# 省选图论模型分析与优化

March 7, 2021

一张边权全为 $1$ 的有向图中，求出一条从 $1$ 出发的路径和另一条从 $n$ 出发的路径，使得两条路径的长度相等，且终点位于同一个点（路径允许重复经过边或点）。最小化路径的长度，或者输出无解。

$n \le 250, 0 \le m \le n(n-1)$

# wf2006 j

一张有向图中，求一条从$1$ 号点到$n$ 号点再到$1$ 号点的路径，使得路径上经过的不同的点的数目最少。

$n, m \leq 100$

首先分析最优解的结构。首先 $1 \to n$ 的路径上不经过重复点，回来的路径上也不能有重复点。两条路间可能有重复点。

首先分析最优解的结构。首先 $1 \to n$ 的路径上不经过重复点，回来的路径上也不能有重复点。两条路间可能有重复点。

考虑回来的路上第一次经过的重复点是 $a$，路径是 $1 \to a \to n \to a \to 1$。

首先分析最优解的结构。首先 $1 \to n$ 的路径上不经过重复点，回来的路径上也不能有重复点。两条路间可能有重复点。

考虑回来的路上第一次经过的重复点是 $a$，路径是 $1 \to a \to n \to a \to 1$。

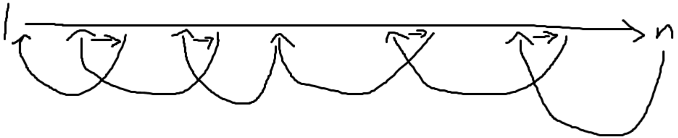
那么考虑 $a \to n$ 这一段路上，最末一个点 $b$ 使得 $b$ 也同时出现在回来时 $a \to 1$ 的路径上。那么 $1 \to a \to b \to n \to a \to b \to 1$。可以发现最优解里这两段 $a \to b$ 一定是重合的，并且是 $a \to b$ 的最短路。

首先分析最优解的结构。首先 $1 \to n$ 的路径上不经过重复点，回来的路径上也不能有重复点。两条路间可能有重复点。

考虑回来的路上第一次经过的重复点是 $a$，路径是 $1 \to a \to n \to a \to 1$。

那么考虑 $a \to n$ 这一段路上，最末一个点 $b$ 使得 $b$ 也同时出现在回来时 $a \to 1$ 的路径上。那么 $1 \to a \to b \to n \to a \to b \to 1$。可以发现最优解里这两段 $a \to b$ 一定是重合的，并且是 $a \to b$ 的最短路。

重复这一过程，最优解一定具有如下结构



然后考虑 DP。

然后考虑 DP。

$f[x][y]$ 表示最小化 1 到 x 与 y 到 1 中路径不重复的点的个数，答案即为 $f[n][n]$. 转移分为 5 种情况。

(1) x 的下一个点 i 不是重复点，那么 i 一定不与 x，y 相等。$f[i][y] = \min(f[i][y], f[x][y] + 1)$

(2) y 的上一个点 i 不是重复点，与 (1) 类似，$f[x][i] = \min(f[x][i], f[x][y] + 1)$

(3) x 与 y 均为重复点，$f[y][x] = \min(f[y][x], f[x][y] + dis[x][y] - 1)$

(4) x 是重复的点，y 的上一个点是 x，有 $f[x][x] = \min(f[x][x], f[x][y])$

(5) y 是重复的点，x 的下一个点是 y，有 $f[y][y] = \min(f[y][y], f[x][y])$

# 经典例题

一个带正整数边权的无向图，其中有$k$ 个关键点。

共有$q$ 个询问，每次输入两个关键点$u, v$。请你求出一个最小的$d$，使得存在一条$u \to v$ 的路径，使得路径上每相邻两个关键点之间距离不超过 $d$。

$1 \le k \le n \le 100000, q \le 100000$

（如果所有点都是关键点就变成了最小瓶颈路询问(NOIP2013)。）

把点集划分成若干个区域，每个区域内是一个关键点以及离它最近的点的集合（用多源 dijkstra 计算)(“图上的 voronoi 图”)

把点集划分成若干个区域，每个区域内是一个关键点以及离它最近的点的集合（用多源 dijkstra 计算)(“图上的 voronoi 图”)

一旦走了一条跨越了两个区域的边，那么一定先回到区域中心是最优的。

# USACO OPEN17 grass

一个无向图，每个点有颜色，每条边有边权。支持以下操作。

- 修改某个点的颜色
- 询问：输出图中不同色的两点间距离的最小值

$n, q \leq 500000$

答案一定是最小生成树上的一条边。
取最小生成树。每个点维护下按照孩子颜色分类的最小边权

# 2018sd 集训 d1t1

带边权无向图，第 $i$ 条边的权值是 $2^i$。
求一个回路使得每条边至少经过一次，最小化总权值。
$n, m \leq 500000$

总的边集为 $E$

问题等价于：选出一个总权值最小的边集 $S \subseteq E$，使得 $E+S$ 的每个点度数为偶数。（即将 $S$ 里的边用 2 次））注意：（同一条边永远不需要用 $\geq 3$ 次）

