# Введение в дискретную математику. Лекция 7 (элементы теории графов 2: некоторые приложения в теории принятия решений). План-конспект

Н. Л. Поляков

Область приложений теории графов в математике, информатике, естественных и общественных науках чрезвычайно широка. В качестве примеров рассмотрим некоторые приложения в теории принятия решений.

Бинарное отношение $G$ на множестве (альтернатив) $V$ можно воспринимать как некоторое отношение предпочтения:

$$x\,G\,y \Leftrightarrow y \text{ «лучше» } x.$$

Можно считать, что на отношение $G$ не наложено никаких дополнительных условий (кроме иррефлексивности, т.е. отсутствия петель в графе $\Gamma = (V, G)$, хотя и это во многих задачах не является принципиальным). Такие предпочтения могут естественным образом возникать в случае многокритериальных (или коллективных) оценках альтернатив в условиях неполной информации. Возникает естественное задача – выбрать альтернативу или, по крайней мере, множество альтернатив. Существует много подходов для решения этой задачи. Один из них – нахождение ядра графа по Нейману-Моргенштерну.

# 1 Ядро графа по Нейману-Моргенштерну

## 1.1 Определения, основные результаты и примеры

Пусть дан ориентированный граф $\Gamma = (V, G)$ без петель. Множество $U \subseteq V$ называется:

- *внешне устойчивым*, если для любой вершины $x \in V$

  $$x \in U \text{ или } (x, y) \in G \text{ для некоторой вершины } y \in U.$$

  Иными словами, множество $U \subseteq V$ внешне устойчиво, если

  $$U \cup G^{-1}(U) = V.$$

  Содержательно: множество $U$ содержит хотя бы одну *доминирующую* («лучшую») альтернативу для каждой альтернативы, которая не входит в множество $U$.
  Замечание: множество $V$ всех вершин графа $\Gamma$ внешне устойчиво.

- *минимальным внешне устойчивым*, если оно внешне устойчиво и ни одно его собственное подмножество $W$ (т.е. такое множество $W$, что $W \subseteq U$ и $W \neq U$; это обстоятельство часто записывается так: $W \subsetneq U$) не является внешне устойчивым.

- *внутренне устойчивым*, если для любых вершин $x, y \in V$

  $$x, y \in U \Rightarrow (x, y) \notin G.$$

  Иными словами, множество $U \subseteq V$ внешне устойчиво, если

  $$U \cap G(U) = \varnothing.$$

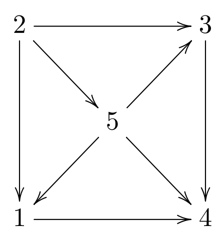
Содержательно: множество $U$ не содержит таких альтернатив $v_1$ и $v_2$, что одна из них доминирует другую («лучше» другой).
Замечание: синглетон каждой вершины графа $\Gamma$ (т.е. каждое множество $\{v\}$, где $v \in V$) внутренне устойчиво.

- *максимальным внутренне устойчивым*, если оно внутренне устойчиво и ни одно его собственное надмножество $W$ (т.е. такое множество $W$, что $U \subseteq W \subseteq V$ и $W \neq U$) не является внутренне устойчивым.

- *ядром* (по Нейману-Моргенштерну), если оно внешне и внутренне устойчиво.

**Теорема.** Ядро графа $\Gamma$ (если оно существует) является одновременно **минимальным** внешне и максимальным внутренне устойчивым множеством.

**Пример.** На рисунке изображен граф




Легко проверить, что

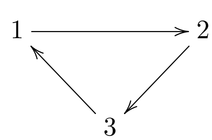
1. Каждое внешне устойчивое множество содержит вершину 4.

2. Все минимальные внешне устойчивые множества – это множества $\{1, 4\}$, $\{2, 4\}$, $\{3, 4\}$, $\{4, 5\}$.

