《矩阵填数》参考解答

陈雨昕

1 题目大意

给定一个 $h \times w$ 的矩阵，填入不超过 m 的正整数。

给这个矩阵填数的时候有一些限制，给定 n 个该矩阵的子矩阵，以及该子矩阵的最大值 v, 要求你所填的方案满足该子矩阵的最大值为 v.

求方案数 $\bmod P$, $P = 1,000,000,007$.

2 数据范围

对于全部数据，$1 \le h, w, m \le 10000$, $1 \le v \le m$, $1 \le n \le 18$.

子任务一（10 分）：$n = 1$.

子任务二（20 分）：$n \le 10$, $1 \le h, w \le 50$.

子任务三（30 分）：$n \le 15$.

子任务四（40 分）：无特殊限制。

3 解题过程

3.1 算法一

用于解决 $n = 1$ 的情况。

一个子矩阵最大值为 v 可以拆成两个条件：

1. 子矩阵的所有元素都不超过 v;
2. 子矩阵的至少一个元素等于 v.

条件 1 是对全体元素的限制，易于处理；但条件 2 直接处理较为麻烦，考虑其反面，即：

- 子矩阵的任意一个元素不超过 $v - 1$.

所以若子矩阵含有 A 个元素，那么答案为 $m^{hw-A}\left(v^A - (v-1)^A\right)$.

用快速幂计算，时间复杂度 $O(\log P)$, 空间复杂度 $O(1)$, 期望得分 10 分。

3.2 算法二

用于解决 $n \le 10, 1 \le h, w \le 50$ 的情况。

稍微扩展一下算法一，可以通过容斥原理来计算答案。

枚举子矩阵集合 S, 每个属于 S 的子矩阵限制其所有元素不超过 $v-1$, 属于 $\bar{S}$ 的子矩阵限制其所有元素不超过 v. 方案数就是所有元素的最严限制之积。

时间复杂度 $O(2^n \cdot nhw)$, 空间复杂度 $O(n)$. 期望得分 20 分，结合算法一期望得分 30 分。

3.3 算法三

用于解决 $n \le 15$ 的情况。

注意到，h, w 较大，但是相邻的格子如果没有矩阵边界的阻挡，则是本质相同的。所以可以将坐标离散化。

离散化后，矩阵的一个格子可能具有一定的面积。对于一个面积为 A 的格子，若其最严限制为 M, 那么它对方案数的贡献是 M^A.

时间复杂度 $O\left(2^n(n^3 + n^2 \log P)\right)$, 空间复杂度 $O(n)$, 期望得分 30–60 分。

3.3.1 优化

注意到，若当 $S = \emptyset$ 时，一个面积为 A 的格子的最严限制为 M_0, 则对于任意 S, 该格子的限制为 M_0 或 $M_0 - 1$, 因此可以预处理 M_0, M_0^A 和 $(M_0 - 1)^A$.

时间复杂度降为 $O(2^n \cdot n^3 + n^2 \log P)$, 空间复杂度 $O(n^2)$, 期望得分 60 分。

3.4 算法四

用于解决原问题。

按照是否在子矩阵内，n 个子矩阵将原矩阵的元素划分为 2^n 个集合，同一个集合内在各种容斥集合下最严限制相同。

对于一些子矩阵的集合 X, 设被 X 中子矩阵包含，且不被其余子矩阵包含的全体元素集合为 $D(X)$, 其含有 $A(X)$ 个元素。由于离散化后每个格子都含于同一些子矩阵，$A(X) \neq 0$ 的 X 至多有 $(2n+1)^2$ 个。

先计算 $A(X)$. 被 X 中子矩阵包含的限制容易处理，因为几个子矩阵的交集要么还是子矩阵，要么是空集。而不被其余子矩阵包含的限制则需要用容斥。由于只有 $O(n^2)$ 个 $A(X) \neq 0$ 的项，容斥的时间为 $O(2^n \cdot n^2)$.

接下来预处理 $S = \emptyset$ 时 $D(X)$ 的最严限制 $M_0(X)$, 以及 $M_0(X)^{A(X)}$ 和 $(M_0(X) - 1)^{A(X)}$. 则 $D(X)$ 的最严限制 $M(X) = M_0(X) - [\arg\min\{v_i \mid i \in T\} \cap S \neq \emptyset]$, 可以用压位计算。

时间复杂度降为 $O(2^n \cdot n^2 + n^2 \log P)$, 空间复杂度 $O(2^n)$, 期望得分 100 分。