МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Санкт-Петербургский государственный
электротехнический университет
«ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)
Кафедра МО ЭВМ

Отчет
по лабораторной работе №3
по дисциплине «Алгоритмы и структуры данных»
Тема: АВЛ-деревья.

Студент гр. 3382 _____ Копасова К. А.

Преподаватель _____ Иванов Д. В.

Санкт-Петербург
2024

Цель работы

Изучить АВЛ-деревья, различные балансировки и создать программу на языке программирования Python, где будут реализовано АВЛ-дерево с методами вставки узлов и удаления узлов (максимального, минимального и любого). Также нужно сравнить время и количество операция, необходимых для реализованных методов, с теоретическими оценками.

Задание

В предыдущих лабораторных работах вы уже проводили исследования и эта не будет исключением. Как и в прошлые разы лабораторную работу можно разделить на две части:

1) решение задач на платформе moodle

2) исследование по заданной теме

В заданиях в качестве подсказки будет изложена основная структура данных (класс узла) и будет необходимо реализовать несколько основных функций: проверка дерева (является ли оно АВЛ деревом), нахождение разницы между связными узлами, вставка узла.

В качестве исследования нужно самостоятельно:

1) реализовать функции удаления узлов: любого, максимального и минимального

2) сравнить время и количество операций, необходимых для реализованных операций, с теоретическими оценками (очевидно, что проводить исследования необходимо на разных объемах данных)

Также для очной защиты необходимо подготовить визуализацию дерева.

В отчете помимо проведенного исследования необходимо приложить код всей получившей структуры: класс узла и функции.

Выполнение работы

Для начала разделим нашу задачу на два файла: в первом файле main.py будет реализовано АВЛ-дерево.

Во втором файле test.py будут находится все тесты и вычисления для анализа работы методов .

Начнем с файла main.py – опишу все функции и классы данного файла.

Main.py:

Программа включает классы Node и AVLTree, а также функции для различных операций над деревом, включая вставку и удаление узлов с автоматической балансировкой через вращения.

1. Класс Node - данный класс представляет собой узел АВЛ-дерева. Конструктор __init__ принимает значение узла и необязательные параметры для его левого и правого потомков. Каждый узел хранит свое значение, ссылки на левого и правого потомков, а также текущую высоту узла, которая используется для вычисления баланса и определения необходимости балансировки.

2. Класс AVLTree - данный класс представляет само АВЛ-дерево. В конструкторе __init__ создается дерево с корнем, равным None, т. е. дерево изначально пусто. Класс включает методы для вставки и удаления узлов, поиска минимального и максимального значения, а также вспомогательные функции для балансировки дерева.

   a) Метод get_min_val_node - данный метод принимает узел дерева и возвращает узел с минимальным значением, проходя по левым потомкам.

   b) Метод get_max_val_node - данный метод находит узел с максимальным значением, проходя по правым потомкам.

c) Метод insert - данный метод добавляет элемент в дерево. Если корень дерева отсутствует, новый элемент становится корнем. Иначе вызывается рекурсивный метод _insert.

d) Метод _insert - данный метод принимает значение и узел дерева, рекурсивно вставляет значение в дерево и балансирует его. Если новое значение меньше текущего, оно добавляется слева, иначе — справа. После вставки обновляется высота узла, затем вычисляется его баланс. В зависимости от баланса и значений выполняются малые (левое или правое) или большие (левое или правое) вращения для поддержания сбалансированности.

e) Метод remove - данный метод удаляет узел с указанным значением из дерева. Если дерево непусто, вызывается метод _remove для рекурсивного удаления.

f) Метод _remove - данный метод осуществляет рекурсивное удаление узла, сохраняя балансировку. Если удаляемый узел не имеет потомков или имеет одного потомка, его место занимает потомок. Если узел имеет двух потомков, находит узел с минимальным значением в правом поддереве, присваивает его значение удаляемому узлу и удаляет его из правого поддерева. Затем обновляет высоту узла и выполняет балансировку с учётом новых значений.

g) Методы remove_min и remove_max удаляют узлы с минимальным и максимальным значениями соответственно. Каждый метод вызывает соответствующую рекурсивную функцию (_remove_min или _remove_max), которая удаляет крайний левый или правый узел. После удаления высота и баланс узлов обновляются с помощью аналогичных методов.

3. Функция mini_right_rotate выполняет малое правое вращение. Берется левый потомок текущего узла, который становится новым корнем для его поддерева. Обновляются ссылки и высоты узлов, обеспечивая восстановление баланса.

