Введение в дискретную математику. Лекция 1 (элементы теории множеств 1). План-конспект

Н. Л. Поляков

1 Введение: особенности предмета "Дискретная математика".

2 Язык множеств, отношений и функций как универсальный язык описания формальных моделей.

С точки зрения классической фундаментальной математики основными неопределимыми понятиями являются понятия *множества* и *принадлежности*, а все остальные математические объекты можно описать на языке теории множеств. С другой стороны в естественных и общественных науках встречаются модели, которые представляют собой достаточно сложные теоретико-множественные конструкции.

Примеры

(1) Фундаментальная математика следующим образом определяет натуральные числа:

- $0 = \varnothing$,
- $1 = 0 \cup \{0\} = \{\varnothing\}$,
- $2 = 1 \cup \{1\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$,
- и т.д. (для полноты картины надо еще определить все множество натуральных чисел).

(2) Некоторые модели теории принятия решений имеют на входе следующую систему понятий:

- A – множество альтернатив,
- $\mathscr{P}_+(A)$ – множество всех непустых подмножеств множества альтернатив,
- $\mathfrak{C}(A)$ – множество всех *функций выбора* на множестве A, т.е. таких функций $\mathfrak{c} : \mathscr{P}_+(A) \to A$, что $\mathfrak{c}(p) \in p$ для всех $p \in \mathscr{P}_+(A)$,
- $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ – множество участников,
- $\mathcal{F}(A)$ – множество всех *правил агрегирования*, т.е. функций $f : (\mathfrak{C}(A))^n \to \mathfrak{C}(A)$,
- и т.д.

3 Формальный язык и основные обозначения. Аксиома объемности. Простейшие операции над множествами

3.1 Теоретическая часть

Множества обычно обозначаются буквами латинского алфавита, возможно с индексами, например A, B, X_1, x, y_{12}, и т.п., а отношение принадлежности – символом «$\in$». Например, запись $x \in A$ обозначает, что множество x принадлежит (является *элементом*) множества A. Для записи более сложных утверждений о множествах часто используют *формальный язык*, который, кроме, кроме того, включает символ равенства «$=$», логические связки

$\vee$ (дизъюнкция; содержательно, *или*),

$\wedge$ (конъюнкция; содержательно, *и*),[1]

$\neg$ (отрицание; содержательно, *не верно, что* ...),

$\to$ (импликация; содержательно, *если ..., то*),

$\leftrightarrow$ (равносильность; содержательно, *тогда и только тогда*).

и кванторы

$\forall$ (квантор произвольности; содержательно, *для любого*),

$\exists$ (квантор существования; содержательно, *существует*).

Например, запись

$$\forall x \exists y ((x \in y) \vee (\neg x = y))$$

обозначает: *для каждого (множества) x существует (множество) y, такое что x принадлежит y или неверно, что x равно y.*

Кроме того, широко распространены следующие обозначения:

- $\varnothing$ – *пустое множество.* Пустое множество это множество, которое не содержит ни одного элемента;
- $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ – множество, которое содержит элементы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и не содержит никаких других элементов, например $\{1, 2, 3\}$;
- $x \subseteq y$ – множество x есть *подмножество* множества y. Это обозначение есть сокращенная запись формулы

$$\forall z (z \in x \to z \in y),$$

[1] Символы $\vee$ и $\wedge$ широко используются в математике по меньшей мере в трех смыслах: для обозначения логических связок, булевых функций и операций в решетках. Эти смыслы следует различать. Обычно из контекста ясно, в каком смысле употребляются эти символы.

которая обозначает, что каждый элемент множества x есть и элемент множества y;

- $\{x\colon \varphi(x)\}$ – множество всех элементов, удовлетворяющих свойству $\varphi(x)$. Свойство $\varphi(x)$ обычно выражается формулой формального языка теории множеств или какого-нибудь расширенного языка, например $\{x : \neg x = x\}$. Кроме того, формула $\varphi(x)$ может содержать дополнительные параметры, например, $\{z : z \in x \vee z \in y\}$;

- $\{x \in y\colon \varphi(x)\}$ – множество всех элементов множества y, удовлетворяющих свойству $\varphi(x)$. Это сокращение для записи $\{x\colon (x \in y) \wedge \varphi(x)\}$.

