

杂题选讲

Stilwell

Problem A

Problem B

Problem C

Problem D

Problem E

Problem F

Problem G

Problem H

Problem I

杂题选讲

Stilwell

2021 年 3 月 13 日

乌鸦喝水

ContestHunter Beta Round #9

杂题选讲

Stilwell

Problem A

Problem B

Problem C

Problem D

Problem E

Problem F

Problem G

Problem H

Problem I

题目描述

- 给一个长度为 n 的数组 $\{w_i\}$ ，从左往右遍历 m 次。
- 遍历时，若看到 $w_i \leq x$ ，则进行一次“操作”，每次“操作”会将所有 w_i 修改为 $w_i + a_i$ ，其中 $\{a_i\}$ 是另一个长度为 n 的数组。
- 问最后总共进行了多少次“操作”。

数据范围

$n, m \leq 10^5$, $x, w_i \leq 10^9$, $a_i \leq 200$ 。

乌鸦喝水

ContestHunter Beta Round #9

杂题选讲

Stilwell

Problem A

Problem B

Problem C

Problem D

Problem E

Problem F

Problem G

Problem H

Problem I

先把数组中的位置按“可以承受的操作数量”排序。

维护：现在正在第 u 轮遍历，已经检查到 v 号位置。

- Case #1: 进行若干次操作后，成功从 v 遍历到 n 。
- Case #2: 在遍历到 n 之前，数组中的某个位置的操作次数溢出了。

用数据结构（线段树/树状数组）判断具体是哪种情况。

- 即检查下一个坏掉的位置还剩几次操作，查询这几次操作中会不会经过那个位置。

每次要么轮数 $u \rightarrow u + 1$ ，要么没有溢出的位置减少1。

复杂度 $O((n + m) \log n)$ 。

Heaps from Trees

XVII Open Cup named after E.V. Pankratiev. Grand Prix of America - D

杂题选讲

Stilwell

Problem A

Problem B

Problem C

Problem D

Problem E

Problem F

Problem G

Problem H

Problem I

题目描述

- 给一棵 n 个点的有根树，节点标号 $1 \sim n$ ，其中1号点为根，每个点有一个权值 v_i 。
- 选出一个最大的点集 S ，满足对于任何 $i, j \in S$ ，若 i 在树上是 j 的祖先，那么 $v_i > v_j$ 。（不一定要连通）
- 求最大可选的点集大小 $|S_{OPT}|$ 。

数据范围

$1 \leq n \leq 2 \times 10^5$, $0 \leq v_i \leq 10^9$ 。

Heaps from Trees

XVII Open Cup named after E.V. Pankratiev. Grand Prix of America - D

杂题选讲

Stilwell

Problem A

Problem B

Problem C

Problem D

Problem E

Problem F

Problem G

Problem H

Problem I

先考虑DP，将权值离散化，设 $f[i][j]$ 表示 i 号点子树中，所有点权值 $\leq j$ 的最大合法点集大小。

假如直接暴力DP，考虑 i 号点是否在集合内：

- 若 i 在集合内，则 $f[i][v_i] = 1 + \sum f[\text{son}][v_i - 1]$ 。
- 若 i 不在集合内，则 $f[i][j] = \sum f[\text{son}][j]$ 。

这个DP是 $O(n^2)$ 的，考虑用数据结构优化。

Heaps from Trees

XVII Open Cup named after E.V. Pankratiev. Grand Prix of America - D

杂题选讲

Stilwell

Problem A

Problem B

Problem C

Problem D

Problem E

Problem F

Problem G

Problem H

Problem I

$f[i][j]$ 显然是对于 j 单调的，不妨用线段树维护其差分数组。

- 对于 i 不在集合内的情况，转移就是线段树合并操作。
- 对于 i 在集合内的情况，只需要进行一次转移，直接在合并得到的线段树上进行操作。

在线段树中不维护差分是0的位置，那么只有在

$$f[i][v_i] = 1 + \sum f[son][v_i - 1]$$

转移中会增加线段树中的叶节点数量，这样的操作次数是 $O(n)$ 的，故均摊复杂度为 $O(n \log n)$ 。

若不使用线段树合并而使用平衡树启发式合并，复杂度为 $O(n \log^2 n)$ 。

DZY Loves Colors

Codeforces Round #254 (Div. 1) - 444C

杂题选讲

Stilwell

Problem A

Problem B

Problem C

Problem D

Problem E

Problem F

Problem G

Problem H

Problem I

题目描述

DZY有一条长度为 n 的丝带，可以看作一个长度为 n 的数组，一开始第 i 个位置的颜色为 i ，权值为0。需要维护 m 次操作，分为两种：

- 将区间 $[l, r]$ 染为颜色 x 。如果一个原先颜色为 y 的位置被染成了 x ，那么这个位置的权值会增加 $|x - y|$ 。
- 询问区间 $[l, r]$ 的权值和。