4. Функция mini_left_rotate выполняет малое левое вращение. Берется правый потомок текущего узла, который становится новым корнем для его поддерева. Аналогично, обновляются ссылки и высоты узлов, восстанавливая баланс.

5. Функция max_left_rotate выполняет большое левое вращение. Оно состоит из двух шагов: сначала малое левое вращение для левого поддерева, затем малое правое вращение для текущего узла, что позволяет корректировать баланс в более сложных ситуациях.

6. Функция max_right_rotate выполняет большое правое вращение, аналогично состоящее из малого правого вращения для правого поддерева, а затем малого левого вращения для узла.

7. Функция get_height возвращает высоту узла, которая равна 0 для пустых узлов, используется для вычисления баланса.

8. Функция update_height обновляет высоту узла после выполнения балансировки. Она вычисляет максимальную высоту между левым и правым поддеревом, прибавляя единицу для текущего узла.

9. Функция get_balance определяет разницу высот между левым и правым поддеревом узла. Если баланс положительный, то левое поддерево выше правого, и наоборот. Значение баланса используется для определения необходимости выполнения вращений.

10. Функция breadth_first_search используется для визуализации дерева через библиотеку graphviz. Принимает корень дерева, объект dot для визуализации и шаг текущей итерации. Функция создает граф, обходя дерево в ширину. Для каждого узла создается графический элемент с указанием левого и правого потомков, а также направления к ним, позволяя просматривать структуру дерева в процессе выполнения программы.

11. Функция main — основная функция, управляющая вставкой и удалением узлов. Создается экземпляр дерева, затем через объект graphviz.Digraph создаются графы для операций вставки и удаления узлов.

После этого программа ожидает ввода узлов для вставки, добавляет их в дерево и визуализирует результат на каждом шаге. Аналогично происходит удаление узлов. Визуализация сохраняется в PDF-файлах, демонстрируя процесс добавления и удаления элементов.

В файле test.py находятся дополнительные функции, помогающие построить графики для анализа производительности вставки и удаления в АВЛ-деревьях в зависимости от количества элементов в массиве и «сложности» подаваемых данных (отсортированные значения, любые значения и значения, отсортированные в обратном порядке) . В данном файле была создана функция, которая генерирует данные в зависимости от их количества и сложности. После этого программа пропускает все значения (всего 9) через вставку и удаление и считает время выполения для каждого метода соответственно. С помощью библиотек matplotlib и pandas был построен график зависимости.

Код программ находится в Приложении А.

