

天叔奇谈



前言

《天叔奇谈》

数学：蚂蚁和蚂蚁药

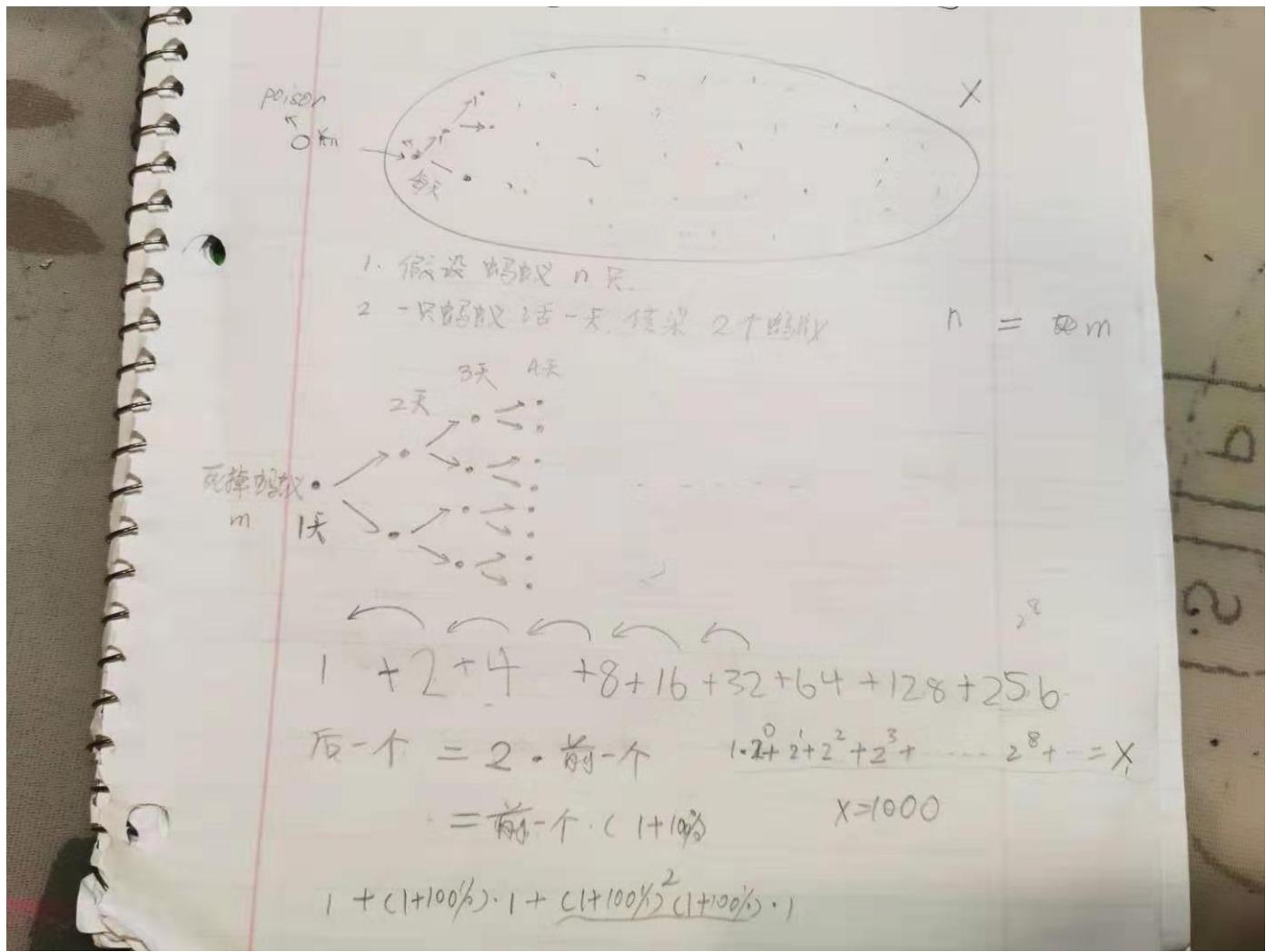
这是「天叔奇谈」的第 000 篇文章，今天周三（2019/09/11），主题是数学。

研究内容

这两天，我家闹蚂蚁。昨天老婆买了杀蚂蚁的药，放在蚂蚁经常出没的地板上。小宝好奇地蹲在旁边，看蚂蚁在药的开口处进进出出。过了一会，他问我：爸爸，这样多久会杀光这些蚂蚁啊？如果是往常，我可能会回答，也许一两周吧。但我突然意识到这是个有趣的数学题。于是我对小宝说，八点半，我们一起研究一下这个问题好不好？

课堂回顾

我在小宝的作业本的空白处画了一个圈，点了很多小点作为蚂蚁。小宝不满意，又多加了一些小点。我说：「我们假设所有的蚂蚁是 n ，我们想知道多久这些蚂蚁都被消灭。我们来做个假设，如果第一天一只蚂蚁吃了蚂蚁药，它将蚂蚁药好吃的消息告诉了两只蚂蚁，第二天这两只蚂蚁也吃了蚂蚁药，它们又分别告诉了另两只蚂蚁，这样一直下去。吃了蚂蚁药的蚂蚁当天就死去了」我在纸上画了如下的图表，说「这是第一天被消灭的蚂蚁，这是第二天，第三天...」：



小宝接过话茬，说：「爸爸我知道，就是第一天是 1，第二天是 2，第三天是 4，第四天是 8，这样这样。妈妈有一天让我因式分解 128，我分解出来 $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ ，一共 7 个二呢，所以第七天是 128，第八天是 256。」

我说：「对。把每天消灭的蚂蚁数加起来，是不是就是总共消灭了多少蚂蚁？」

小宝点点头。

我让她算 $1+2+4$ 一直加到 128 等于多少，我用竖线把前 n 项相加的结果分开，让她一个个算，然后观察一下，看看能不能发现什么规律：

小宝算了四五项之后，惊喜地说，「爸爸，加起来的结果总是比它后一个数小 1」。

于是我在纸上写下了这个式子： $A_1 + A_2 + \dots + A_{n-1} = A_n - 1 = 2 \times A_{n-1} - 1$ ，我解释了 A_{n-1} 和 A_n 的概念，问小宝：是不是这样？

小宝一脸懵逼。看来 X, Y, m, n 这样的「初阶」「代数」小宝可以理解, An-1 这样的「高阶」「代数」她就蒙圈了。

我换做用文字描述, 小宝理解了。

我说, 那如果别人问你, $1+2+4$ 一直加到 2048 等于多少呢? 小宝看了看, 说, 太难了, 不知道。我说, 那你用刚才找到的规律算一算呢? 她心算了一下, 说 4055。我问她, $48 + 48$ 应该等于多少? 怎么样算最快? 她说 48 离 50 近, 所以是 $100 - 4$, 96! 我又问道: 那 $2048 + 2048$ 等于多少? 她又算了一下, 说: 4096。所以 $1+2+4$ 一直加到 2048 等于 4095。

终于到了见证奇迹的时刻。我问小宝, 如果蚂蚁的总数是 1000, 那么第几天这些蚂蚁可以都被消灭呢?

小宝在纸上列出了 1, 2, 4, ..., 当列到 1024 的时候, 她发现比 1000 大了, 于是她算了一下, 说, 第 9 天的时候蚂蚁就都被消灭了。随后她给我解释, 爸爸你看, 512 后面是 1024, 所以 1 一直加到 512 等于 1023, 比 1000 大, 所以第 9 天就被消灭了。

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128$$

$$\begin{array}{cccccc} 3 & 7 & 15 & 31 & 63 & 127 \\ & & & & & 255 \end{array}$$

$$(\underbrace{\dots}_{n-1}) = \overline{a_1 - a_2 - 1}$$

$$\underbrace{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}}_2 = a_n - 1 + 1$$

$$2a_n - 1$$

$$1 + 2 + 4 + \dots + 2048$$

$$+ 2048$$

$$\hline 4096$$

$$- 1$$

$$= 4095$$

$$x = 1000, 1 - \dots$$

$$1 + 2 + 4 + \dots + 512 =$$

随后我让她把她的发现讲给妈妈听。讲得虽然不是很流畅，但大致的意思有了。

贤者时刻

到了睡觉时分，小宝还在回味刚才的问题。躺在床上，她突然问我：那爸爸，那些蚂蚁真的 9 天后会被消灭掉么？

我说：我们刚才计算的时候是不是做了很多假设？我们假设一只蚂蚁会告诉两只蚂蚁，假设吃了蚂蚁药的蚂蚁当天就会死去，假设得到通知的蚂蚁第二天才会去吃蚂蚁药，还假设蚂蚁是 1000 只，是不是？我们做这么多假设是为了简化问题，更好地研究问题，探寻规律。8 天还是 9 天并不重要，重要的是我们在这个过程中发现了一些有意思的事情，对不对？

探索：世界上有多少人？

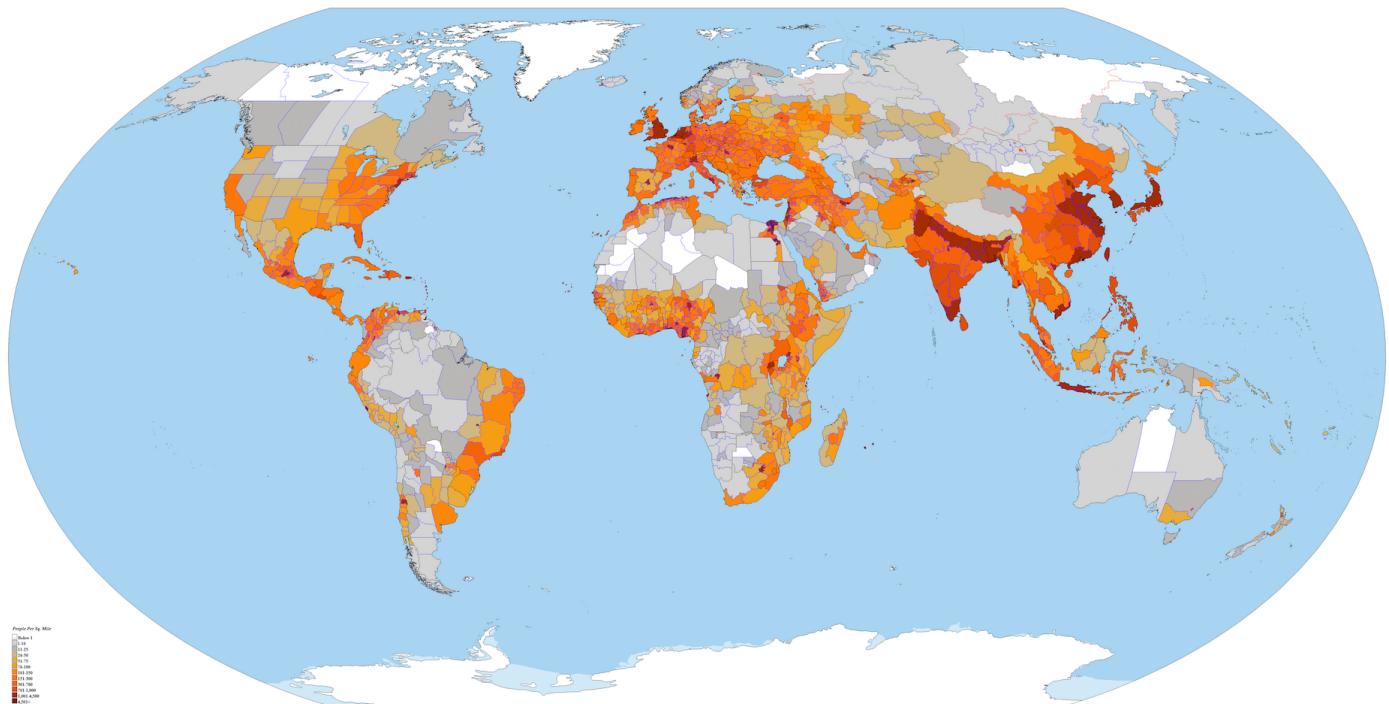
这是「天叔奇谈」的第 001 篇文章，今天周四（2019/09/12），主题是探索与发现。小宝可以问我任何一个她感兴趣的问题，我们共同探索，寻找答案。

