольный граф с долями V_1 и V_2, содержащими n и m элементов, и имеющий максимально возможное число ребер, т.е. граф $(V_1 \cup V_2, G)$, удовлетворяющий условиям $V_1 \cap V_2 = \varnothing$, $|V_1| = n$, $|V_2| = m$ и $G = \{\{x, y\} : x \in V_1, y \in V_2\}$.

Упражнение 4. Докажите, что граф $K_{3,3}$ удовлетворяет доказанному неравенству, однако, не планарный (задача о трех домах и трех колодцах). Указание: как связана двудольность с числом ребер, ограничивающих каждую грань?



Теорема Понтрягина-Куратовского (теорема Вагнера). Граф Γ планарный тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, которые можно стянуть[11] к графу K_5 или $K_{3,3}$.

7 Раскраски

Классические задачи теории графов – задачи о раскрасках. Далее везде под словом «граф» будем подразумевать неориентированный граф без петель.

- *Вершинной раскраской* графа $\Gamma = (V, G)$ называется произвольная функция φ из множества вершин V в множество C (цветов).
- *Правильной вершинной раскраской* графа $\Gamma = (V, G)$ называется раскраска φ, для которой «соседние» вершины окрашены в разные цвета, т.е. удовлетворяющие условию

$$\{v_1, v_2\} \in G \Rightarrow \varphi(v_1) \neq \varphi(v_2).$$

[11] О стягивании графов см. литературу.

- *Хроматическим числом* графа $\Gamma = (V, G)$ называется минимальное число n, для которого существует правильная вершинная раскраска $\varphi : V \to C$ графа Γ с множеством (цветов) C мощности n.

- *Реберной раскраской* графа $\Gamma = (V, G)$ называется произвольная функция φ из множества ребер G в множество C (цветов).

- *Правильной реберной раскраской* графа $\Gamma = (V, G)$ называется раскраска φ, для которой «соседние» ребра окрашены в разные цвета, т.е. удовлетворяющие условию

$$\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\} \in G \Rightarrow \varphi(\{v_1, v_2\}) \neq \varphi(\{v_2, v_3\}).$$

- *Хроматическим индексом* графа $\Gamma = (V, G)$ называется минимальное число n, для которого существует правильная реберная раскраска $\varphi : V \to C$ графа Γ с множеством (цветов) C мощности n.

Некоторые классические результаты.

1. Хроматическое число любого планарного графа не более четырех (см. в литературе «**Проблема четырех красок**»).

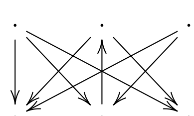
2. **Теорема Визинга**. Хроматический индекс любого конечного графа есть либо $\Delta(\Gamma)$, либо $\Delta(\Gamma) + 1$, где $\Delta(\Gamma)$ есть максимальная степень вершин графа Γ.

3. **Теорема Рамсея**[12]. При любой конечной реберной раскраске бесконечного полного графа получится бесконечный полный одноцветный подграф. Существует и конечная версия этой теоремы: при любой раскраске «достаточно большого» полного конечного графа получится достаточно большой полный одноцветный подграф (подробнее см. литературу).

8 Задачи

1. Упражнения 1 – 4 из лекции (те, которые не разобраны на семинаре).

2. На рисунке изображен ориентированный граф:



   (a) Занумеруйте каким либо образом его вершины и запишите матрицу его смежности.

[12]Правильное произношение фамилии автора этой теоремы: Рэмси. Однако, в отечественной литературе закрепился термин «теорема Рамсея»

(b) Занумеруйте каким либо образом его вершины и ребра и запишите матрицу его инцидентности.

3. Ориентированный граф Γ с вершинами $1, 2, 3, 4, 5$ (занумерованными в естественном порядке) задан своей матрицей смежности:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Изобразите этот граф в виде рисунка.

(b) Занумеруйте каким либо образом его ребра и, используя исходную нумерацию вершин, запишите матрицу его инцидентности.

4. Ориентированный граф Γ с вершинами $1, 2, 3, 4, 5$ и ребрами a, b, c, d, e, f (занумерованными в естественном порядке) задан своей матрицей инцидентности:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Изобразите этот граф в виде рисунка.

