

$R$  を可換環とする。左  $R$ -加群  $M$  が与えられたとき、 $M \times R \rightarrow M$  を  $(x, a) \mapsto ax$  で定めると、 $M$  は右  $R$ -加群にもなることを示せ。また、 $M$  は両側  $(R, R)$ -加群にもなることを示せ。

## 定義 加群

加法群  $M$  に対して、環  $R$  との演算が次のように定義されているとする。

$$R \times M \rightarrow M, \quad (r, m) \mapsto rm \quad (1)$$

この演算が次の性質を満たすとき、 $M$  は左  $R$ -加群であると言う。

- (1)  $1m = m \quad (1 \in R, m \in M)$
- (2)  $a(bm) = (ab)m \quad (a, b \in R, m \in M)$
- (3)  $(a + b)m = am + bm \quad (a, b \in R, m \in M)$
- (4)  $a(m + n) = am + an \quad (a \in R, m, n \in M)$

式 (1) の演算の左右を入れ替えることで右  $R$ -加群が定義できる。

環  $R$  との演算の定義は  $(x, a) \mapsto ax$  であるので、加群の定義の性質を確認する。

右からの外部演算を  $(x, a)$  と書くこととする。

- $1 \in R, x \in M$  について  $(x, 1) = 1x$  であり、 $1x$  は左  $R$ -加群で定義されているので、 $(x, 1) = 1x = x$  である。
- $a, b \in R, x \in M$  について  $((x, b), a) = (bx, a) = abx$  である。また、 $ab$  のと演算は  $(x, ba) = bax$  であるが、 $R$  は可換環であるので、 $(x, ba) = bax = abx$  である。つまり、 $((x, b), a) = abx = (x, ab)$  である。
- $a, b \in R, x \in M$  について  $(x, a + b) = (a + b)x$  である。 $(x, a) = ax, (x, b) = bx$  より  $(x, a + b) = (a + b)x = ax + bx = (x, a) + (x, b)$  である。
- $a \in R, x, y \in M$  について  $(x + y, a) = a(x + y)$  であり、 $(x, a) = ax, (y, a) = ay$  であるから  $(x + y, a) = a(x + y) = ax + ay = (x, a) + (y, a)$  である。

これにより右側からの演算が定義されるので右加群である。

$M$  は左  $R$ -加群であり右  $R$ -加群でもある。 $a, b \in R, x \in M$  として、 $a(x, b)$  と  $(ax, b)$  について考える。

- $a(x, b) = abx$
- $(ax, b) = bax$

$R$  が可換環であるので、 $ba = ab$  である。その為、 $a(x, b) = abx = bax = (ax, b)$  となり、両側加群となる。

$M$  を左  $R$ -加群とし、 $N \subset M$  を左  $R$ -部分加群とする。集合  $M/N = \{x + N \mid x \in M\}$  に対して、

$$(x + N) + (y + N) := (x + y) + N \quad (x, y \in N) \quad (2)$$

$$a(x + N) := ax + N \quad (a \in R, x \in N) \quad (3)$$

と定めると  $M/N$  は左  $R$ -加群になる。これを左  $R$ -剰余加群 (quotient module) と呼ぶ。

(1)  $x + N = y + N \Leftrightarrow x - y \in N$  ( $x, y \in N$ ) を示せ。

(2) 上の 2 つの演算が well-defined であることを示せ。

.....  
 $x, y \in N$  とする。

$x + N$  は  $N$  の元と  $x$  との和全体の集合である。

- $x + N = y + N \Rightarrow x - y \in N$

$x + N = y + N$  は  $n_x, n_y \in N$  が存在し、 $x + n_x = y + n_y$  となることを意味する。

両辺を移項することで、 $x - y = n_y - n_x$  が得られる。

$N$  は部分加群であるから  $n_y - n_x \in N$  であるので、 $x - y \in N$  である。

- $x + N = y + N \Leftarrow x - y \in N$

$x - y \in N$  よりある  $n \in N$  が存在し、 $x - y = n$  である。これにより、 $x = y + n$ 、 $y = x - n$  が得られる。

任意の  $n_x \in N$  に対して、 $x + n_x = y + n + n_x$  である。 $n + n_x \in N$  より  $x + n_x \in y + N$  である。つまり、 $x + N \subset y + N$  である。

同様に任意の  $n_y \in N$  に対して、 $y + n_y = x - n + n_y$  である為、 $y + n_y \in x + N$  であり、 $y + N \subset x + N$  である。

