省选组合数学应用与优化

补集转化

想要计算一个集合里元素的数量，可以转化成计算全集和补集的数量，然后相减即可。

不相交路径

一个有向无环图，给定四个点a, b, c, d，求出有多少对路径$(a \to b, c \to d)$ 满足两条路径没有公共点。

$n \leq 200, m \leq 20000$

bzoj3201 战斗力

输入一个非负整数的数组 $0 \le a[1] \le a[2] \le \cdots \le a[n]$。

有多少个非负整数数组 $b[1..n]$ 满足：a, b 之间存在一个完全匹配 p（即一个 n 排列）使得 $a[i] \ge b[p(i)]$ 对于所有 $i = 1, 2, \ldots, n$ 成立。

$n \le 1000$

$f[i]=(a[i]+1)^i-\sum_{1\le j<i}f[j-1](a[i]-a[j])^{i-j+1}\binom{i}{j-1}$
枚举最小的匹配不上的数 $a[j]$

TCO 2014 final

有 n 个端点互不相同，且长度都相等的区间 $[l_i, r_i]$，$r_i = l_i + L$。

对于第 i 个区间，你可以任选 l_i 或 r_i 作为 i 的权值。然后把 $1, 2, \cdots, n$ 按照其权值从小到大排序。最后得到的 n 排列有多少种可能？

$n \leq 500000$

比如 3 个区间分别为 $[1, 4], [2, 5], [3, 6]$，那么只有 5 种可能的 3 排列（其中 321 是不可能的）

每个区间取左端点或右端点，总方案数是 2^n。为了去重，限制所有区间都尽量取左端点（不改变顺序的前提下），这样就产生了一些不合法方案，要去掉。

每个区间取左端点或右端点，总方案数是 2^n。为了去重，限制所有区间都尽量取左端点（不改变顺序的前提下），这样就产生了一些不合法方案，要去掉。

对于区间 i，i 可以改成取左端点但不变顺序的情况：与 $[l_i, r_i]$ 有交的所有区间中，在它左边的都取了左端点，在它右边的（以及它自己）都取了右端点。因为区间都等长，所以所有与 $[l_i, r_i]$ 有交的区间的编号肯定是连续一段 $[A_i, B_i]$（假设区间编号按端点排好序）。

因此我们得到了 n 个限制，第 i 个限制是说：$[A_i, i-1]$ 这一段都取左且 $[i, B_i]$ 这一段都取右的情形是不合法的。

每个区间取左端点或右端点，总方案数是 2^n。为了去重，限制所有区间都尽量取左端点（不改变顺序的前提下），这样就产生了一些不合法方案，要去掉。

对于区间 i，i 可以改成取左端点但不变顺序的情况：与 $[l_i, r_i]$ 有交的所有区间中，在它左边的都取了左端点，在它右边的（以及它自己）都取了右端点。因为区间都等长，所以所有与 $[l_i, r_i]$ 有交的区间的编号肯定是连续一段 $[A_i, B_i]$（假设区间编号按端点排好序）。

因此我们得到了 n 个限制，第 i 个限制是说：$[A_i, i-1]$ 这一段都取左且 $[i, B_i]$ 这一段都取右的情形是不合法的。

$dp[k]$ 表示前 k 个区间的方案数，使得所有满足 $B_i \le k$ 的限制 $[A_i, B_i]$ 都不被违反。

只要先将 $dp[k]$ 设置为 $2dp[k-1]$，然后枚举所有 $B_i = k$ 的限制，并从 $dp[k]$ 里减去不合法的 $dp[A_i - 1]$ 个方案。

每个区间取左端点或右端点，总方案数是 2^n。为了去重，限制所有区间都尽量取左端点（不改变顺序的前提下），这样就产生了一些不合法方案，要去掉。

对于区间 i，i 可以改成取左端点但不变顺序的情况：与 $[l_i, r_i]$ 有交的所有区间中，在它左边的都取了左端点，在它右边的（以及它自己）都取了右端点。因为区间都等长，所以所有与 $[l_i, r_i]$ 有交的区间的编号肯定是连续一段 $[A_i, B_i]$（假设区间编号按端点排好序）。

因此我们得到了 n 个限制，第 i 个限制是说：$[A_i, i-1]$ 这一段都取左且 $[i, B_i]$ 这一段都取右的情形是不合法的。

$dp[k]$ 表示前 k 个区间的方案数，使得所有满足 $B_i \le k$ 的限制 $[A_i, B_i]$ 都不被违反。

只要先将 $dp[k]$ 设置为 $2dp[k-1]$，然后枚举所有 $B_i = k$ 的限制，并从 $dp[k]$ 里减去不合法的 $dp[A_i - 1]$ 个方案。