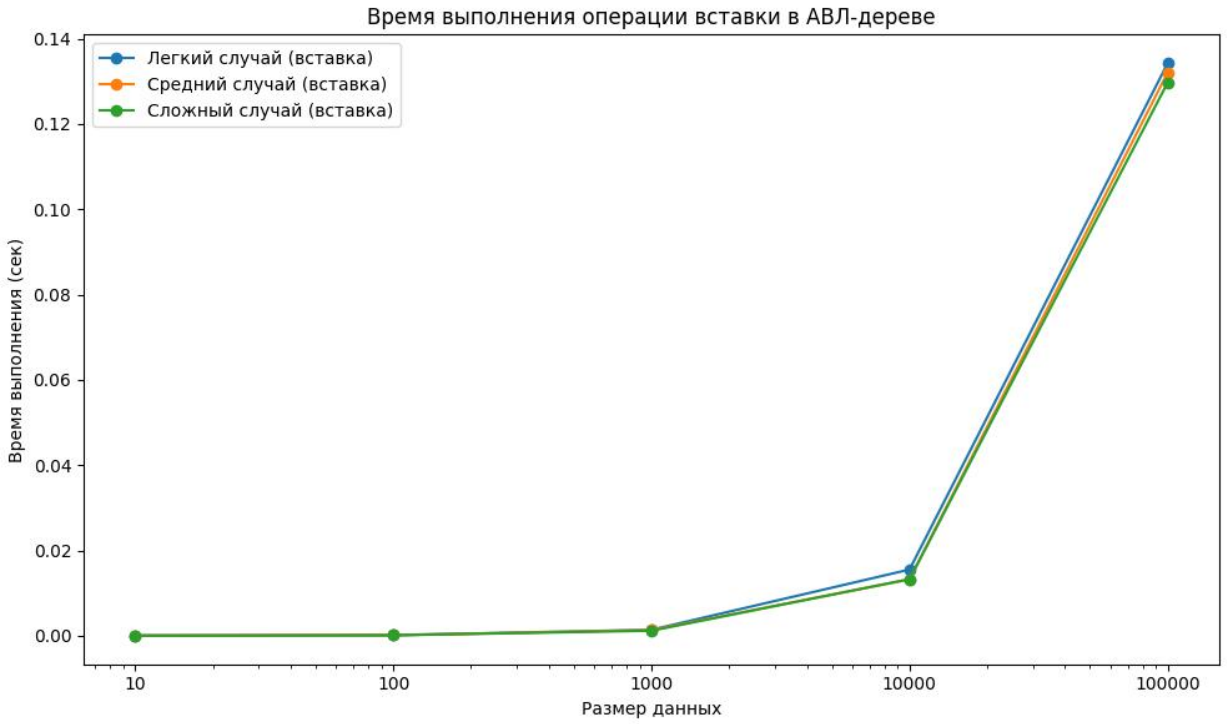
Тестирование

Таблица 1 — Результаты тестирования основного кода программы:

№п/п	Входные данные	Выходные данные	Коммен тарии
1	5 6 4 2 8 5 56 5 6 4	OK	OK
2	17 58 465 1213 5 545 6515 4 5 4 862 64 1 89	OK	OK
3	1 2 5 7 -4 -8 -9 -8 7 4 51 654 684 124 548 45 7 4 -4 8 -54 -565 -10 12 13 18 5 95 87 5 -4 -56 1 2 4 8 6 15 26 48 67 845 2 458 65 8 12 35	OK	OK

Анализ полученных данных

После анализа работы метода вставки в АВЛ-дерево получим следующий график:

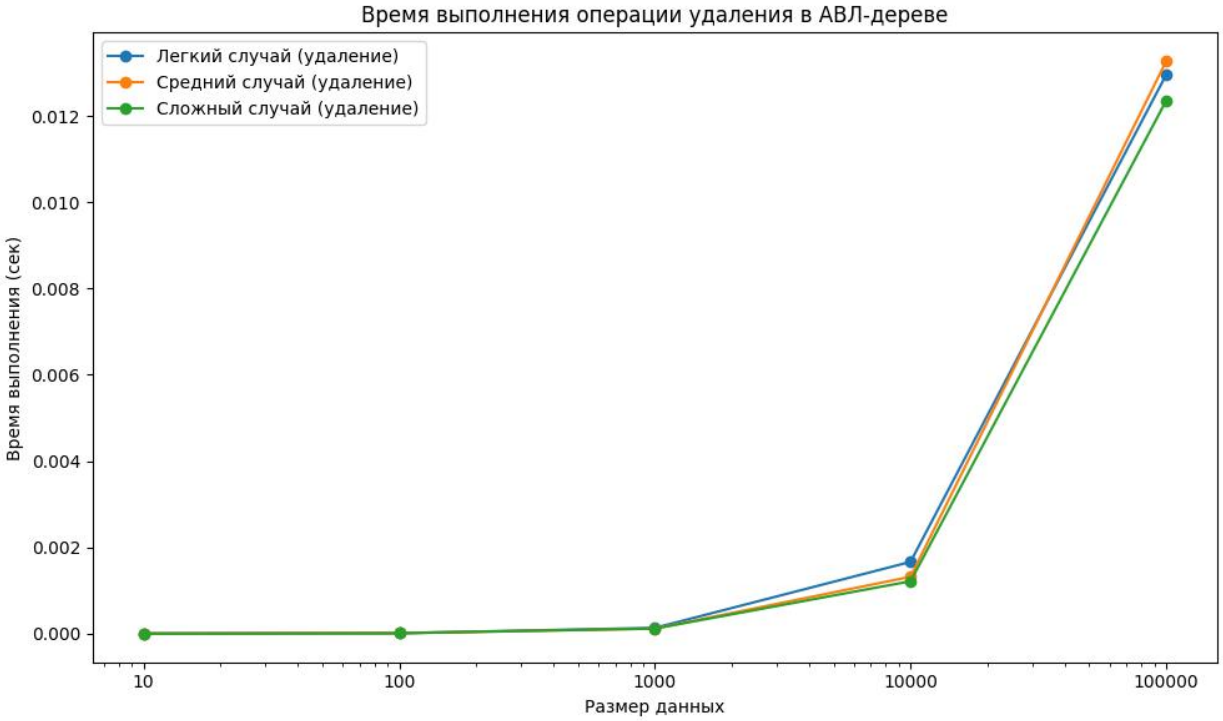


Из графика видно, что, несмотря на различное количество данных, используемых в методе, прослеживается одинаковая тенденция - чем больше элементов, тем больше времени требуется на вставку элементов, что логично.