数据范围

$1 \leq n, m \leq 10^5, 1 \leq x \leq 10^8$ 。

DZY Loves Colors

Codeforces Round #254 (Div. 1) - 444C

杂题选讲

Stilwell

Problem A

Problem B

Problem C

Problem D

Problem E

Problem F

Problem G

Problem H

Problem I

只需要维护一些“同色区间”，每次染色操作会把中间的区间整个抹除，在两端分割出新的区间。

用平衡树或线段树维护的时间复杂度都是 $O((n + m) \log n)$ 。

Maximum Waterfall

Codeforces Round #165 (Div. 1) - 269D

杂题选讲

Stilwell

Problem A

Problem B

Problem C

Problem D

Problem E

Problem F

Problem G

Problem H

Problem I

题目描述

在一个二维坐标系上有 n 条平行于 x 轴的线段 $(l_i, y_i) - (r_i, y_i)$ ，保证它们不相交。最上方和最下方各有一条无限长的线段。一条线段 i 可以走到另一条线段 j 需要满足三个条件：

- 它们在 x 上有交，即 $\max(l_i, l_j) < \min(r_i, r_j)$ ；
- 线段 i 在线段 j 上方，即 $y_i > y_j$ ；
- 不存在第三条线段 k 对 i, j 都满足前两条性质。

从线段 i 走到线段 j 的权值定义为 $\min(r_i, r_j) - \max(l_i, l_j)$ 。找一条从最上方到最下方的路径，使得经过的最小权值最大。

数据范围

$$1 \leq n \leq 10^5, |l_i|, |r_i|, |y_i| \leq 10^9.$$

Maximum Waterfall

Codeforces Round #165 (Div. 1) - 269D

杂题选讲

Stilwell

Problem A

Problem B

Problem C

Problem D

Problem E

Problem F

Problem G

Problem H

Problem I

从上到下处理这些线段，设 f_i 是走到线段 i 时，最大化最小途径权值的结果。

用线段树维护 x 轴上每个位置向上看，能看到哪些线段。

- 和前一题一样，考虑维护“同色区间”。
每次查询 $[l_i, r_i]$ 时可以暴力处理这一段内的所有区间，因为之后都会被覆盖为新的线段编号。
- 一个细节是DP转移时需要判断是否满足第三条限制。
其实只需要查询，相交的那部分线段现在是不是“同色”的。这一部分实际上只会被查询 $O(n)$ 次，因为每次新增的新线段是 $O(1)$ 的，可以剪枝掉由线段树产生的多余查询次数。