Вместо выражений $\neg x \in y$, $\neg x \subseteq y$, $\neg x = y$ часто для простоты пишут соответственно $x \notin y$, $x \nsubseteq y$, $x \neq y$, а вместо

$$\forall x(x \in y \to \varphi(x))$$

записывают

$$(\forall x \in y)\, \varphi(x).$$

Замечание. Не все выражения вида

$$\{x\colon \varphi(x)\}$$

являются корректным заданием множества. Например, записи

$$\{x : x \notin x\}$$

нельзя непротиворечивым образом придать какого-либо значения в универсуме множеств (*парадокс Рассела*).

Используя только определение отношения включения можно логически вывести следующие его свойства: для всех множеств x, y, z

1. $\varnothing \subseteq x$,

2. $x \subseteq x$ (*рефлексивность*),

3. $(x \subseteq y \wedge y \subseteq z) \to x \subseteq z$ (*транзитивность*).

Поскольку понятия множества и отношения принадлежности являются основными, они не определимы через другие понятия. Поэтому для дальнейших корректных рассуждений о множествах требуются *аксиомы*. Наиболее важной является так называемая *аксиома объемности* (или *экстенсиональности*), которая записывается так:

$$\forall x \forall y\, ((\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y)) \to x = y),$$

или, с использованием символа $\subseteq$, так: для всех множеств x, y

4. $(x \subseteq y \wedge y \subseteq x) \to x = y$ (*антисимметричность*).

Содержательно, аксиома объемности означает, что каждое множество множество однозначно определяется своими элементами. В частности, из нее следует, что множество $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, заданное перечислением своих элементов, совпадает с любым множеством, которое задано перечислением тех же элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ в другом порядке и с повторениями. Например, множества $\{1, 1, 2\}$ и $\{2, 1\}$ совпадают. Аксиома объемности является универсальным средством для доказательства равенств или тождеств в теории множеств.

Большая часть других аксиом постулируют существование некоторых множеств и возможность применять к множествам некоторые операции без (явного) риска получить какой-нибудь парадоксальный объект. Простейшими операциями над множествами являются операции:

- объединения: $x \cup y = \{z\colon z \in x \vee z \in y\}$,
- пересечения: $x \cap y = \{z\colon z \in x \wedge z \in y\}$,
- разности (относительного дополнения): $x \setminus y = \{z\colon z \in x \wedge z \notin y\}$,
- симметрической разности $x \bigtriangleup y = (x \setminus y) \cup (y \setminus x)$.

Если заранее задать какое-либо непустое *универсальное* множество Ω, то можно определить одноместную операцию (абсолютного) дополнения:

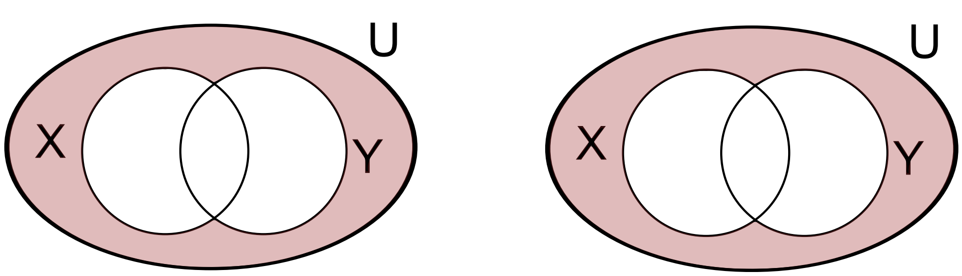
$$\overline{x} = \Omega \setminus x = \{z \in \Omega\colon z \notin x\}.$$

Теоретико-множественным *тождеством* называется равенство с переменными в языке теории множеств, которое истинно при любых значениях переменных, например $x \setminus x = y \setminus y$. Для проверки тождеств часто используют *диаграммы Эйлера-Венна*. Следует понимать, что статус диаграммы Эйлера-Венна примерно такой же, как статус чертежа в геометрии: если диаграмма подсказывает, что некоторое тождество верно, это тождество все равно надо доказывать, например, с использованием аксиомы объемности (для тождеств, использующих только простейшие операции есть и другие способы, см. следующие разделы).

Пример 1. Доказать, что для любых подмножеств X, Y универсального множества U выполнено

$$\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cap \overline{Y}.$$

Изобразим диаграмму Эйлера-Венна левой и правой части.



Видно, что картинка получилась одна и та же, но тождество, тем не менее требует доказательства. Докажем его с помощью аксиомы объемности.