Теоретически: сложность операции вставки в АВЛ-дерево равна O(log n) благодаря поддержанию баланса на каждом уровне. В любых случаях вставка требует поиска по высоте дерева и балансировки.

Практически: график показывает кривую, которая асимптотически схожа с графиком log n, но, т. к. исследование происходило с данными, которые имеют большой разрыв между собой (10000 и 100000), график имеет резкий скачок.

После анализа работы метода удаления в АВЛ-дереве получим следующий график:



Аналогично случаю вставки, время выполнение метода удаления увеличивается с ростом числа данных.

Теоретически: сложность операции удаления в АВЛ-дереве также равна O(log n) из-за необходимости поиска элемента, а затем балансировки дерева.

Практически: график удаления показывает более выраженные различия между сложными и простыми случаями по сравнению с вставкой. Это объясняется тем, что удаление узла с двумя потомками требует дополнительной операции поиска наименьшего элемента в правом поддереве. Также, как и при вставке, виден рост времени выполнения, который асимптотически схож с графиком log n, но из-за сильной разницы между количеством данных (10000, 100000) имеет сильный скачок.

Выводы

В ходе лабораторной работы удалось изучить АВЛ-деревья, различные балансировки и создать программу на языке программирования Python, где реализовано АВЛ-дерево с методами вставки узлов и удаления узлов (максимального, минимального и любого). Также удалось провести анализ сравнения времени выполнения программы от количества операций, необходимых для реализованных методов, с теоретическими оценками.