よって、 $x + N = y + N$  である。

よって、 $x + N = y + N \iff x - y \in N$  である。

式 (2)、式 (3) で定義された演算が well-defined を示す。

具体的には剰余類  $x + N$  の代表元の取り方に依存せず演算が成り立つことを確認する。

式 (2)  $(x + N) + (y + N) := (x + y) + N$

$x, y \in M$  に対して、 $x', y' \in M$  が存在し、 $x + N = x' + N$ 、 $y + N = y' + N$  とす

る。次のように演算が定義されている。

$$(x + N) + (y + N) = (x + y) + N \quad (4)$$

$$(x' + N) + (y' + N) = (x' + y') + N \quad (5)$$

先程の証明より次が成り立つ。

$$x + N = x' + N \iff x - x' \in N \quad (6)$$

$$y + N = y' + N \iff y - y' \in N \quad (7)$$

式 (4) と式 (5) の左辺は等しいため、右辺が等しくなることを示せばよい。

$N$  は部分加群であり、 $x - x' \in N$ ,  $y - y' \in N$  より  $x - x' + y - y' \in N$  である。

$x'$ ,  $y'$  のマイナス元が  $-x'$ ,  $-y'$  である為、 $x' + y'$  のマイナス元が  $-x' - y'$  である。つまり、 $-(x' + y') = -x' - y'$  である。

この為、 $x - x' + y - y' = (x + y) - (x' + y') \in N$  であり、 $(x + y) + N = (x' + y') + N$  であることが言える。

---

$M, N$  を左  $R$ -加群とし、 $f: M \rightarrow N$  を準同型とする。このとき、

$$\text{Ker } f := \{x \in M \mid f(x) = 0\} \quad (8)$$

$$\text{Img } f := \{f(x) \in N \mid x \in M\} \quad (9)$$

とおき、それぞれを  $f$  の核 (kernel)、 $f$  の像 (image) と呼ぶ。

(1)  $\text{Ker } f$  は  $M$  の左  $R$ -部分加群であることを示せ。

(2)  $\text{Img } f$  は  $N$  の左  $R$ -部分加群であることを示せ。

.....

(1)  $\text{Ker } f$  は  $M$  の左  $R$ -部分加群であることを示す。

$x, y \in \text{Ker } f$  とする。

- $f(x + y) = f(x) + f(y) = 0 + 0 = 0$  より  $x + y \in \text{Ker } f$  である。
- $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0)$  より  $f(0) = 0$  となり、 $0 \in \text{Ker } f$  である。
- $f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x)$  であり、 $f(x) = 0$  より  $-x \in \text{Ker } f$  である。

以上により  $\text{Ker } f$  は加法群である。

$\text{Ker } f \subset M$  より、 $R$  と  $\text{Ker } f$  の演算は  $M$  の元となる。 $r \in R$ ,  $x \in \text{Ker } f$  とすると、 $f(rx) = rf(x) = r0 = 0$  より  $rx \in \text{Ker } f$  である。

他の性質は  $M$  は加群であり、 $\text{Ker } f$  は  $M$  の部分加法群であることから従う。

よって、 $\text{Ker } f$  は  $M$  の左  $R$ -部分加群である。

(2)  $\text{Img } f$  は  $N$  の左  $R$ -部分加群であることを示す。

$x, y \in \text{Img } f$  とする。  $x_0, y_0 \in M$  が存在し、  $x = f(x_0), y = f(y_0)$  である。

- $x + y = f(x_0) + f(y_0) = f(x_0 + y_0)$  より  $x + y \in \text{Img } f$  である。
- $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0)$  より  $f(0) = 0$  となり、  $0 \in \text{Img } f$  である。
- $0 = f(0) = f(x_0 + (-x_0)) = f(x_0) + f(-x_0) = x + f(-x_0)$  であるため、  $-x = f(-x_0)$  より  $-x \in \text{Img } f$  である。

以上により  $\text{Img } f$  は加法群である。

$\text{Img } f \subset N$  より、  $R$  と  $\text{Img } f$  の演算は  $N$  の元となる。  $r \in R, x \in \text{Img } f$  とすると、  $rx = rf(x_0) = f(rx_0)$  であり、  $rx_0 \in M$  より  $rx \in \text{Img } f$  である。

$\text{Img } f$  は  $N$  の部分加法群であり、  $R$  との演算が  $N$  の中で成り立っている為、その他の性質も従う。

よって、  $\text{Img } f$  は  $N$  の左  $R$ -部分加群である。

## 準同型定理

$M, N$  を左  $R$ -加群とし、  $f : M \rightarrow N$  を準同型とする。このとき、以下の写像は (well-defined であり) 同型写像である。

$$\bar{f} : M / \text{Ker } f \rightarrow \text{Img } f, \quad x + \text{Ker } f \mapsto f(x) \quad (10)$$

特に、  $M / \text{Ker } f \cong \text{Img } f$  である。

この定理を示せ。

.....

