次のように W を定めると W は V^4 の部分空間である。

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in V^4 \;\middle|\; 2y - z + w = 0 \right\} \tag{1}$$

この時、W の基底を求めよ。

W の元は $2y - z + w = 0$ を満たす。ベクトルは成分ごとの和で加法を定めているため、次のように x, y, z ごとで分けた 3 つの元の和で表せる。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ -2y + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \\ -2y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \\ z \end{pmatrix} \tag{2}$$

$x, y, z \in V$ は V^4 のスカラーであるので、上記式は次のようになる。

$$\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \\ -2y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

よって、W の基底は次の 3 つである。

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$