为什么这样减不会出现重复？是因为两个限制 $[A_i, k]$ 和 $[A_{i'}, k]$ 不可能被同时违反。

容斥原理

一个很有用的定理
从一道小学奥数题引入

小学奥数题

输入一个正整数 m 和一个正整数 n，请问在 $1, 2, \ldots, n$ 中，有多少个数字和 m 是互质的？

$1 \leq n, m \leq 10^9$

容斥原理

$$\left|\bigcup_{1\le i\le n} A_i\right| = \sum_{1\le i\le n} |A_i| - \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j| + \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap \cdots \cap A_n|$$

反过来：

$$\left|\bigcap_{1\le i\le n} A_i\right| = |S| - \sum_{1\le i\le n} |\overline{A_i}| + \sum_{1\le i<j\le n} |\overline{A_i} \cap \overline{A_j}| - \cdots + (-1)^{n} |\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_n}|$$

srm545 SetAndSet

有 n 个数，要分成两个非空集合，两个集合内所有数字的 and 要相同。有多少种方案？

$n \le 50, 0 \le a_i < 2^{20}$

不定方程经典题

n 个整数x_i，满足$0 \le x_i \le b_i$，且$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = M$。
求合法解$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 的数量。
$n \le 20, M \le 10^9$

不定方程加强版

n 个整数x_i，满足$0 \le x_i \le b_i$，且$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = M$。
求合法解$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 的数量。
$n \le 32, M \le 10^9$

仍然是容斥

Meet in middle: 枚举左半边的 $2^{n/2}$ 种情况，以及右半边的情况。设左右半边的 b_i 总和分别为 X, Y。那么，如果 $X+Y \leq M$，则总贡献为（范德蒙恒等式）

$$(-1)^d \binom{M-X-Y+n-1}{n-1} =$$

$$\sum_{0\leq i\leq n-1} (-1)^{d_x} \binom{M-X+n-1}{i} (-1)^{d_y} \binom{-Y}{n-i-1}$$

仍然是容斥

Meet in middle: 枚举左半边的 $2^{n/2}$ 种情况，以及右半边的情况。设左右半边的 b_i 总和分别为 X, Y。那么，如果 $X + Y \le M$，则总贡献为（范德蒙恒等式）

$$(-1)^d \binom{M - X - Y + n - 1}{n - 1} =$$

$$\sum_{0 \le i \le n-1} (-1)^{d_x} \binom{M - X + n - 1}{i} (-1)^{d_y} \binom{-Y}{n - i - 1}$$

最外层枚举 i，然后枚举 X，然后 $Y \le M - X$ 的总贡献可以用前缀和算。

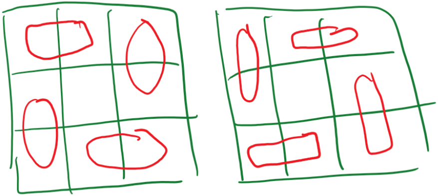
zjoi 2009 多米诺骨牌

给出一张矩形表格，一些地方有障碍物，向其中放 1×2 的多米诺骨牌（不用填满），要求:

任何相邻两行之间都有至少一个骨牌横跨，任何相邻两列之间也都至少有一个骨牌横跨，求方案数。

$n, m \leq 15$

$n=3, m=3$



先预处理出每个子矩形内随便放骨牌的方案数。（轮廓线状态压缩）（大约 $n^3 2^n$ 总时间）

先预处理出每个子矩形内随便放骨牌的方案数。（轮廓线状态压缩）（大约 $n^3 2^n$ 总时间）

容斥列的横跨，这样分成了若干个独立的竖条

先预处理出每个子矩形内随便放骨牌的方案数。（轮廓线状态压缩）（大约 $n^3 2^n$ 总时间）

容斥列的横跨，这样分成了若干个独立的竖条

竖着按行 dp，算出每相邻两行都出现横跨的方案数。（补集转化：枚举第一次出现断开的位置，减掉）

srm684 DivFree

给定n, k，有多少个长度为n 的数组$a[1..n]$，满足：

- 所有元素都是1 到k 的整数
- 对于每个$1 \le i \le n-1$，要求 $a[i+1]$ 不能是 $a[i]$ 的真约数。（换句话说，$a[i] \le a[i+1]$ 或者$a[i] \bmod a[i+1] \neq 0$）