研究内容

小宝抛出的问题是：世界上现在有多少人？哪些国家人多？为什么？世界上的人会减少么？

备课素材

世界人口的热力图：



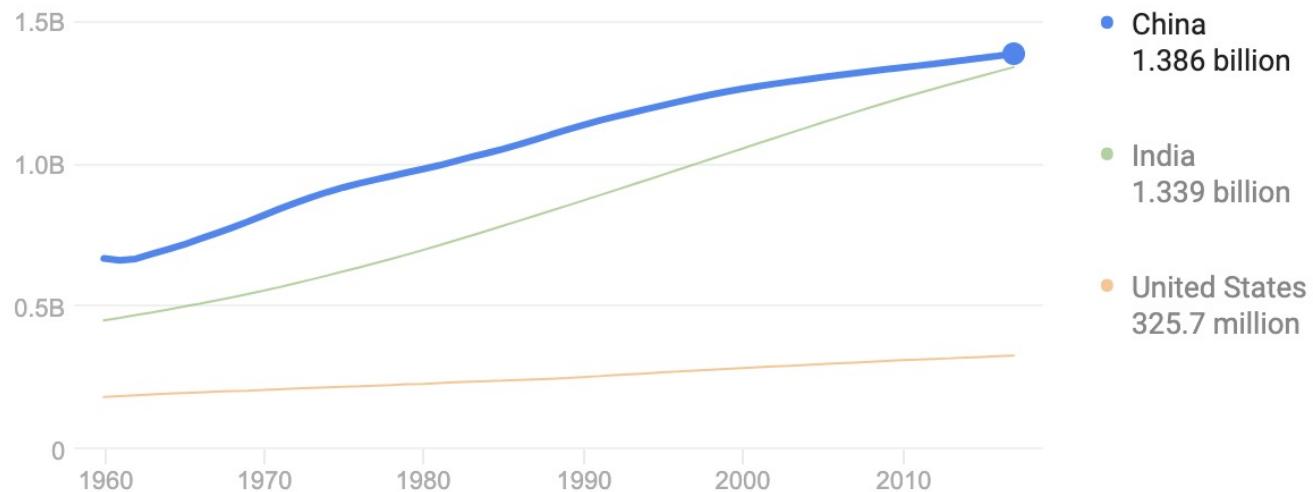
世界人口热力图

google 搜索 world population heat map 时无意发现了这个视频：
<https://worldpopulationhistory.org/map/1/mercator/1/0/25/>。讲世界人口历史，非常棒，还有中文版本。

计划跟她讲人口增长率，并根据世界银行查到的中印两国的人口增长率来计算印度何时人口会赶超中国：

China / Population

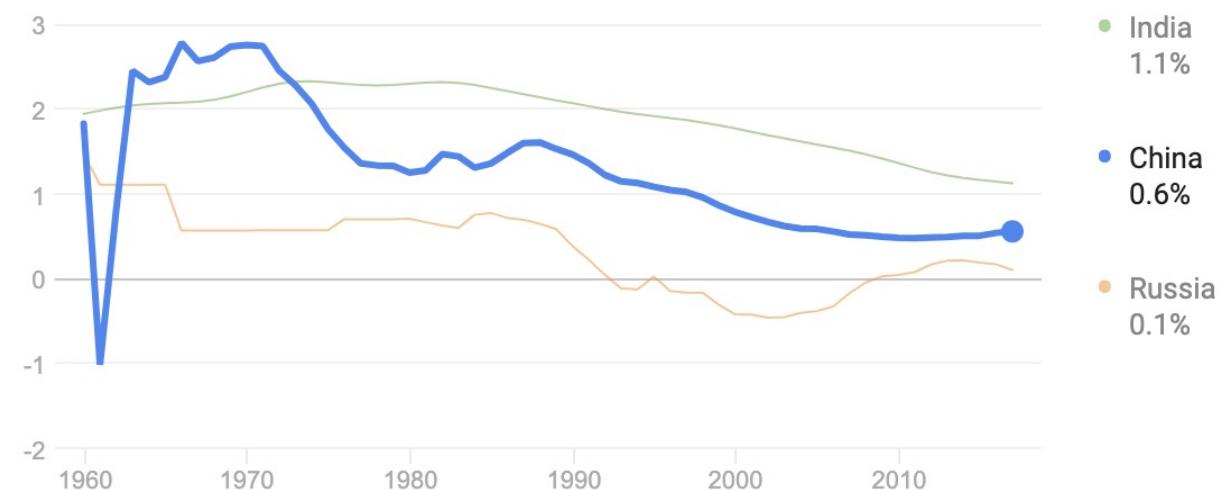
1.386 billion (2017)



中印人口数

China / Population growth rate

0.6% annual change (2017)



中印人口增长率

课堂回顾

我先给小宝看了热力图。地图上显然中印两国人口密度大。她先后问我中国的人口和印度的人口，随后注意到欧洲德国的位置颜色也很深，她问我德国多少人，我说大概八千万吧。她说，中国有十五亿，德国才八千万，为什么颜色看起来差不多深。于是我给她介绍人口密度的概念，这里我翻了个懒，没有查一下德国的面积（实际上 35 万平方千米），随便说了个 60 万平方千米，然后引导她计算两国每平方千米的人口密度。这里她又问我什么是平方千米，我拿了个宜家沙发的正方形的垫子，告诉她这个大概长一米，宽一米，面积是一平方米。一平方千米就是长一千米（从家里到学校一半的路程），宽也一千米，所以好大好大。

在我的指引下，她拿计算器算出来中国的人口密度是 1.53，德国是 1.33，中国略大，但差别不算大，所以颜色也差不多（这里实际上德国差不多是 2.28）。

随后我们看视频「世界人口历史」（见「阅读原文」），我给她解释历史上几次重要的人口增减，比如中国的汉唐宋明清，人口都是剧增，欧洲黑死病和蒙古入侵中国（南宋）使得这两处人口大面积减少。她问我为什么越往后人口增长越多？我提了几个因素：1) 经济发展 2) 医学进步 3) 战争的减少。并举了一些具体的例子（比如古代男子活到爸爸的岁数，算是长寿了，因为战争让人很年轻就牺牲了，古时候一家生好多孩子，但活到成年的很少，因为医学不发达，小孩子得个小病可能就会死去）。她问我「什么是经济？」我花了很多口舌解释经济。

这个视频我们看了两遍。她特意在我和她妈妈出生的年代把视频停下来。她问我，为什么爸爸你有哥哥而妈妈只有自己？你们出生就差了一年，为什么妈妈出生的时候就要计划生育？

之后她又问：那爸爸，现在每天都有多少人出生？又有多少人死去呢？我 google 了“how many people born a day”，得到了这个：

World Birth and Death Rates

Birth Rate

- 19 births/1,000 population

- 131.4 million births per year

- 360,000 births per **day**

- 15,000 births each hour

Death Rate

- 8 deaths/1,000 population

- 55.3 million **people** die each year

- 151,600 **people** die each **day**

- 6,316 **people** die each hour

每天多少人出生

随后我引导小宝计算每秒出生人数和死亡人数。我问她一小时有多少秒？她说不知道。我又问有多少分钟？她说 60。那一分钟有多少秒？她说 60。爸爸，一小时有 60×60 也就是 60 的平方这么多秒。我问，那是多少秒？她说太大了，算不出来。我说你先算 6×6 ，在我的一步步指导下，她算出来是 3600s。我问她一小时出生 15,000 人，那么一秒出生多少该怎么算？她说 $15000 / 3600$ 。之后便用计算器开始计算。算出每秒出生人口后，她又自己计算了每秒死亡人口。