总的边集为 $E$

问题等价于：选出一个总权值最小的边集 $S \subseteq E$，使得 $E+S$ 的每个点度数为偶数。（即将 $S$ 里的边用 2 次））注意：（同一条边永远不需要用 $\geq 3$ 次）

观察发现：如果 $(u,v)$ 不在最小生成树上，则 $(u,v)$ 不需要放入 $S$。因为存在另一条 $u$ 到 $v$ 的路径，路径上的最大边权小于 $(u,v)$。因为边权是互不相同的 2 的幂次，所以路径总边权也小于 $(u,v)$ 边权，所以可以做替换使总权值更优。

总的边集为 $E$

问题等价于：选出一个总权值最小的边集 $S \subseteq E$，使得 $E+S$ 的每个点度数为偶数。（即将 $S$ 里的边用 2 次））注意：（同一条边永远不需要用 $\geq 3$ 次）

观察发现：如果 $(u,v)$ 不在最小生成树上，则 $(u,v)$ 不需要放入 $S$。因为存在另一条 $u$ 到 $v$ 的路径，路径上的最大边权小于 $(u,v)$。因为边权是互不相同的 2 的幂次，所以路径总边权也小于 $(u,v)$ 边权，所以可以做替换使总权值更优。

算法：求最小生成树，然后直接确定树上的每条边 $(u,v)$ 需不需要放入 $S$：只要让 $T_u, T_v$ 这两个子树各自的总度数都是偶数即可。

# bzoj4727

输入一个 $n$ 个点的有向图，任意两个点之间有且仅一条有向边。（竞赛图）

对于每个点 $v$，请你求出从 $v$ 出发的一条最长的简单路径 (即路径不能有重复的点)。

$n \leq 2000.$

定理：强连通竞赛图一定存在哈密顿回路。
怎么证明 $+$ 构造（$O(n^2)$ 时间）？

定理：强连通竞赛图一定存在哈密顿回路。

怎么证明 + 构造（$O(n^2)$ 时间）?

归纳，每次加一个点 $u$。维护当前已加入的点形成的强连通分量（SCC）的拓扑排序 $s_1 \to s_2 \to \ldots s_k$，其中每个 SCC 都有一个哈密顿回路。

找最小的 $i$ 使得 $u \to s_i$，和最大的 $j$ 使得 $s_j \to u$。

情况 1：$u$ 单独成为一个新 SCC

情况 2：$u$ 被合并进一个 SCC。把 $u$ 合并进这个 SCC 的哈密顿回路里

情况 3：$s_j \to u \to s_i \to s_j$ 形成一个新 SCC。把这些哈密顿回路断开再接成一个大的。

# cf429 e

有一些整数区间 $[l_i, r_i]$，请你对这些区间黑白染色，使得对于每个整数，覆盖它的 $|$ 黑色区间数 -白色区间数 $| \leq 1$

$n \leq 10^5$

每个区间连 l 和 r + 1 之间的边，如果有欧拉回路，那么给从左到右的边涂黑色，从右到左的涂白色。

每个区间连 l 和 r + 1 之间的边，如果有欧拉回路，那么给从左到右的边涂黑色，从右到左的涂白色。

如果不存在欧拉回路怎么做呢？可以把相邻奇数点两两配对

给定一张 n 个点 m 条边的有向图，问最少在这张图上加几条边，使得这张图变成一张强联通图，并需要构造一种方案。

$n, m \leq 100000$

输入一个联通无向图。请你给每条边定一个方向。然后，对于结点 $u$ 定义 $r_u$ 表示有多少个点是从 $u$ 可达的。

请你输出方案使得 $\min_u r_u$ 最大。

$n, m \leq 400000$

# PA2010 Riddle

一个无向图，点集被分成了 k 个部分。

请选择一些关键点，使得每个部分至多有一个关键点，且每条边至少有一个端点是关键点。

$n, k \leq 10^6$.

# TCO 2014 celebrity hard

一个 $w \times h$ 的长方形的空地。里面给定了 $n$ 个互不相同的点。现在请在长方形中放入 $n$ 个等腰直角三角形，使得：

每个三角形的斜边长度都等于 $L$。

第 $i$ 个三角形的斜边的中点与第 $i$ 个给定的点重合。

三角形之间互不覆盖。

三角形的斜边需要平行于 x 轴或 y 轴。

请问 $L$ 最大是多少？

$(n \leq 50)$

先二分 $L$，然后转为 2sat。但问题是每个点有四种选择方案，不太好做。

先二分 $L$，然后转为 2sat。但问题是每个点有四种选择方案，不太好做。

以每个给定的点为中心画 4 个小的等腰直角三角形，考虑每个小的三角形选或不选。那么两个对顶角三角形的 xor 值等于 1。

# 经典题：最大割

一个 $30 \times 30$ 的矩形网格图。请将格点划分成 S 和 T 两个集合。

对于每个点 $(i, j)$，将它划分给 S 会产生 $s_{ij} \geq 0$ 的收益，划分给 T 会产生 $t_{ij} \geq 0$ 的收益。

对于一条边 $e$，如果两个端点被划分在不同的集合，则产生 $w_e \geq 0$ 的收益。

请最大化总的收益。

黑白染色，转化为最小割

# luogu p2825

一个 $50 \times 50$ 的棋盘，中间有些空格和障碍格。请在空格内放入尽量多的棋子，使得不存在两个棋子相互攻击（相互攻击：两个棋子在同一行或同一列内，且中间没有障碍阻挡）。