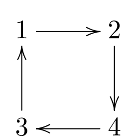
3. Все максимальные внутренне устойчивые множества – это множества $\{5\}$, $\{2, 4\}$, $\{1, 3\}$.

4. Ядро: множество $\{2, 4\}$.

**Замечание.** Некоторые ориентированнные графы имеют более одного ядра или не имеют ядра вовсе.




Граф без ядра




Граф с двумя ядрами

## 1.2 Метод Магу нахождения устойчивых множеств и ядер

Сначала несколько определений. Пусть дано конечное множество $V$ с занумерованными элементами: $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.

1. Пусть дано подмножество $U$ множества $V$. Булев вектор

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \{0, 1\}^n$$

называется *характеристическим вектором* множества $U$, если

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{если } v_i \in U \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

2. Пусть дано множество $\mathcal{U}$ подмножеств множества $V$. Булева функция

$$f : \{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$$

называется *характеристической функцией* множества $\mathcal{U}$, если

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \boldsymbol{x} \text{ есть характеристический вектор некоторого множества } U \in \mathcal{U} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

**Пример.** Пусть множество $V = \{1, 2, 3\}$ занумеровано в естественном порядке и $\mathcal{U} = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$. Тогда таблица истинности характеристической функции $f$ множества $\mathcal{U}$ есть:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $f(x_1, x_2, x_3)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

Ее представление в виде СДНФ есть

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 \overline{x}_3.$$

**Теорема.** Пусть дан ориентированный граф $\Gamma = (V, G)$ с занумерованным множеством вершин: $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ и матрицей смежности $A$. Тогда

1. характеристическая функция множества всех внешне устойчивых множеств вершин графа $\Gamma$ есть
$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigwedge_{i=1}^{n} \left( x_i \vee \bigvee_{a_{ij}=1} x_j \right);$$
2. характеристическая функция множества всех внутренне устойчивых множеств вершин графа $\Gamma$ есть
$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigwedge_{a_{ij}=1} (\overline{x}_i \vee \overline{x}_j) \,.$$

**Алгоритм нахождения всех минимально внешне устойчивых, максимально внутренне устойчивых множеств и ядер.** Для нахождения всех минимальных внешне устойчивых множеств графа $\Gamma = (V, G)$ методом Магу надо

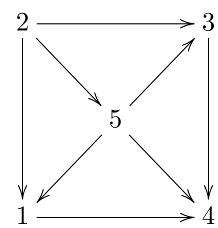
- занумеровать его вершины: $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$,
- составить характеристическую функцию $f$ множества всех внешне устойчивых множеств вершин графа $\Gamma$,
- раскрыв скобки, записать ДНФ функции $f$,
- сократить полученную ДНФ, используя тождества
$$xx = x \vee x = x \vee xy = x(x \vee y) = x,$$
- для каждой элементарной конъюнкции $x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}$ сокращенной ДНФ функции $f$ записать множество $\{v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_k}\}$.

Для нахождения всех максимальных внутренне устойчивых множеств графа $\Gamma = (V, G)$ методом Магу надо

- занумеровать его вершины: $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$,
- составить характеристическую функцию $g$ множества всех внутренне устойчивых множеств вершин графа $\Gamma$,
- раскрыв скобки, записать ДНФ функции $g$,
- сократить полученную ДНФ, используя тождества
$$xx = x \vee x = x \vee xy = x(x \vee y) = x,$$
- для каждой элементарной конъюнкции $\overline{x}_{i_1} \overline{x}_{i_2} \ldots \overline{x}_{i_k}$ сокращенной ДНФ функции $g$ записать множество $V \setminus \{v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_k}\}$.

Для нахождения всех ядер графа $\Gamma = (V, G)$ методом Магу надо найти методом Магу множество всех его минимальных внешне устойчивых множеств и множество всех максимальных внутренне устойчивых множеств, а затем взять их пересечение.