一堂 40 分钟的课很快过去了，虽然没能按计划引导她计算印度人口何时能赶上中国，不过我们一起学到了很多东西，尤其是「世界人口历史」的视频，算是意外惊喜。

心得体会

引导孩子的好奇心，让她自己多问问题，找解决的方法，尤其是想办法在实际应用中融入数学的运算，培养她对数学的感觉。

贤者时刻

子曰：「不愤不启，不悱不发。举一隅不以三隅反，则不复也。」

- 《论语·述而》

孔子说：「教导学生，不到他们努力思考而不得的时候不要开导他，不到想要表达而表达不出来的时候不去启发他。举一个例子而不能说出其他三个其他的例子，就不用再教了」。

纪录片：神奇的月亮

这是「天叔奇谈」的第 002 篇文章，今天周五（2019/09/13），主题是纪录片。今天恰逢中秋，我就寻觅了一部《神奇的月亮》给小宝和小贝看。

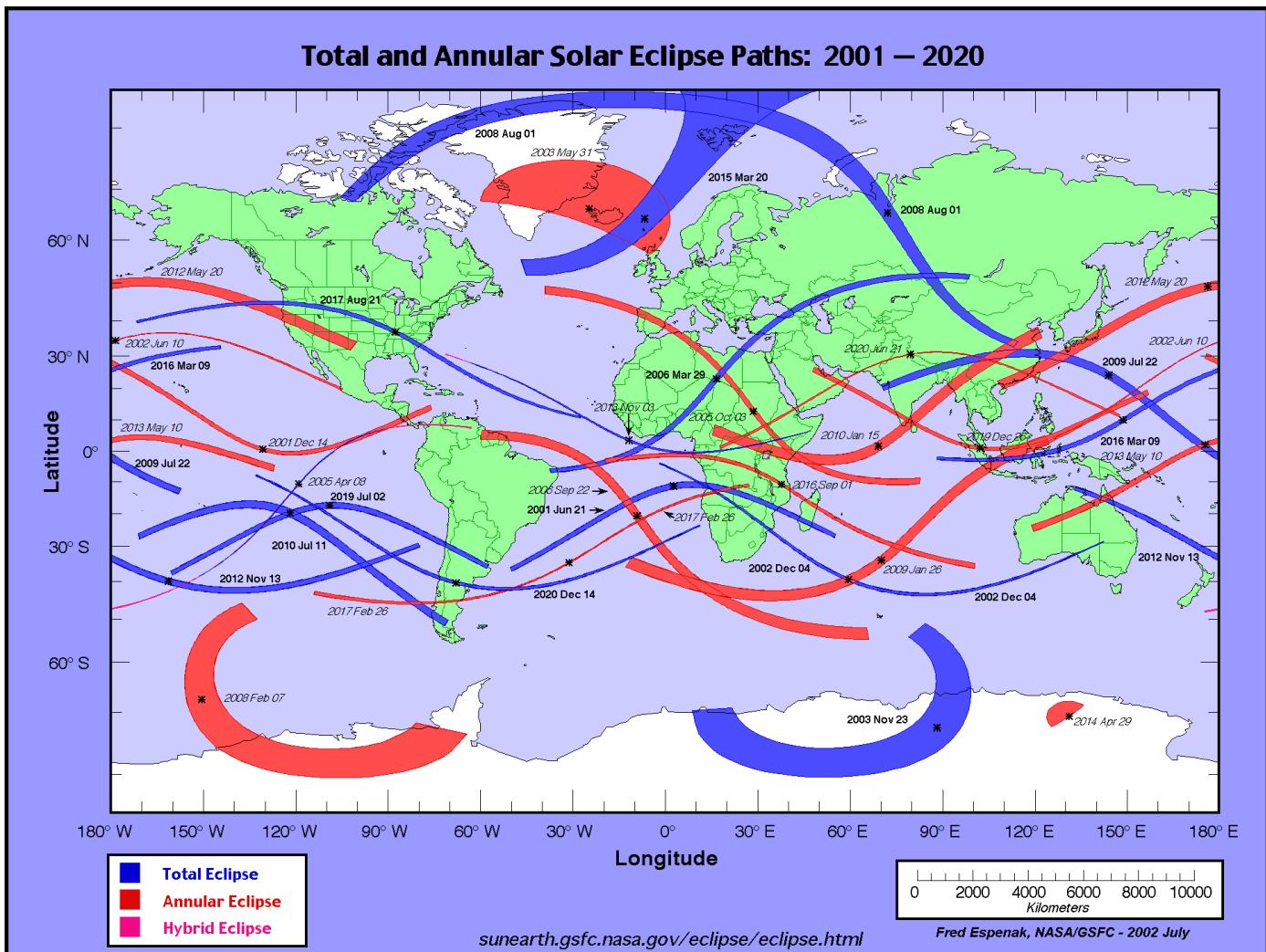
研究内容

月亮对地球的影响，潮汐是怎么形成的。满月，新月，月食都是怎么回事。公历和农历的区别。

备课素材

<https://www.bilibili.com/bangumi/play/ss23579>

NASA eclipse website: <https://eclipse.gsfc.nasa.gov/SEatlas/SEatlas.html>

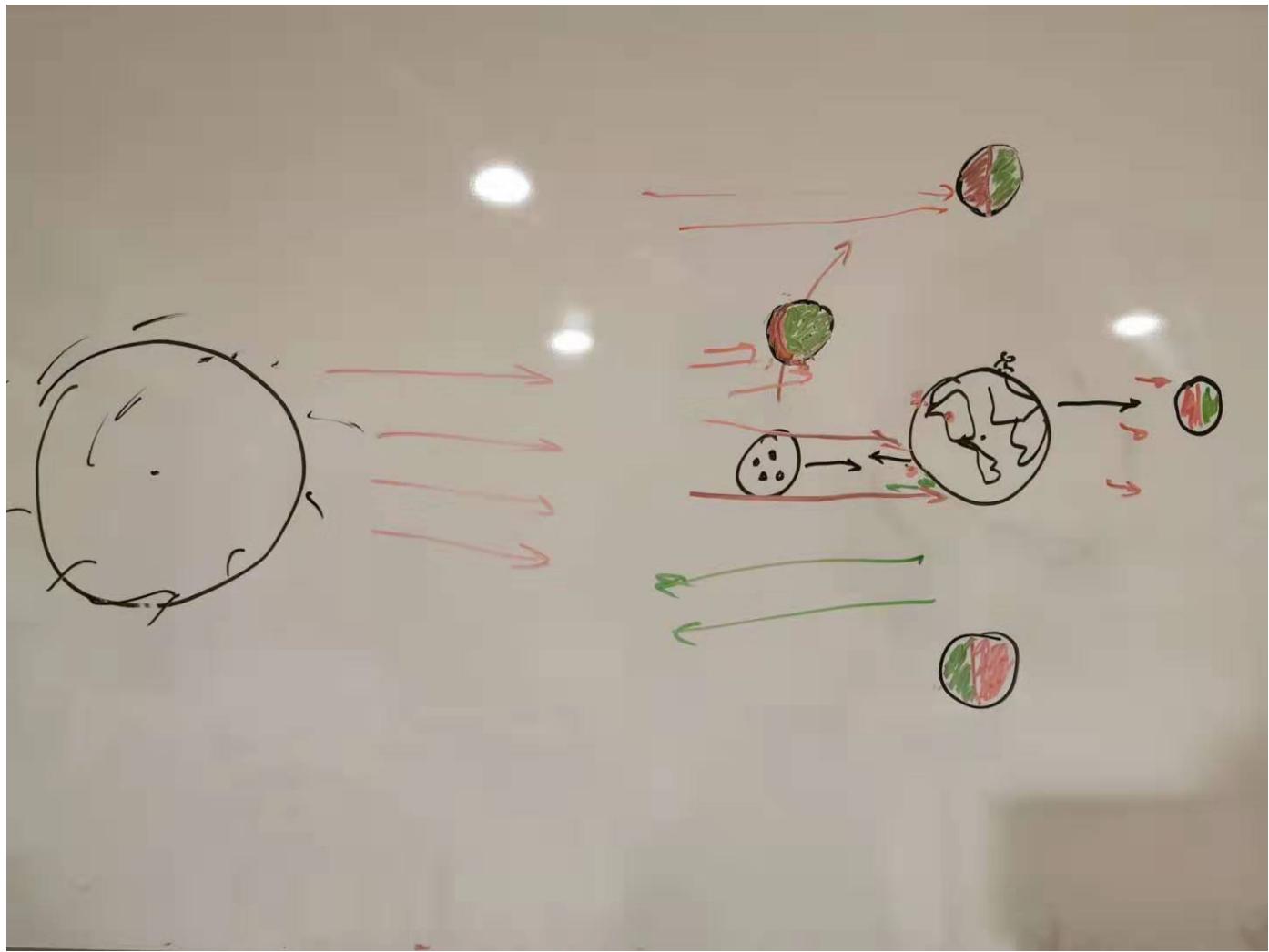


每年发生月食的次数平均为 2 ~ 5 次，每个世纪发生月食的次数约为 240 次。但因为日食带很窄，可观测的日食并不多见。日食发生在初一，也就是朔日，然而在资治通鉴里经常还能看见晦日（每月最后一天）发生日食，如：「秋，七月，辛亥晦，日有食之」，这是因为古代的历法并不精确导致。

维基百科关于潮汐的解释：<https://zh.wikipedia.org/wiki/潮汐>

课堂回顾

今日主要是以看视频为主。之后我在白板上又和小宝简单回顾了新月，满月，日食发生的过程，以及纪录片中提到的在太阳和月亮位于同侧且和地球在一条直线时，在产生的巨大潮汐（7m 高）。



之后我们又在笔记本上抄写了东坡的《水调歌头》。我告诉她这个爸爸小时候背的诗词——「丙辰中秋，欢饮达旦，大醉，作此篇，兼怀子由」——东坡先生也是在中秋节饮酒赏月，想起了好几年不见的兄弟，有感而发，所以写了这首词：

坡
青

地

酒

苏东坡 苏东坡

把 明月几时有
把酒问青天

明月几时 有
把酒问
青天

心得体会

视频的时间有点长，小宝看了大约 40 分钟后便有些走神。下次需要选择 20 分钟以内的纪录片。这样看着不用太累，看完之后也有更多的时间跟她讲解。

贤者时刻

惟仲康肇位四海，胤侯命掌六师。羲和废厥职，酒荒于厥邑，胤后承王命徂征。告于众曰：“嗟予有众，圣有谟训，明征定保，先王克谨天戒，臣人克有常宪，百官修辅，厥后惟明明，每岁孟春，遒人以木铎徇于路，官师相规，工执艺事以谏，其或不恭，邦有常刑。”“惟时羲和颠覆厥德，沈乱于酒，畔官离次，傲扰天纪，遐弃厥司，乃季秋月朔，辰弗集于房，瞽奏鼓，啬夫驰，庶人走，羲和尸厥官罔闻知，昏迷于天象，以干先王之诛，《政典》曰：‘先时者杀无赦，不及时者杀无赦。’今予以尔有众，奉将天罚。尔众士同力王室，尚弼予钦承天子威命。火炎昆冈，玉石俱焚。天吏逸德，烈于猛火。歼厥渠魁，胁从罔治，旧染污俗，咸与惟新。呜呼！威克厥爱，允济；爱克厥威，允罔功。其尔众士懋戒哉！”《尚书·夏书·胤征》

这是中国古代最早的日食记录，仲康命胤借日食之机讨伐荒淫的羲和。译文：

夏帝仲康开始治理四海，胤侯受命掌管夏王的六师。羲和放弃他的职守，在他的私邑嗜酒荒乱。胤侯接受王命，去征伐羲和。

胤侯告戒军众说：“啊！我的众位官长。圣人有谋有训，明白指明了定国安邦的事。先王能谨慎对待上天的警戒，大臣能遵守常法，百官修治职事辅佐君主，君主就明而又明。每年孟春之月，宣令官员用木铎在路上宣布教令，官长互相规劝，百工依据他们从事的技艺进行谏说。他们有不奉行的，国家将有常刑。

