問題 11. 以下の写像について、単射・全射を調べよ。

定義 (全射、単射)

写像 $f : A \to B$ とする。

f が単射であるとは、任意の $x_A,\ y_A \in A$ に対して $x_A \neq y_A \Rightarrow f(x_A) \neq f(y_A)$ となることをいう。(条件の対偶を取って考えることが多い) つまり、B の元に複数の A の元からの対応は存在しない。

f が全射であるとは、任意の $x_B \in B$ に対して $x_B = f(x_A)$ となる $x_A \in A$ が存在することをいう。つまり、B の全ての元は A の元からの対応が存在する。

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2$

f は単射でも全射でもない。以下に反例を示す。

$1, -1 \in \mathbb{R}$ であり、$1 \neq -1$ である。しかし、$f(1) = 1,\ f(-1) = 1$ より $f(1) = f(-1)$ となるので、f は単射ではない。

$-1 \in \mathbb{R}$ である。しかし、$-1 = x^2$ を満たす $x \in \mathbb{R}$ は存在しない。よって、f は全射ではない。

(b) $g : \mathbb{R} \to (0, \infty) \subset \mathbb{R}, \quad g(x) = e^x$

g は全単射である。全射から示す。

実数 $\alpha > 0$ を一つ取ってくる。これに対し $x = \log\alpha$ とすると $e^x = \alpha$ であり、$\log\alpha \in \mathbb{R}$ であるので g は全射である。

正の実数 α, β を取ってくる。g は全射であるので、$x_\alpha, x_\beta \in \mathbb{R}$ が存在し、$\alpha = g(x_\alpha),\ \beta = g(x_\beta)$ である。「$\alpha = \beta \Rightarrow x_\alpha = x_\beta$」を示せればよい。

$g(x_\alpha) = e^{x_\alpha}$ であるが、$\alpha = e^{x_\alpha}$ を満たす $x_\alpha \in \mathbb{R}$ は $x_\alpha = \log\alpha$ のみである。よって、$\alpha = \beta$ であれば、$\log\alpha = \log\beta$ であるので、$x_\alpha = x_\beta$ である。

問題 12. $\lim_{x \to 1} x^3 = 1$ を証明せよ。なお、定義域は $[0, 2] \subset \mathbb{R}$ とする。

ε-δ 論法

$$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha \tag{1}$$

$$\overset{\text{def}}{\iff} \quad {}^\forall\varepsilon > 0,\ {}^\exists\delta > 0 \quad \text{s.t.} \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon \tag{2}$$

・・

$y = x - 1$ とすると

$$\lim_{x\to 1} x^3 = \lim_{y\to 0}(y+1)^3 = \lim_{y\to 0}(y^3 + 3y^2 + 3y + 1) \tag{3}$$

$\lim_{y\to 0} y^3 = 0$ を示す。
${}^\forall\varepsilon > 0$ に対して、$\delta = \sqrt[3]{\varepsilon}$ とする。この時、$0 < |y| < \delta$ となる y に対して $|y^3| = |y|^3 < \delta^3 = (\sqrt[3]{\varepsilon})^3 = \varepsilon$ であるので、$\lim_{y\to 0} y^3 = 0$ である。
同様に $\lim_{y\to 0} y^2 = 0,\ \lim_{y\to 0} y = 0$ である。
次に、$\lim_{y\to 0}(y^3 + 3y^2 + 3y + 1) = 1$ を示す。
${}^\forall\varepsilon > 0$ に対して、$\delta = \min\{\sqrt[3]{\varepsilon/3},\ \sqrt{\varepsilon/9},\ \varepsilon/9\}$ とする。この時、$0 < |y| < \delta$ となる y に対して、

$$|y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - 1| = |y^3 + 3y^2 + 3y| \tag{4}$$
$$\leq |y^3| + 3|y^2| + 3|y| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \tag{5}$$

となる。
これにより $\lim_{y\to 0}(y^3 + 3y^2 + 3y + 1) = 1$ が言える。よって、$\lim_{x\to 1} x^3 = 1$ である。

問題 13. $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha,\ \lim_{x\to a} g(x) = \beta$ とする。このとき、$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \alpha\beta$ が成り立つことを示せ。

・・

$f(x)$ と $g(x)$ は $x \to a$ で極限を持つので、${}^\forall\varepsilon > 0$ に対して十分に小さな $\delta > 0$ が存在し、$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon,\ |g(x) - \beta| < \varepsilon$ である。また、$-\delta < x - a < \delta$ において $|f(x)| < K$ となる K が存在する。
これにより次のような変形ができる。

