R を可換環とする。左 R-加群 M が与えられたとき、$M \times R \to M$ を $(x,a) \mapsto ax$ で定めると、M は右 R-加群にもなることを示せ。また、M は両側 (R,R)-加群にもなることを示せ。

……………………………………………………………………

定義 加群

加法群 M に対して、環 R との演算が次のように定義されているとする。

$$R \times M \to M, \quad (r,m) \mapsto rm \tag{1}$$

この演算が次の性質を満たすとき、M は左 R-加群であると言う。

(1) $1m = m \quad (1 \in R, m \in M)$
(2) $a(bm) = (ab)m \quad (a,b \in R, m \in M)$
(3) $(a+b)m = am + bm \quad (a,b \in R, m \in M)$
(4) $a(m+n) = am + an \quad (a \in R, m,n \in M)$

式 (1) の演算の左右を入れ替えることで右 R-加群が定義できる。

……………………………………………………………………

環 R との演算の定義は $(x,a) \mapsto ax$ であるので、加群の定義の性質を確認する。
右からの外部演算を (x,a) と書くこととする。

- $1 \in R,\ x \in M$ について $(x,1) = 1x$ であり、$1x$ は左 R-加群で定義されているので、$(x,1) = 1x = x$ である。
- $a,b \in R,\ x \in M$ について $((x,b),a) = (bx,a) = abx$ である。また、ab のと演算は $(x,ba) = bax$ であるが、R は可換環であるので、$(x,ba) = bax = abx$ である。つまり、$((x,b),a) = abx = (x,ab)$ である。
- $a,b \in R,\ x \in M$ について $(x,a+b) = (a+b)x$ である。$(x,a) = ax,\ (x,b) = bx$ より $(x,a+b) = (a+b)x = ax + bx = (x,a) + (x,b)$ である。
- $a \in R,\ x,y \in M$ について $(x+y,a) = a(x+y)$ であり、$(x,a) = ax,\ (y,a) = ay$ であるから $(x+y,a) = a(x+y) = ax + ay = (x,a) + (y,a)$ である。

これにより右側からの演算が定義されるので右加群である。

M は左 R-加群であり右 R-加群でもある。$a,b \in R,\ x \in M$ として、$a(x,b)$ と (ax,b) について考える。

- $a(x,b) = abx$
- $(ax,b) = bax$

R が可換環であるので、$ba = ab$ である。その為、$a(x,b) = abx = bax = (ax,b)$ となり、両側加群となる。

M を左 R-加群とし、$N \subset M$ を左 R-部分加群とする。集合 $M/N = \{x+N \mid x \in M\}$ に対して、

$$(x+N)+(y+N) := (x+y)+N \qquad (x,y \in N) \tag{2}$$
$$a(x+N) := ax+N \qquad (a \in R, x \in N) \tag{3}$$

と定めると M/N は左 R-加群になる。これを左 R-剰余加群 (quotient module) と呼ぶ。

(1) $x+N = y+N \Leftrightarrow x-y \in N$ $(x,y \in N)$ を示せ。

(2) 上の 2 つの演算が well-defined であることを示せ。

. . . .

$x,y \in N$ とする。
$x+N$ は N の元と x との和全体の集合である。

- $x+N = y+N \Rightarrow x-y \in N$
  $x+N = y+N$ は $n_x, n_y \in N$ が存在し、$x+n_x = y+n_y$ となることを意味する。
  両辺を移項することで、$x-y = n_y - n_x$ が得られる。
  N は部分加群であるから $n_y - n_x \in N$ であるので、$x-y \in N$ である。
- $x+N = y+N \Leftarrow x-y \in N$
  $x-y \in N$ よりある $n \in N$ が存在し、$x-y = n$ である。これにより、$x = y+n,\ y = x-n$ が得られる。
  任意の $n_x \in N$ に対して、$x+n_x = y+n+n_x$ である。$n+n_x \in N$ より $x+n_x \in y+N$ である。つまり、$x+N \subset y+N$ である。
  同様に任意の $n_y \in N$ に対して、$y+n_y = x-n+n_y$ である為、$y+n_y \in x+N$ であり、$y+N \subset x+N$ である。
  よって、$x+N = y+N$ である。