$n, k \le 50000$

容斥。固定一些 i，要求 $a[i]$ 是 $a[i+1]$ 的真约数，其它没有限制。如果固定了 k 个 i，则乘以 $(-1)^k$。

容斥。固定一些 i，要求 $a[i]$ 是 $a[i+1]$ 的真约数，其它没有限制。如果固定了 k 个 i，则乘以 $(-1)^k$。

指数级的枚举是不行的，需要 DP。注意性质：真约数的链至多 $O(\log k)$ 长度。

容斥。固定一些 i，要求 $a[i]$ 是 $a[i+1]$ 的真约数，其它没有限制。如果固定了 k 个 i，则乘以 $(-1)^k$。

指数级的枚举是不行的，需要 DP。注意性质：真约数的链至多 $O(\log k)$ 长度。

预处理每种长度的真约数关系链有几种。DP 转移时枚举当前的末尾真约数连续段的长度即可。

CEOI 2016 kangaroo

求有多少个n 排列$p[1..n]$，满足$p[1] = a, p[n] = b$，且$p[1] > p[2] < p[3] > p[4] < p[5] > \cdots$

$n \leq 2000$

CEOI 2016 kangaroo

求有多少个n 排列$p[1..n]$，满足$p[1] = a, p[n] = b$，且$p[1] > p[2] < p[3] > p[4] < p[5] > \cdots$

$n \leq 2000$

直接 DP 怎么做 $O(n^3)$？ ($n \leq 200$)

直接 DP 的 $O(n^3)$ 做法。

$f[i][a][b]$ 表示，将 $1 \sim i$ 填入前 i 个位置满足大小关系，最左边填 a 最右边填 b 的方案数。

直接 DP 的 $O(n^3)$ 做法。

$f[i][a][b]$ 表示，将 $1 \sim i$ 填入前 i 个位置满足大小关系，最左边填 a 最右边填 b 的方案数。

转移时，在第 $i+1$ 位置填入一个新数字 $b' \in \{1, 2, \ldots, i+1\}$，并把之前填入的大于等于 b' 的数都加一。

直接 DP 的 $O(n^3)$ 做法。

$f[i][a][b]$ 表示，将 $1 \sim i$ 填入前 i 个位置满足大小关系，最左边填 a 最右边填 b 的方案数。

转移时，在第 $i+1$ 位置填入一个新数字 $b' \in \{1, 2, \dots, i+1\}$，并把之前填入的大于等于 b' 的数都加一。

用前缀和优化可以 $O(n^3)$。

更快的做法：对小于号容斥，那么小于号的位置会被换成大于号或无限制。

更快的做法：对小于号容斥，那么小于号的位置会被换成大于号或无限制。

变成若干条大于号连成的链。

更快的做法：对小于号容斥，那么小于号的位置会被换成大于号或无限制。

变成若干条大于号连成的链。

$$n!/\prod len_i!$$

更快的做法：对小于号容斥，那么小于号的位置会被换成大于号或无限制。

变成若干条大于号连成的链。

$$n!/\prod len_i!$$

首尾所在的段要特殊处理。不妨设$a < b$，枚举首尾两段分别长度为 $x \geq 1, y \geq 1$。那么就有 $\binom{a-1}{x-1}\binom{n-b}{y-1}$ 的方法填这两段。

中间部分所有可能长度的答案可以事先 $O(n^2)$DP 预处理。DP 转移时枚举当前末尾的大于号的链的长度。

总时间 $O(n^2)$。

DAG 计数

输入一个 n 个点 m 条边的有向图，共有 2^m 个边集，其中有多少个边集形成的图是无环图？

$n \leq 16$

对于点集 S，记 $f[S]$ 是只考虑 S 导出的子图时的 DAG 数量。

DAG 一定有至少一个 sink（0 出度点）。枚举 sink 集合 T，则 T 里面没有连边，且把 T 都删掉后剩下的仍然是一个 DAG。对 sink 进行容斥，:

$$f[S]=\sum_{T\subseteq S,|T|\geq 1}(-1)^{|T|-1}\cdot f[S-T]\cdot 2^{|E[S-T,T]|}$$

bzoj 3812 主旋律

输入一个 n 个点 m 条边的有向图，共有 2^m 个边集，其中有多少个边集将所有 n 个点强连通？

$n \leq 16$

联想强连通和 DAG 的关系：对任意一个有向图，它的所有 SCC 组成了一个 DAG

将上题的容斥推广一下：

$$2^{|E[S]|}=\sum_{T\subseteq S,|T|\geq 1} g[T]\cdot 2^{|E[S-T]|}\cdot 2^{|E[S-T,T]|}$$

其中 $g[T]=\sum_{1\leq k\leq |T|}(-1)^{k-1}\cdot$ [将 T 拆分成 k 个互不相邻 SCC 的方案数].