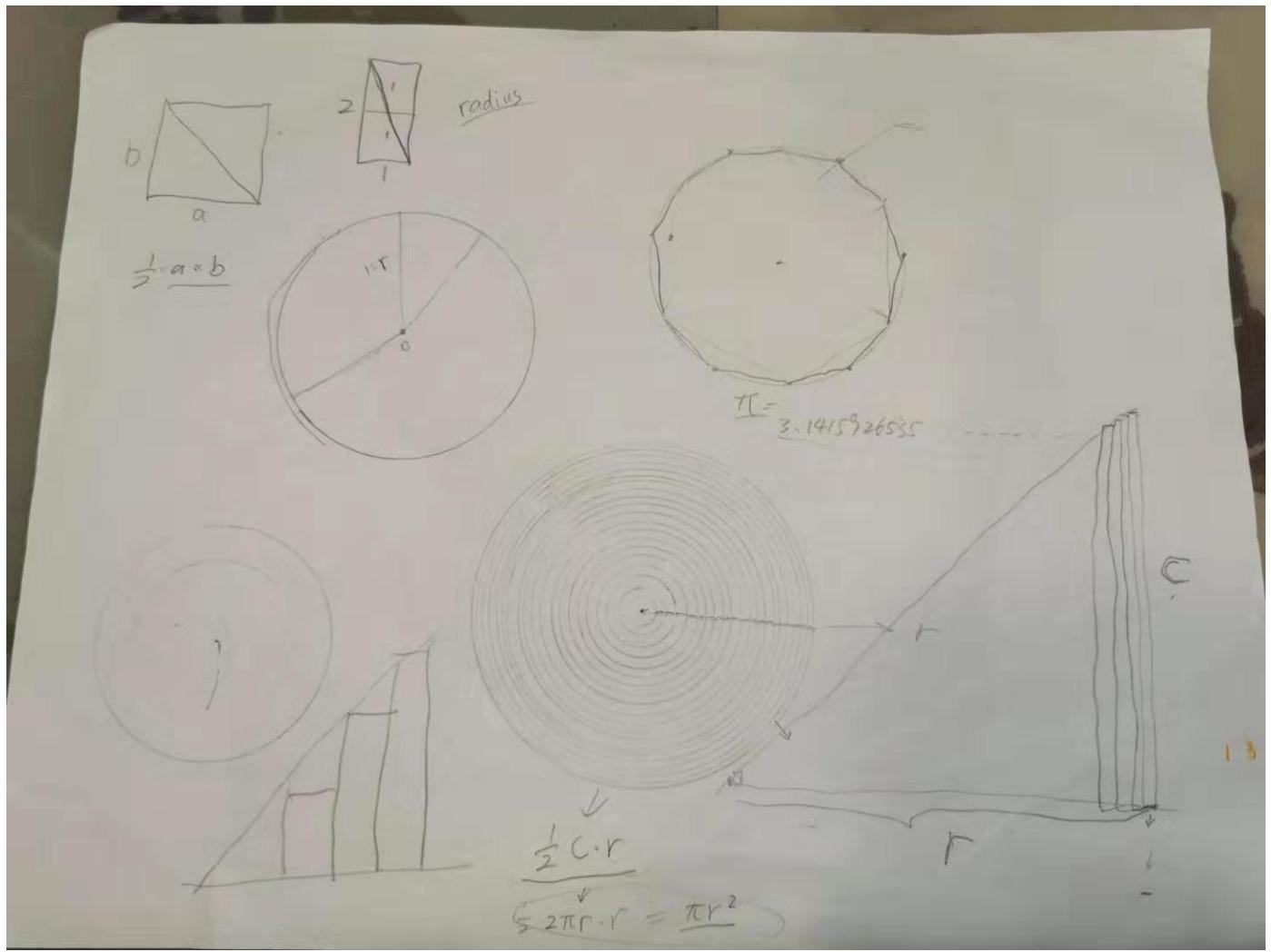
“这个羲和颠倒他的行为，沉醉在酒中，背离职位，开始搞乱了日月星辰的运行历程，远远放弃他所司的事。前些时候季秋月的朔日，日月不会合于房，出现日食，乐官进鼓而击，啬夫奔驰取币以礼敬神明，众人跑着供役。羲和主管其官却不知道这件事，对天象昏迷无知，因此触犯了先王的诛罚。先王的《政典》说：历法出现先于天时的事，杀掉无赦；出现后于天时的事，杀掉无赦。

“现在我率领你们众长，奉行上天的惩罚。你等众士要与王室同心协力，辅助我认真奉行天子的庄严命令！火烧昆山，玉和石同样被焚烧；天王的官吏如有过恶行为，害处将比猛火更甚。应当消灭为恶的大首领，胁从的人不要惩治；旧时染有污秽习俗的人，都允许更新。

“啊！严明胜过慈爱，就真能成功；慈爱胜过严明，就真会无功。你等众士要努力戒慎呀！”

几何：测量 π

这是「天叔奇谈」的第 003 篇文章，今天周六（2019/09/14），主题是几何。前一阵子给小宝讲过圆的面积不断逼近的方法，小宝听得一知半解，主要是圆的周长是 $2 * \pi * r$ 今天我们动动手，求 π 的值。



研究内容

π 是如何测量的，圆周长的公式如何根据测量推导出来。

备课素材

需要准备：足够长的线，圆规，带刻度的直尺。

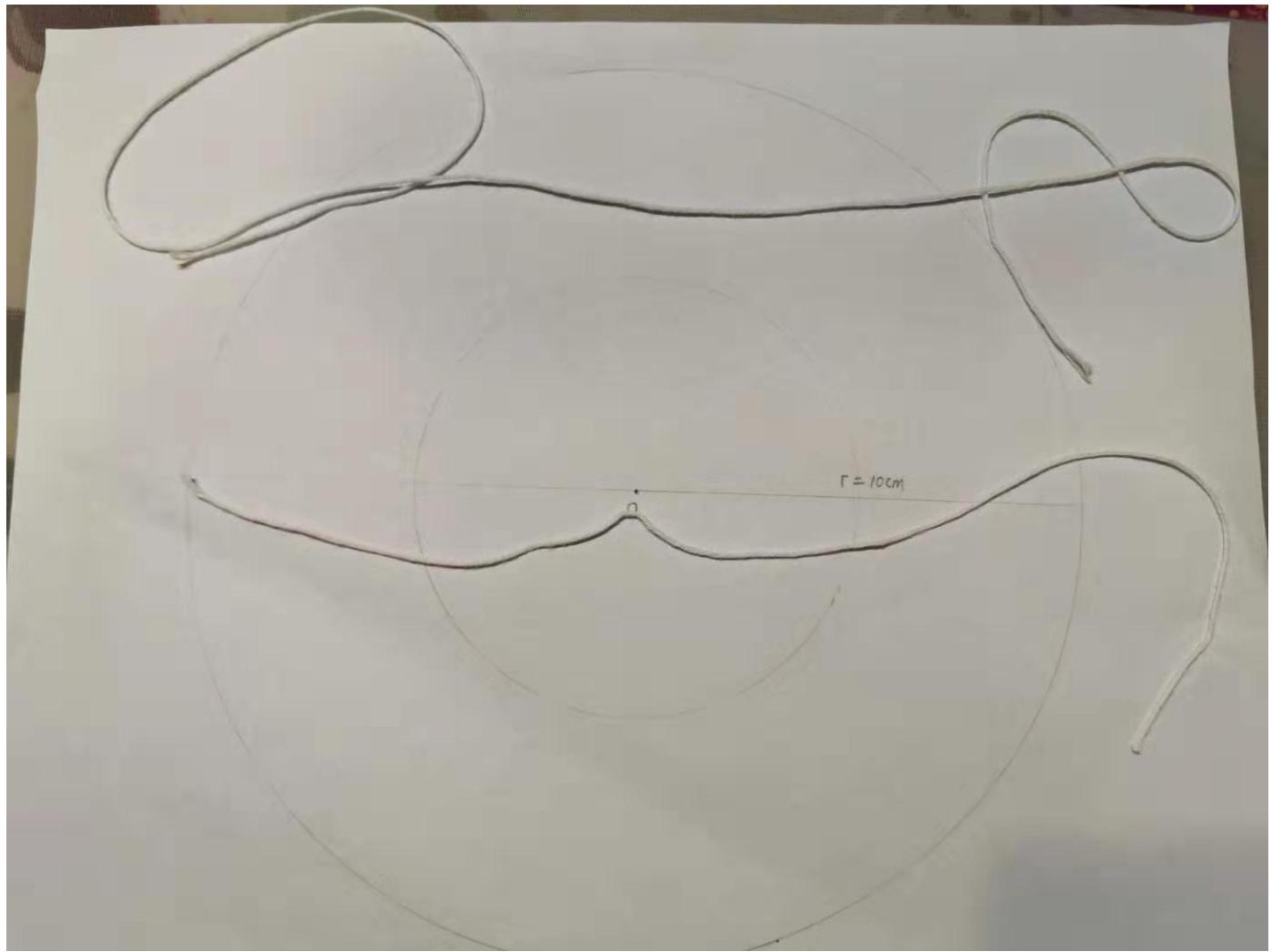
注意线圈的保护：



课堂回顾

我先教小宝使用圆规：在直尺上用圆规量好 10cm 的半径，然后选好一个圆心，在 A4 纸上开始作图。画完之后对圆心做标记，在圆上标出半径 r 和直径 d 。小宝还不能掌握好圆规的使用，我需要用手帮她固定。画好后，我们尝试用直尺测量圆的周长，发现很难精确测量，因为每一段圆弧都

是弯的。于是我引导小宝用线来一段段勾勒圆，最后一圈下来把量出来的线剪断，拿直尺量长度。小宝量出来线的长度是 62.7cm。



我引导她试试看看圆的周长 C 和直径 d 有什么关系。她试了减法，我用正方形的周长和边的关系引导她，她就改用除法，算出来 3.135。

我们接着又在同一个圆心 O 下面画了一个半径 5cm 的圆。我问她两个圆的周长有什么关系？小宝直觉上说大圆是小圆的两倍。我们同样做了测量，发现新剪的线是之前的一半（之前的线对折和新剪的长度一样）。我让小宝再算算新的圆的周长 C 和直径 d 有什么关系。她又算了一遍，发现还是 3.135。

于是，我问她如果随便给她一个半径 d ，该如何算周长 C 呢？她说 $d \times 3.135$ 。我们算了几种直径和半径的周长。然后我告诉她这个 3.135 就是一个特殊的常量，叫 π 。我还给她展示了小时候我是如何背诵 π 小数点后 30 位的。

最后，我大致给她说了一下如果不依赖于测量，如何精确计算 π 。

$$\square \quad a \qquad c = ? a$$

滅星

$$r = 10 \text{ cm} \quad d = 20 \text{ cm} \quad C = \underline{62,7}$$

$$C = ? \text{ d} \quad 3.135$$

$$r=5\text{cm} \ d=10\text{cm} \ c=31.35$$

$$C = d \times \underline{3.135}$$

$$\pi = \underline{3.141592653589793238462643383274}$$

$$r = 20 \quad c = 125.0 \quad d = 40$$

线743

$$C = \pi \cdot d$$

$$= 2\pi r$$

$$\frac{2\pi}{2}$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$\begin{array}{r} \overline{1^2 + 1^2} \\ 1 + 1 = 2 = c^2 \end{array}$$

$$\frac{1}{1}, \frac{0}{1}, \frac{\square}{\square}, \frac{11}{11}, \frac{\cancel{12}}{12}, \frac{\cancel{13}}{13}, \dots, \frac{?}{0}$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2}{4}$$

今天引入一个新的环节，就是让她把学习的过程和学到的内容讲给妈妈听。

心得体会

测量游戏很有意思，自己推导公式也很有成就感。最后把学到的东西讲给别人听，可以验证孩子是否真正弄懂，这样可以更好地修正讲述的方式。整个过程引导很重要，启发式的问题让她自己探索非常必要。