Во-первых, докажем включение

$$\overline{X \cup Y} \subseteq \overline{X} \cap \overline{Y}.$$

1. Пусть z – произвольный элемент множества $\overline{X \cup Y}$. Тогда по определению операции *дополнение* z есть такой элемент универсального множества U, что $z \notin X \cup Y$.
2. Если предположить, что $z \in X$, то по определению операции *объединение* выполнено: $z \in X \cup Y$. Противоречие. Поэтому $z \notin X$.
3. Аналогично получим $z \notin Y$.
4. Тогда $z \in \overline{X}$ и $z \in \overline{Y}$ (по определению операции *дополнение*).
5. Следовательно, $z \in \overline{X} \cap \overline{Y}$ (по определению операции *пересечение*).

Включение

$$\overline{X \cup Y} \subseteq \overline{X} \cap \overline{Y}$$

доказано. Докажем теперь обратное включение.

1. Пусть z – произвольный элемент множества $\overline{X} \cap \overline{Y}$. Тогда $z \in \overline{X}$ и $z \in \overline{Y}$ по определению операции *пересечение.*
2. Значит, $z \notin X$ и $z \notin Y$ по определению операции *дополнение* (при этом, конечно, $z \in \Omega$).
3. Допустим, $z \in X \cup Y$. Тогда по определению операции *объединение* имеет место один из двух случаев:$z \in X$ или $z \in Y$. Оба эти случая противоречат предыдущему пункту. Значит, поэтому $z \notin X \cup Y$.
4. Следовательно, $z \in \overline{X \cup Y}$ по определению операции *дополнение.*

Доказано включение

$$\overline{X} \cap \overline{Y} \subseteq \overline{X \cup Y}.$$

Теперь тождество

$$\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cap \overline{Y}$$

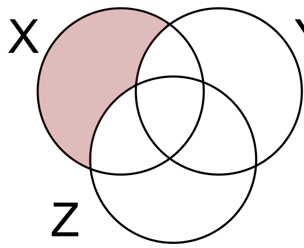
следует из аксиомы объемности.

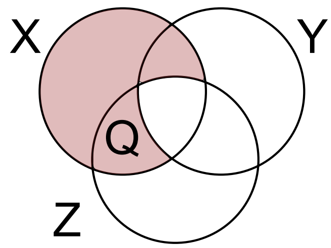
С другой стороны, с помощью диаграмм Эйлера-Венна легко подбирать контрпримеры к неверным тождествам.

Пример 2. Опровергнуть (привести контрпример) *неверное* тождество

$$X \setminus (Y \cup Z) = (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z).$$

Изображаем диаграммы Эйлера-Венна левой и правой части этого неверного тождества.





Видно, что картинки различаются двумя из трех закрашенных областей. Таким образом, для построения контрпримера надо выбрать множества X, Y, Z так, чтобы по крайней мере одна из областей, закрашенных на правом рисунке, но не закрашенных на левом, оказалась не пустой. Выберем, например, область

$$Q = (X \cap Z) \setminus Y.$$

Для обеспечения условия $Q \neq \varnothing$ достаточно положить

$$X = Z = \{0\} \text{ и } Y = \varnothing$$

Непосредственным подсчетом убеждаемся в том, что эти множества действительно дают контрпример:

$$X \setminus (Y \cup Z) = \{0\} \setminus \{\{0\} \cup \varnothing\} = \varnothing,$$

но

$$(X \setminus Y) \cup (X \setminus Z) = (\{0\} \setminus \{0\}) \cup (\{0\} \setminus \varnothing) = \{0\} \neq \varnothing.$$

3.2 Задачи

1. Даны множества
$$A = \{a, b, c\} \text{ и } B = \{b, c, d, e\}$$
Найти множества
   (a) $A \cap B$,
   (b) $A \cup B$,
   (c) $A \setminus B$,
   (d) $B \setminus A$,
   (e) $A \triangle B$.

2. Даны множества
$$A = \{a, b, c\},\ B = \{b, c, d, e\} \text{ и } C = \{a, d, e, f, g\}.$$
Найти множество $(A \setminus C) \cup (C \setminus B)$.

3. Даны множества
$$A = \{1, 2, 5, 7\},\ B = \{2, 3, 5, 9\} \text{ и } C = \{1, 3, 8\}.$$
Найти множество $(A \cap C) \setminus (B \triangle C)$.

4. Даны подмножества
$$A = \{2, 3, 4\},\ B = \{1, 3, 4, 5\} \text{ и } C = \{1, 2, 4, 6\}$$
универсального множества
$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$
Найти множество $\overline{A \cup B} \triangle (\overline{C} \setminus B)$.