联想强连通和 DAG 的关系：对任意一个有向图，它的所有 SCC 组成了一个 DAG

将上题的容斥推广一下：

$$2^{|E[S]|} = \sum_{T \subseteq S, |T| \geq 1} g[T] \cdot 2^{|E[S-T]|} \cdot 2^{|E[S-T,T]|}$$

其中 $g[T] = \sum_{1 \leq k \leq |T|} (-1)^{k-1} \cdot$ [将 T 拆分成 k 个互不相邻 SCC 的方案数].

用上面的递推式反推出 g。

联想强连通和 DAG 的关系：对任意一个有向图，它的所有 SCC 组成了一个 DAG

将上题的容斥推广一下：

$$2^{|E[S]|} = \sum_{T \subseteq S, |T| \geq 1} g[T] \cdot 2^{|E[S-T]|} \cdot 2^{|E[S-T,T]|}$$

其中 $g[T] = \sum_{1 \leq k \leq |T|} (-1)^{k-1} \cdot$ [将 T 拆分成 k 个互不相邻 SCC 的方案数].

用上面的递推式反推出 g。

令 $f[S]$ 为将点集 S 强连通的方案数。设 t 表示 T 里的任意某个元素（比如标号最小的那个），那么 $g[\emptyset] = -1$,

$g[T] = \sum_{t \in S \subseteq T} -f[S] \cdot g[T-S]$

hihocoder 1598 / Ptz camp 2021 winter North America

考虑 n 个点的无根树。已知第 i 个点的颜色是 c_i，但树里的连边还不确定。

我们称无根树 T 是 k-好的，当且仅当：T 不存在多于 k 个点的连通子图满足子图内的所有点颜色相同（也就是说，T 的所有同色连通块都不超过 k 个点）。

输入 n, k 和 $c_1, c_2, \ldots, c_n$，有多少种不同的连边方式可以连出一棵 k-好的无根树？

$n \leq 300$

先看 $k=1$。(同色点不能相邻)

先看 $k=1$。(同色点不能相邻)
容斥。容斥系数：如果固定了奇数条同色边就乘 -1，否则乘 1.

先看 $k=1$。(同色点不能相邻)

容斥。容斥系数：如果固定了奇数条同色边就乘 -1，否则乘 1.

固定一些同色边相当于：将结点划分成若干个组，每组内都是同色点，并要求组里的点连成一个子树，然后再把这些小子树连起来成为整棵树。

推广 Cayley 定理：给定 k 棵树（结点带标号，标号各不相同），它们的结点数目分别是 $a_1+\cdots+a_k=n$，那么把它们连成一棵 n 个点的树的方案数是

$$n^{k-2}\cdot a_1a_2\cdots a_k$$

推广 Cayley 定理：给定 k 棵树（结点带标号，标号各不相同），它们的结点数目分别是 $a_1 + \cdots + a_k = n$，那么把它们连成一棵 n 个点的树的方案数是

$$n^{k-2} \cdot a_1 a_2 \cdots a_k$$

特例：Cayley 定理，n 个点的带标号无根树的数量是 n^{n-2}

先看 $k=1$。(同色点不能相邻)

容斥。容斥系数：如果选中了奇数条同色边就乘 -1，否则乘 1.

固定一些同色边相当于：将结点划分成若干个组，每组内都是同色点，并要求组里的点连成一个子树，然后再把这些小子树连起来成为整棵树。

组的划分是 $a_1+\cdots+a_k=n$，那么把它们连成一棵 n 个点的树的方案数是

$$n^{k-2}\cdot a_1a_2\cdots a_k$$

先看 $k=1$。(同色点不能相邻)

容斥。容斥系数：如果选中了奇数条同色边就乘 -1，否则乘 1.