复杂度 $O(n \log n)$ 。

Gangsters of Treeland

Codechef NOV 13 MONOPLOY

杂题选讲

Stilwell

Problem A

Problem B

Problem C

Problem D

Problem E

Problem F

Problem G

Problem H

Problem I

题目描述

给出一棵 N 个点的有根树，根为 1。每个点有一个权值，一开始每个点的权值都是不同的。

需要维护 Q 次操作，操作有两种：

- $O\ u$ ，将点 u 到根路径上的所有点的权值赋为一个没有出现过的新权值。
- $q\ u$ ，询问点 u 子树所有点到根路径上不同权值种数的平均值。

数据范围

$$1 \leq N, Q \leq 10^5。$$

Gangsters of Treeland

Codechef NOV 13 MONOPLOY

杂题选讲

Stilwell

Problem A

Problem B

Problem C

Problem D

Problem E

Problem F

Problem G

Problem H

Problem I

考虑用LCT维护那些权值相同的树链， O 操作相当于LCT中的access操作。

对于每条权值树链，链顶节点将会对它的整颗子树产生贡献，这个贡献可以用树状数组或线段树维护，每次 $O(\log N)$ 完成修改。

由LCT的均摊分析可以保证树链的变动次数其实不会超过 $O((N + Q) \log N)$ 次。

时间复杂度 $O((N + Q) \log^2 N)$ 。

接水问题

BZOJ NOI2016 模拟赛

杂题选讲

Stilwell

Problem A

Problem B

Problem C

Problem D

Problem E

Problem F

Problem G

Problem H

Problem I

题目描述

求解以下经典问题的前 k 优解：

- 给出 N 个数 A_i 。
- 求一个 $1 \sim N$ 的排列 P ，最小化 $\sum_{i=1}^N A_i P_i$ 。

数据范围

$N, k \leq 10^5$, $k \leq N!$, $0 \leq A_i \leq 10^8$ 。

接水问题

BZOJ NOI2016 模拟赛

杂题选讲

Stilwell

Problem A

Problem B

Problem C

Problem D

Problem E

Problem F

Problem G

Problem H

Problem I

对于 $k = 1$ 的情况，显然是将 A_i 排成降序，答案即为

$$\sum_{i=1}^N iA_i$$

$k = 2$ 时，在 $k = 1$ 的基础上考虑枚举交换一对 A_i 和 A_{i-1} ，答案变劣 $A_{i-1} - A_i$ ，可以得到次优解。

时间复杂度 $O(N \log N)$

接水问题

BZOJ NOI2016 模拟赛

杂题选讲

Stilwell

Problem A

Problem B

Problem C

Problem D

Problem E

Problem F

Problem G

Problem H

Problem I

这一类第 k 优排列问题考虑用A*解决。

同样将 A_i 排成降序，一个状态用以下方法表示：

- 已确定位数 t 。
- 一个长度为 t 的数组 p_i ，表示对于 $i \leq t$ ， $P_i = p_i$ 。
- 估价 g ，即这个状态能达到的最优解的值，剩下的 $P_{t+1} \sim P_N$ 显然排为升序。

考虑暴力A*，每次选择估价最优（估价相同就选位数最多）的状态进行扩展，也就是枚举排列中下一个未确定位置放哪个数。

- 扩展 $O(Nk)$ 步后就能得到前 k 优解。
- 每次扩展有 $O(N)$ 种可能， $O(N)$ 暴力计算估价。

时间复杂度 $O(N^3k)$

接水问题

BZOJ NOI2016 模拟赛

杂题选讲

Stilwell

Problem A

Problem B

Problem C

Problem D

Problem E

Problem F

Problem G

Problem H

Problem I

问题等价于求 $\sum_{i=1}^N iA_{P_i}$ 。

对于一个状态考虑这样扩展。

- p 的初值为一个 $1 \rightarrow N$ 的升序排列，设 t 为已固定的位数
- 选择一组 (u, v) ， $u - v > t$ ， $v > 1$
- 将 p_{u-v} 修改为 p_u ，原先的 $p_{u-v} \sim p_{u-1}$ 都右移一位
- 新状态的 t 设为 $u - v$ ，估价增加的量为 $\sum_{i=1}^v (A_{p_{u-i}} - A_{p_u})$

分析一下这样做的性质：

- A* 过程中的每个状态都是不同的合法解，扩展 $k - 1$ 步就能得到前 k 优解
- 设 $g^+(u, v)$ 为选择 (u, v) 作为扩展参数时估价的增量，那么有 $g^+(u, v) \leq g^+(u, v + 1)$

接水问题

BZOJ NOI2016 模拟赛

杂题选讲

Stilwell

Problem A

Problem B

Problem C

Problem D

Problem E

Problem F

Problem G

Problem H

Problem I

考虑每次选择没有用过的最优扩展参数进行扩展。
需要维护以下信息

- 对于每个 u 维护一个没有用过的最小的 v ，以及 $g^+(u, v)$
- 设 g_{next} 为当前状态选择没有用过的最优扩展能生成的新状态的估价

每次选择 g_{next} 最优的状态扩展一步即可。

- 新状态的 v 数组和 g_{next} 可以 $O(N)$ 暴力生成
- 旧状态的 g_{next} 也可以 $O(N)$ 重新暴力计算

时间复杂度 $O(Nk)$

接水问题

BZOJ NOI2016 模拟赛

杂题选讲

Stilwell

Problem A

Problem B

Problem C

Problem D

Problem E

Problem F

Problem G

Problem H

Problem I

考虑利用数据结构来高效维护前一算法。

首先，需要一棵可持久化线段树 T 维护还没有被用过的 A 。

- 新状态中，需要将 T 的一个前缀清空并删去 u

“旧状态的 g_{next} ”

- 对应的 v 只要+1就行了，新的 $g^+(u, v)$ 也很容易利用 T 计算
- 可以用线段树维护所有 $g^+(u, v)$ 的最小值

“新状态的 v 数组和 g_{next} ”

- 每个状态的 v 数组初始化均为1， $g^+(u, v)$ 为相邻两项的差
- 维护一棵可持久化线段树 T_v ，可以类似 T 一样修改，也就是对每个状态维护它初始化的情况，由它所扩展出的状态的初始化可以由 T_v 完成

时间复杂度 $O((k + N) \log N)$

秘密武器

ContestHunter Round #15

杂题选讲

Stilwell

Problem A

Problem B

Problem C

Problem D

Problem E

Problem F

Problem G

Problem H

Problem I

题目描述

给定一个长度为 n 的数列 P ，求有多少对不同的正整数四元组 (a, b, c, d) ，满足下列条件：

- $1 \leq a \leq b < c \leq d \leq n$
- $b - a = d - c$
- $c - b - 1 = F$ 其中 F 为某个给定的正整数($F > 0$)
- $\forall 0 \leq i \leq b - a$ 满足 $P_{a+i} = P_{c+i}$