ПРИЛОЖЕНИЕ А
ИСХОДНЫЙ КОД ПРОГРАММЫ

Файл main.py:

```
"""Реализация АВЛ-дерева"""
import graphviz

class Node:
    """Класс для узла АВЛ-дерева"""

    def __init__(self, val, left=None, right=None):
        """Конструктор узла АВЛ-дерева."""
        self.val = val
        self.left: Node | None = left
        self.right: Node | None = right
        self.height: int = 1

class AVLTree:
    """Класс для АВЛ-дерева."""

    def __init__(self) -> None:
        """Конструктор АВЛ-дерева."""
        self.root = None

    def get_min_val_node(self, node: Node):
        """Поиск узла с минимальным значением."""
        while node.left:
            node = node.left
        return node

    def get_max_val_node(self, node: Node):
        """Поиск узла с максимальным значением."""
        while node.right:
            node = node.right
        return node

    def insert(self, val):
        """Вставка элемента в дерево."""
        if not self.root:
            self.root = Node(val)
        else:
            self.root = self._insert(val, self.root)

    def _insert(self, val, node: Node | None):
        """Рекурсивная вставка и балансировка."""
        if not node:
            return Node(val)

        if val < node.val:
            if node.left:
                node.left = self._insert(val, node.left)
        else:
            if node.right:
                node.right = self._insert(val, node.right)

        update_height(node)
        balance = get_balance(node)
```

```
    if balance > 1 and val < node.left.val:
        return mini_right_rotate(node)
    if balance < -1 and val > node.right.val:
        return mini_left_rotate(node)
    if balance > 1 and val > node.left.val:
        return max_left_rotate(node)
    if balance < -1 and val < node.right.val:
        return max_right_rotate(node)

    return node

def remove(self, val):
    """Удаление элемента из дерева."""
    if self.root:
        self.root = self._remove(val, self.root)

def _remove(self, val, node: Node | None):
    """Рекурсивное удаление и балансировка дерева."""
    if not node:
        return node

    if val < node.val:
        if node.left:
            node.left = self._remove(val, node.left)
    elif val > node.val:
        if node.right:
            node.right = self._remove(val, node.right)
    else:
        # узел без детей или с одним ребенком
        if not node.left:
            return node.right
        elif not node.right:
            return node.left

        # узел с двумя детьми
        temp = self.get_min_val_node(node.right)
        node.val = temp.val
        node.right = self._remove(temp.val, node.right)

    update_height(node)
    balance = get_balance(node)

    if balance > 1 and get_balance(node.left) >= 0:
        return mini_right_rotate(node)
    if balance < -1 and get_balance(node.right) <= 0:
        return mini_left_rotate(node)
    if balance > 1 and get_balance(node.left) < 0:
        return max_left_rotate(node)
    if balance < -1 and get_balance(node.right) > 0:
        return max_right_rotate(node)

    return node

def remove_min(self):
    """Удаление узла с минимальным значением."""
    if self.root:
        self.root = self._remove_min(self.root)

def _remove_min(self, node: Node):
    """Рекурсивное удаление узла с минимальным значением."""
    if not node.left:
```

```
            return node.right  # узел с минимальным значением

        node.left = self._remove_min(node.left)
        update_height(node)
        balance = get_balance(node)

        if balance > 1 and get_balance(node.left) >= 0:
            return mini_right_rotate(node)
        if balance < -1 and get_balance(node.right) <= 0:
            return mini_left_rotate(node)
        if balance > 1 and get_balance(node.left) < 0:
            return max_left_rotate(node)
        if balance < -1 and get_balance(node.right) > 0:
            return max_right_rotate(node)

        return node

    def remove_max(self):
        """Удаление узла с максимальным значением."""
        if self.root:
            self.root = self._remove_max(self.root)

    def _remove_max(self, node: Node):
        """Рекурсивное удаление узла с максимальным значением."""
        if not node.right:
            return node.left  # узел с максимальным значением

        node.right = self._remove_max(node.right)
        update_height(node)
        balance = get_balance(node)

        if balance > 1 and get_balance(node.left) >= 0:
            return mini_right_rotate(node)
        if balance < -1 and get_balance(node.right) <= 0:
            return mini_left_rotate(node)
        if balance > 1 and get_balance(node.left) < 0:
            return max_left_rotate(node)
        if balance < -1 and get_balance(node.right) > 0:
            return max_right_rotate(node)

        return node

def mini_right_rotate(b: Node) -> Node:
    """Малый правый поворот."""
    a = b.left
    temp = a.right
    a.right = b
    b.left = temp
    update_height(b)
    update_height(a)
    return a

def mini_left_rotate(a: Node) -> Node:
    """Малый левый поворот."""
    b = a.right
    temp = b.left
    b.left = a
    a.right = temp
    update_height(a)
    update_height(b)
    return b
```

```
def max_left_rotate(node: Node) -> Node:
    """Большой левый поворот."""
    node.left = mini_left_rotate(node.left)
    return mini_right_rotate(node)

def max_right_rotate(node: Node) -> Node:
    """Большой правый поворот."""
    node.right = mini_right_rotate(node.right)
    return mini_left_rotate(node)

def get_height(node: Node | None) -> int:
    """Определение высоты узла."""
    return node.height if node else 0

def update_height(node: Node):
    """Обновление высоты после балансировки."""
    node.height = max(get_height(node.left), get_height(node.right)) + 1

def get_balance(node: Node) -> int:
    """Определение разницы высот для балансировки."""
    return get_height(node.left) - get_height(node.right) if node else 0

def breadth_first_search(root, dot, step):
    """Визуализация дерева через Graphviz."""
    queue = [(root, "root")]
    dot.node(f"{step}_{root.val}", label=f"{root.val} ")
    while queue:
        tmp_queue = []
        for element in queue:
            if element[0].left:
                                    dot.node(f"{step}_{element[0].left.val}",
label=str(element[0].left.val))
                                        dot.edge(f"{step}_{element[0].val}",
f"{step}_{element[0].left.val}", label="left")
                tmp_queue.append((element[0].left, "left"))
            if element[0].right:
                                   dot.node(f"{step}_{element[0].right.val}",
label=str(element[0].right.val))
                                        dot.edge(f"{step}_{element[0].val}",
f"{step}_{element[0].right.val}", label="right")
                tmp_queue.append((element[0].right, "right"))
        queue = tmp_queue

def main():
    """Основная функция для вставки и удаления узлов из АВЛ-дерева."""
    avl_tree = AVLTree()
    dot_insert = graphviz.Digraph(comment="AVLTree - Insert")
    dot_remove = graphviz.Digraph(comment="AVLTree - Remove")

    # Вставка узлов
    nodes_add = list(map(int, input().split()))
    for step, node in enumerate(nodes_add, 1):
        avl_tree.insert(node)
        breadth_first_search(avl_tree.root, dot_insert, step)
    dot_insert.render("AddElemToAVLTree", format="pdf", cleanup=True)

    # Удаление узлов
    breadth_first_search(avl_tree.root, dot_remove, "initial")
    nodes_remove = list(map(int, input().split()))
    for step, node in enumerate(nodes_remove, 1):
```

```
            avl_tree.remove(node)
            breadth_first_search(avl_tree.root, dot_remove, f"remove_any_{node}")
        dot_remove.render("RemoveElemToAVLTree", format="pdf", cleanup=True)

if __name__ == "__main__":
    main()
```