固定一些同色边相当于：将结点划分成若干个组，每组内都是同色点，并要求组里的点连成一个子树，然后再把这些小子树连起来成为整棵树。

组的划分是 $a_1+\cdots+a_k=n$，那么把它们连成一棵 n 个点的树的方案数是

$$n^{k-2}\cdot a_1a_2\cdots a_k$$

这样只要 DP 如何分组就可以了。

先看 $k=1$。(同色点不能相邻)

容斥。容斥系数：如果选中了奇数条同色边就乘 -1，否则乘 1.

固定一些同色边相当于：将结点划分成若干个组，每组内都是同色点，并要求组里的点连成一个子树，然后再把这些小子树连起来成为整棵树。

组的划分是 $a_1+\cdots+a_k=n$，那么把它们连成一棵 n 个点的树的方案数是

$$n^{k-2}\cdot a_1a_2\cdots a_k$$

这样只要 DP 如何分组就可以了。

如果 $k>1$? 先分小组（每小组同色且不超过 k 大小），然后再让每个小组不相邻（用同样的容斥方法）。这样 dp 的时候分大组里面套一层分小组。

（引理：k 个树，大小分别 $a_1 + \cdots + a_k = n$，连成一棵 n 个点的树的方案数是 $n^{k-2} \cdot a_1 a_2 \cdots a_k$）

先分小组（每小组同色且不超过 k 大小）

$f[i][j]$：i 个点的森林，由 j 个大小 $a_1 \le k, a_2 \le k, \ldots, a_j \le k$ 的树组成。方案数要额外乘以 $a_1 a_2 \cdots a_j$。

$f[i][j] = \sum_{d=1}^{\min\{i,k\}} f[i-d][j-1] d^{d-2} \cdot d \cdot \binom{i-1}{d-1}$

（引理：k 个树，大小分别 $a_1+\cdots+a_k=n$，连成一棵 n 个点的树的方案数是 $n^{k-2}\cdot a_1a_2\cdots a_k$）

先分小组（每小组同色且不超过 k 大小）

$f[i][j]$：i 个点的森林，由 j 个大小 $a_1\le k, a_2\le k,\dots,a_j\le k$ 的树组成。方案数要额外乘以 $a_1a_2\cdots a_j$。

$f[i][j]=\sum_{d=1}^{\min\{i,k\}} f[i-d][j-1]d^{d-2}\cdot d\cdot\binom{i-1}{d-1}$

若干个同色的小组拼成一个连通的大组，因为中间有同色相邻边，要带上容斥系数：$g[i]=\sum_{j=1}^{i}(-1)^{j-1}i^{j-2}f[i][j]$

（引理：k 个树，大小分别 $a_1+\cdots+a_k=n$，连成一棵 n 个点的树的方案数是 $n^{k-2}\cdot a_1a_2\cdots a_k$）

先分小组（每小组同色且不超过 k 大小）

$f[i][j]$：i 个点的森林，由 j 个大小 $a_1\le k, a_2\le k, \ldots, a_j\le k$ 的树组成。方案数要额外乘以 $a_1a_2\cdots a_j$。

$f[i][j]=\sum_{d=1}^{\min\{i,k\}} f[i-d][j-1]d^{d-2}\cdot d\cdot\binom{i-1}{d-1}$

若干个同色的小组拼成一个连通的大组，因为中间有同色相邻边，要带上容斥系数：$g[i]=\sum_{j=1}^{i}(-1)^{j-1}i^{j-2}f[i][j]$

将所有同色点（共 i 个）划分为 j 个的大组。

$h[i][j]=\sum_{d=1}^{i} h[i-d][j-1]g[d]\cdot d\cdot\binom{i-1}{d-1}$

（引理：k 个树，大小分别 $a_1+\cdots+a_k=n$，连成一棵 n 个点的树的方案数是 $n^{k-2}\cdot a_1a_2\cdots a_k$）

先分小组（每小组同色且不超过 k 大小）

$f[i][j]$：i 个点的森林，由 j 个大小 $a_1\le k,a_2\le k,\ldots,a_j\le k$ 的树组成。方案数要额外乘以 $a_1a_2\cdots a_j$。

$f[i][j]=\sum_{d=1}^{\min\{i,k\}} f[i-d][j-1]d^{d-2}\cdot d\cdot\binom{i-1}{d-1}$

若干个同色的小组拼成一个连通的大组，因为中间有同色相邻边，要带上容斥系数：$g[i]=\sum_{j=1}^{i}(-1)^{j-1}i^{j-2}f[i][j]$