贤者时刻

古之九数，圆周率三，圆径率一，其术疏舛。自刘歆、张衡、刘徽、王蕃、皮延宗之徒，各设新率，未臻折衷。宋末，南徐州从事史祖冲之更开密法，以圆径一亿为一丈，圆周盈数三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒七忽，朙数三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒六忽，正数在盈朙二限之间。密率，圆径一百一十三，圆周三百五十五。约率，圆径七，周二十二。又设开差幂，开差立，兼以正圆参之。指要精密，算氏之最者也。所著之书，名为《缀术》，学官莫能究其深奥，是故废而不理。《隋书·律历志》

可惜《缀术》后来失传，无人知晓祖冲之是如何算出如此精确的结果的。

掷色子：Scratch Jr 重新入门

这是「天叔奇谈」的第 004 篇文章，今天周日（2019/09/15），随机主题（掷色子），小宝选择了 Scratch 编程。Scratch 之前我给小宝入过门，但没有很系统地培训，如今每周三设置 Scratch 课程，我自个也打算好好教一下她编程。我们今天尝试了 Scratch Jr 这款 iPad 上的版本。之所以选择 iPad，是它操作起来更方便，更简单一些，符合这个年龄的孩子的认知水平。

研究内容

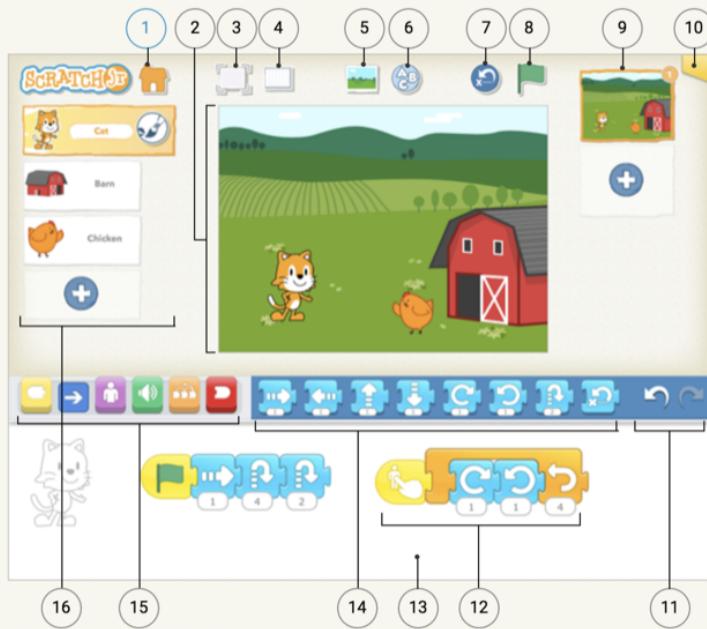
Scratch Jr 入门。主要是让小宝熟悉整个 app 的基本操作（毕竟和 Scratch 有很大的不同）。

备课素材

iPad，Scratch Jr App。最好把帮助和几个 demo app 都看一遍，了解其功能。

课堂回顾

我们先是从 Scratch Jr 的界面开始，结合其帮助中的界面指南，来快速了解其功能。Scratch 和 Scratch Jr. 最大的不同是操作界面被大大简化，代码块从纵向变为横向，别看这小小的改动，这某种程度降低了 scratch 的门槛：循环的概念对孩子来说更容易理解，而一个个积木块的设置变得更简单傻瓜了。



1. 保存

保存当前的项目，并返回到主页。



关于 ScratchJr



界面指南



绘图编辑器指南



积木指南



Pop



播放「Pop」音效

播放录音



播放所录制的声音或是音乐。

控制积木

暂停



让角色暂时停下来一段时间（单位是十分之一秒）。

停止



停止执行所有角色上的程序。

设定速度



改变角色移动时的速度。

循环



重复执行区块内的所有程序，可以执行指定次数。



关于 ScratchJr



界面指南



绘图编辑器指南



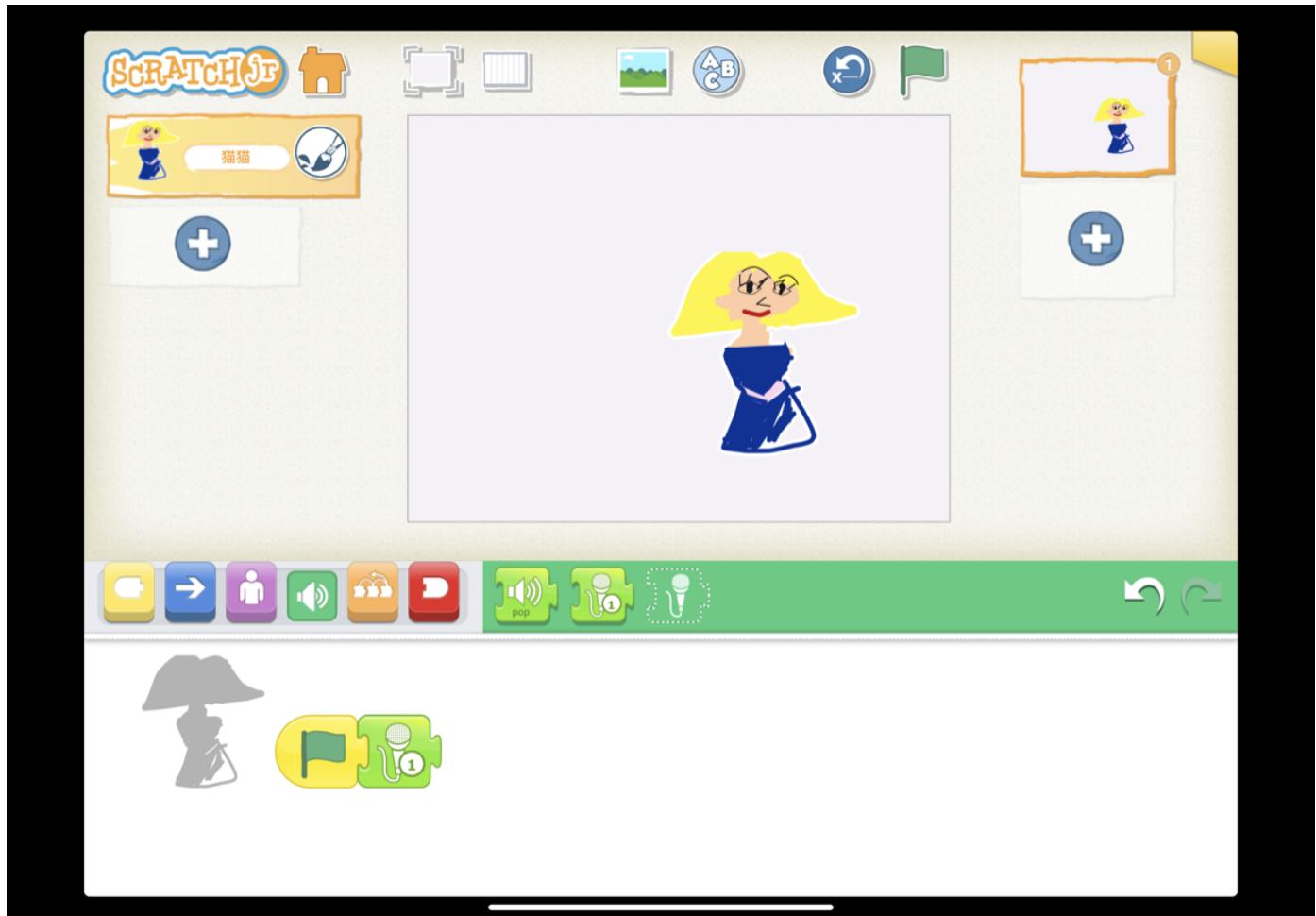
积木指南





Scratch Jr 没有自带的素材库，这一点很麻烦，没有背景音乐，小宝只能自己录音。

待小宝熟系了之后我让她自由实验。她画了一个公主，录了一段 frozen 的歌。时间关系，只能留待这个未完成的工作下次再做。



心得体会

Scratch Jr 的简单是把双刃剑，尤其是孩子玩过 Scratch 之后，Scratch Jr 缺失的功能会让人很不适应。

贤者时刻

there's an old story about the person who wished his computer were as easy to use as his telephone. that wish has come true, since i no longer know how to use my telephone.

Bjarne Stroustrup

有个老套的故事说有人希望他的计算机能像他的电话机一样好用。他的愿望实现了，因为我已经不知道该如何使用自己的电话了。

历史故事：三家分晋

这是「天叔奇谈」的第 005 篇文章，今天周一（2019/09/16），主题是历史故事，我将从《资治通鉴》第一个故事「三家分晋」讲起。

研究内容

「三家分晋」的过程，重点是智瑶，赵无恤等人物的性格刻画，以及因此造就的兴衰。

备课素材

《资治通鉴》中的故事全文：

初，智宣子将以瑶为后。智果曰：「不如宵也。瑶之贤于人者五，其不逮者一也。美鬓长大则贤，射御足力则贤，伎艺毕给则贤，巧文辩慧则贤，强毅果敢则贤，如是而甚不仁。夫以其五贤陵人，而以不仁行之，其谁能待之？若果立瑶也，智宗必灭。」弗听，智果别族于太史为辅氏。赵简子之子，长曰伯鲁，幼曰无恤。将置后，不知所立。乃书训戒之辞于二简，以授二子曰：「谨识之。」三年而问之，伯鲁不能举其辞，求其简，已失之矣。问无恤，诵其辞甚习，求其简，出诸袖中而奏之。于是简子以无恤为贤，立以为后。简子使尹铎为晋阳。请曰：「以为茧丝乎？抑为保障乎？」简子曰：「保障哉！」尹铎损其户数。简子谓无恤曰：「晋国有难，而无以尹铎为少，无以晋阳为远，必以为归。」

及智宣子卒，智襄子为政，与韩康子、魏桓子宴于蓝台。智伯戏康子而侮段规，智国闻之，谏曰：「主不备，难必至矣！」智伯曰：「难将由我。我不为难，谁敢兴之？」对曰：「不然。《夏书》有之曰：‘一人三失，怨岂在明，不见是图。’夫君子能勤小物，故无大患。今主一宴而耻人之君相，又弗备，曰不敢兴难，无乃不可乎！蚋、蚁、蜂、虿，皆能害人，况君相乎！」弗听。

智伯请地于韩康子，康子欲弗与。段规曰：「智伯好利而慢，不与，将伐我；不如与之。彼狃于得地，必请于他人；他人不与，必向之以兵。然则我得免于患而待事之变矣。」康子曰：

「善。」使使者致万家之邑于智伯，智伯悦。又求地于魏桓子，桓子欲弗与。任章曰：「何故弗与？」桓子曰：「无故索地，故弗与。」任章曰：「无故索地，诸大夫必惧；吾与之地，智伯必骄。彼骄而轻敌，此惧而相亲。以相亲之兵待轻敌之人，智氏之命必不长矣。《周书》曰：‘将欲败之，必姑辅之；将欲取之，必姑与之。’主不如与之以骄智伯，然后可以择交而图智氏矣。奈何独以吾为智氏质乎！」桓子曰：「善。」复与之万家之邑一。智伯又求蔡、皋狼之地于赵襄子，襄子弗与。智伯怒，帅韩、魏之甲以攻赵氏。襄子将出，曰：「吾何走乎？」从者曰：「长子近，且城厚完。」襄子曰：「民罢力以完之，又毙死以守之，其谁与我！」从者曰：「邯郸之仓库实。」襄子曰：「浚民之膏泽以实之，又因而杀之，其谁与我！其晋阳乎，先主之所属也，尹铎之所宽也，民必和矣。」乃走晋阳。

