X は連続分布に従う確率変数で、その密度関数 $\rho(x)$ で与えられるとする。

$$\rho(x) = C\frac{1}{(1+|x-1|)^5}, \qquad (C\text{は正定数}) \tag{1}$$

(1). 定数 C を計算せよ。

(2). X の期待値と分散を計算せよ。

(3). $|X| \leq 1$ となる確率を計算せよ。

---

(1). 定数 C を計算せよ。

....

確率密度関数は実数全体で積分すると 1 になる。

$$\int_{-\infty}^{\infty}\rho(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{1} C\frac{1}{(1+|x-1|)^5}\mathrm{d}x + \int_{1}^{\infty} C\frac{1}{(1+|x-1|)^5}\mathrm{d}x \tag{2}$$

$$= \int_{-\infty}^{1} C\frac{1}{(2-x)^5}\mathrm{d}x + \int_{1}^{\infty} C\frac{1}{x^5}\mathrm{d}x \tag{3}$$

$$\int_{-\infty}^{1}\frac{1}{(2-x)^5}\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{4}(2-x)^{-4}\right]_{x=-\infty}^{x=1} = \frac{1}{4} \tag{4}$$

$$\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x^5}\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{-4}x^{-4}\right]_{x=1}^{x=\infty} = \frac{1}{4} \tag{5}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\rho(x)\mathrm{d}x = \frac{C}{4} + \frac{C}{4} = \frac{C}{2} \tag{6}$$

よって、$C = 2$ である。

(2). X の期待値と分散を計算せよ。

....

期待値

期待値 $E[X]$ は $x\rho(x)$ を積分することで得られる。

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\rho(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{1}\frac{2x}{(2-x)^5}\mathrm{d}x + \int_{1}^{\infty}\frac{2x}{x^5}\mathrm{d}x \tag{7}$$

後半部分は次のようになる。

$$\int_{1}^{\infty}\frac{2x}{x^5}\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{-3}x^{-3}\right]_{x=1}^{x=\infty} = \frac{2}{3} \tag{8}$$

前半部分は $t=2-x$ と置き、置換積分を行う。

$$\int_{-\infty}^{1} \frac{2x}{(2-x)^5}\mathrm{d}x = \int_{\infty}^{1} \frac{2(2-t)}{t^5}(-\mathrm{d}t) = \int_{1}^{\infty} \left(4t^{-5} - 2t^{-4}\right)\mathrm{d}t \tag{9}$$

$$= \left[\frac{4}{-4}t^{-4} - \frac{2}{-3}t^{-3}\right]_{t=1}^{t=\infty} = \frac{1}{3} \tag{10}$$

よって、次のように期待値 $E[X]$ は 1 となる。

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\rho(x)\mathrm{d}x = 1 \tag{11}$$

分散

分散 $V[X]$ は $E[(X-E[X])^2]$ で定義される。つまり、$V[X]=E[X^2]-(E[X])^2$ である。先ほど $E[X]=1$ であることがわかったので、$E[X^2]$ を計算する。

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\rho(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{1} \frac{2x^2}{(2-x)^5}\mathrm{d}x + \int_{1}^{\infty} \frac{2x^2}{x^5}\mathrm{d}x \tag{12}$$

後半部分を計算する。

$$\int_{1}^{\infty} \frac{2x^2}{x^5}\mathrm{d}x = \int_{1}^{\infty} 2x^{-3}\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{-2}x^{-2}\right]_{x=1}^{x=\infty} = 1 \tag{13}$$

前半部分は $t=2-x$ として、置換積分を行う。

$$\int_{-\infty}^{1} \frac{2x^2}{(2-x)^5}\mathrm{d}x = \int_{\infty}^{1} \frac{2(2-t)^2}{t^5}(-\mathrm{d}t) = \int_{1}^{\infty} \left(8t^{-5} - 8t^{-4} + 2t^{-3}\right)\mathrm{d}t \tag{14}$$

$$= \left[\frac{8}{-4}t^{-4} - \frac{8}{-3}t^{-3} + \frac{2}{-2}t^{-2}\right]_{t=1}^{t=\infty} = \frac{1}{3} \tag{15}$$

これにより $E[X^2]=4/3$ であるので、分散 $V[X]$ は次のように求まる。

$$V[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{4}{3} - 1^2 = \frac{1}{3} \tag{16}$$

(3). $|X| \leq 1$ となる確率を計算せよ。

…………………………………………………………………………………

$|X| \leq 1$ となる確率は密度関数 $\rho(x)$ を $|x| \leq 1$ の範囲で積分することで求まる。$t=2-x$ として置換積分を用いて計算する。

$$\int_{-1}^{1} \rho(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \frac{2}{(2-x)^5}\mathrm{d}x = \int_{3}^{1} \frac{2}{t^5}(-\mathrm{d}t) \tag{17}$$

$$= \int_{1}^{3} 2t^{-5}\mathrm{d}t = \left[\frac{2}{-4}t^{-4}\right]_{t=1}^{t=3} = \frac{40}{81} \tag{18}$$

よって、確率は $P(|X| \leq 1) = \frac{40}{81}$ である。