《最大价值》参考解答

陈雨昕

1 题目大意

有 n 个物品，每个物品有两个属性 a_i, b_i.

对于一个方案中，被摆在第 j 个位置（位置从 1 开始标号）的物品为 i，它对这个方案产生的价值贡献为 $a_i \cdot (j-1) + b_i$，一个方案的价值和为它所含的所有物品的贡献之和。

对于所有可能的 k（$1 \le k \le n$），求在最优的选取以及摆放情况下能得到的方案价值和最大是多少。

2 数据范围

30% 的数据：$n \le 20$;

60% 的数据：$n \le 3000$;

100% 的数据：$n \le 300\,000, 0 \le a_i \le 10^6, 0 \le b_i \le 10^{12}$.

时间限制：1s

空间限制：128MB

3 解题过程

3.1 算法一

首先注意到对于选定的一个物品集合，按照 a 升序排列价值和最大。（排序不等式）

因此先把物品按照 a 升序排序。不难写出背包动态规划：

$$
\begin{aligned}
f_i(0) &= 0, && 0 \le i \le n \\
f_i(j) &= \max\{f_{i-1}(j), f_{i-1}(j-1) + a_i \cdot (j-1) + b_i\}, && 1 \le j \le i \le n \\
f_i(j) &= -\infty, && j > i
\end{aligned}
$$

时空复杂度 $O(n^2)$, 空间复杂度 $O(n)$, 期望得分 60 分。

3.2 算法二

观察解的形态，发现一条结论：选定 k 个物品的答案，一定是在选定 $k-1$ 个物品的答案基础上添加一个物品，而不会拿走。

这说明，$f_i(j)$ 当 $j < j_0(i)$ 时取 $f_{i-1}(j)$, 当 $j \geq j_0(i)$ 时取 $f_{i-1}(j-1) + a_i \cdot (j-1) + b_i$. 其中，$j_0(i)$ 是最小的 j, 使得 $f_{i-1}(j-1) + a_i \cdot (j-1) + b_i > f_{i-1}(j)$.

写成差分的形式，设 $g_i(j) = f_i(j) - f_i(j-1)$, 则 $g_{i-1}(j) < a_i \cdot (j-1) + b_i$.

考虑维护。那么当 $j < j_0(i)$ 时 $g_i(j) = g_{i-1}(j)$, 当 $j = j_0(i)$ 时 $g_i(j) = a_i \cdot (j-1) + b_i$, 当 $j > j_0(i)$ 时 $g_i(j) = g_{i-1}(j-1) + a_i$.

上述操作涉及在序列中插入一项、区间加一个定值和二分，可以使用平衡树来维护。

时间复杂度 $O(n \log n)$, 空间复杂度 $O(n)$, 可以通过。

3.3 结论的证明

设已经选好了集合 S, 再选择 $i \notin S$ 对总价值带来的增益为：

$$Q(S, i) = \sum_{j<i, j\in S} a_i + \sum_{j>i, j\in S} a_j + b_i$$

结论可以写为：

引理 1. 令 $S_0 = \emptyset$, $c_k \in \arg\max\{Q(S_{k-1}, i) \mid i \notin S_{k-1}\}$, $S_k = S_{k-1} \cup \{c_k\}$, 则 S_k 对应了恰选择了 k 个时的最大价值。

证明. 以下把“对应了恰选择了 k 个时的最大价值的集合”叫做 k–最大集。

对任意 $1 \leq k \leq n$, 对 $0 \leq t \leq k$ 施归纳证明一个子结论：S_t 是某个 k–最大集的子集。

当 $t = 0$ 时，$S_0 = \emptyset$, 子结论显然成立。

假设当 $t = m - 1$ 时成立，当 $t = m \leq k$ 时：

任取一 k–最大集 $T \supset S_{m-1}$. 若 $S_m \subseteq T$, 子结论已经成立。以下假设 $S_m \nsubseteq T$.

方便起见，下记 $A = S_{m-1}, B = T \setminus A, i = c_m$.

1. $\min B < i$, 那么设 $j = \max B \cap (0, i)$. 我们知道 $Q(A, j) \leq Q(A, i)$, $a_j \leq a_i$. 下面考虑将 $B \setminus \{j\}$ 中的元素依次加入 A. 当加入 x 时，若 $x > i$, 则它对 $Q(A, j)$ 与 $Q(A, i)$ 的增量均为 a_x; 若 $x < j$, 则它对 $Q(A, j)$ 的增量为 a_j, 对 $Q(A, i)$ 的增量为 a_i; 根据我们选取的方式，不存在 $j < x < i$ 的情况。因此在加入的过程中，任意时刻均有 $Q(A, j) \leq Q(A, i)$. 最后 $A = T \setminus \{j\}$, 因此可以在这时把 j 替换为 i, 即 $(T \setminus \{j\}) \cup \{i\} = S_m \cup (B \setminus \{j\})$ 也是 k–最大集，子结论成立。

2. $\min B > i$, 那么设 $j = \min B$. 我们知道 $Q(A, j) \leq Q(A, i)$. 下面考虑将 $B \setminus \{j\}$ 中的元素依次加入 A. 当加入 x 时，若 $x > j$, 则它对 $Q(A, j)$ 与 $Q(A, i)$ 的增量均为 a_x; 根据我们选

取的方式，不存在 $x < j$ 的情况。因此在加入的过程中，任意时刻均有 $Q(A, j) \le Q(A, i)$. 最后 $A = T \setminus \{j\}$, 因此可以在这时把 j 替换为 i, 即 $(T \setminus \{j\}) \cup \{i\} = S_m \cup (B \setminus \{j\})$ 也是 k–最大集，子结论成立。

综上所述，当 $t = m$ 时子结论成立。

由上述归纳可得，S_k 是某个 k–最大集的子集。结合 $|S_k| = k$, 可知 S_k 就是 k–最大集，结论证毕。 □