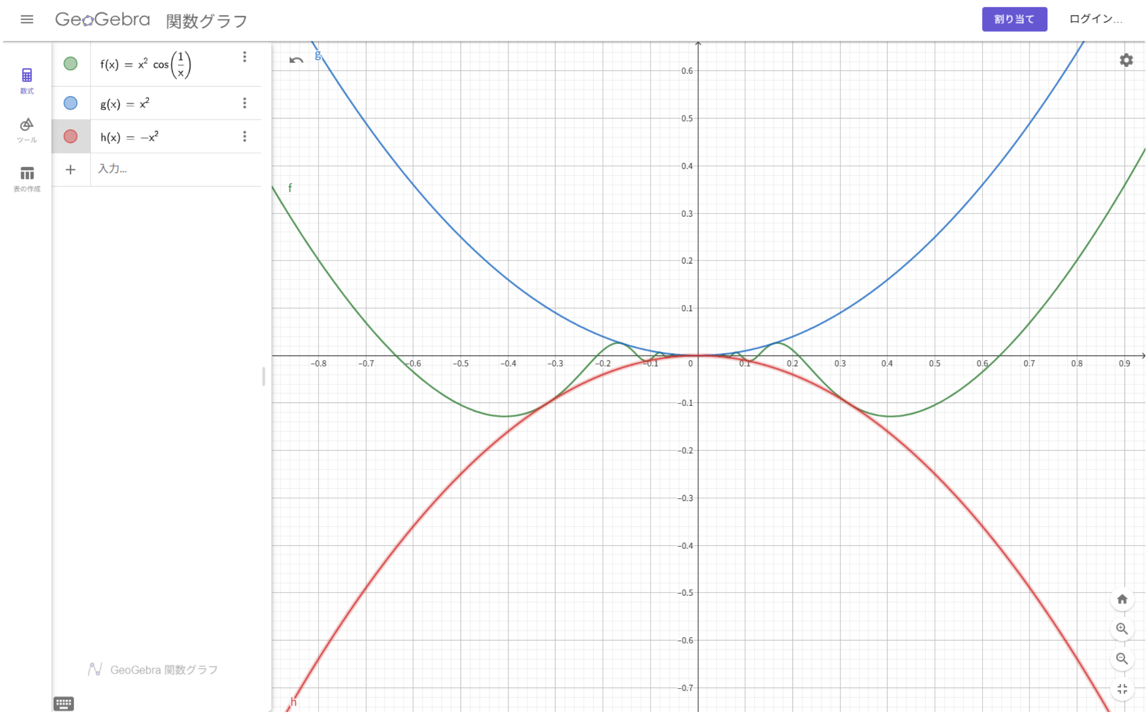
$x^2 \cos\frac{1}{x}$ の $x = 0$ における微分可能性

$f(x) = x^2 \cos\frac{1}{x}$ とし、$x = 0$ における微分係数 $f'(0)$ を求める。
微分係数 $f'(0)$ は次のような極限で定義される。

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} \tag{1}$$

まず、$f(0)$ の値を求める。

$x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ において $-1 \leq \cos\frac{1}{x} \leq 1$ であるので、$-x^2 \leq f(x) \leq x^2$ である。つまり、$y = f(x)$ は $y = -x^2$ と $y = x^2$ の間にグラフが描かれる。



$x = 0$ としてみれば、$0 \leq f(0) \leq 0$ となるので、$f(0) = 0$ と定義すると都合が良い。
そこで、$f(0) = 0$ として (1) に当てはめると次のようになる。

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x)}{\Delta x} \tag{2}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x \cos\frac{1}{\Delta x} = 0 \tag{3}$$

つまり、$f'(0) = 0$ である。
$f'(0)$ の値が存在するので、$f(0) = 0$ とするなら $x = 0$ において微分可能である。

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x = 0) \\ x^2 \cos \frac{1}{x} & (\text{otherwise}) \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad f'(0) = 0 \tag{4}$$

$x^2 \cos \frac{1}{x}$ の導関数を公式を用いて求める。

$$\begin{aligned} \left(x^2 \cos \frac{1}{x} \right)' &= (x^2)' \cos \frac{1}{x} + x^2 \left(\cos \frac{1}{x} \right)' \qquad (5) \\ &= 2x \cos \frac{1}{x} + x^2 \left(- \sin \frac{1}{x} \right) \left(\frac{1}{x} \right)' \qquad (6) \\ &= 2x \cos \frac{1}{x} + x^2 \left(- \sin \frac{1}{x} \right) \left(- \frac{1}{x^2} \right) \qquad (7) \\ &= 2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x} \qquad (8) \end{aligned}$$