Ильяшенко Карина, гр. 3681
Научный руководитель, Сергеев А.Н.

Венгерский метод решения классической транспортной задачи

Обсуждаемый метод называют венгерским, так как его идея высказана еще в 1931 году венгерским математиком Эгервари. Эта забытая работа была открыта в 1953 году американским математиком Г.Куном, который развил эту идею и назвал созданный им метод венгерским.

Постановка задачи:

Предполагается, что имеются пункты отправления(ПО) и пункты назначения(ПН). Пункты отправления имеют некоторый однородный товар, который можно измерять в единицах (килограммах, штуках, ящиках и т.п.) и перевозить в пункты назначения. В математической постановке ПО называются источниками, а ПН – стоками. Число единиц товара, имеющегося в конкретном источнике, называется мощностью источника. Число единиц товара, которое может принять сток, называется мощностью стока. Принято обозначать m – число источников, а n – число стоков. Мощности источников и стоков обозначают, соответственно, $a_i, i \in 1:m$, $b_j, j \in 1:n$. Стоимость перевозки единицы товара от i-го источника к j-му стоку обозначается $c_{i,j}, i \in 1:m, j \in 1:n$.

Объём планируемой перевозки от $i-$го источника к $j-$у стоку обозначается $x_{i,j}$. Очевидно, что

$$x_{i,j} \geq 0 \quad , i \in 1:m, j \in 1:n \quad . \tag{1}$$

Кроме этого необходимо, чтобы

$$\sum_{j=1}^{n} x_{i,j} \leq a_i \quad , \quad \forall i \in 1:m , \tag{2}$$

то есть, планируемые перевозки от $i-$го источника не должны превышать мощности этого источника,

$$\sum_{i=1}^{m} x_{i,j} \le b_j \ , \quad \forall j \in 1:n \ , \tag{3}$$

то есть, планируемые перевозки в $j-$й сток не должны превышать мощности этого стока.

Задача заключается в том, чтобы спланировать такие перевозки, удовлетворяющие ограничениям (2) и (3) так, чтобы суммарная стоимость этих перевозок была минимальна, то есть

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{i,j} x_{i,j} \to \min \tag{4}$$

Задача (4) с ограничениями (1), (2), (3) является задачей линейного программирования.

Пример. Рассмотрим задачу: $a = \{6,5,8\}$ - мощности источников, $b = \{4,3,7,5\}$ - мощности стоков, $C = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 8 \\ 3 & 4 & 7 & 2 \\ 6 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Условия транспортной задачи записываются в виде таблицы.

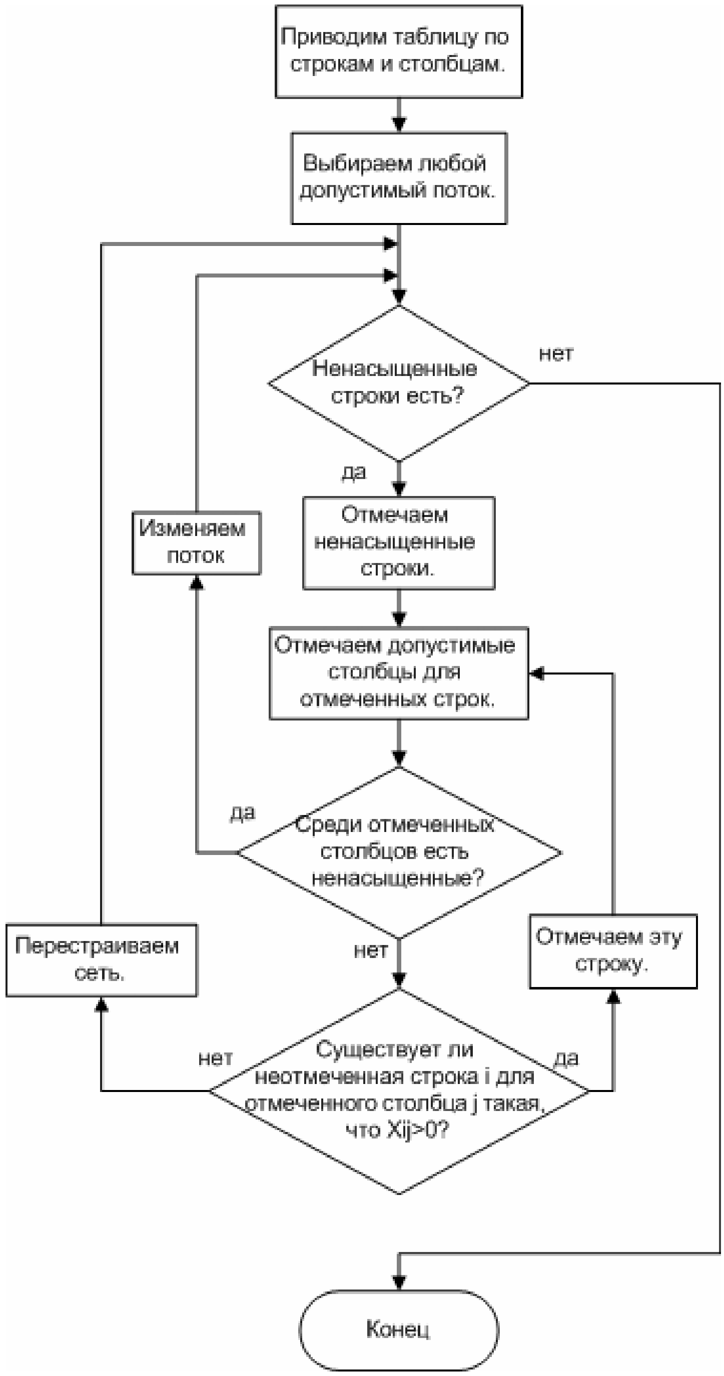
a_i \ b_j	**4**	**3**	**7**	**5**
6	5	2	3	8
5	3	4	7	2
8	6	5	3	4