よって、$x+N = y+N \iff x-y \in N$ である。
式 (2)、式 (3) で定義された演算が well-defined を示す。
具体的には剰余類 $x+N$ の代表元の取り方に依存せず演算が成り立つことを確認する。
式 (2) $(x+N)+(y+N) := (x+y)+N$
$x,\ y \in M$ に対して、$x',\ y' \in M$ が存在し、$x+N = x'+N,\ y+N = y'+N$ とす

る。次のように演算が定義されている。

$$(x+N)+(y+N)=(x+y)+N \tag{4}$$
$$(x'+N)+(y'+N)=(x'+y')+N \tag{5}$$

先程の証明より次が成り立つ。

$$x+N=x'+N \Longleftrightarrow x-x' \in N \tag{6}$$
$$y+N=y'+N \Longleftrightarrow y-y' \in N \tag{7}$$

式 (4) と式 (5) の左辺は等しいため、右辺が等しくなることを示せばよい。

N は部分加群であり、$x-x' \in N,\ y-y' \in N$ より $x-x'+y-y' \in N$ である。

$x',\ y'$ のマイナス元が $-x',\ -y'$ である為、$x'+y'$ のマイナス元が $-x'-y'$ である。つまり、$-(x'+y')=-x'-y'$ である。

この為、$x-x'+y-y'=(x+y)-(x'+y') \in N$ であり、$(x+y)+N=(x'+y')+N$ であることが言える。

M, N を左 R-加群とし、$f: M \to N$ を準同型とする。このとき、

$$\operatorname{Ker} f := \{x \in M \mid f(x)=0\} \tag{8}$$
$$\operatorname{Img} f := \{f(x) \in N \mid x \in M\} \tag{9}$$

とおき、それぞれを f の核 (kernel)、f の像 (image) と呼ぶ。

(1) $\operatorname{Ker} f$ は M の左 R-部分加群であることを示せ。

(2) $\operatorname{Img} f$ は N の左 R-部分加群であることを示せ。

....

(1) $\operatorname{Ker} f$ は M の左 R-部分加群であることを示す。

$x,\ y \in \operatorname{Ker} f$ とする。

- $f(x+y)=f(x)+f(y)=0+0=0$ より $x+y \in \operatorname{Ker} f$ である。
- $f(0)=f(0+0)=f(0)+f(0)$ より $f(0)=0$ となり、$0 \in \operatorname{Ker} f$ である。
- $f(0)=f(x+(-x))=f(x)+f(-x)$ であり、$f(x)=0$ より $-x \in \operatorname{Ker} f$ である。

以上により $\operatorname{Ker} f$ は加法群である。

$\operatorname{Ker} f \subset M$ より、R と $\operatorname{Ker} f$ の演算は M の元となる。$r \in R,\ x \in \operatorname{Ker} f$ とすると、$f(rx)=rf(x)=r0=0$ より $rx \in \operatorname{Ker} f$ である。

他の性質は M は加群であり、$\operatorname{Ker} f$ は M の部分加法群であることから従う。

よって、$\operatorname{Ker} f$ は M の左 R-部分加群である。

(2) $\mathrm{Img}\, f$ は N の左 R-部分加群であることを示す。

$x,\ y \in \mathrm{Img}\, f$ とする。$x_0, y_0 \in M$ が存在し、$x = f(x_0), y = f(y_0)$ である。

- $x + y = f(x_0) + f(y_0) = f(x_0 + y_0)$ より $x + y \in \mathrm{Img}\, f$ である。
- $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0)$ より $f(0) = 0$ となり、$0 \in \mathrm{Img}\, f$ である。
- $0 = f(0) = f(x_0 + (-x_0)) = f(x_0) + f(-x_0) = x + f(-x_0)$ であるため、$-x = f(-x_0)$ より $-x \in \mathrm{Img}\, f$ である。

以上により $\mathrm{Img}\, f$ は加法群である。

$\mathrm{Img}\, f \subset N$ より、R と $\mathrm{Img}\, f$ の演算は N の元となる。$r \in R,\ x \in \mathrm{Img}\, f$ とすると、$rx = rf(x_0) = f(rx_0)$ であり、$rx_0 \in M$ より $rx \in \mathrm{Img}\, f$ である。