**Пример.** Рассмотрим граф $\Gamma = (V, G)$, изображенный на рисунке:




1. Составим характеристическую функцию множества его внешне устойчивых множеств:

   $$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1 \vee x_4)(x_2 \vee x_1 \vee x_3 \vee x_5)(x_3 \vee x_4)x_4(x_5 \vee x_1 \vee x_3 \vee x_4)$$

2. После раскрытия скобок и сокращений, имеем:

   $$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1x_4 \vee x_2x_4 \vee x_3x_4 \vee x_4x_5.$$

3. Значит, все минимальные внешне устойчивые множества графа $\Gamma$ – это множества
   $$\{1, 4\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}.$$

4. Составим характеристическую функцию множества его внешне устойчивых множеств:

   $$g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) =$$
   $$(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_4)(\overline{x}_2 \vee \overline{x}_1)(\overline{x}_2 \vee \overline{x}_3)(\overline{x}_2 \vee \overline{x}_5)(\overline{x}_3 \vee \overline{x}_4)(\overline{x}_5 \vee \overline{x}_1)(\overline{x}_5 \vee \overline{x}_3)(\overline{x}_5 \vee \overline{x}_4).$$

5. После раскрытия скобок и сокращений, имеем:

   $$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1\overline{x}_3\overline{x}_5 \vee \overline{x}_2\overline{x}_4\overline{x}_5.$$

6. Значит, все минимальные внешне устойчивые множества графа $\Gamma$ – это множества

   $$V \setminus \{1, 2, 3, 4\} = \{5\}, \quad V \setminus \{1, 3, 5\} = \{2, 4\}, \quad V \setminus \{2, 4, 5\} = \{1, 3\}.$$

7. Для нахождения ядер выбираем те множества, которые одновременно встречаются в списках из пп. 3 и 6. Это единственное множество $\{2, 4\}$.

# 2 Турниры

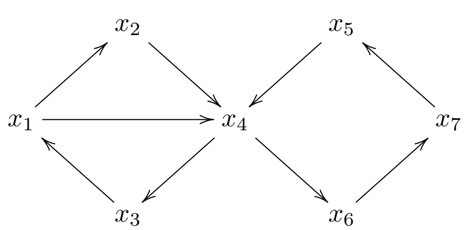
**Конденсацией** ориентированного графа $\Gamma = (V, G)$ называется граф $\Gamma^c = (V^c, G^c)$ без петель, вершинами которого являются компоненты сильной связности графа $\Gamma$, и для любых двух различных компонент сильной связности $X, Y$ графа $\Gamma$ пара $(X, Y)$ принадлежит множеству $G^c$ тогда и только тогда, когда существуют такие вершины $x \in X$ и $y \in Y$, что пара $(x, y)$ принадлежит множеству $G$.

**Турниром** (а *tournament*) или *полным ориентированным графом* называется ориентированный граф $\Gamma = (V, G)$ без петель с условием: для любых двух различных вершин $v_1, v_2 \in V$ либо $(v_1, v_2) \in G$, либо $(v_2, v_1) \in G$ («либо» – исключающее!). Название происходит от кругового турнира, в котором каждая команда встречается с каждой по одному разу, и в каждом матче побеждает ровно одна команда – ничьих быть не может.

**Теорема.** Конденсация любого турнира $\Gamma = (V, G)$ есть граф $\Gamma^c = (V^c, G^c)$, в котором отношение $G^c$ есть отношение строгого линейного порядка. Компоненту сильной связности графа $\Gamma$, которая есть наибольший элемент относительно этого порядка (такая компонента всегда существует, если граф $\Gamma$ конечен), называют *топ-циклом*.

# 3 Задачи

1. На рисунке изображен граф $\Gamma$.




   Найти все ядра графа $\Gamma$.