Файл test.py:

```
import time
import random
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
from main import AVLTree

def data_generation_avl():
    # данные отсортированы
    easy_arrs = [
        list(range(1, 11)),
        list(range(1, 101)),
        list(range(1, 1001)),
        list(range(1, 10001)),
        list(range(1, 100001))
    ]
    # данные случайные
    normal_arrs = [
        [random.randint(0, 10000) for _ in range(10)],
        [random.randint(0, 10000) for _ in range(100)],
        [random.randint(0, 10000) for _ in range(1000)],
        [random.randint(0, 10000) for _ in range(10000)],
        [random.randint(0, 10000) for _ in range(100000)]
    ]
    # данные отсортированы в обратном порядке
    hard_arrs = [
        list(range(10, 0, -1)),
        list(range(100, 0, -1)),
        list(range(1000, 0, -1)),
        list(range(10000, 0, -1)),
        list(range(100000, 0, -1))
    ]

    easy_insert_times, normal_insert_times, hard_insert_times = [], [], []
    easy_remove_times, normal_remove_times, hard_remove_times = [], [], []

    # измерение времени для вставки и удаления элементов (простой случай)
    for arr in easy_arrs:
        avl_tree = AVLTree()

        # вставка
        start_time = time.time()
        for value in arr:
            avl_tree.insert(value)
        easy_insert_times.append(time.time() - start_time)

        # удаление
        start_time = time.time()
        for value in arr:
            avl_tree.remove(value)
        easy_remove_times.append(time.time() - start_time)
```

```
    # измерение времени для вставки и удаления элементов (средний случай)
    for arr in normal_arrs:
        avl_tree = AVLTree()

        # вставка
        start_time = time.time()
        for value in arr:
            avl_tree.insert(value)
        normal_insert_times.append(time.time() - start_time)

        # удаление
        start_time = time.time()
        for value in arr:
            avl_tree.remove(value)
        normal_remove_times.append(time.time() - start_time)

    # измерение времени для вставки и удаления элементов (сложный случай)
    for arr in hard_arrs:
        avl_tree = AVLTree()

        # вставка
        start_time = time.time()
        for value in arr:
            avl_tree.insert(value)
        hard_insert_times.append(time.time() - start_time)

        # удаление
        start_time = time.time()
        for value in arr:
            avl_tree.remove(value)
        hard_remove_times.append(time.time() - start_time)

    sizes = [10, 100, 1000, 10000, 100000]
    data = {
        'size': sizes * 6,
        'case': ['Легкий случай (вставка)'] * 5 + ['Средний случай (вставка)']
* 5 + ['Сложный случай (вставка)'] * 5 +
                ['Легкий случай (удаление)'] * 5 + ['Средний случай
(удаление)'] * 5 + ['Сложный случай (удаление)'] * 5,
        'time': easy_insert_times + normal_insert_times + hard_insert_times +
                easy_remove_times + normal_remove_times + hard_remove_times
    }

    df = pd.DataFrame(data)

    # построение графика для вставки
    plt.figure(figsize=(10, 6))
    insert_df = df[df['case'].str.contains("вставка")]
    for case_label in insert_df['case'].unique():
        subset = insert_df[insert_df['case'] == case_label]
        plt.plot(subset['size'], subset['time'], marker='o', label=case_label)

    plt.xlabel('Размер данных')
    plt.ylabel('Время выполнения (сек)')
    plt.title('Время выполнения операции вставки в АВЛ-дереве')
    plt.xscale('log')
    plt.xticks(sizes, sizes)
    plt.legend()
    plt.tight_layout()
    plt.show()
```

```
    # построение графика для удаления
    plt.figure(figsize=(10, 6))
    remove_df = df[df['case'].str.contains("удаление")]
    for case_label in remove_df['case'].unique():
        subset = remove_df[remove_df['case'] == case_label]
        plt.plot(subset['size'], subset['time'], marker='o', label=case_label)

    plt.xlabel('Размер данных')
    plt.ylabel('Время выполнения (сек)')
    plt.title('Время выполнения операции удаления в АВЛ-дереве')
    plt.xscale('log')
    plt.xticks(sizes, sizes)
    plt.legend()
    plt.tight_layout()
    plt.show()

data_generation_avl()
```