5. Даны множества
$$A = \{-7, -5, -4, -1, 2, 5, 7\} \text{ и } B = \{-6, -5, -1, 1, 3, 5, 9\}.$$
Найти наименьшее положительное число, принадлежащее пересечению множеств A и B.

6. Даны числовые множества
$$2\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{N} : (\exists k \in \mathbb{N})\, n = 2k\} \text{ и}$$
$$3\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{N} : (\exists k \in \mathbb{N})\, n = 3k\}.$$
Описать множество $2\mathbb{N} \cap 3\mathbb{N}$.
Здесь $\mathbb{N}$ *есть множество всех натуральных чисел,* $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$.

7. Даны числовые множества

$$4\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{N} : (\exists k \in \mathbb{N})\, n = 4k\} \text{ и}$$
$$6\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{N} : (\exists k \in \mathbb{N})\, n = 6k\}.$$

Описать множество $4\mathbb{N} \cap 6\mathbb{N}$.
Здесь $\mathbb{N}$ *есть множество всех натуральных чисел,* $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$.

8. Даны числовые множества

$$3\mathbb{Z} = \{n \in \mathbb{Z} : (\exists k \in \mathbb{Z})\, n = 3k\} \text{ и}$$
$$X = \{z \in \mathbb{Z} : |z| \leqslant 7\}.$$

Найти множество $3\mathbb{Z} \cap X$.
Здесь $\mathbb{Z}$ *есть множество всех целых чисел,* $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.

9. Даны числовые множества

$$X = \{n \in \mathbb{N} : (\exists k \in \mathbb{N})\, n = k^2\}$$
$$2\mathbb{Z} = \{z \in \mathbb{Z} : (\exists k \in \mathbb{Z})\, z = 2k\} \text{ и}$$
$$W = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leqslant x \leqslant 9\}.$$

Найти множество $(X \cup 2\mathbb{Z}) \cap W$.
Здесь $\mathbb{N}$ *есть множество всех натуральных чисел,* $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$, $\mathbb{Z}$ *есть множество всех целых чисел,* $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ *и* $\mathbb{R}$ *есть множество всех действительных чисел.*

10. Даны числовые множества

$$X = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leqslant x \leqslant 5\} \text{ и } Y = \{y \in \mathbb{R} : x \geqslant 2\}.$$

Найти множество $X \cap Y$.
Здесь $\mathbb{R}$ *есть множество всех действительных чисел.*

11. Даны числовые множества

$$X = \{x \in \mathbb{R} : 7 \leqslant x \leqslant 3\pi\} \text{ и } Y = \{y \in \mathbb{R} : x \leqslant 2\}.$$

Найти множество $X \cap Y$.
Здесь $\mathbb{R}$ *есть множество всех действительных чисел.*

12. Даны подмножества координатной плоскости:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x + 2y| \leqslant 4\}, \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |3x - y| \leqslant 3\},$$
$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leqslant 1\}, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leqslant 2\},$$
$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 9\}$$

Изобразить множества

(a) $(A \cap B) \setminus C$,

(b) $(A \cap B) \triangle (C \cap D)$,

(c) $E \setminus (A \cup B)$

13. Известно, что множество A есть подмножество множества B.
Чему равно множество

    (a) $A \cup B$,

    (b) $A \cap B$,

    (c) $A \setminus B$,

    (d) $A \triangle B$?

14. Множества A и B есть подмножества универсального множества Ω. Известно, что множество A есть подмножество множества B. В каком отношении (одно включено в другое, не пересекаются, дают в объединении все множество Ω) находятся множества

    (a) A и $\overline{B}$,

    (b) $\overline{A}$ и B?

15. Известно, что пересечение множеств A и B пусто. Чему равно множество

    (a) $A \setminus B$,

    (b) $A \triangle B$?

16. Пусть A и B есть подмножества универсального множества Ω. Известно, что пересечение множеств A и B пусто. В каком отношении (одно включено в другое, не пересекаются, дают в объединении все множество Ω) находятся множества

    (a) A и $\overline{B}$,

    (b) $\overline{A}$ и B,

    (c) $\overline{A}$ и $\overline{B}$?

17. Прочитать и передать на естественном языке смысл выражения

$$\forall X \, \exists Y \, \forall z \, (z \in X \to \neg z \in Y),$$

записанного на языке теории множеств. Истинно ли это выражение?

18. Прочитать и передать на естественном языке смысл выражения

$$\forall X \, \forall Y \, (\exists z \, (z \in X \wedge \neg z \in Y) \to \exists z \, (z \in Y \wedge \neg z \in X)),$$

записанного на языке теории множеств. Истинно ли это выражение?