Лемма. Если от элементов любой строки матрицы стоимостей вычесть одно и тоже число, оптимальный план перевозок не изменится.

Доказательство леммы очевидно.

Вычитание от элементов любой строки матрицы одного и того же числа называется её приведением.

Рассмотрим решение транспортной задачи венгерским методом. Ниже приведена блок схема алгоритма



Приводим матрицу:

Находим компоненты двойственного плана:

$$u_i = \min_j c_{i,j}$$

	4	**3**	**7**	**5**
6	5	2	3	8
5	3	4	7	2
8	6	5	3	4

$u_1=2$
$u_2=2$
$u_3=3$

	4	**3**	**7**	**5**
6	3	0	1	6

5	1	2	5	0
8	3	2	0	1

Приводим таблицу по строкам:

$\hat{c}_{i,j} = c_{i,j} - u_i$

Находим компоненты двойственного плана: $v_j = \min\limits_i \left(\hat{c}_{i,j} - u_i\right)$

	4	**3**	**7**	**5**
6	3	0	1	6
5	1	2	5	0
8	3	2	0	1

$v_1=1$ $v_2=0$ $v_3=0$ $v_4=0$

Приводим таблицу по столбцам:

$c'_{i,j} = \hat{c}_{i,j} - v_j$

	4	**3**	**7**	**5**
6	2	0	1	6
5	0	2	5	0
8	2	2	0	1

Составим вспомогательную транспортную сеть, состоящую из путей исходной сети, для которых $c'_{i,j} = 0$: допустимые маршруты – это не закрашенные клетки матрицы стоимостей.

	4	**3**	**7**	**5**
6	2	0	1	6
5	0	2	5	0
8	2	2	0	1

Выбираем любой, допустимый для ограничений по сумме, поток:

	4	**3**	**7**	**5**
6		3		
5	0			5
8			7	

Имеются ненасыщенные строки, т.е. имеются источники из которых вывозится не весь товар. Значит, план перевозок может быть улучшен. Отмечаем ненасыщенные строки символами μ_i / ω_i, где $\mu_i = 0, \omega_i = a_i - \sum_j x_{i,j}$.

В данном случае $\omega_1 = 6 - 3$, $\omega_3 = 8 - 7$.

	4	**3**	**7**	**5**	
6		3			0/3
5	0			5	
8			7		0/1

Идем по отмеченной строке i, находим допустимые столбцы j (недопустимые – густо закрашены) и отмечаем их меткой λ_j / η_j, где $\lambda_j = j$, $\eta_j = \omega_i$.