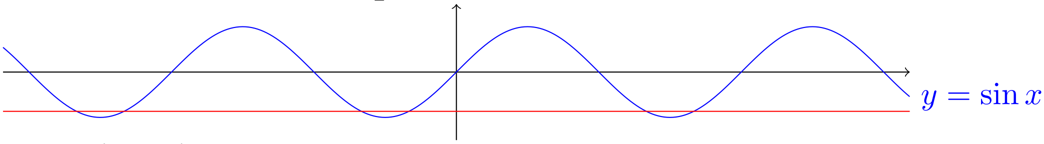
$$|f(x)g(x) - \alpha\beta| = |f(x)g(x) - f(x)\beta + f(x)\beta - \alpha\beta| \tag{6}$$
$$< K|g(x) - \beta| + |\beta||f(x) - \alpha| \qquad < K\varepsilon + |\beta|\varepsilon \tag{7}$$

そこで、$|f(x) - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2K},\ |g(x) - \beta| < \frac{\varepsilon}{2|\beta|}$ を満たすように δ を取りなおす事ができるので、$|f(x)g(x) - \alpha\beta| < \varepsilon$ となる。
よって、$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \alpha\beta$ である。

問題 14. 次の値を求めよ。

(a) $\sin^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

次のグラフは、直線 $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ を赤、曲線 $y=\sin x$ を青で描いたものである。



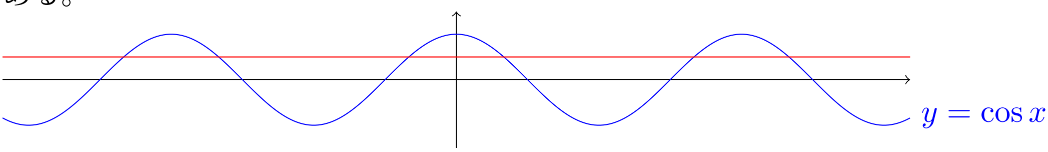
$\sin^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ が表す値は赤と青の交点の x 座標を表している為、次のように複数の値が存在する。

$$\frac{4\pi}{3}+2\pi m,\ \frac{5\pi}{3}+2\pi n \qquad (m,n\in\mathbb{Z}) \tag{8}$$

関数 $\sin^{-1}x$ の値域を $-\frac{\pi}{2}\leq\sin^{-1}x\leq\frac{\pi}{2}$ とすれば、求めるべき値は $\sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\pi}{3}$ となる。

(b) $\cos^{-1}\left(\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

$\sin\dfrac{\pi}{6}$ は一つの値のみを表しており、$\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$ である。
そこで次のグラフは、直線 $y=\frac{1}{2}$ を赤、曲線 $y=\cos x$ を青で描いたものである。



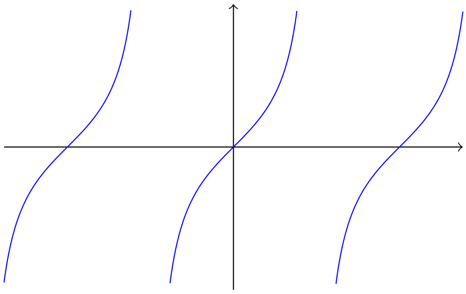
よって、$\cos^{-1}\left(\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$ を満たす値は次のように複数ある。

$$\frac{\pi}{3}+2\pi m,\ \frac{5\pi}{3}+2\pi n \qquad (m,n\in\mathbb{Z}) \tag{9}$$

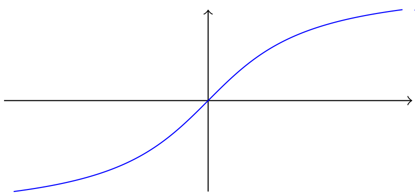
関数 $\cos^{-1}x$ の値域を $0\leq\cos^{-1}x\leq\pi$ とすれば、求めるべき値は $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{3}$ となる。

(c) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\tan^{-1}x$

$y=\tan x$ のグラフを描くと、次のように $x=\frac{\pi}{2}n \quad (n\in\mathbb{Z})$ を除いた点で定義される。



このグラフの原点を通る部分の区間 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ を値域となるように $y = \tan^{-1} x$ のグラフを描くと次のようになる。



この為、極限は次のようになる。

$$\lim_{x \to -\infty} \tan^{-1} x = -\frac{\pi}{2} \tag{10}$$

(d) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$

上記グラフのように $\tan^{-1} x$ の値を $-\frac{\pi}{2} < \tan^{-1} x < \frac{\pi}{2}$ に制限すれば、$\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ と $\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ は一つの値となる。
そこで、実数 a, b を次のように置く。

$$a = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right), \quad b = \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \tag{11}$$