$\mathrm{Img}\, f$ は N の部分加法群であり、R との演算が N の中で成り立っている為、その他の性質も従う。

よって、$\mathrm{Img}\, f$ は N の左 R-部分加群である。

準同型定理

M, N を左 R-加群とし、$f : M \to N$ を準同型とする。このとき、以下の写像は (well-defined であり) 同型写像である。

$$\bar{f} : M/\operatorname{Ker} f \to \mathrm{Img}\, f, \quad x + \operatorname{Ker} f \mapsto f(x) \tag{10}$$

特に、$M/\operatorname{Ker} f \cong \mathrm{Img}\, f$ である。

この定理を示せ。

....

写像 f は $f : M \to \mathrm{Img}\, f$ とすると全射である。$f = \bar{f} \circ g$ となるように $g : M \to M/\operatorname{Ker} f$ とすると g も全射である。

$$M \xrightarrow{g} M/\operatorname{Ker} f \xrightarrow{\bar{f}} \mathrm{Img}\, f \tag{11}$$

$f = \bar{f} \circ g$ であるので、$\bar{f}$ も全射である。

$x, y \in \mathrm{Img}\, f$ が $x = y$ とする。$x_0, y_0 \in M$ が存在し、$x = f(x_0),\ y = f(y_0)$ である。

$x_0 - y_0 \in M$ であり、$f(x_0 - y_0) = f(x_0) + f(-y_0) = x + (-y) = 0$ である。つまり、$x_0 - y_0 \in \operatorname{Ker} f$ である。

$x_0 + \operatorname{Ker} f = y_0 + \operatorname{Ker} f$ であることがわかる為、$\bar{f}(x_0 + \operatorname{Ker} f) = f(x_0) = x$、$\bar{f}(y_0 + \operatorname{Ker} f) = f(y_0) = y$ から、$\bar{f}$ は単射であることがわかる。

よって、$\bar{f}$ は全単射である。

その為、$M/\operatorname{Ker} f$ と $\mathrm{Img}\, f$ は同型であり、$M/\operatorname{Ker} f \cong \mathrm{Img}\, f$ である。

- 空でない集合 X に対して、S_X を X から X への全単射全体の集合とする。写像の合成を演算として S_X は群をなす。
- 群 G と集合 X に対して、写像 $G \times X \to X,\ (g, x) \mapsto gx$ が与えられていて、
  (1) $g(hx) = (gh)x\ (g, h \in G,\ x \in X)$
  (2) $ex = x\ (x \in X, e$はGの単位元$)$
  が成り立つとき、G は X に左から作用するという。

群 G が集合 X に作用することと、群の準同型 $G \to S_X$ が存在することが同値であることを示せ。

. . . .

S_X は $X \to X$ の恒等写像を単位元とし、$f \in S_X$ に対し、逆写像 $f^{-1} \in S_X$ を逆元とする。

- 群 G が集合 X に作用しているとする。
  $g \in G$ に対し、$x \mapsto gx$ と対応させる写像を f_g とする。このとき、$f_{g^{-1}}$ は f_g の逆写像となり、$f_{g^{-1}} \circ f_g = f_g \circ f_{g^{-1}} = id_X$ である。
  群 G の元は全て逆元を持つから f_g は全単射となり、$f_g \in S_X$ となる。
  つまり次のような準同型写像が存在する。
  $$G \to S_X,\ g \mapsto f_g \tag{12}$$
- 群の準同型 $G \to S_X$ が存在するとする。
  $$f : G \to S_X,\ g \mapsto f_g \tag{13}$$
  $f_g : X \to X$ は全単射である。単位元 $e \in G$ に対し、f_e は恒等写像であり、$g^{-1} \in G$ に対し、$f_{g^{-1}}$ は f_g の逆写像である。
  $$G \times X \to X,\ (g, x) \mapsto f_g(x) \tag{14}$$
  とする。
  f_e は恒等写像であるので、$f_e(x) = x$ である。
  $g, h \in G$ に対し、準同型 $G \to S_X$ より $f_g \circ f_h = f_{gh}$ である。これにより、
  $$f_g(f_h(x)) = (f_g \circ f_h)(x) = f_{gh}(x) \tag{15}$$
  であるので、群 G が集合 X に作用している。

