ここではベクトル空間は実数体 $\mathbb{R}$ 上の空間とする。

ベクトル空間 V の元 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V$ に対して、$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ で生成される部分空間を $\langle \boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2 \rangle$ と書く。$\langle \boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2 \rangle$ は次のように定義される。

$$\langle \boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2 \rangle = \{c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 \in V \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R}\} \tag{1}$$

$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ の時、次を示せ。

1. $\langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c} \rangle = \langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b} \rangle$
2. $\langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c} \rangle = \langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c} \rangle$
3. $\langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c} \rangle = \langle \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c} \rangle$

. . . .

ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ は $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$ を満たす。

1. ${}^\forall \boldsymbol{v} \in \langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c} \rangle$ とする。
   ベクトル $\boldsymbol{v}$ はスカラー $s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{R}$ を用いて $\boldsymbol{v} = s_1\boldsymbol{a} + s_2\boldsymbol{b} + s_3\boldsymbol{c}$ と書ける。
   $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$ 次の式が得られる。

   $$\boldsymbol{v} = s_1\boldsymbol{a} + s_2\boldsymbol{b} + s_3\boldsymbol{c} = s_1\boldsymbol{a} + s_2\boldsymbol{b} + s_3(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) = (s_1 - s_3)\boldsymbol{a} + (s_2 + s_3)\boldsymbol{b} \tag{2}$$

   これにより $\boldsymbol{v} \in \langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b} \rangle$ である。つまり、$\langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c} \rangle \subset \langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b} \rangle$ である。
   逆に ${}^\forall \boldsymbol{w} \in \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ とする。
   ベクトル $\boldsymbol{w}$ はスカラー $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ を用いて $\boldsymbol{w} = t_1\boldsymbol{a} + t_2\boldsymbol{b}$ と書ける。
   $0 \in \mathbb{R}$ を使って、$\boldsymbol{w} = t_1\boldsymbol{a} + t_2\boldsymbol{b} + 0\boldsymbol{c}$ と書けるので、$\boldsymbol{w} \in \langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c} \rangle$ である。つまり、$\langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b} \rangle \subset \langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c} \rangle$ である。
   これらにより $\langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c} \rangle = \langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b} \rangle$ である。
2. 上記と同様に示せる。
   省略すると $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}$ を用いて次のようになる。

   $$\langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c} \rangle = \langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a} + \boldsymbol{c},\ \boldsymbol{c} \rangle = \langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c} \rangle \tag{3}$$

3. $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$ を用いて次のようになる。

   $$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle = \langle \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c} \rangle = \langle \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c} \rangle \tag{4}$$

V をベクトル空間とし、V のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ が $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} + 2\boldsymbol{c} - 3\boldsymbol{d} = \boldsymbol{0}$ を満たす時、$\langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c},\ \boldsymbol{d} \rangle = \langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c} \rangle$ を満たせ。

………………………………………………………………………………

$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} + 2\boldsymbol{c} - 3\boldsymbol{d} = \boldsymbol{0}$ より、$\boldsymbol{d}$ は次のように表せる。

$$\boldsymbol{d} = \frac{1}{3}\boldsymbol{a} - \frac{1}{3}\boldsymbol{b} + \frac{2}{3}\boldsymbol{c} \tag{5}$$

これを用いて次が得られる。

$$\langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c},\ \boldsymbol{d} \rangle = \left\langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c},\ \frac{1}{3}\boldsymbol{a} - \frac{1}{3}\boldsymbol{b} + \frac{2}{3}\boldsymbol{c} \right\rangle = \langle \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c} \rangle \tag{6}$$