全射

写像 $f : A \to B$ が全射であるとは、「任意の $b \in B$ に対して $b = f(a)$ となる $a \in A$ が存在する」ということである。

f は写像であれば次のどちらかを満たす。

- $f(A) \subsetneq B$
- $f(A) = B$

全射であれば $f(A) = B$ である。

V をベクトル空間とし、$f : V \to V$ を線形写像とする。このとき、次が成り立つ。

$$f : \text{全射} \Leftrightarrow f(V) = V \tag{1}$$

よって、全射であれば $f \circ f(V) = f(f(V)) = V$ となる。

$$V \xrightarrow{f} V \xrightarrow{f} V \tag{2}$$

$f \circ f = 0$ とは、$f \circ f(V) = \{0\}$ という意味である。

V よりも $\{0\}$ が真に小さい集合であれば、写像 f により、$f(V)$ の次元は V より低くなっているということになり、$f(V) \subsetneq V$ であるから全射にはならない。