(b) Используя исходную нумерацию вершин, запишите матрицу его инцидентности.

5. Каким образом меняется матрица смежности графа с занумерованными вершинами при выборе новой нумерации вершин?

6. В группе 30 человек. Может ли так быть, что 9 из них имеют по 3 друга (в этой группе), 11 по 4 друга (в этой группе) и 10 по 5 друзей (в этой группе).

7. Приведите пример неориентированного графа без петель (или докажите, что его не существует), степени вершин которого равны

(a) $(1, 1, 1, 2, 3, 3, 4)$;

(b) $(1, 1, 1, 2, 3, 3, 3)$;

(c) $(1, 1, 3, 3, 3, 3, 6)$;

(d) $(4, 4, 4, 4, 4, 5, 5)$;

(e) $(1, 1, 2, 2, 2, 6, 6)$;

(f) $(1, 2, 2, 2, 5, 5, 5)$;

(g) $(1, 1, 2, 2, \ldots, n, n)$.

8. Какое максимальное число ребер может содержать:

- Неориентированный граф с n вершинами.
- Неориентированный граф без петель с n вершинами.
- Ориентированный граф с n вершинами.
- Ориентированный граф без петель с n вершинами.

9. Решите задачу 7, используя следующую *теорему Эрдёша-Галаи*: невозрастающая последовательность $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ натуральных чисел является последовательностью степеней вершин некоторого неориентированного графа без петель тогда и только тогда, когда

   (a) $\sum\limits_{i=1}^{n} d_i$ четная,

   (b) $d_1 \leqslant n-1$,

   (c) $\sum\limits_{i=1}^{k} d_i \leqslant k(k-1) + \sum\limits_{i=k+1}^{n} \min\{d_i, k\}$ для всех k, $1 \leqslant k \leqslant n-1$.

10. Докажите, что в неориентированном графе существуют, по крайней мере, 2 вершины, степени которых равны.

    Верно ли аналогичное утверждение для ориентированного графа? Степени вершин равны, если равны обе полустепени.

11. Неориентированный граф без петель называется *регулярным* степени k, если степени всех его вершин равны k.

    (a) Сколько ребер в регулярном графе степени k на n вершинах?

    (b) Докажите, что такой граф существует, если и только если $k \leq n-1$ и nk четно.

12. $(*)$ Докажите, что неориентированный граф без петель регулярный тогда и только тогда, когда вектор $(1, 1, \ldots, 1)$ есть один из собственных векторов его матрицы смежности. При этом степень k такого графа есть собственное число его матрицы смежности, соответствующее вектору $(1, 1, \ldots, 1)$.

13. В графе все вершины имеют степень 3. Докажите, что в нем есть цикл.

14. Ориентированный граф с вершинами $1, 2, 3, 4, 5$, занумерованными в естественном порядке, задан матрицей смежности

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

    Сколько существует путей длины 6 из вершины 1 в вершину 5?

15. Сколько путей длины k существует из одной вершины в другую в графе K_n, если (а) эти вершины различны, (б) если эти вершины одинаковы?

16. Неориентированный граф B_n называется булевым n-мерным кубом, если его вершины это последовательности из нулей и единиц, а ребра соединяют в точности те последовательности, которые отличаются ровно в одной позиции. Для каких n в графе B_n существует эйлеров цикл?

17. Вершины графа Γ — двоичные слова длины $n \geqslant 2$. Вершины соединены ребром, если они отличаются ровно в двух разрядах. При каких n граф G будет связным?

18. Неориентированный граф с вершинами $1, 2, 3, 4, 5$, занумерованными в естественном порядке, задан матрицей смежности

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Найдите все его компоненты связности.

19. Ориентированный граф с вершинами $1, 2, 3, 4, 5$, занумерованными в естественном порядке, задан матрицей смежности

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Найдите все его компоненты сильной связности.

20. Для каких чисел n булев куб B_n планарный?

21. Докажите, что каждый регулярный граф степени больше или равной шести не планарный. Существует ли планарный регулярный граф степени 5?