三家以国人围而灌之，城不浸者三版。沈灶产蛙，民无叛意。智伯行水，魏桓子御，韩康子骖乘。智伯曰：「吾乃今知水可以亡人国也。」桓子肘康子，康子履桓子之跗，以汾水可以灌安邑，绛水可以灌平阳也。繸疵谓智伯曰：「韩、魏必反矣。」智伯曰：「子何以知之？」繸疵曰：「以人事知之。夫从韩、魏之兵以攻赵，赵亡，难必及韩、魏矣。今约胜赵而三分其地，城不没者三版，人马相食，城降有日，而二子无喜志，有忧色，是非反而何？」明日，智伯以繸疵之言告二子，二子曰：「此夫谗臣欲为赵氏游说，使主疑于二家而懈于攻赵氏也。不然，夫二家岂不利朝夕分赵氏之田，而欲为危难不可成之事乎？」二子出，繸疵入曰：「主何以臣之言告二子也？」智伯曰：「子何以知之？」对曰：「臣见其视臣端而趋疾，知臣得其情故也。」智伯不悛。繸疵请使于齐。

赵襄子使张孟谈潜出见二子，曰：「臣闻唇亡则齿寒。今智伯帅韩、魏而攻赵，赵亡则韩、魏为之次矣。」二子曰：「我心知其然也，恐事未遂而谋泄，则祸立至矣。」张孟谈曰：「谋出二主之口，入臣之耳，何伤也？」二子乃阴与张孟谈约，为之期日而遣之。襄子夜使人杀守堤之吏，而决水灌智伯军。智伯军救水而乱，韩、魏翼而击之，襄子将卒犯其前，大败智伯之众。遂杀智伯，尽灭智氏之族。唯辅果在。

晋阳之战

(公元前455年~公元前453年)



司马光的评论：

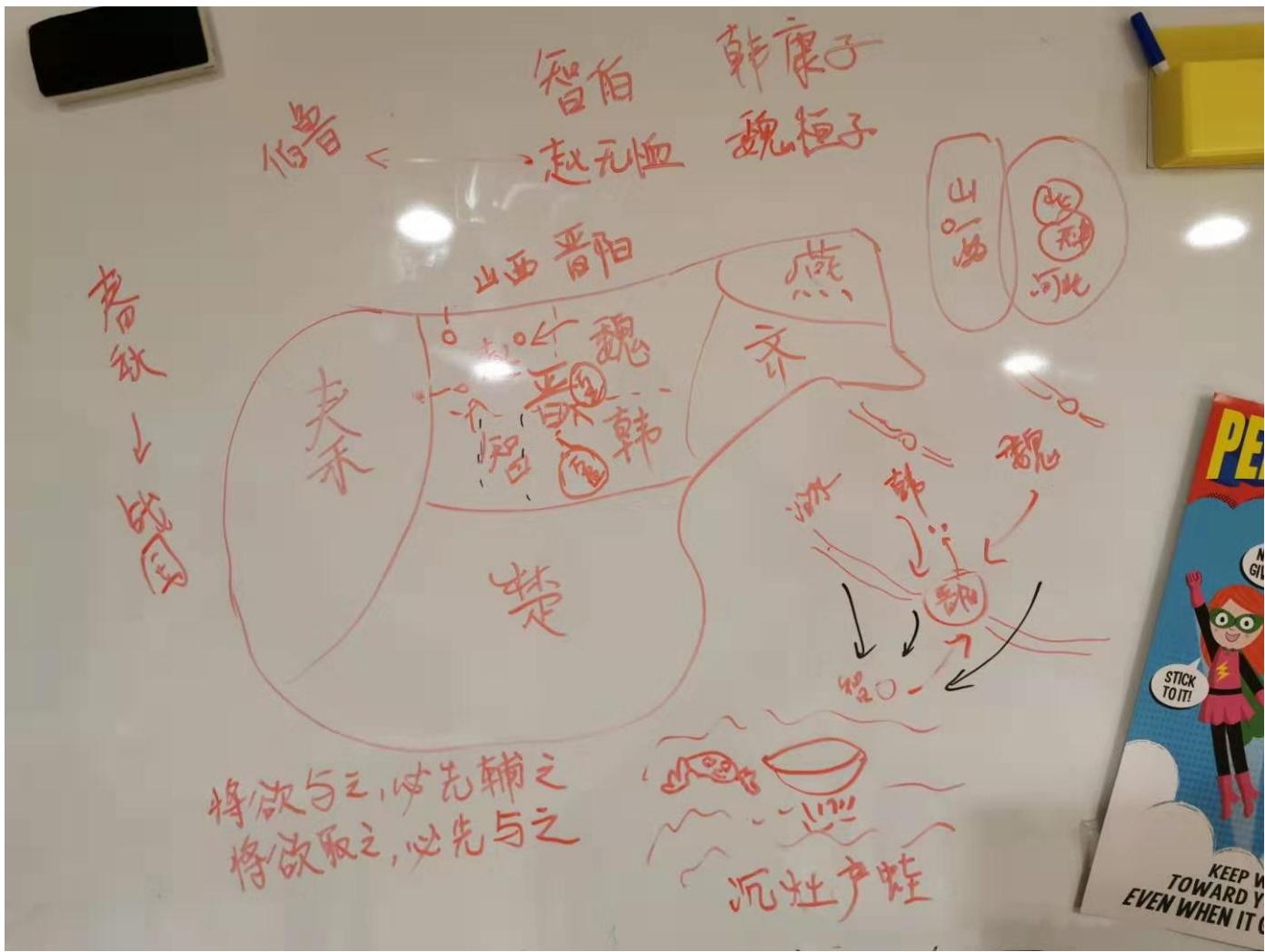
臣光曰：智伯之亡也，才胜德也。夫才与德异，而世俗莫之能辨，通谓之贤，此其所以失人也。夫聪察强毅之谓才，正直中和之谓德。才者，德之资也；德者，才之帅也。云梦之竹，天下之劲也，然而不矫揉，不羽括，则不能以入坚；棠溪之金，天下之利也，然而不熔范，不砥砺，则不能以击强。是故才德全尽谓之圣人，才德兼亡谓之愚人，德胜才谓之君子，才胜德谓之小人。凡取人之术，苟不得圣人、君子而与之，与其得小人，不若得愚人。何则？君子挟才以为善，小人挟才以为恶。挟才以为善者，善无不至矣；挟才以为恶者，恶亦无不至矣。愚者虽欲为不善，智不能周，力不能胜，譬之乳狗搏人，人得而制之。小人智足以遂其奸，勇足以决其暴，是虎而翼者也，其为害岂不多哉！夫德者人之所严，而才者人之所爱。爱者易亲，严者易疏，是以察者多蔽于才而遗于德。自古昔以来，国之乱臣，家之败子，才有余而德不足，以至于颠覆者多矣，岂特智伯哉！故为国为家者，苟能审于才德之分而知所先后，又何失人之足患哉！

成语或俗语：

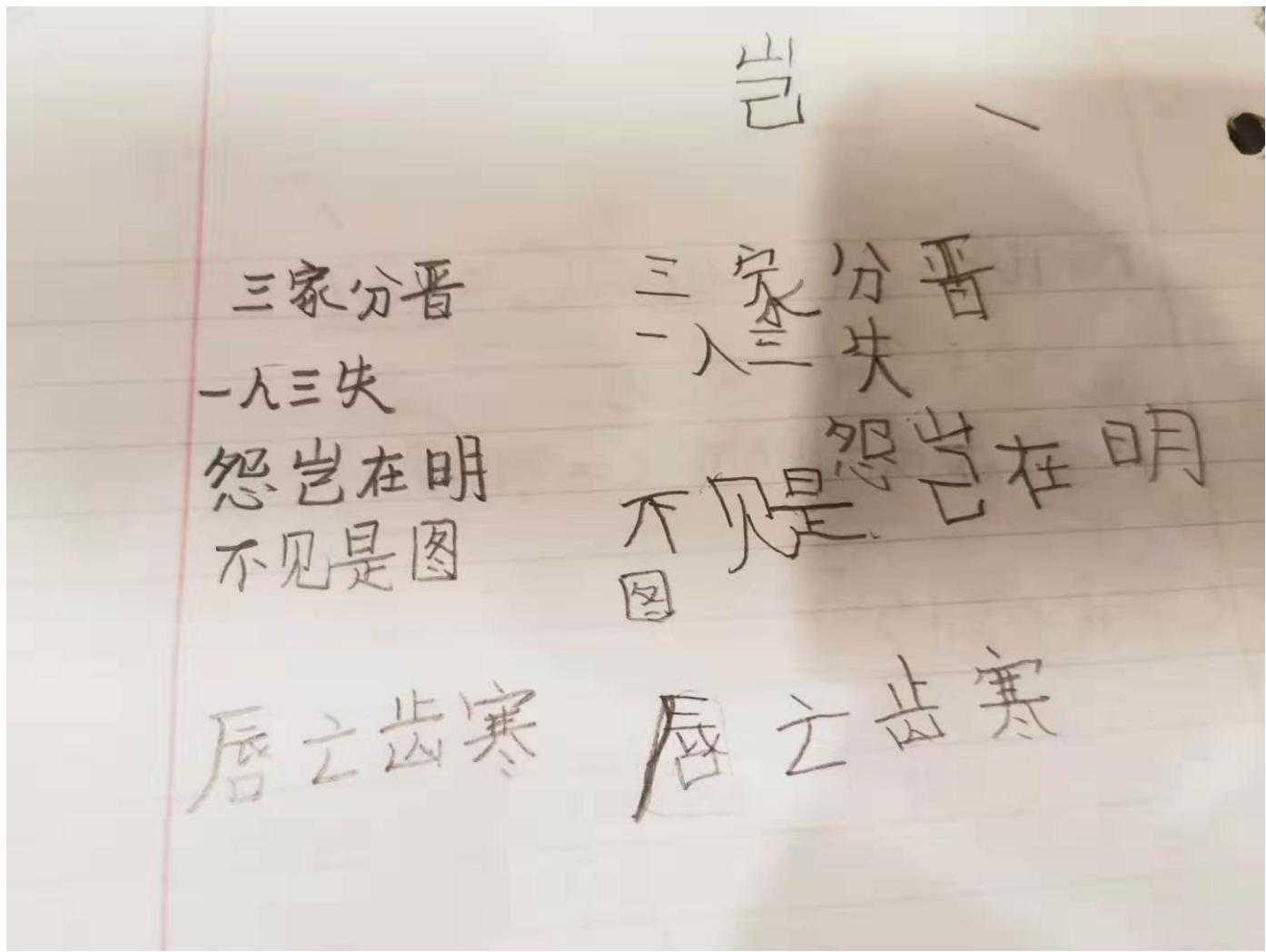
- 三家分晋：指晋国被韩、赵、魏三家瓜分的事件。
- 一人三失，怨岂在明，不见是图：一个人多次犯错误，结下的仇怨岂能在明处，应该在它没有表现时就提防
- 蚂蚁蜂虿：比喻恶人或敌人。
- 将欲败之，必姑辅之；将欲取之，必姑与之：想要打败它，一定要暂且帮助它；要想夺取些什么，得暂且先给些什么。
- 沉灶产蛙：灶没于水中，产生青蛙。形容水患之甚。
- 人马相食：是到了快断粮草的时刻，人去马槽子里抓食马料里些许的料豆来充饥，指很艰难的时刻。
- 唇亡齿寒：唇没有了，牙齿就寒冷。比喻双方息息相关，荣辱与共。