これにより、次のようになる。

$$\tan a = \frac{1}{2}, \quad \tan b = \frac{1}{3} \tag{12}$$

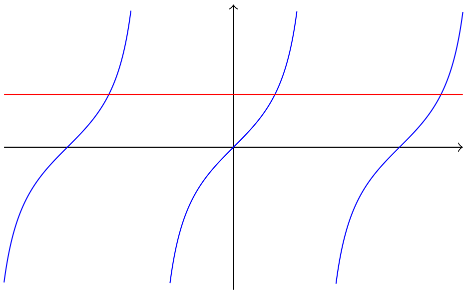
このとき、$\tan(a+b)$ を求める。

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = 1 \tag{13}$$

よって、次のように求まる。

$$\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4} \tag{14}$$

$y = \tan^{-1} x$ の値域を設定しないのであれば、直線 $y = 1$ と曲線 $y = \tan x$ の交点から求められる。



よって、次の値となる。

$$\frac{\pi}{4} + \pi n \qquad (n \in \mathbb{Z}) \tag{15}$$

問題 15. $a, b > 0,\ a, b \neq 1,\ x \in \mathbb{R}$ とする。このとき、$(ab)^x = a^x b^x$ が成り立つことを示せ。

....

$x \in \mathbb{R}$ が有理数のとき、$(ab)^x = a^x b^x$ であるので、$x \in \mathbb{R}$ が無理数とする。
x に収束する有理数のコーシー列を $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ とする。つまり、$\lim_{n\to\infty} x_n = x$ である。
各 x_n は有理数であるので、$(ab)^{x_n} = a^{x_n} b^{x_n}$ である。
$\lim_{n\to\infty} a^{x_n} = a^x,\ \lim_{n\to\infty} b^{x_n} = b^x$ であることから、

$$a^x \times b^x = \lim_{n\to\infty} a^{x_n} \times \lim_{n\to\infty} b^{x_n} = \lim_{n\to\infty} (a^{x_n} b^{x_n}) \tag{16}$$

である。また、$\lim_{n\to\infty} (ab)^{x_n} = (ab)^x$ であることから、$(ab)^{x_n} = a^{x_n} b^{x_n}$ の極限を求めると $(ab)^x = a^x b^x$ が得られる。

問題 16. $a > 1$ とする。このとき、$-1 < x < 0$ として、$\lim_{x\to 0} a^x = 1$ を証明せよ。

....

$0 < -x < 1$ であるので、$n \leq -\frac{1}{x} < n + 1$ となる自然数 n が存在する。
$-1 \leq -\frac{1}{n} \leq x < -\frac{1}{n+1} < 0$ より

$$a^{-\frac{1}{n}} \leq a^x < a^{-\frac{1}{n+1}} \tag{17}$$

であるので、数列 $\{a^{-\frac{1}{n}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ と a^x の極限は一致する。

$$\lim_{n\to\infty} a^{-\frac{1}{n}} = \lim_{x\to 0} a^x \tag{18}$$

つまり、$\lim_{n\to\infty} a^{-\frac{1}{n}} = 1$ が示せればよい。

そこで、$^\forall\varepsilon > 0$ としたとき十分に大きな n に対して $|a^{-\frac{1}{n}} - 1| < \varepsilon$ が成り立てばよい。$0 < a^{-\frac{1}{n}} < 1$ であるので、絶対値を外し変形をする。

$$(1-\varepsilon)^n < a^{-1} \tag{19}$$

二項定理より

$$(1-\varepsilon)^n = \sum_{i=0}^{n} {}_nC_i(-\varepsilon)^i = 1 - n\varepsilon + \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2 + \cdots + (-\varepsilon)^n \tag{20}$$

である。
$|a^{-\frac{1}{n}} - 1| < \varepsilon$ が成立する様な状況を考えるので、$0 < \varepsilon < 1$ に制限して考えても良い。
$0 < \varepsilon < 1$ であれば、

$$1 - n\varepsilon < (1-\varepsilon)^n < a^{-1} \tag{21}$$

となる。ここから、n は次を満たせば $|a^{-\frac{1}{n}} - 1| < \varepsilon$ となることがわかる。

$$n > \frac{1}{\varepsilon}(1 - a^{-1}) \tag{22}$$

これにより、$^\forall\varepsilon > 0$ に対して、$|a^{-\frac{1}{n}} - 1| < \varepsilon$ となる $n \in \mathbb{N}$ は存在することとなり、$\lim_{n\to\infty} a^{-\frac{1}{n}} = 1$ であることがわかる。
$\lim_{n\to\infty} a^{-\frac{1}{n}} = \lim_{x\to 0} a^x$ であるから、$\lim_{x\to 0} a^x = 1$ である。