19. Прочитать и передать на естественном языке смысл выражения

$$\exists x\, \forall y\, (x \subseteq y \to y \subseteq x),$$

записанного на языке теории множеств. Истинно ли это выражение?

20. Прочитать и передать на естественном языке смысл выражения

$$\exists x\, \forall y\, (y \subseteq x \to x \subseteq y),$$

записанного на языке теории множеств. Истинно ли это выражение?

21. Прочитать и передать на естественном языке смысл выражения

$$\exists X\, \forall Y\, \exists z\, (z \in X \cap Y),$$

записанного на языке теории множеств. Истинно ли это выражение?

22. Прочитать и передать на естественном языке смысл выражения

$$\forall X\, \forall Y\, \exists Z\, (Z \subseteq X \cap Y),$$

записанного на языке теории множеств. Истинно ли это выражение?

23. Доказать, что для любого множества x верно
   (a) $x \cap \varnothing = \varnothing$,
   (b) $x \cup \varnothing = x$

24. Доказать, что для любого подмножества x универсального множества Ω верно
   (a) $x \cap \Omega = x$,
   (b) $x \cup \Omega = \Omega$.

25. Доказать, что отношение принадлежности, вообще говоря, не обладает свойством рефлексивности, т.е. существует множество x, для которого $x \notin x$.

26. Доказать, что отношение принадлежности, вообще говоря, не обладает свойством транзитивности, т.е. существует множества x, y, z, для которых $x \in y$ и $y \in z$, но $x \notin z$.

27. Привести пример непустого множества, удовлетворяющего условию

$$\forall y\, (y \in x \Rightarrow y \subseteq x).$$

Замечание. Множества x, удовлетворяющие этому условию, называются транзитивными.

28. Доказать тождество

$$X \setminus (X \setminus Y) = X \cap Y.$$

29. Доказать тождество

$$X \setminus (Y \setminus X) = X.$$

30. Доказать тождество

$$X \cup (Y \cap X) = X.$$

31. Доказать тождество

$$X \cup (Y \cap \overline{X}) = X \cup Y.$$

32. Доказать тождество

$$X \setminus (Y \cap Z) = (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z).$$

33. Доказать тождество

$$\overline{X \cap Y \cap Z} = \overline{X} \cup \overline{Y} \cup \overline{Z}.$$

34. Доказать тождество

$$X \cap (Y \triangle Z) = (X \cap Y) \triangle (X \cap Z).$$

35. Проверить тождество

$$(X \cup Y) \setminus Y = X.$$

Если тождество верное, доказать его, а если неверное, опровергнуть (привести контрпример).

36. Проверить тождество

$$X \setminus (Y \setminus Z) = (X \setminus Y) \setminus Z.$$

Если тождество верное, доказать его, а если неверное, опровергнуть (привести контрпример).

37. Проверить тождество

$$X \cup (Y \triangle Z) = (X \cup Y) \triangle (X \cup Z).$$

Если тождество верное, доказать его, а если неверное, опровергнуть (привести контрпример).

3.3 Ответы и указания.

1. 1a. $\{b, c\}$, 1b. $\{a, b, c, d, e\}$, 1c. $\{a\}$, 1d. $\{d, e\}$, 1e. $\{a, d, e\}$. 2. $\{a, b, c, f, g\}$. 3. $\varnothing$. 4. $\{6\}$. 5. 5. 6. $6\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{N} : (\exists k \in \mathbb{N})\, n = 6k\}$. 7. $12\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{N} : (\exists k \in \mathbb{N})\, n = 12k\}$. 8. $\{-6, -3, 0, 3, 6\}$. 9. $\{2, 4, 6, 8, 9\}$. 10. $[2, 5] = \{x \in \mathbb{R} : 2 \leqslant x \leqslant 5\}$. 11. $\varnothing$. $\{0, 2, 4, 6, 8, 9\}$. 13. 13a. B, 13b. A, 13c. $\varnothing$, 13d. $B \setminus A$. 14. 14a. $A \cap \overline{B} = \varnothing$, 14b. $\overline{A} \cup B = \Omega$. 15. 15a. A, 15b. $A \cup B$. 16. 16a. $A \subseteq \overline{B}$, 16b. $B \subseteq \overline{A}$, 16c. $\overline{A} \cup \overline{B} = \Omega$. 17. Да. 18. Нет. 19. Нет. 20. Да. 21. Нет. 22. Да. 25. Указание: взять $x = \varnothing$. 26. Указание: взять $x = \varnothing$, $y = \{\varnothing\}$, $z = \{\{\varnothing\}\}$. 27. Например, $\{\varnothing\}$. 35. Тождество неверное. Возможный контрпример: $X = Y = \{0\}$ 36. Тождество неверное. Возможный контрпример: $X = Y = Z = \{0\}$. 37. Тождество неверное. Возможный контрпример: $X = \{0\}$, $Y = Z = \varnothing$.