将所有同色点（共 i 个）划分为 j 个的大组。

$h[i][j]=\sum_{d=1}^{i} h[i-d][j-1]g[d]\cdot d\cdot\binom{i-1}{d-1}$

最后将各种颜色的大组们拼起来。最外面要乘的 n^{k-2} 里的 k 是大组的个数。在 dp 状态里记录 k 就行。

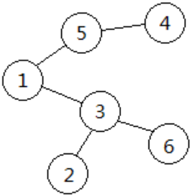
推广 Cayley 定理证明：prufer 序列

prufer 数列是一种无根树的编码表示，对于一棵 n 个节点带编号的无根树，对应唯一一串长度为 n-2 的 prufer 编码。

（1）无根树转化为 prufer 序列。

找到编号最小的叶子并删除，序列中添加与之相连的节点编号，重复执行直到只剩下 2 个节点。

如下图的树对应的 prufer 序列就是 3，5，1，3。



重要性质:prufer 序列中某个编号出现的次数 $+1$ 就等于这个编号的节点在无根树中的度数

（2）prufer 序列转化为无根树。设点集 V=1,2,3,...,n，每次取出 prufer 序列中最前面的元素 u，在 V 中找到编号最小的没有在 prufer 序列中出现的元素 v，给 u，v 连边然后分别删除，最后在 V 中剩下两个节点，给它们连边。最终得到的就是无根树。

给定 k 棵树（结点带标号，标号各不相同），它们的结点数目分别是 $a_1+\cdots+a_k=n$，那么把它们连成一棵 n 个点的数的方案数是

$$n^{k-2}\cdot a_1a_2\cdots a_k$$

证明：把每个子树看成一个大的点，连成树，这个树中 i 子树的度数如果是 d_i+1，就乘以 $a_i^{d_i+1}$ 种方案。

给定 k 棵树（结点带标号，标号各不相同），它们的结点数目分别是 $a_1+\cdots+a_k=n$，那么把它们连成一棵 n 个点的数的方案数是

$$n^{k-2}\cdot a_1a_2\cdots a_k$$

证明：把每个子树看成一个大的点，连成树，这个树中 i 子树的度数如果是 d_i+1，就乘以 $a_i^{d_i+1}$ 种方案。

$$\sum_{d_1+\cdots+d_k=k-2}\frac{(k-2)!}{\prod_i d_i!}\cdot\prod_i a_i^{d_i+1}$$

给定 k 棵树（结点带标号，标号各不相同），它们的结点数目分别是 $a_1 + \cdots + a_k = n$，那么把它们连成一棵 n 个点的数的方案数是

$$n^{k-2} \cdot a_1 a_2 \cdots a_k$$

证明：把每个子树看成一个大的点，连成树，这个树中 i 子树的度数如果是 $d_i + 1$，就乘以 $a_i^{d_i+1}$ 种方案。

$$\sum_{d_1+\cdots+d_k=k-2} \frac{(k-2)!}{\prod_i d_i!} \cdot \prod_i a_i^{d_i+1}$$

化简一下即可。（把右边用 $\exp(a_i x)$ 展开代换一下）

bzoj 2839 集合计数

一个有 n 个元素的集合有 2^n 个不同子集（包含空集）。

现在要从这 2^n 个集合中取出若干个不同的集合，使得它们的交集的元素个数恰好为 k，求取法的方案数（不计取出集合之间的顺序）。$n \leq 1000000$

枚举交集，共有 $\binom{n}{k}$ 种选择。剩下的随便选，共 $2^{2^{n-k}}$。记作 $g[k]=\binom{n}{k}2^{2^{n-k}}$

这样计算时，如果交集大小为 m，则重复计算了 $\binom{m}{k}$ 次。

记交集大小为 m 的方案数为 $f[m]$。那么

$g[k]=\sum_{k\le m\le n}\binom{m}{k}f[m]$。

反解出 f 可以得到

$f[m]=\sum_{m\le k\le n}\binom{k}{m}g[k](-1)^{k-m}$。

（二项式反演）

舞会 bzoj 2024

输入一个n 个黑点n 个白点的完全二分图（两两之间都连边），点分别带权值$a[1..n], b[1..n]$。

有多少个完全匹配满足：恰有k 条边(i, j) 上的点权满足$a[i] > b[j]$?

