V を有限次ベクトル空間とする。$f : V \to V$ を線形写像とし、$f \circ f = 0$(零写像) とする。

$\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, f$ である。

……………………………………………………………………………

$\mathrm{Im}\, f \subset V$ である。

$f \circ f = 0$ より $^{\forall}\alpha \in \mathrm{Im}\, f$ に対して $f(\alpha) = 0$ である。

つまり、$\alpha \in \mathrm{Ker}\, f$ である。

よって、$\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, f$ である。

$\dim V \geq 2 \dim \mathrm{Im}\, f$ である。

……………………………………………………………………………

ベクトル空間の次元定理

$$\dim V = \dim \mathrm{Im}\, f + \dim \mathrm{Ker}\, f \tag{1}$$

上記証明より、$\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, f$ であるので、次元を比較すると次が得られる。

$$\dim \mathrm{Im}\, f \leq \dim \mathrm{Ker}\, f \tag{2}$$

これを利用すると次の式が成り立つ。

$$\dim \mathrm{Im}\, f + \dim \mathrm{Ker}\, f \geq \dim \mathrm{Im}\, f + \dim \mathrm{Im}\, f \tag{3}$$

左辺は次元定理より $\dim V$ となるので、次が示せた。

$$\dim V \geq 2 \dim \mathrm{Im}\, f \tag{4}$$
