$$3\text{ 点 } A, B, C \text{ が一直線上にある} \Leftrightarrow {}^{\exists}k\text{: 定数 s.t. } \overrightarrow{\mathrm{AB}} = k\overrightarrow{\mathrm{AC}} \tag{1}$$

・・

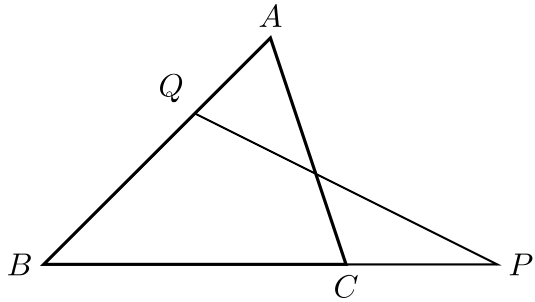
線分 AB を $m:n$ に内分する点を P とする。点 A, B の位置ベクトルを $\vec{a}, \vec{b}$ とすると、点 P の位置ベクトル $\vec{p}$ は次を満たす。

$$\vec{p} = \frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m+n} \tag{2}$$

△ABC において、辺 BC を 2 : 1 に外分する点を P、辺 AB を 1 : 2 に内分する点を Q、辺 CA の中点を R とする。

(1). 3 点 P, Q, R は一直線上にあることを証明せよ。

(2). QR : QP を求めよ。



・・

ベクトル $\vec{b}, \vec{c}$ を $\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とする。

(1). $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ を $\vec{b}, \vec{c}$ で表す。

P は BC を 2 : 1 に外分した点であるから $\overrightarrow{\mathrm{BP}} = 2\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ である。
$\overrightarrow{\mathrm{BP}} = \overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{CP}}$ であるから、$\overrightarrow{\mathrm{CB}} = \overrightarrow{\mathrm{PC}}$ である。
R は AC の中点であるから、$\overrightarrow{\mathrm{CR}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ である。
$\overrightarrow{\mathrm{CA}} = -\vec{c}$, $\overrightarrow{\mathrm{CB}} = \vec{b} - \vec{c}$ であるから $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$, $\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ は次のように表せる。

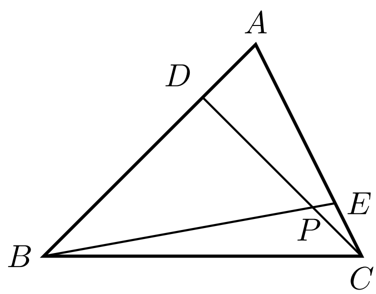
$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{PC}} + \overrightarrow{\mathrm{CA}} + \overrightarrow{\mathrm{AQ}} = (\vec{b} - \vec{c}) + (-\vec{c}) + \frac{1}{3}\vec{b} = \frac{4}{3}\vec{b} - 2\vec{c} \tag{3}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PR}} = \overrightarrow{\mathrm{PC}} + \overrightarrow{\mathrm{CR}} = (\vec{b} - \vec{c}) + (-\frac{1}{2}\vec{c}) = \vec{b} - \frac{3}{2}\vec{c} \tag{4}$$

これにより $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \frac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ であるので、3 点 P, Q, R は一直線上にあることがわかる。

(2). $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \frac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ より QR : QP = 1 : 4 である。

△ABC において、辺 AB を 1 : 2 に内分する点を D、辺 AC を 3 : 1 に内分する点を E とし、線分 CD, BE の交点を P とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \vec{c}$ とするとき、$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\vec{b}, \vec{c}$ を用いて表せ。



$\triangle ACD$ と $\triangle ABE$ を利用し、それぞれにおいて $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\vec{b}, \vec{c}$ で表す。

$\triangle ACD$ において、$CP : PD$ を $s : (1-s)$ とすると $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ は次のように表せる。

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = (1-s)\overrightarrow{\mathrm{AC}} + s\overrightarrow{\mathrm{AD}} = (1-s)\vec{c} + \frac{s}{3}\vec{b} \tag{5}$$

$\triangle ABE$ において、$BP : PE$ を $t : (1-t)$ とすると $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ は次のように表せる。

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AE}} = (1-t)\vec{b} + \frac{3t}{4}\vec{c} \tag{6}$$

この 2 つの $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ の表現より、$\vec{b}, \vec{c}$ の係数が等しくなるように考えると次の 2 つの式が得られる。

$$\frac{s}{3} = 1-t, \quad 1-s = \frac{3t}{4} \tag{7}$$

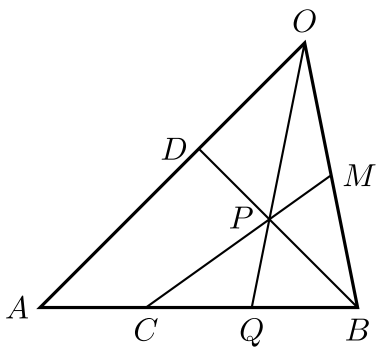
これより $s = \frac{1}{3}$, $t = \frac{8}{9}$ となるため、$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ は次のようになる。

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{1}{9}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c} \tag{8}$$

$\triangle$OAB において、辺 OB の中点を M、辺 AB を 1 : 2 に内分する点を C、辺 OA を 2 : 3 に内分する点を D、線分 CM と線分 BD の交点を P とする。また、$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とする。

(1). $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}, \vec{b}$ を用いて表せ。

(2). 直線 OP と辺 AB の交点を Q とするとき、AQ : QB を求めよ。



(1). 点 P は線分 BD の内分点である。$BP : PD = s : (1-s)$ とすると、$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は次のように表せる。

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-s)\overrightarrow{\mathrm{OB}} + s\overrightarrow{\mathrm{OD}} = (1-s)\vec{b} + \frac{2s}{5}\vec{a} \tag{9}$$

点 P は線分 CM の内分点である。$CP : PM = t : (1-t)$ とすると、$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は次のように表せる。

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OC}} + t\overrightarrow{\mathrm{OM}} = (1-t)(\vec{a} + \frac{1}{3}(\vec{b} - \vec{a})) + \frac{t}{2}\vec{b} = \frac{2(1-t)}{3}\vec{a} + \frac{2+t}{6}\vec{b} \tag{10}$$

この 2 つの式の $\vec{a}, \vec{b}$ の係数から次の式を得る。

$$\frac{2s}{5} = \frac{2(1-t)}{3}, \quad 1-s = \frac{2+t}{6} \tag{11}$$

これを解くと $s = \frac{5}{9}$, $t = \frac{2}{3}$ となり、$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は次のように求まる。

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{2}{9}\vec{a} + \frac{4}{9}\vec{b} \tag{12}$$

(2). $AQ : QB = m : n$ とすると、$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ は次のようになる。

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m+n} \tag{13}$$

また、$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の定数倍であるので、$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = k\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ となる k が存在する。
$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は次のような式に変形できる。

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{2}{9}\vec{a} + \frac{4}{9}\vec{b} = \frac{6}{9}\left(\frac{2}{6}\vec{a} + \frac{4}{6}\vec{b}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{\vec{a} + 2\vec{b}}{2+1} \tag{14}$$

ここから、$\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は AB を $2:1$ に内分する点を終点とするベクトルであることがわかる。
点 Q は AB の内分点であり、直線 OP 上の点である為、$\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の終点が Q ということとなる。
よって、$AQ : QB = 2 : 1$ である。