2. Пусть $X = \{0, 1, 2, 3\}$ и $\mathcal{U}$ есть некоторое множество подмножеств множества $X$. Найдите характеристическую функцию множества $\mathcal{U}$ (ответ запишите в виде СДНФ или в каком-нибудь коротком сокращенном виде на ваш вкус).

   (a) $\mathcal{U} = \{\{0\}, \{1, 3\}\}$,

   (b) $\mathcal{U} = \{Y \subseteq X : 0 \in Y\}$,

   (c) $\mathcal{U} = \{Y \subseteq X : 0 \in Y \wedge 1 \notin Y\}$,

   (d) $\mathcal{U} = \{Y \subseteq X : 0 \in Y \vee 3 \in Y\}$.

3. Найдите все ядра в графе, имеющем множество вершин $\{a, b, c, d, e, f\}$ и ребер $\{(a, b), (b, c), (c, d), (d, e), (e, a), (a, f), (f, b)\}$. При решении обязательно используйте метод Магу.

4. Альтернативы $a, b, c, d, e$ следующим образом упорядочены по шести критериям $K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6$ (слева направо от лучшей к худшей):

$$\begin{array}{ll} K_1 : acbd & K_4 : bacd \\ K_2 : adbc & K_5 : bdac \\ K_3 : cdba & K_6 : abdc \end{array}$$

   Отношение предпочтения $\succ$ на множестве альтернатив определяется следующим образом: $x \succ y$ тогда и только тогда, когда количество критериев, по которым альтернатива $x$ превосходит альтернативу $y$ не меньше трех. Найти все ядра графа отношения $\succ^{-1}$.

5. Студенты оценивают преподавателей $A, B, C, D, E$ по четырем показателям $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, используя пятибалльную шкалу. Результаты оценивания приведены в таблице:

| | $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ | $\delta$ |
|---|---|---|---|---|
| A | 3 | 1 | 3 | 2 |
| B | 3 | 2 | 4 | 1 |
| C | 3 | 1 | 2 | 4 |
| D | 3 | 2 | 1 | 3 |
| E | 2 | 0 | 1 | 3 |

   Окончательное отношение предпочтение строится следующим образом: преподаватель $X$ «лучше» преподавателя $Y$, если $X$ не имеет ни одной нулевой оценки и число показателей, по которым $X$ лучше $Y$, строго больше, чем число показателей, по которым $Y$ лучше $X$. Изобразите соответствующий граф предпочтений и найдите все его ядра.

6. Граф $\Gamma = (V, G)$ есть цикл длины $n$, т.е. $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ и $G = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), \ldots, (v_{n-1}, v_n), (v_n, v_1)\}$. Найдите все ядра графа $\Gamma$.

7. Как по матрице смежности графа $\Gamma$ узнать, что $\Gamma$ – турнир?

8. Дана таблица результатов кругового турнира команд $A, B, C, D$ (на пересечении строки $X$ и столбца $Y$ результат игры команд $X$ и $Y$: 1 – выигрыш команды $X$, 0 – проигрыш команды $X$).

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| A | | 1 | 0 | 1 |
| B | 0 | | 0 | 0 |
| C | 1 | 1 | | 0 |
| D | 0 | 1 | 1 | |

   Изобразите турнирный граф и его конденсацию. Найдите топ-цикл.

9. Как можно охарактеризовать турнир, который имеет ядро?

10. Докажите теорему из главы «Турниры» данной лекции (стр. 7).

11. Найдите такой турнир на четырехэлементном множестве вершин, что все полустепени захода его вершин четны. Найдите конденсацию и топ-цикл этого турнира. (∗) Докажите, что такой турнир единственный с точностью до переобозначения вершин (т.е. с точностью до *изоморфизма*).

12. Найдите такой турнир на четырехэлементном множестве вершин, что все полустепени захода его вершин нечетны. Найдите конденсацию и топ-цикл этого турнира. (∗) Докажите, что такой турнир единственный с точностью до переобозначения вершин (т.е. с точностью до *изоморфизма*).