课堂回顾

画地图是个技术活，我画了三版地图，都被小宝鄙视，最后只好画了个示意图。三家分晋的故事的细节就不赘述，解释智瑶「不仁」「好利而慢」费了些心思。讲到水淹晋阳时「沉灶产蛙」，小宝自告奋勇画那只青蛙：



讲完故事后，我又教小宝把其中的一些成语/俗语写下来：



心得体会

「臣光曰」的部分我直接略过不讲了。之前穿插讲了一些道理，比如「将欲败之，必姑辅之；将欲取之，必姑与之」，感觉她不太感兴趣，可能这样的道理还是太枯燥。也许现在更偏向故事性，以后再讲的时候更偏教育性会更好。

贤者时刻

天下有道无急患则曰静，遽传不用，故曰：“却走马以粪。”天下无道，攻击不休，相守数年不已，甲胄生虮虱，燕雀处帷幄，而兵不归，故曰：“戎马生于郊。”

翟人有献丰狐、玄豹之皮于晋文公，文公受客皮而叹曰：“此以皮之美自为罪。”夫治国者以名号为罪，徐偃王是也。以城与地为罪，虞、虢是也。故曰：“罪莫大于可欲。”

智伯兼范、中行而攻赵不已，韩、魏反之，军败晋阳，身死高梁之东，遂卒被分，漆其首以为溲器，故曰：“祸莫大于不知足。”

虞君欲屈产之乘，与垂棘之璧，不听宫之奇，故邦亡身死，故曰：“咎莫憯于欲得。”

邦以存为常，霸王其可也。身以生为常，富贵其可也。不欲自害则邦不亡身不死，故曰：“知足之为足矣。”

- 《韩非子 喻老》

译文：

天下太平，没有急难祸患，就叫做静。传递紧急公文的车马都不用了，所以《老子》说：“歇下奔马，用来运肥耕田。”天下不太平，战争频发，相互防备着，几年都不能停止，将士的盔甲上都长出了虱子，燕雀在军帐上都筑起了窝，而军队仍不能返回。所以《老子》说：“战马在郊外产下马驹。”

有个翟人把大狐、黑豹的皮进献给晋文公。文公接受客人的兽皮后感叹道：“狐豹因为皮美给自己带来了祸害。”国君因为名号而带来祸害的，徐偃王就属于这种情况；因城池与地理造成祸害的，虞、虢就属于这种情况。所以《老子》说：“罪过中没有比可以引起欲望的东西更大的了。”

智伯兼并范氏、中行氏后，又不停地进攻赵氏，韩、魏背叛智伯，智伯的军队在晋阳战败，智伯死在高梁东边，他的封地终于被瓜分，他的头骨被涂漆后用作饮器。所以《老子》说：“祸患中没有比不知足更大的了。”

虞国君主贪图屈产出的良马和垂棘出的璧玉，不听宫之奇的劝谏，因而国家灭亡，虞君身死。所以《老子》说：“过失中没有比贪得更惨痛的了。”

国家把生存作为根本，称霸称王也就有了可能；身体把生命作为根本，富裕尊贵也就有了可能。不用贪欲来危害自身，国家就不会灭亡，自身就不会死亡。所以《老子》说：“知道满足也就是真正的满足了。”

数学：数字游戏背后的数学

这是「天叔奇谈」的第 006 篇文章，今天周二（2019/09/17），主题是数学。我将和小宝探讨上周六在餐桌上玩过的一个游戏：心里默默想 1-9 之间的两个数，相加，乘以 10，加上大数，减去小数。把结果告诉我，我就有魔法能猜出来你心里想的两个数字。

研究内容

本来这个游戏我以为能玩上几天。结果让小宝猜了三四组数字后，她就似乎找到了规律。她说这不是魔法，爸爸你想两个数，我来猜。我说 171，小宝算了一会，说 8 和 9。我又出了几个结果，她一一「猜中」，身边的妈妈和姥姥一脸懵逼，不敢相信。我很是惊讶，因为为了寻找这个游戏的原理，我还专门列了二元一次方程演算了一下。我们之前没有玩过这个游戏，她能这么快找到规律着实不简单。为了进一步验证，我给她一个错误的数字 123。小宝算了很长时间，一边算一遍还嘀咕，如果是 124 就好了，哎呀，我怎么算不出来？我提示她：有没有可能爸爸给的数算错了？小宝一下子开窍：对，爸爸，这个数字你肯定算错了！

后来我们再玩这个游戏，都是我想数字让她算。就在这两天吃晚饭的过程中，她已经找到了这些规律：

1. 两个数相加等于你给我的结果去掉个位数字，除以 10
2. 两个数相减等于你给我的结果的个位数
3. 把你给我的数拆成个位和剩下的位数这两个数字，那么它们要么都是奇数，要么都是偶数，不然就是爸爸你算错了

所以今天我们打算系统地把这个问题再研究一下，看看能不能找出更多规律。

备课素材

如果把计算的结果 c 写作 $c = 10a + b$ ，那么按照题干：

$$\begin{cases} x + y = a \\ x - y = b \end{cases}$$

那么：

$$\begin{cases} x = \frac{a+b}{2} \\ y = \frac{a-b}{2} \end{cases}$$

我看看她能不能理解方程的概念，以及解方程。

我们找这些规律：

1. 什么情况下 $a < 10$?
2. 什么情况下 $a = b$? 有没有可能 $a < b$?
3. 如果 $x=y$ 有什么规律?

课堂回顾

我教小宝尝试着把生活中的问题用数学的方式表达出来，先算具体的数值，然后再想办法找一般的规律。未知的数用 x, y 来表示，已知的数用 a, b, c 来表示。因为小宝已经发现了 $x + y = a$ 和 $x - y = b$ ，所以对这两个式子还能理解。但是当方程组两个式子相加时，她很困惑，不知道如何算 $(x + y) + (x - y)$ ，因为她不知道 x, y 是多少，所以没法算。我告诉她我们就想知道左边有几个 x 几个 y ，她算了一下，说两个 x 。算到 $2x = 18$ 后，不经提示她无法算出 $x = 9$ 。直到我问她什么数乘 2 等于 18，她才开窍。之后我们研究一些性质，从两数相同，两数同为奇数，两数同为偶数着手，不算之前发现的规律，我们又发现了很多。

x 未知
y 未知

$x > y$

128
193

135

已知
其它 个性

两数和 B a
两数差 5 b
和 5+8=13
差 8-5=3
9+4=13
9-4=5 ✓

问题: $\frac{(x+y) \times 10 + x - y}{13-a} = c = \boxed{\quad} \boxed{\quad}$

? $\begin{cases} x+y=13 \\ x-y=5 \end{cases}$

$(x+y) + (x-y) = 13+5=18$

$2x+0=18$

$2x=18$
 $x=9$

$9-4$
 $x-y=5$

$\begin{cases} x+y=a \\ x-y=b \end{cases}$

$(x+y) + (x-y) = a+b$

公式:

$2x=a+b$
 $x=\frac{a+b}{2}$

$x-y=b$

$x=2$

128

$x? = 10$

$a+b$
 $=$
 $y=b$

$y=9$

两个数,

42

31

120 6,6

3,5

两数相加: 1. $\rightarrow 20$

rule 1. 两数之和 ≥ 20

2. 游戏 ≤ 180

3. 大于5, 则大于100

等于 等于

4. 两数同, $\times 2$ 得0

5. 同奇同偶

6. $a=b$, 其中一个数是0

7. $a \neq b$

8. 两奇, \rightarrow 偶数

9. 两偶, \rightarrow 偶数

10. 一奇一偶, \rightarrow 奇数

82

$9 \rightarrow 180$

$2 \rightarrow 40$

$3 \rightarrow 60$

□ | □

$a=b$

<

两数奇偶

一奇一偶

其中, 小宝新发现的规律:

1. 如果不能是零，游戏最小的 $C=20$ ，因为 $(1+1)*10+1-1=20$
2. 游戏最大的 $C=180$ ，如果 x,y 都是 9
3. 两个数都大于等于 5，则 $C \geq 100$
4. 两数取相同的值 x ，那么 C 就是 $2x$ 后面添个零
5. 如果 $a=b$ ，那么其中一个数只能是 0
6. a 不能小于 b

我们共同发现的规律：

1. 两个数都是奇数或者都是偶数，则 C 一定是偶数。
2. 两个数一奇一偶，则 C 一定是奇数。

现在我给她一些错误的数字，比如 48, 147，她能一下子说出来这些是错误的数字。

心得体会

数学的兴趣需要不断培养。与其让孩子枯燥地做练习册上的习题，不如出这样的有趣的魔法题引诱孩子不断运算。上周末我们还玩了 24 点的游戏，小宝在这方面发现规律的速度有时都超过了我。下周二，我打算和她一起研究二十四点里的规律。

贤者时刻

或生而知之；或学而知之；或困而知之：及其知之，一也。或安而行之；或利而行之；或勉强而行之：及其成功，一也。《中庸 哀公问政》

译文：有的人生来就知道它们，有的人通过学习才知道它们，有的人要遇到困难后才知道它们，但只要他们最终都知道了，也就是一样的了；有的人自觉自愿地去实行它们，有的人为了某种好处才去实行它们，有的人勉勉强强地去实行，但只要他们最终都实行起来了，也就是一样的了。

Scratch: 自由发挥

这是「天叔奇谈」的第 007 篇文章，今天周三（2019/09/18），主题是 scratch。今天晚上我在 Seattle 有个 TF Blockchain 的 panel talk，没时间准备以及给小宝上课，就留了 iPad 给她自由发挥。

花了大概 40 分钟，小宝的作品如下：

作品虽然简单，但涉及了我们之前没有玩过的场景切换，她自己琢磨出来的。Scratch Jr. 无法添加背景音乐，除了自己录音没法弄别的声音（比如 text to speech），这点她不太爽。看看吧，再折腾一两周，也许我们会切换回 Scratch。

