関数 $f(x) = |x|\sin^{-1} x$ が点 $x = 0$ で微分可能かどうか調べよ。

関数 $f(x)$ が $x = a$ で微分可能であるとは、$x = a$ の左側極限と右側極限が一致するときをいい、この極限値を $x = a$ における $f(x)$ の微分係数という。

$$f'(a) = \lim_{x \to a-0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \tag{1}$$

$f(x)$ は x の値により次のように絶対値を外すことが出来る。

$$f(x) = \begin{cases} x\sin^{-1} x & (x > 0) \\ 0 & (x = 0) \\ -x\sin^{-1} x & (x < 0) \end{cases} \tag{2}$$

$x = 0$ における右側極限を考える。

$$\lim_{x \to 0+0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0+0} \frac{x\sin^{-1} x}{x} = \lim_{x \to 0+0} \sin^{-1} x = 0 \tag{3}$$

同様に左側極限を考える。

$$\lim_{x \to 0-0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0-0} \frac{-x\sin^{-1} x}{x} = \lim_{x \to 0-0} \left(-\sin^{-1} x\right) = 0 \tag{4}$$

以上により $f(x)$ は $x = 0$ で微分可能であり、$f'(0) = 0$ である。

$y = xe^x$ の $I = \mathbb{R}$ における増加・減少を調べよ。

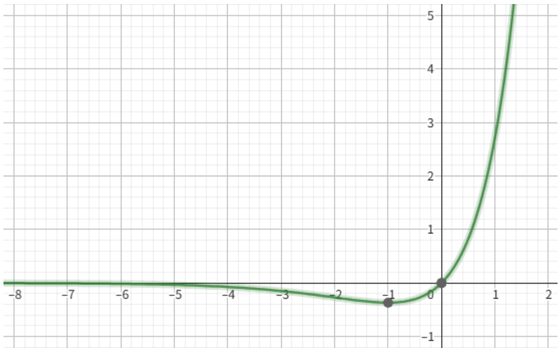
y の導関数は次の式となる。

$$y' = (x+1)e^x, \quad y'' = (x+2)e^x \tag{5}$$

$y' = 0$ となるのは $x = -1$ のときのみで、$y'' = 0$ となるのは $x = -2$ のときのみである。

$y \to \infty\ (x \to \infty)$ より $x \to \infty$ のとき、$y' \to \infty,\ y'' \to \infty$ であり、$y \to 0\ (x \to -\infty)$ より $x \to -\infty$ のとき、$y' \to 0,\ y'' \to 0$ である。

x	$-\infty$	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	∞
y'	0	$-$			0	$+$			∞
y''	0	$-$	0	$+$					∞
y	0		$-2e^{-2}$		$-e^{-1}$		0		∞



−8
−7
−6
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
5
4
3
2
1
−1