将横向的连续段作为黑点，纵向的连续段作为白点，交叉位置是连边。求二分图最大匹配。

# ArrayTransformations TCO09 Championship round day1 med

给定一个长度为 $n$ 的非负整数数列 a

称一次变换为：选定区间 $[i,j]$，（满足 $1 \leq i \leq j \leq n$），对序列 $a$ 在区间中的每个数减 1 ，如果已经为 0 则不操作。这样一次变换的代价为 $j - i + 1$。

对于给定序列 $a$，正整数 $k, m$，求：

在使用不超过 $k$ 次变换，总变换代价不超过 $m$ 的前提下，$a$ 中最大元素的最小值是多少。$n \leq 250$

二分答案，转化一下题意：

要求出不超过 $k$ 条线段，使得数轴上 $i$ 的位置被覆盖了至少 $b_i$ 次，且线段总长不超过 $m$

二分答案，转化一下题意：

要求出不超过 $k$ 条线段，使得数轴上 $i$ 的位置被覆盖了至少 $b_i$ 次，且线段总长不超过 $m$

考虑将数轴建成一条链。一条增广路 $s \to i \to i+1 \to \cdots \to j+1 \to t$ 表示区间 $[i, j]$。中间的边都带上 1 的费用

流量不超过 $k$，总费用不超过 $m$，且 $i \to i+1$ 的流量下界是 $b_i$。求最小费用最大可行流

# CTSC 2009 移民站选址

数轴上有 $n \leq 100$ 个移民站，第 $i$ 个坐标为 $u_i$。
请你再建立 $m \leq 100$ 个新的移民站。
移民站之间需要传输数据:
第 $i$ 个旧站和第 $j$ 个新站之间要传 $a_{ij} \geq 0$ 的数据
第 $i$ 个新站和第 $j$ 个新站之间要传 $b_{ij} \geq 0$ 的数据。
传输代价是两个站之间传输的数据量乘上两个站之间的距离。
求最小代价总和。

最优方案中，新站都建在和旧站重合的位置。

最优方案中，新站都建在和旧站重合的位置。

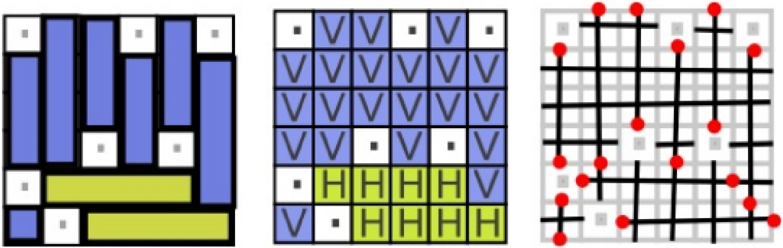
考虑最小割

对每个新站 $i$，建一条长为 $n$ 的链，割所在的位置表示建在与哪个旧站重合的地方。

对于两个新站 $i, j$，对于每个 $k$，都将各自的链上第 $k$ 个点连双向边 $b_{ij}$ 乘以第 $k, k+1$ 个旧站之间距离。

## BoardPainting srm577 div1 hard

有一个 $50 \times 50$ 的方阵，其中有些格子里有砖块。每次可以选择横向或者纵向的连续的一些砖块并将他们消除（要求连续，中间不能包含空格或者已经被消除的砖块），最少需要消除几次？



用最小割建模。属于 S 集表示是 V 格，属于 T 集是 H 格。
s 向每个砖块格连边，容量为它横向邻接的空格数量
每个砖块格向 t 连边，容量为它纵向邻接的空格数量
相邻两个砖块格连双向容量 1
最小割即为红点数目（答案的 2 倍）

## TheTilesDivOne srm575 div1 hard

一个 $50 \times 50$ 的网格。其中有一些格是障碍，另一些是空格。在空格中切出若干个小块，要求

- 每个小块都是一个面积为 3 的 L 形
- 小块之间不能有重叠，也不能含有障碍格。
- 将网格黑白染色，左上角为黑色。那么每个 L 形的转角格必须是黑格
- L 形可以进行旋转

最多可以切出多少个小块？

3 染色

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |

相邻的 123 即为一个合法 L 形

按 $s \to 1 \to 2 \to 3 \to t$ 的顺序连边。

为保证每个格只使用最多一次，要拆点。