これらにより次の 2 つは同値であることがわかる。

- 群 G が集合 X に作用する
- 群の準同型 $G \to S_X$ が存在する

テンソル積

R を環とし、M を右 R-加群、N を左 R-加群とする。このとき、次のような加法群 $M \otimes_R N$ を M と N のテンソル積という。

(1)
$$M \otimes_R N = \left\{ \sum_{i=1}^{k} m_i \otimes n_i \;\middle|\; k \geq 1,\ m_i \in M,\ n_i \in N \right\} \tag{16}$$

(2) $m, m' \in M,\ n, n' \in N,\ r \in R$ について次の演算が成り立つ。

- $(m + m') \otimes n = m \otimes n + m' \otimes n$
- $m \otimes (n + n') = m \otimes n + m \otimes n'$
- $(mr) \otimes n = m \otimes (rn)$

上記の加法群 $M \otimes_R N$ において、$m \otimes 0 = 0 \otimes n = 0$ が成り立つことを示せ。

....

$M \otimes_R N$ の任意の元を取り出す。$\alpha \otimes \beta \in M \otimes_R N$ このとき、$\alpha \in M,\ \beta \in N$ である。$m \otimes 0 \in M \otimes_R N$ との和を考える。$m \in M$ より $\alpha - m \in M$ である。これにより次のような計算ができる。

$$\begin{aligned}
\alpha \otimes \beta + m \otimes 0 &= (\alpha - m + m) \otimes \beta + m \otimes 0 && (17)\\
&= (\alpha - m) \otimes \beta + m \otimes \beta + m \otimes 0 && (18)\\
&= (\alpha - m) \otimes \beta + m \otimes (\beta + 0) && (19)\\
&= (\alpha - m) \otimes \beta + m \otimes \beta && (20)\\
&= (\alpha - m + m) \otimes \beta \qquad = \alpha \otimes \beta && (21)
\end{aligned}$$

同様に $\alpha \otimes \beta + 0 \otimes n = \alpha \otimes \beta$ である。
よって、$m \otimes 0,\ 0 \otimes n$ は零元であり、$m \otimes 0 = 0 \otimes n = 0$ となる。

$\mathbb{C}$ 上のベクトル空間 $\mathfrak{g}$ に対して、積 $(x, y) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \mapsto [x, y] \in \mathfrak{g}$ が定義され、次の 3 つの性質を満たすとき、$\mathfrak{g}$ をリー代数 (Lie algebra) という。

双線型性　$\alpha, \beta \in \mathbb{C}, x, y, z \in \mathfrak{g}$ に対して次の式が成り立つ。

$$[\alpha x + \beta y, z] = \alpha[x, z] + \beta[y, x], \quad [z, \alpha x + \beta y] = \alpha[z, x] + \beta[z, y] \tag{22}$$

交代性　${}^\forall x \in \mathfrak{g}$ に対して次が成り立つ。

$$[x, x] = 0 \tag{23}$$

Jacobi 恒等式　$^\forall x, y, z \in \mathfrak{g}$ に対して次が成り立つ。

$$[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0 \tag{24}$$

複素数を成分とする n 次正方行列全体の集合を $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ と表す。

$X, Y \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ に対して、演算 $[X,Y]=XY-YX$ と定めると $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ はリー代数となる。これを $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ と表す。

$$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) := \{X \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \mid \mathrm{tr}X = 0\}, \qquad [X,Y] := XY - YX \tag{25}$$

$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ は演算 $[X,Y] \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ によりリー代数となる。(n 次特殊線形リー代数)

$$\mathfrak{o}_n(\mathbb{C}) := \{X \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \mid {}^tX = -X\} \tag{26}$$

(n 次直交リー代数)

(1) $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ は $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ のイデアルであることを示せ。
(2) $\mathfrak{o}_n(\mathbb{C})$ は $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ のイデアルでないことを示せ。

