無限級数入門

https://www.juen.ac.jp/math/nakagawa/Series.pdf

ライプニッツの級数のやさしい証明

http://www.core.kochi-tech.ac.jp/m_inoue/work/pdf/math_tale/05.pdf

**Leibniz 級数**（ライプニッツ）

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4} \tag{1}$$

**等比級数の和**

$$\sum_{k=0}^{n} ar^k = \begin{cases} \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r} & (r \neq 1) \\ a(n+1) & (r = 1) \end{cases} \tag{2}$$

$r \neq 1$ の場合の無限等比級数の和

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} ar^k = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r} \tag{3}$$

$|r| < 1$ の時、$\lim_{n\to\infty} r^{n+1} = 0$ である為、

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \frac{a}{1-r} \tag{4}$$

無限等比級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ は

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-x^2\right)^n \tag{5}$$

であるので、$|-x^2| < 1$ において公式 (4) が使え、次のようになる。

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n = \frac{1}{1-(-x^2)} = \frac{1}{1+x^2} \tag{6}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2} \tag{7}$$

式 (7) の両辺を 0 から $x$ において積分する。

$$\int_0^x \left( \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \right) \mathrm{d}x = \int_0^x \left( \frac{1}{1+x^2} \right) \mathrm{d}x \tag{8}$$

$\arctan x$ の導関数は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arctan x = \frac{1}{1+x^2} \tag{9}$$

であるので、次のように定積分で表せる。

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x \tag{10}$$

式 (8) の右辺は $\arctan x$ である。

左辺は式 (7) が $|x| < 1$ の範囲において一様収束する為、積分と和を入れ替えることができる。(項別積分)

$$\int_0^x \left( \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \int_0^x (-1)^n x^{2n} \mathrm{d}x \right) \tag{11}$$

そこで、一つの項の積分を行う。

$$\int_0^x (-1)^n x^{2n} \mathrm{d}x = \left[ \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \right]_0^x = \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \tag{12}$$

式 (8) の左辺は次のようになる。

$$\int_0^1 \left( \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \tag{13}$$

式 (8) は $|x| < 1$ において次のようになる。(グレゴリー級数)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = \arctan x \tag{14}$$

そこで、$x \to 1 - 0$ と極限を取ると次のライプニッツの公式が得られる。

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4} \tag{15}$$

---