写像  $f$  は  $f : M \rightarrow \text{Img } f$  とすると全射である。  $f = \bar{f} \circ g$  となるように  $g : M \rightarrow M / \text{Ker } f$  とすると  $g$  も全射である。

$$M \xrightarrow{g} M / \text{Ker } f \xrightarrow{\bar{f}} \text{Img } f \quad (11)$$

$f = \bar{f} \circ g$  であるので、  $\bar{f}$  も全射である。

$x, y \in \text{Img } f$  が  $x = y$  とする。  $x_0, y_0 \in M$  が存在し、  $x = f(x_0), y = f(y_0)$  である。

$x_0 - y_0 \in M$  であり、  $f(x_0 - y_0) = f(x_0) + f(-y_0) = x + (-y) = 0$  である。つまり、  $x_0 - y_0 \in \text{Ker } f$  である。

$x_0 + \text{Ker } f = y_0 + \text{Ker } f$  であることがわかる為、  $\bar{f}(x_0 + \text{Ker } f) = f(x_0) = x$ 、  $\bar{f}(y_0 + \text{Ker } f) = f(y_0) = y$  から、  $\bar{f}$  は単射であることがわかる。

よって、  $\bar{f}$  は全単射である。

その為、  $M / \text{Ker } f$  と  $\text{Img } f$  は同型であり、  $M / \text{Ker } f \cong \text{Img } f$  である。

- 空でない集合  $X$  に対して、 $S_X$  を  $X$  から  $X$  への全単射全体の集合とする。写像の合成を演算として  $S_X$  は群をなす。
- 群  $G$  と集合  $X$  に対して、写像  $G \times X \rightarrow X$ ,  $(g, x) \mapsto gx$  が与えられていて、
  - (1)  $g(hx) = (gh)x$  ( $g, h \in G$ ,  $x \in X$ )
  - (2)  $ex = x$  ( $x \in X$ ,  $e$  は  $G$  の単位元)
 が成り立つとき、 $G$  は  $X$  に左から作用するという。

群  $G$  が集合  $X$  に作用することと、群の準同型  $G \rightarrow S_X$  が存在することが同値であることを示せ。

.....  
 $S_X$  は  $X \rightarrow X$  の恒等写像を単位元とし、 $f \in S_X$  に対し、逆写像  $f^{-1} \in S_X$  を逆元とする。

- 群  $G$  が集合  $X$  に作用しているとする。  
 $g \in G$  に対し、 $x \mapsto gx$  と対応させる写像を  $f_g$  とする。このとき、 $f_{g^{-1}}$  は  $f_g$  の逆写像となり、 $f_{g^{-1}} \circ f_g = f_g \circ f_{g^{-1}} = id_X$  である。  
 群  $G$  の元は全て逆元を持つから  $f_g$  は全単射となり、 $f_g \in S_X$  となる。  
 つまり次のような準同型写像が存在する。

$$G \rightarrow S_X, g \mapsto f_g \quad (12)$$

- 群の準同型  $G \rightarrow S_X$  が存在するとする。

$$f : G \rightarrow S_X, g \mapsto f_g \quad (13)$$

$f_g : X \rightarrow X$  は全単射である。単位元  $e \in G$  に対し、 $f_e$  は恒等写像であり、 $g^{-1} \in G$  に対し、 $f_{g^{-1}}$  は  $f_g$  の逆写像である。

$$G \times X \rightarrow X, (g, x) \mapsto f_g(x) \quad (14)$$

とする。

$f_e$  は恒等写像であるので、 $f_e(x) = x$  である。

$g, h \in G$  に対し、準同型  $G \rightarrow S_X$  より  $f_g \circ f_h = f_{gh}$  である。これにより、

$$f_g(f_h(x)) = (f_g \circ f_h)(x) = f_{gh}(x) \quad (15)$$

であるので、群  $G$  が集合  $X$  に作用している。

これらにより次の 2 つは同値であることがわかる。

- 群  $G$  が集合  $X$  に作用する
  - 群の準同型  $G \rightarrow S_X$  が存在する
-