1-1 Riesz の表現定理の証明で、線型汎函数 ϕ の連続性がないと、証明のどこが破綻するのか説明せよ。

Theorem 1 (Riesz の表現定理)**.** $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ を *Hilbert* 空間とし, ϕ をその上の連続線型汎関数とすると, ただ一つ $h_\phi \in H$ が存在して $\phi(x) = \langle x, h_\phi \rangle$ と表現できる.

Proof. 1. $H = \mathrm{Ker}(\phi) \oplus \mathrm{Ker}(\phi)^\perp$

2. $x \in H$ に対して, $\quad x = x_1 + x_2 \quad (x_1 \in \mathrm{Ker}(\phi),\ x_2 \in \mathrm{Ker}(\phi)^\perp)$

3. $\phi(x) = \phi(x_2)$

4. $H/\mathrm{Ker}(\phi) \simeq \mathrm{Ran}(\phi)$

5. $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Ker}(\phi)^\perp = 1$

6. ${}^\exists h \in \mathrm{Ker}(\phi)^\perp$ s.t. $x_2 = \langle x, h \rangle h$

7. $\phi(x_2) = \langle x, h \rangle \phi(h) = \langle x, \overline{\phi(h)} h \rangle$

8. $h_\phi = \overline{\phi(h)} h$ として存在する。

$\langle x, h_1 \rangle = \langle x, h_2 \rangle$ とする. $\langle x, h_1 \rangle - \langle x, h_2 \rangle = \langle x, h_1 - h_2 \rangle = 0$ とである. ${}^\forall x \in H$ に対して $\langle x, h_1 - h_2 \rangle = 0$ であるので, $h_1 - h_2 = 0$ である. $\square$

. . . .