	4	**3**	**7**	**5**	
6		3			0/3
5	0			5	
8			7		0/1
		1/3	3/1		

Не отмечен ни один ненасыщенный столбец. Проверяем, существует ли неотмеченная строка i, имеющая на пересечении с отмеченным столбцом j значение $x_{i,j} > 0$. Таких строк нет. Найденный поток максимален, требуется перестройка сети. Возвращаемся к таблице транспортной сети.

Прочёркиваем неотмеченные строки и отмеченные столбцы.

$c'_{i,j}$	**4**	**3**	**7**	**5**	
6	2	0	1	6	0/3
5	0	2	5	0	
8	2	2	0	1	0/1
		1/3	3/1		

Среди неотмеченных чисел находим $\min c'_{i,j}$. Сейчас $\min c'_{i,j} = 1$. Вычитаем это число от отмеченных строк и прибавляем к отмеченным столбцам:

$c'_{i,j}$	**4**	**3**	**7**	**5**
6	1	0	1	5
5	0	3	6	0
8	1	2	0	0

Изменяем транспортную сеть, так чтобы она состояла из дуг, для которых $c'_{i,j} = 0$:

$c'_{i,j}$	**4**	**3**	**7**	**5**
6	1	0	1	5
5	0	3	6	0
8	1	2	0	0

Используем прежний поток для новой транспортной сети:

$c'_{i,j}$	**4**	**3**	**7**	**5**
6		3		
5	0			5
8			7	

Ненасыщенные строки есть. Размечаем таблицу:

Строки:

$c'_{i,j}$	**4**	**3**	**7**	**5**	
6		3			0/3
5	0			5	
8			7		0/1

Столбцы:

$c'_{i,j}$	**4**	**3**	**7**	**5**	
6		3			0/3
5	0			5	
8			7		0/1
		1/3	3/1	3/1	

Не отмечен ни один ненасыщенный столбец.

Проверяем, существуют ли неотмеченные строки i, имеющие на пересечении с отмеченными столбцами j величину $x_{i,j} > 0$. Есть такая строка. Помечаем её символом μ_i / ω_i, где $\mu_i = j, \omega_i = \min(\eta_j, x_{i,j})$: В нашем случае $i = 2$, $j = 4$, $x_{2,4} = 5$, $\eta_4 = 1$, $\omega_2 = 1$, $\mu_2 = 4$.

$c_{i,j}$	**4**	**3**	**7**	**5**	μi=
6		3			0/3
5	0			5	4/1
8			7		0/1
λ_j		1/3	3/1	3/1	

Идем по отмеченной строке $i = 2$, находим допустимый столбец $j = 1$ и отмечаем этот столбец меткой $2/\omega_2$.

$c_{i,j}$	**4**	**3**	**7**	**5**	μi=
6		3			0/3
5	0			5	4/1
5			7		0/1
λ_j	2/1	1/3	3/1	3/1	

Отмечен ненасыщенный столбец $j^* = 1$. Находим величину $\theta = \min(\omega_{j^*}, B_{j^*} - \sum_i x_{i,j^*})$. В данном случае $\theta = \min(1, 4 - 0)$.

Найденную величину поочерёдно добавляем и вычитаем в цепочке

$$\left(i_0, j^*\right)\left(i_0, j_1\right)\left(i_1, j_1\right)\left(i_1, j_2\right)\ldots\left(i_k, j_k\right), \text{ где}$$

$$i_0 = \lambda_{j^*}, j_1 = \mu_{i_0}, i_1 = \lambda_{j_1}, j_2 = \mu_{i_1}, i_2 = \lambda_{j_2}, \ldots\ j_k = 0$$

$$j^* = 1\ \ i_0 = \lambda_1 = 2,\ j_1 = \mu_2 = 4\ \ i_1 = \lambda_4 = 3\ \ j_2 = \mu_3 = 0$$

Получается цепочка: (2,1) (2,4) (3,4).