4 Алгебра множеств

4.1 Теоретическая часть

Множество всех подмножеств некоторого универсального множества Ω (включая пустое) вместе с операциями объединения, пересечения и абсолютного дополнения, называется алгеброй множеств. Для многих приложений достаточно рассматривать только эти операции.

Основные тождества алгебры множеств.

1. $(x \cup y) \cup z = x \cup (y \cup z)$, $(x \cap y) \cap z = x \cap (y \cap z)$ (*ассоциативность* операций объединения и пересечения),
2. $x \cup y = y \cup x$, $x \cap y = y \cap x$ (*коммутативность* операций объединения и пересечения),
3. $x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z)$, $x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z)$ (*дистрибутивность* операции объединения относительно пересечения и операции пересечения относительно объединения),
4. $x \cup (x \cap y) = x \cap (x \cup y) = x$ (законы *поглощния*),
5. $x \cup \overline{x} = \overline{x} \cup x = \Omega$, $x \cap \overline{x} = \overline{x} \cap x = \varnothing$ (законы *дополнительности*),
6. $\overline{\overline{x}} = x$, $\overline{x \cup y} = \overline{x} \cap \overline{y}$, $\overline{x \cap y} = \overline{x} \cup \overline{y}$ (законы *двойственности*),
7. $\Omega \cup x = \Omega$, $\Omega \cap x = x$, $\varnothing \cup x = x$, $\varnothing \cap x = \varnothing$, $\overline{\varnothing} = \Omega$, $\overline{\Omega} = \varnothing$ (свойства констант).

Кроме того, в любой алгебре множеств

$$x \setminus y = x \cap \overline{y}, \tag{1}$$
$$x \triangle y = (x \cap \overline{y}) \cup (y \cap \overline{x}), \tag{2}$$
$$x \subseteq y \leftrightarrow x \cap y = x. \tag{3}$$

Набор тождеств 1–7 обладает удивительным свойством: из него можно логически вывести **все** тождества, которые **верны в любой алгебре множеств**, не прибегая к определениям операций (Здесь имеются в виду **только** тождества, которые можно записать с помощью символов операций объединения, пересечения, дополнения и симметрической разности). При этом сам этот набор может быть даже немного сокращен: некоторые из входящих в него тождеств следуют из остальных.

Пример 1. Доказать тождество

$$(x \setminus y) \cup (y \setminus x) = (x \cup y) \setminus (y \cap x).$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
(x \setminus y) \cup (y \setminus x) &= (x \cap \overline{y}) \cup (y \cap \overline{x}) && \text{(по факту (1))}\\
&= ((x \cap \overline{y}) \cup y) \cap ((x \cap \overline{y}) \cup \overline{x}) && \text{(дистрибутивность, 3)}\\
&= (y \cup (x \cap \overline{y})) \cap (\overline{x} \cup (x \cap \overline{y})) && \text{(коммутативность, 2)}\\
&= ((y \cup x) \cap (y \cup \overline{y})) \cap ((\overline{x} \cup x) \cap (\overline{x} \cap \overline{y})) && \text{(дистрибутивность, 3)}\\
&= ((y \cup x) \cap \Omega) \cap (\Omega \cap (\overline{x} \cup \overline{y})) && \text{(дополнительность, 5}\\
&= (y \cup x) \cap (\overline{x} \cup \overline{y}) && \text{(свойства констант, 7)}\\
&= (y \cup x) \cap (\overline{x \cap y}) && \text{(двойственность, 6)}\\
&= (x \cup y) \cap (\overline{x \cap y}) && \text{(коммутативность, 2)}\\
&= (x \cup y) \setminus (x \cap y) && \text{(по факту (1)).}
\end{aligned}$$

Ассоциативность и коммутативность операций объединения и пересечения, как правило, используется автоматически, без особых упоминаний. Так, в краткой записи доказательства из приведенного выше примера, третий и восьмой шаг можно было бы опустить.

Набор тождеств 1–7 можно использовать для доказательства более сложных утверждений.

