A を 4 次正則 (可逆) 行列とする。以下の行列の行列式の値を $\det A$ を用いて表せ。

1. ${}^tA$ .... $\det {}^tA = \det A$
2. $-A$ .... $\det(-A) = (-1)^4 \det A = \det A$
3. $2A$ .... $\det(2A) = 2^4 \det A = 16 \det A$
4. A^{-1} .... $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$
5. A の 1 行目と 3 行目を入れ替えた行列 B .... $\det B = -\det A$
6. A の 2 列目に 3 列目の成分の -1 倍を足した行列 C .... $\det C = \det A$
7. A の 3 列目の成分を 5 倍した行列 D .... $\det D = 5 \det A$

....

$i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ とし、行列 $A = (a_{ij})$ とする。

1. 正則行列 A は基本行列 $(P(i,j), Q(i,j;k), R(i;c))$ の積で表すことができる。これらの行列式は転置行列と同じになる。

$$\det P(i,j) = \det {}^tP(i,j),\ \det Q(i,j;k) = \det {}^tQ(i,j;k),\ \det R(i;c) = \det {}^tR(i;c) \tag{1}$$

${}^tA$ は基本行列の転置行列 $({}^tP(i,j), {}^tQ(i,j;k), {}^tR(i;c))$ の積で表すことができるが、行列式は一致するので $\det {}^tA = \det A$ である。

2. $-A$ は A の全ての成分に -1 をかけた行列である。つまり、基本行列 $R(i;c)$ を用いて次のようになる。

$$-A = R(1;-1)R(2;-1)R(3;-1)R(4;-1)A \tag{2}$$

$\det R(i;-1) = -1$ であるので、

$$\begin{aligned} \det(-A) &= \det R(1;-1) \det R(2;-1) \det R(3;-1) \det R(4;-1) \det A & (3)\\ &= (-1)^4 \det A = \det A & (4) \end{aligned}$$

3. $2A$ は A の全ての成分に 2 をかけた行列である。

$$2A = R(1;2)R(2;2)R(3;2)R(4;2)A \tag{5}$$

$\det R(i;2) = 2$ であるので、

$$\begin{aligned} \det(2A) &= \det R(1;2) \det R(2;2) \det R(3;2) \det R(4;2) \det A & (6)\\ &= 2^4 \det A = 16 \det A & (7) \end{aligned}$$

4. A が正則行列であれば、$AA^{-1} = E$ である。

$$\det(AA^{-1}) = \det A \det A^{-1}, \quad \det E = 1 \tag{8}$$

これにより $\det A \det A^{-1} = 1$ であるから、$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$ である。

5. B は A の 1 行目と 3 行目を入れ替えた行列であるので、基本行列 $P(1,3)$ を用いて次のように表せる。

$$B = P(1,3)A \tag{9}$$

$\det P(1,3) = -1$ であるので、$\det B = \det P(1,3) \det A = -\det A$ である。

6. C は A の 2 列目に 3 列目の成分の -1 倍を足した行列であるので、基本行列 $Q(2,3;-1)$ を用いて次のように表せる。

$$C = AQ(2,3;-1) \tag{10}$$

$\det Q(2,3;-1) = 1$ であるので、$\det C = \det A \det Q(2,3;-1) = \det A$ である。

7. D は A の 3 列目の成分を 5 倍した行列であるので、基本行列 $R(3;5)$ を用いて次のように表せる。

$$C = AR(3;5) \tag{11}$$

$\det R(3;5) = 5$ であるので、$\det C = \det A \det R(3;5) = 5 \det A$ である。

....

基本行列

$i \neq j$ とする。単位行列の i 行と j 行を入れ替えた行列を $P(i,j)$、単位行列の (i,j) 成分を k に変えた行列を $Q(i,j;k)$ とする。

$$P(i,j) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}, \ Q(i,j;k) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & k & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \tag{12}$$

また、単位行列の i 行目に c をかけたものを $R(i;c)$ とする。

$$R(i;c) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & c & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \tag{13}$$

この 3 つの行列を基本行列という。行列に対して左から基本行列をかけることで行についての基本変形を行える。右からかけることで列についての基本変形となる。

全ての正則行列はこの 3 つの行列の積で表すことができる。

....

行列式の定義

成分が一つだけの行列 (c) の行列式は $\det(c) = c$ である。

n 次行列 $A = (a_{ij})$ における (i, j) 成分の**余因子** A_{ij} とは、A の (i, j) 成分 a_{ij} を含む行と列を除いてできる $n-1$ 次行列式に $(-1)^{i+j}$ をかけたものである。例えば、3 次正方行列 A の余因子 A_{12} は次のようになる。

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \epsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \iota \end{pmatrix}, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \det \begin{pmatrix} \delta & \zeta \\ \eta & \iota \end{pmatrix} \tag{14}$$

n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ の行列式は余因子を用いて次のように定義する。

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \tag{15}$$

例えば、3 次正方行列 $A = (a_{ij})$ の行列式 $\det A$ は次のようになる。

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \tag{16}$$

行列式の性質

1. 1 つの行を k 倍した行列式は、もとの行列式の k 倍となる

$$\det \begin{pmatrix} k\alpha & k\beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = k \det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \tag{17}$$

2. 2 つの行を入れ替えてできる行列式は、もとの行列式の -1 倍となる

$$\det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \tag{18}$$

3. 行列式の第 i 行が $\boldsymbol{a}_i + \boldsymbol{b}_i$ であれば、第 i 行を $\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{b}_i$ にした行列式の和である

$$\det \begin{pmatrix} \alpha + \epsilon & \beta + \zeta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \epsilon & \zeta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \tag{19}$$

4. 1 つの行の k 倍を他の行に加えてできる行列式はもとの行列式と等しい

$$\det \begin{pmatrix} \alpha + k\gamma & \beta + k\delta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \tag{20}$$

5. 1 つの行の成分が全て 0 であるなら、行列式は 0 である

$$\det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \tag{21}$$

上記性質は列に対して行っても成立する

……………………………………………………………………

記号

$M(n, \mathbb{K})$　$\mathbb{K}$ を成分とする n 次正方行列の全体

$GL(n, \mathbb{K})$　$\mathbb{K}$ を成分とする n 次正則正方行列の全体 (**一般線型群**)

$$GL(n, \mathbb{K}) \subset M(n, \mathbb{K}) \tag{22}$$