数据范围

$n, F \leq 10^5, |P_i| \leq 10^9$ 。

秘密武器

ContestHunter Round #15

杂题选讲

Stilwell

Problem A

Problem B

Problem C

Problem D

Problem E

Problem F

Problem G

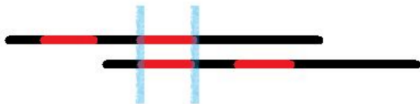
Problem H

Problem I

枚举 $b - a + 1$ 的值，设为 len 。

当 len 固定时，把串右移 $len + F$ 位。

合法的 (a, b, c, d) 中 (a, b) 和 (c, d) 会匹配上。



所以 $O(n)$ 扫一遍，算出匹配长度，就可以得出固定 len 下的合法四元组数量。

由于有 $2len + F \leq n$ 的限制，所以可以通过 $n \leq 10^4$ 的数据。

秘密武器

ContestHunter Round #15

杂题选讲

Stilwell

Problem A

Problem B

Problem C

Problem D

Problem E

Problem F

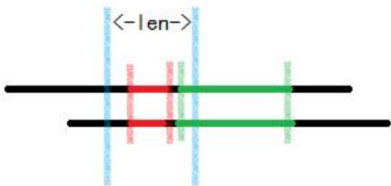
Problem G

Problem H

Problem I

考虑对前一页提到的暴力算法优化。

还是枚举 len ，当确定 len 时，我们会发现很多处匹配耗时都是无效的。我们把原串按 len 分段，出现下面这种红色匹配情况是无意义的：



像上面红色这样的匹配是无意义的，因为这样的匹配长度不会超过 len 。

所以有效的匹配一定是想绿色这样跨越段边界的，而段边界的匹配可以转化为段两端的 LCP 和 LCS。

秘密武器

ContestHunter Round #15

杂题选讲

Stilwell

Problem A

Problem B

Problem C

Problem D

Problem E

Problem F

Problem G

Problem H

Problem I

按 len 分段的复杂度为

$$\sum_{len=1}^n \frac{n}{len} = O(n \ln n)$$

剩下的部分可以用 二分+Hash 或 后缀数组。

复杂度 $O(n \log^2 n)$ 或 $O(\log n)$ 。

The Street

Codechef MARCH 14 STREETTA

杂题选讲

Stilwell

Problem A

Problem B

Problem C

Problem D

Problem E

Problem F

Problem G

Problem H

Problem I

题目描述

有 N 家店铺，以及 M 个操作：

- 1 $u\ v\ a\ b$ ，编号在 $[u, v]$ 范围内的店铺，对于店铺 $u + i$ ，增加一个价格为 $b + a \cdot i$ 的商品。
- 2 $u\ v\ a\ b$ ，编号在 $[u, v]$ 范围内的店铺，对于店铺 $u + i$ ，增加 $b + a \cdot i$ 的税收。
- 3 i ，在店铺 i 购买最贵的物品后加上税收需要支付多少钱（商品价格和税收是直接相加的）。

数据范围

$1 \leq N \leq 10^9$, $1 \leq M \leq 3 \times 10^5$ 。

The Street

Codechef MARCH 14 STREETTA

杂题选讲

Stilwell

Problem A

Problem B

Problem C

Problem D

Problem E

Problem F

Problem G

Problem H

Problem I

对于操作1, 考虑每个点维护一个等差数列标记, 考虑合并两个标记时, 一定可以把当前区间划分为两段, 使得这两个等差数列各在其中一段为较优值。

为了保证每个点上只有一个标记, 就把较短的那一段下传到对应的子树, 这样每次递归只有一个分支, 均摊时间复杂度为 $O(\log^2 N)$ 。

对于操作2, 由于两个等差数列相加还是等差数列, 所以可以用简单的线段树标记维护。

时间复杂度 $O(M \log^2 N)$ 。

Reverse Suffix Array

2017-2018 ACM/ICPC Asia Regional Beijing Online B

杂题选讲

Stilwell

Problem A

Problem B

Problem C

Problem D

Problem E

Problem F

Problem G

Problem H

Problem I

题目描述

给出一个后缀数组 A ，求有多少小写字符组成的字符串的后缀数组为 A 。

数据范围

$|A| \leq 10^5$ ，不取模

Reverse Suffix Array

2017-2018 ACM/ICPC Asia Regional Beijing Online B

杂题选讲

Stilwell

Problem A

Problem B

Problem C

Problem D

Problem E

Problem F

Problem G

Problem H

Problem I

排序后后缀的首字母单调上升，考虑计算在哪些位置上升了。

求出 $rank$ 数组 $rank[A_i] = i$ ，设 $u = A_i, v = A_{i+1}$

- 若 $rank[u + 1] > rank[v + 1]$ ， u 的字符必小于 v 。
- 其他情况 u 和 v 的字符可以相等。

用组合数分配剩下的上升次数。

时间复杂度 $O(|A|)$