Пример 2. Доказать, что для любых множеств x, y, z если выполнено

$$\begin{aligned}
&x \cup z = y \cup z \text{ и} && (*)\\
&x \cap z = y \cap z, && (**)\\
&\text{то } x = y.
\end{aligned}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
x &= x \cap (x \cup z) && \text{(поглощение, 4)}\\
&= x \cap (y \cup z) && \text{(по условию } (*)\text{)}\\
&= (x \cap y) \cup (x \cap z) && \text{(дистрибутивность, 3)}\\
&= (x \cap y) \cup (y \cap z) && \text{(по условию } (**)\text{)}\\
&= y \cap (x \cup z) && \text{(коммутативность, 2, и дистрибутивность, 3)}\\
&= y \cap (y \cup z) && \text{(по условию } (*)\text{)}\\
&= y. && \text{(поглощение, 4)}
\end{aligned}$$

Особое место занимает алгебра B_2 подмножеств одноэлементного универсального множества Ω. Она состоит ровно из двух множеств: $\varnothing$ и Ω. Если переобозначить $\varnothing \eqqcolon 0$ и $\Omega \eqqcolon 1$, то операции над ними выразятся так: для всех $X, Y \in \{\varnothing, \Omega\} \eqqcolon \{0, 1\}$

$$\begin{aligned}
&X \cup Y \eqqcolon \max\{X, Y\} = X \vee Y,\\
&X \cap Y \eqqcolon \min\{X, Y\} = X \wedge Y,\\
&\overline{X} = 1 - X = \overline{X}.
\end{aligned}$$

Здесь символы «$\vee$», «$\wedge$» и «$\bar{\cdot}$» в правой части формул обозначают известные из школьного курса информатики операции булевой дизъюнкции, булевой конъюнкции и булева отрицания (инверсии). Подробнее о булевых функциях см. в соответствующем разделе этого задачника.

Имеет место следующая **теорема**. Каждое тождество в языке алгебры множеств, т.е. включающее константы $\varnothing$, Ω и операции дизъюнкции, конъюнкции и дополнения (а также, если угодно, разности и симметрической разности), истинно в любой алгебре множеств тогда и только тогда, когда оно истинно в алгебре B_2. Это позволяет проверять истинность теоретико-множественных тождеств с помощью истинностных таблиц.

Пример 3. Проверить истинность теоретико-множественного тождества

$$(X \cap \overline{Y}) \cup (Y \cap \overline{Z}) \cup (Z \cap \overline{X}) = (X \cup Y \cup Z) \cap \left(\overline{X \cap Y \cap Z}\right).$$

с помощью истинностных таблиц.

Решение. Заменяем теоретико-множественное тождество булевым:

$$(X \wedge \overline{Y}) \vee (Y \wedge \overline{Z}) \vee (Z \wedge \overline{X}) = (X \vee Y \vee Z) \wedge \left(\overline{X \wedge Y \wedge Z}\right)$$

(переменные X, Y, Z теперь принимают значение из множества $\{0, 1\}$). Составляем таблицу истинности левой и правой части.

X	Y	Z	$X \wedge \overline{Y}$	$Y \wedge \overline{Z}$	$Z \wedge \overline{X}$	$(X \wedge \overline{Y}) \vee (Y \wedge \overline{Z}) \vee (Z \wedge \overline{X})$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	1
0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	0	1	1	0	0	1
1	1	0	0	1	0	1
1	1	1	0	0	0	0

X	Y	Z	$X \vee Y \vee Z$	$X \wedge Y \wedge Z$	$(X \vee Y \vee Z) \wedge \left(\overline{X \wedge Y \wedge Z}\right)$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1
1	0	1	1	0	1
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	0

Правые столбцы этих таблиц совпадают, следовательно, тождество верно.

4.2 Задачи

1. Используя основные тождества алгебры множеств, доказать тождество
$$(X \cap (\overline{Y \cap \overline{X}})) \cup (Y \cap (\overline{\overline{Y} \cap X})) = X \cup Y.$$

2. Доказать тождество из примера 3 с помощью основных тождеств алгебры множеств.

3. Используя основные тождества алгебры множеств, доказать тождество
$$(X \triangle Y) \triangle Z = X \triangle (Y \triangle Z).$$

4. Используя основные тождества алгебры множеств, доказать, что для любых подмножеств x, y универсального множества Ω следующие следующие условия равносильны

   (a) $x \cap y = x$,

   (b) $x \cup y = y$,

   (c) $\overline{x} \cup y = \Omega$,

   (d) $x \cap \overline{y} = \varnothing$.