$k \leq n \leq 2000$

cf 285E

对于一个 n 排列 $p[1..n]$，我们称第 i 个（$1 \le i \le n$）位置是好的，如果 $|p[i] - i| = 1$。

请问有多少个 n 排列里恰好有 k 个好的位置？

$0 \le k \le n \le 1000$

SRM670 Hard

考虑n 个点的简单无向图。定义两个图的异或，就是对于每一对点(u, v)，把它们之间的连边异或。

现在输入k 个这样的图，请问它的2^k 个子集中有多少个满足：集合中的图全部异或起来能够得到一个连通图。

$n \leq 9, k \leq 50$

计算不连通的情况：枚举集合划分

计算不连通的情况：枚举集合划分

集合划分数量：Bell 数$B_9 = 21147$

$B_n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$（第二类斯特林数）

计算不连通的情况：枚举集合划分

集合划分数量：Bell 数 $B_9 = 21147$

$B_n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$（第二类斯特林数）

限制被划分开的两点之间不能有边。于是列出一个 mod2 线性方程组，消元算出解的总数 $= 2^{\text{自由元数量}}$。

计算不连通的情况：枚举集合划分

集合划分数量：Bell 数 $B_9 = 21147$

$B_n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$（第二类斯特林数）

限制被划分开的两点之间不能有边。于是列出一个 mod2 线性方程组，消元算出解的总数 $= 2^{\text{自由元数量}}$。

会有重复计算需要容斥

计算不连通的情况：枚举集合划分

集合划分数量：Bell 数$B_9 = 21147$

$B_n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$（第二类斯特林数）

限制被划分开的两点之间不能有边。于是列出一个 mod2 线性方程组，消元算出解的总数 $= 2^{\text{自由元数量}}$。

会有重复计算需要容斥

容斥系数：被划分成k 个集合时，系数为 c_k

计算不连通的情况：枚举集合划分

集合划分数量：Bell 数$B_9 = 21147$

$B_n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$（第二类斯特林数）

限制被划分开的两点之间不能有边。于是列出一个 mod2 线性方程组，消元算出解的总数 $= 2^{\text{自由元数量}}$。

会有重复计算需要容斥

容斥系数：被划分成k 个集合时，系数为 c_k

那么应该有 $c_1 = 1, c_1\left\{{n \atop 1}\right\} + c_2\left\{{n \atop 2}\right\} + \cdots + c_n\left\{{n \atop n}\right\} = 0(n \geq 2)$

计算不连通的情况：枚举集合划分

集合划分数量：Bell 数$B_9 = 21147$

$B_n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$（第二类斯特林数）

限制被划分开的两点之间不能有边。于是列出一个 mod2 线性方程组，消元算出解的总数 $= 2^{\text{自由元数量}}$。

会有重复计算需要容斥

容斥系数：被划分成k 个集合时，系数为 c_k

那么应该有 $c_1 = 1, c_1\{{n \atop 1}\} + c_2\{{n \atop 2}\} + \cdots + c_n\{{n \atop n}\} = 0 (n \geq 2)$

找规律/斯特林反演公式，得到$c_k = (-1)^{k-1}(k-1)!$

Thanks

Topcoder SRM 530 hard

输入 n 个互不相同的正整数 $a_1, \ldots, a_n$，请问有多少种方法可以将它们重新排列（重排后记作 $b_1, \ldots, b_n$）使得 $|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \cdots + |a_n - b_n| = L$? 其中 L 是输入给定的正整数。

$n \le 50,\ \ a_i \le 50, L \le 1000$ (easy)

$n \le 50,\ \ a_i \le 1000,\ \ L \le 1000$

JOI 2016 Open - Skyscrapers

输入 n 个互不相同的正整数 $a_1, \ldots, a_n$，请问有多少种方法可以将它们重新排列（重排后记作 $b_1, \ldots, b_n$）使得 $|b_1 - b_2| + |b_2 - b_3| + \cdots + |b_{n-1} - b_n| = L$？其中 L 是输入给定的正整数。

$n \leq 100,\ a_i \leq 1000,\ L \leq 1000$

tco2016 2b easy Triangle Triples

多少组整数(a, b, c) 满足$1 \leq a \leq A, 1 \leq b \leq B, 1 \leq c \leq C$，且$a, b, c$ 可以作为三角形（面积为正的）的三条边。

$A, B, C \leq 10^9$

补集转化，求无法构成三角形的，比如$a \geq b + c$。

补集转化，求无法构成三角形的，比如$a \geq b+c$。
然后限制就变成

$$
\begin{aligned}
b+c \leq a &\leq A \\
1 \leq b &\leq B \\
1 \leq c &\leq C
\end{aligned}
$$

用$a-(b+c)$ 代换一下，就变成和刚才类似的问题了。

例题

有 m 个集合 $A_1, \cdots, A_m$，每个集合都是 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的子集。

