

模拟题 2021-3-14 题解

Tree

在 A 树上建立主席树，每个点上储存到根路径上的信息。

求出每个点在 B 树上的DFS序，在 A 树上建主席树时将每个点在 B 树上子树对应区间进行最大值覆盖。

询问转化为求一个点的最大值。

时间复杂度 $O((n+m)\log n)$

Note

对于 N 的粗糙上界，可以构造得出。取 $N = 102345678900000$ ，数据范围内的 B 数列都可以得到。

在解决这个问题之前，可以先把这个问题一般化，求解数列 A 满足：

- 数列 A 为连续的整数，即 $A_i = A_{i-1} + 1$ 。
- 构成 A_i 的数字集合中必须包含集合 B_i 。

原问题中需要求解的即为集合 B_i 等于输入序列的情况。

设 $A_0 = N = (X)y$ ，其中 $y = N \bmod 10$ ， $X = \lfloor \frac{N}{10} \rfloor$ ，那么数列 A 就可以这样表示：

$$(X)y \dots (X)_8 (X)_9 (X+1)_0 (X+1)_1 \dots (X+1)_9 (X+2)_0 \dots$$

这里 y 的值可以通过枚举来确定，当确定 y 后，可以定义新数列 $A' = \{X, X+1, X+2, \dots\}$ ，每个 A'_i 对应数字集合 B'_i 。

考虑 X 对应的必须数字集合 B_X ，易得

$$B_X = \bigcup_{i=0}^{9-y} (B_i - \{y_i\})$$

对于其它位的必须数字集合也可以类似得出。

设数列 A 的长度为 K ，枚举 y 后得到的数列 A' 的长度 K' 不会超过 $\lceil \frac{K}{10} \rceil + 1$ ，问题规模缩小到原先的 $\frac{1}{10}$ 。由于枚举了末位 y ，所以整层状态的数列长度和仍为 $O(K)$ 。

当 y 枚举 $O(\lg K)$ 次后，数列长度将会不超过2。

递归层数为 $O(\lg K)$ ，每层数列长度和为 $O(K)$ 。

时间复杂度 $O(K \lg K)$ 。

Axelavir

考虑DP转移，记录已经确定了前 i 位，前一位的数字为 j ，现在可以选用的数的范围为 $[l, r]$ ，以及已经使用过的数字集合 S 。

这样记录状态后，可以通过在 $[l, r]$ 枚举下一位放的数字来完成转移，并通过在集合 S 中找到最大的一个比当前数小的数来缩小 $[l, r]$ 的范围，考虑压缩这样的状态。

首先完整记录 $[l, r]$ 是不必要的，只需要记录 $r - l$ 的值即可确定相对大小，集合 S 中也只需保留 $[l, r]$ 范围内的数即可，因为小于 l 的数不会影响下一个位置范围，同时前一位数字 j 的可能性只可能是 S 集中最小和次小的数，状态数大大缩减。

$r - l$ 的最大值在 $\frac{n}{2}$ 左右， S 集合可以直接记录，这样做可以通过原题数据范围 $n \leq 32$ 。

可以发现实际有效的状态更少，可以只记录那些有值的状态进行转移，对于 $n = 50$ ，有效状态数为6000000左右，可以很快完成打表。