…………………………………………………………………………

環 R に対し、I がイデアルであるとは、部分環 $I \subset R$ であり、$i \in I,\ r \in R \Rightarrow ir \in I$ となる事をいう。

(1) $X, Y \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ とする。
$\mathrm{tr}X = \mathrm{tr}Y = 0$ より $\mathrm{tr}(X+Y) = \mathrm{tr}X + \mathrm{tr}Y = 0$ であるので、$X+Y \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ である。
$A \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ 対して、$[A,X]$ について考える。$\mathrm{tr}AX = \mathrm{tr}XA$ より $\mathrm{tr}AX - \mathrm{tr}XA = 0$ であるから $\mathrm{tr}(AX - XA) = 0$ となり $[A,X] \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ である。
よって、$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ は $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ のイデアルである。

(2) $X \in \mathfrak{o}_n(\mathbb{C}),\ A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ とする。定義から ${}^tX = -X$ である。
$[A,X],\ {}^t[A,X]$ を考える。

$$[A,X] = AX + {}^tXA, \quad {}^t[A,X] = {}^tX{}^tA + {}^tAX \tag{27}$$

和 ${}^t[A,X] + [A,X]$ が 0 であれば、$[A,X] \in \mathfrak{o}_n(\mathbb{C})$ である。

$$\begin{aligned} {}^t[A,X] + [A,X] &= {}^tX{}^tA + {}^tAX + AX + {}^tXA &(28)\\ &= {}^tX({}^tA + A) + ({}^tA + A)X &(29)\\ &= -X({}^tA + A) + ({}^tA + A)X &(30) \end{aligned}$$

> 交代行列 X と対称行列 ${}^tA+A$ の積は一般には一致しない。$X({}^tA+A) \neq ({}^tA+A)X$ つまり、${}^t[A,X]+[A,X] \neq 0$ となる $X \in \mathfrak{o}_n(\mathbb{C}),\ A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ が存在するため、$\mathfrak{o}_n(\mathbb{C})$ は $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ のイデアルではない。

V を有限次元のベクトル空間とする。

$f_1, f_2, \ldots, f_n \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ が V 上で対角化可能で、かつ、全ての $1 \leq k, m \leq n$ について $f_k f_m = f_m f_k$ が成り立つなら $f_1, f_2, \ldots, f_n$ は V 上で同時対角化可能であることを示せ。

> 同時対角化可能とは、「$f_1, f_2, \ldots, f_n$ の表現行列が同時に対角行列になるような V の基底が存在する」ことをいう。

....

$f_k f_m = f_m f_k$ であるなら f_k, f_m の表現行列 M_k, M_m に対して、$M_k M_m = M_m M_k$ である。

$f_k,\ f_m$ は対角化可能であるから、M_k, M_m は対角化可能である。

M_k の固有値を λ_k、固有ベクトルを $\boldsymbol{v}_k$ とすると、次のような計算ができる。

$$M_k(M_m \boldsymbol{v}_k) = M_m M_k \boldsymbol{v}_k = M_m \lambda_k \boldsymbol{v}_k = \lambda_k (M_m \boldsymbol{v}_k) \tag{31}$$

これにより $M_m \boldsymbol{v}_k$ も M_k の固有値 λ_k の固有ベクトルである。

固有値 λ_k の固有空間を V_k とする。V_k は $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間 V の部分空間であり、次のような集合である。

$$V_k = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n \mid M_k \boldsymbol{v} = \lambda_k \boldsymbol{v}\} \tag{32}$$

つまり、$M_m \boldsymbol{v}_k \in V_k$ ということであり、$M_m V_k \subset V_k$ というを意味する。

同様の議論から、正方行列 M_k の全ての固有空間について $M_m V_k \subset V_k$ が成り立つ。

M_k と M_m を入れ替えることにより、正方行列 M_m の全ての固有空間について $M_k V_m \subset V_m$ が成り立つ。

これにより M_k と M_m の固有空間は一致する。その為、固有空間の基底を並べた行列を用いることで M_k, M_m の対角化が可能である。

$f_k f_m = f_m f_k$ を満たせば同時対角化可能となるので、$f_1, f_2, \ldots, f_n$ は V 上で同時対角化可能である。