5. Используя основные тождества алгебры множеств, доказать, что любые множества x, y совпадают тогда и только тогда, когда
$$x \triangle y = \varnothing.$$

6. Используя основные тождества алгебры множеств, доказать, что для любых множеств X, Y условие
$$(X \setminus Y) \cup Y = X$$
выполнено тогда и только тогда, когда $Y \subseteq X$.

7. Используя основные тождества алгебры множеств, доказать, что для любых множеств X, Y, Z если
$$X \cap Z \subseteq Y \subseteq X \cup Z,$$
то
$$X \setminus Z = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus Z).$$

8. С помощью таблиц истинности проверить, верно ли, что в любой алгебре множеств для всех множеств x, y, z выполнено
$$(x \cap y \cap z) \cup (\overline{x} \cap \overline{y} \cap \overline{z}) = (x \cup y \cup z) \cap (\overline{x} \cup \overline{y} \cup \overline{z}).$$

9. Проверить истинность тождества

$$(X \triangle Y) \triangle Z = X \triangle (Y \triangle Z)$$

с помощью таблиц истинности.

10. Проверить истинность тождества

$$(X \triangle Y) \cap (X \triangle Z) = X \triangle (Y \cap Z)$$

с помощью таблиц истинности.

4.3 Ответы и указания.

3. Указание: приведите левую и правую части этого равенства к объединению некоторых пересечений множеств X, Y, Z и их дополнений. 4. $(a) \Rightarrow (b)$. $x \cup y = (x \cap y) \cup y = y$. $(b) \Rightarrow (c)$. $\overline{x} \cup y = \overline{x} \cup x \cup y = \Omega$. $(c) \Rightarrow (d)$. $\overline{x} \cup y = \Omega \Rightarrow \overline{\overline{x} \cup y} = \overline{\Omega} \Rightarrow x \cap \overline{y} = \varnothing$. $(d) \Rightarrow (a)$. $x \cap y = (x \cap y) \cup \varnothing = (x \cap y) \cup (x \cap \overline{y}) = x \cap (y \cup \overline{y}) = x \cap \Omega = x$. 5. Если $x = y$, то $x \triangle y = (x \cap \overline{x}) \cup (\overline{x} \cap x) = \varnothing$. Пусть $x \triangle y = \varnothing$. Тогда $x = x \cup \varnothing = x \cup (x \triangle y) = x \cup (x \cap \overline{y}) \cup (y \cap \overline{x}) = x \cup (y \cap \overline{x}) = x \cup y$. Аналогично, $y = y \cup \varnothing = y \cup (x \triangle y) = y \cup (x \cap \overline{y}) \cup (y \cap \overline{x}) = y \cup (x \cap \overline{y}) = y \cup x$. Значит, $x = y$. 6. Пусть $Y \subseteq X$. Тогда $Y \cap X = Y$. Значит, $(X \setminus Y) \cup Y = (X \cap \overline{Y}) \cup Y = (X \cap \overline{Y}) \cup (Y \cap X) = X \cap (Y \cup \overline{Y}) = X \cap \Omega = X$. Пусть теперь $(X \setminus Y) \cup Y = X$. Тогда $X \cap Y = ((X \setminus Y) \cup Y) \cap Y = Y$. Значит, $Y \subseteq X$. 7. Из условия, во-первых, имеем $Y = (X \cap Z) \cup Y$. Тогда $X \setminus Y = X \cap \overline{Y} = X \cap \overline{(X \cap Z) \cup Y} = X \cap (\overline{X} \cup \overline{Z}) \cap \overline{Y} = X \cap \overline{Z} \cap \overline{Y}$. Во-вторых, из условия имеем $Y = (X \cup Z) \cap Y$. Тогда $Y \setminus Z = Y \cap \overline{Z} = (X \cup Z) \cap Y \cap \overline{Z} = X \cap \overline{Z} \cap Y$. Значит, $(X \setminus Y) \cup (Y \setminus Z) = (X \cap \overline{Z} \cap \overline{Y}) \cup (X \cap \overline{Z} \cap Y) = X \cap \overline{Z} \cap (\overline{Y} \cup Y) = X \cap \overline{Z} \cap \Omega = X \cap \overline{Z} = X \setminus Z$. 9 и 10. Указание. Перед составлением таблиц покажите, что симметрическая разность $\triangle$ соответствует булевой операции $\oplus$ (сложение по модулю два, исключающее *или*).