$$\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

$t=1-x$ と置く。t を x で微分すると $\mathrm{d}t/\mathrm{d}x=-1$ であるので、$\mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$ が得られる。x が 0 から 1 に変化すると t は 1 から 0 に変化する。そこで、変数を置換すると次の式が得られる。

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x = \int_1^0 (1-t)\sqrt{t}\,(-\mathrm{d}t) \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
\int_1^0 (1-t)\sqrt{t}\,(-\mathrm{d}t) &= \int_0^1 (t^{\frac{1}{2}}-t^{\frac{3}{2}})\,\mathrm{d}t = \left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}\right]_{t=0}^{t=1} &(3)\\
&= \left(\frac{2}{3}\times 1^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}\times 1^{\frac{5}{2}}\right)-\left(\frac{2}{3}\times 0^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}\times 0^{\frac{5}{2}}\right) &(4)\\
&= \frac{4}{15} &(5)
\end{aligned}$$

··

不定積分を先に行う場合

$t=1-x$ より $\mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$ となる。

$$\begin{aligned}
\int x\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x &= \int (1-t)\sqrt{t}\,(-\mathrm{d}t) &(6)\\
&= -\int (t^{\frac{1}{2}}-t^{\frac{3}{2}})\,\mathrm{d}t &(7)\\
&= -\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}+C &(8)\\
&= -\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{5}(1-x)^{\frac{5}{2}}+C &(9)
\end{aligned}$$

上の式より定積分を計算する。

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x &= \left[-\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{5}(1-x)^{\frac{5}{2}}\right]_{x=0}^{x=1} &(10)\\
&= \frac{4}{15} &(11)
\end{aligned}$$

注意事項

定積分と不定積分は異なる計算であるため、等号で結ぶことは出来ない。

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x \neq \int (1-t)\sqrt{t}\,\mathrm{d}t \tag{12}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n} + \frac{1}{n} \right) \neq \int_0^1 (x+0)\ \mathrm{d}x \tag{13}$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n} + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{n} \left(\frac{n+1}{2} + 1 \right) = \frac{n+3}{2n} \tag{14}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n} + \frac{1}{n} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{2n} = \frac{1}{2} \tag{15}$$