定义集合 A 将集合 X, Y 分离：$X \subseteq A$ 且 $Y \cap A = \emptyset$，或者 $Y \subseteq A$ 且 $X \cap A = \emptyset$。

对于一对非空集合 (X, Y)，（X, Y 都是 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的子集），称它是好的当且仅当 $|X| = |Y| \geq 1$，并且存在某个 A_i 将 X, Y 分离。

你需要算出有多少对好的 (X, Y)。注意 (X, Y) 和 (Y, X) 被视作相同的。

$n \leq 100, m \leq 18$

比如 $A_1 = \{1, 2, 4\}, A_2 = \{2, 3\}$，则有

$$(\{1\}, \{2\}); (\{1\}, \{3\}); (\{2\}, \{3\}); (\{2\}, \{4\}); (\{3\}, \{4\}); (\{2, 3\}, \{1, 4\})$$

容斥。固定一些 A_i，算出有多少集合对 (X, Y) 被这些 A_i 中的每一个都分离。

容斥。固定一些 A_i，算出有多少集合对 (X, Y) 被这些 A_i 中的每一个都分离。

这个是很好计算的，对每个 $1, 2, \cdots, n$ 中的元素，都算一下它分别在不在每个一个固定的 A_i 中，这样得到一个二进制串，然后只要 X 中的元素对应的二进制串都是 t，Y 中的元素对应的二进制串都是 t 的取反，就可以了。

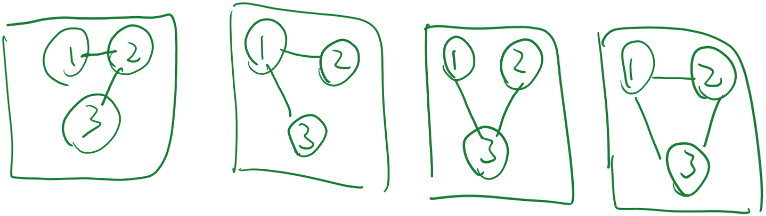
$O(n2^m)$

连通图计数

n 个点的带标号简单连通图有几个？

$n \le 2000$

例如（$n = 3$）：



补集转化

补集转化

不连通时，考虑1 号点所在的连通分量

补集转化
不连通时，考虑1 号点所在的连通分量
$O(n^2)$ 的 DP。

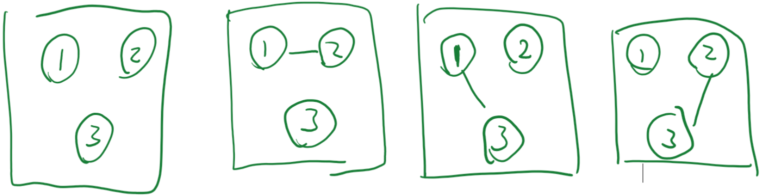
$$f(n) = 2^{\binom{n}{2}} - \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k-1} f(k) 2^{\binom{n-k}{2}}$$

二分图计数

n 个点的带标号简单二分图有几个？

$n \le 2000$

例如（$n=3$）：



先考虑所有图的合法黑白染色总数 $g(n)$

类似地求出所有连通图的合法黑白染色总数 $h(n)$，除以2 即得到连通二分图数目。

再把连通二分图的方案合并，得到所有二分图的数目

$O(n^2)$DP。

先考虑所有图的合法黑白染色总数 $g(n)$

类似地求出所有连通图的合法黑白染色总数 $h(n)$，除以2 即得到连通二分图数目。

再把连通二分图的方案合并，得到所有二分图的数目

$O(n^2)$DP。

$$g(n) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 2^{i(n-i)}$$

$$h(n) = g(n) - \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k-1} h(k) g(n-k)$$

$$f(n) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \frac{h(k)}{2} f(n-k)$$

$O(n\log n)$ 做法

$g(n)/n! = 2^{n^2/2}\sum_{i=0}^{n}\frac{2^{-i^2/2}}{i!}\cdot\frac{2^{-(n-i)^2/2}}{(n-i)!}$

考虑指数型生成函数 $H(x)=\sum_{i\geq 1}\frac{h(i)}{i!}x^i$，$G(x)=\sum_{i\geq 0}\frac{g(i)}{i!}x^i$。
(默认 $g(0)=1, h(0)=0$)

关系：

$G(x)=e^{H(x)}$。

$F(x)=e^{H(x)/2}$