Изменяем эту цепочку на величину коррекции потока, получаем такой поток:

$c_{i,j}$	**4**	**3**	**7**	**5**
6		3		
5	1			4
8			7	1

Ненасыщенные строки есть. Переходим к разметке:

	4	**3**	**7**	**5**	
6		3			0/3
5	1			4	
8			7	1	

	4	**3**	**7**	**5**	$\mu_{i=}$
6		3			0/3
5	1			4	
8			7	1	
λ_j		1/3			

Не отмечен ненасыщенный столбец.Проверяем, существует ли неотмеченная строка (строки) i, имеющая (имеющие) на пересечении с отмеченным столбцом j (столбцами) величину $x_{i,j} > 0$. Таких строк нет. Найденный поток максимален, требуется перестройка сети. Возвращаемся к таблице транспортной сети. Прочёркиваем неотмеченные строки и отмеченные столбцы.

	4	**3**	**7**	**5**	
6	1	0	1	5	0/3
5	0	3	6	0	
8	1	2	0	0	

1/3

Изменяем транспортную сеть, так чтобы она состояла из дуг, для которых $c'_{i,j} = 0$:

	4	**3**	**7**	**5**	
6	1	0	1	5	–1
5	0	3	6	0	
8	1	2	0	0	
		+1			

$T_{i,j}$	**4**	**3**	**7**	**5**
6	0	0	0	4
5	0	4	6	0
8	1	3	0	0

Используем прежний поток для новой транспортной сети:

$X_{i,j}$	**4**	**3**	**7**	**5**
6		3		
5	1			4
8			7	1

Отмечаем ненасыщенные строки.

$X_{i,j}$	**4**	**3**	**7**	**5**	$\mu_{i=}$
6		3			0/3
5	1			4	
8			7	1	

Отмечаем допустимые столбцы.

$X_{i,j}$	**4**	**3**	**7**	**5**	$\mu_{i=}$
6		3			0/3
5	1			4	
8			7	1	
λ_i	1/3	1/3	1/3		

Среди отмеченных столбцов есть ненасыщенный (столбец 1).
Находим величину коррекции потока: $\theta = \min(3,(5-3)) = 3$.
Найденную величину поочередно добавляем и вычитаем в цепочке: (1,1). Изменяем эту ячейку на величину коррекции потока, получаем такой поток:

$X_{i,j}$	**4**	**3**	**7**	**5**
6	3	3		
5	1			4
8			7	1

Ненасыщенных строк нет, задача решена

Алгоритм венгерского метода решения транспортной задачи.

А. Подготовительный этап:

1. Приводим матрицу стоимостей.

2. Составим вспомогательную транспортную сеть, состоящую из путей исходной сети, для которых $c'_{i,j} = 0$.

3. Выбираем любой, допустимый для ограничений по сумме, поток.

Б. Шаги итераций:

1. ***if*** нет ненасыщенных строк ***then*** задача решена.
2. Отмечаем ненасыщенные строки символами μ_i / ω_i ,где $\mu_i = 0$,$\omega_i = a_i - \sum_j x_{i,j}$.

3. Идём по отмеченной строке i, находим допустимые столбцы j и отмечаем их меткой λ_j / η_j, где $\lambda_j = j$, $\eta_j = \omega_i$.

if отмечен ненасыщенный столбец j^*.

then находим величину $\theta = \min(\omega_{j^*}, B_{j^*} - \sum_i x_{i,j^*})$. Найденную величину поочерёдно добавляем и вычитаем в цепочке

$(i_0, j^*)(i_0, j_1)(i_1, j_1)(i_1, j_2)\dots(i_k, j_k)$, где

$i_0 = \lambda_{j^*}, j_1 = \mu_{i_0}, i_1 = \lambda_{j_1}, j_2 = \mu_{i_1}, i_2 = \lambda_{j_2}, \dots\ j_k = 0$.

Стираем все метки. Переход на п1.

5. ***if*** существуют неотмеченные строки i, имеющие на пересечении с отмеченным столбцом j значение $x_{i,j} > 0$. Помечаем эту строку символом μ_i / ω_i, где $\mu_i = j, \omega_i = \min(\eta_j, x_{i,j})$. Переход на п3.

6. Найденный поток максимален, требуется перестройка транспортной сети. Прочеркнём неотмеченные строки и отмеченные столбцы. Среди оставшихся чисел матрицы стоимости находим $\gamma = \min c'_{i,j}$. Вычитаем это число от отмеченных строк и прибавляем к отмеченным столбцам. Изменяем транспортную сеть так, чтобы она состояла из путей где $c'_{i,j} = 0$. Стираем все метки. Используем прежний поток для новой транспортной сети. Переход на п1.