贤者时刻

作为一个程序员，刨根问底自然是少不了的。Scratch 和 Scratch Jr. 背后使用了什么技术呢？我大致研究了一下，是 google 的 blockly: <https://developers.google.com/blockly/>。blockly 原本是通过图形化的方式来生成代码的，MIT 的 Scratch 团队在此基础上做了 Scratch。Blockly 的竞品主要是微软的 pxt: <https://github.com/Microsoft/pxt>，我没有研究过，看界面很不错，也是用于编程教育的工具。

由于 blockly 这样的工具可以生成 AST，因而我们可以考虑用其做一些有趣的可视化工具，比如用 blockly 生成 ansible 的脚本，nginx 的配置文件，或者简单的 smart contract。

一些个人见解。

探索：植物为什么有阳光和水就能长大？

这是「天叔奇谈」的第 008 篇文章，今天周四（2019/09/20），主题是探索与发现。小宝可以问我任何一个她感兴趣的问题，我们共同探索，寻找答案。

研究内容

小宝抛出的问题是：植物为什么有谁，有阳光就可以长大呀？

这个问题的答案自然是光合作用。但光合作用怎么解释给小宝呢，我觉得连我自己都无法给自己很系统科学地解释清楚，晚上开会前后又没有太多时间准备，只好直接 google。

备课素材

在 Youtube 上发现了两个不错的视频。

光合作用的小故事（中文）：

https://www.youtube.com/watch?v=onbbzP_04Vg

photosynthesis - video for kids（英文）：

<https://www.youtube.com/watch?v=68b1HAlfX08>

视频中出现的一些词语的释义：

木质部（Xylem）是维管植物的运输组织，负责将根吸收的水分及溶解于水里面的离子往上运输，以供其他器官组织使用，另外还具有支持植物体的作用。

韧皮部（Phloem）是维管植物的疏导组织，负责将光合作用的产物——蔗糖，由进行光合作用的器官运输到植物的其他部位。

叶肉细胞 (mesophyll cells) 是位于上、下表皮之间，并且叶肉细胞内含有大量的叶绿体，是植物进行光合作用的主要部分。多数植物的叶肉细胞分化为栅栏组织和海绵组织。一般的情况，越是上位叶的叶肉越厚，则会决定细胞的突起数较多。

叶绿体 (chloroplast) 是绿色植物和藻类等真核自养生物细胞中专业化亚单元的细胞器。其主要作用是进行光合作用，其中含有的光合色素叶绿素从太阳光捕获能量，并将其存储在能量储存分子ATP和NADPH，同时从水中释放氧气。然后，它们使用ATP和NADPH，在被称为卡尔文循环的过程中从二氧化碳制造有机分子。叶绿体实施许多其它功能，包括植物的脂肪酸合成，很多氨基酸的合成，和免疫反应。

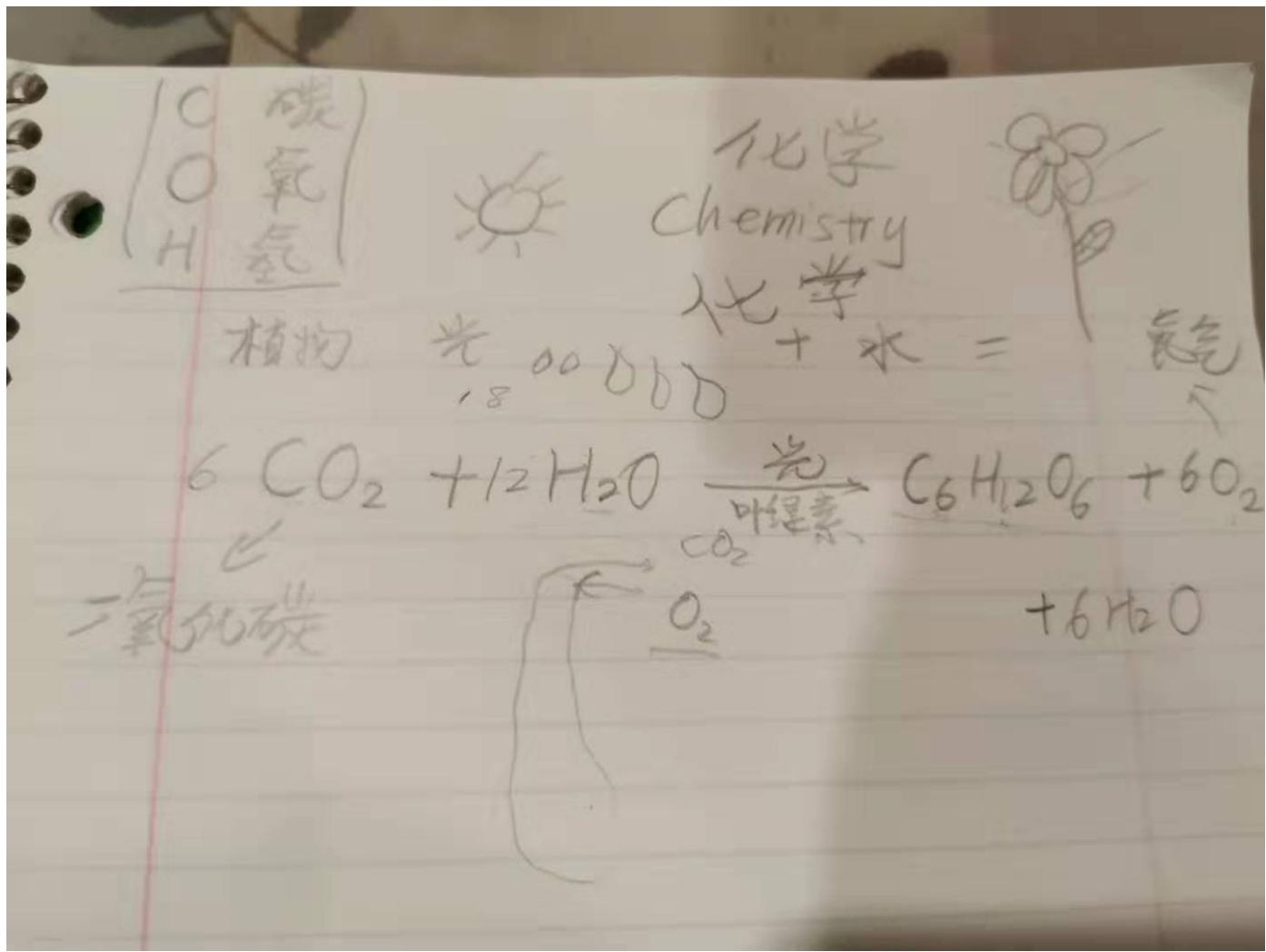
叶绿素 (chlorophyll) 是存在于植物、藻类和蓝藻中的光合色素。

光合作用的第一步是光能被叶绿素吸收并将叶绿素离子化。产生的化学能被暂时储存在三磷酸腺苷(ATP)中，并最终将二氧化碳和水转化为氧气和碳水化合物。叶绿素a和叶绿素b的吸收光谱较为接近，两者在蓝紫光 (430-480nm) 和红光区 (640-660nm) 都有一吸收高峰，叶绿素ab对绿光的吸收很少，所以呈绿色。

并非只有叶子才有叶绿素，叶柄的薄壁细胞都有叶绿素的存在。就是在一片叶子之中，也并非只有叶肉细胞有叶绿素，维管束鞘和保卫细胞都有叶绿素。当秋天渐渐来临，日照时间和空气适度都逐渐变少时，一层在叶柄和树的木质部的细胞就慢慢形成了。这层细胞妨碍了水和养料的输送，因此光合作用减产了，没有了叶绿素的叶子在短时间内就变成其他颜色了。

课堂回顾

这部分知识我自己掌握地都不够系统，所以我主要给小宝播放视频，并且随时讲解。由于这个过程涉及到化学反应，我就大概给小宝讲了一些化学的基础知识，并着重强调了碳，氢，氧这三种元素。我给她展示了整个反应的化学式： $CO_2 + H_2O \rightarrow C_6H_{12}O_6 + H_2O + O_2$ 。虽然小宝看着公式懵逼，但在我的指导下，完成了化学式的配平。



之后，我让小宝把整个过程讲一遍。她让我做模特，假装是一棵树。她指着我的脚说：首先，植物从根部吸收水，然后运送到这里（指着我张开的手臂）——叶子，叶子里的叶绿素见到阳光，就吸收二氧化碳，产生了可以让自己长大的糖和可以给我们呼吸的氧气（她漏掉了水，不过无伤大雅）。

心得体会

这次我准备地不够充分，没想到（也没工夫）那一片绿叶子和她在显微镜下观察（可以周末补上）。以后这种探索类的课题，应该提前一天让她给我她的问题，这样可以有更多时间构思和准备。

贤者时刻

颜回曰：「吾无以进矣，敢问其方。」仲尼曰：「斋，吾将语若！有而为之，其易邪？易之者，皞天不宜。」颜回曰：「回之家贫，唯不饮酒、不茹葷者数月矣。若此，则可以为斋乎？」曰：「是祭祀之斋，非心斋也。」回曰：「敢问心斋。」仲尼曰：「若一志，无听之以耳而听之以心，无听之以心而听之以气。听止于耳，心止于符。气也者，虚而待物者也。唯道集虚。虚者，心斋也。」颜回曰：「回之未始得使，实自回也；得使之也，未始有回也。可谓虚乎？」夫子曰：「尽矣。吾语若！若能入游其樊而无感其名，入则鸣，不入则止。无门无毒，一宅而寓于不得已，则几矣。绝迹易，无行地难。为人使，易以伪；为天使，难以伪。闻以有翼飞者矣，未闻以无翼飞者也；闻以有知知者矣，未闻以无知知者也。瞻彼阕者，虚室生白，吉祥止止。夫且不止，是之谓坐驰。夫徇耳目内通而外于心知，鬼神将来舍，而况人乎！是万物之化也，禹、舜之所纽也，伏戏、几蘧之所行终，而况散焉者乎！」

庄子 人世间

译文：颜回说：“我没有更好的办法了，冒昧地向老师求教方策。”孔子说：“斋戒清心，我将告诉你！如果怀着积极用世之心去做，难道是容易的吗？如果这样做也很容易的话，苍天也会认为是不适宜的。”颜回说：“我颜回家境贫穷，不饮酒浆、不吃葷食已经好几个月了，像这样，可以说是斋戒了吧？”孔子说：“这是祭祀前的所谓斋戒，并不是‘心斋’。”颜回说：“我请教什么是‘心斋’。”孔子说：“你必须摒除杂念，专一心思，不用耳去听而用心去领悟，不用心去领悟而用凝寂虚无的意境去感应！耳的功用仅只在于聆听，心的功用仅只在于跟外界事物交合。凝寂虚无的心境才是虚弱柔顺而能应待宇宙万物的，只有大道才能汇集于凝寂虚无的心境。虚无空明的心境就叫做‘心斋’。”

纪录片：数学地图

这是「天叔奇谈」的第 009 篇文章，今天周五（2019/09/20），主题是纪录片。我在 youtube 上无意发现一个视频：the map of mathematics，觉得很不错，和小宝一起欣赏。

研究内容

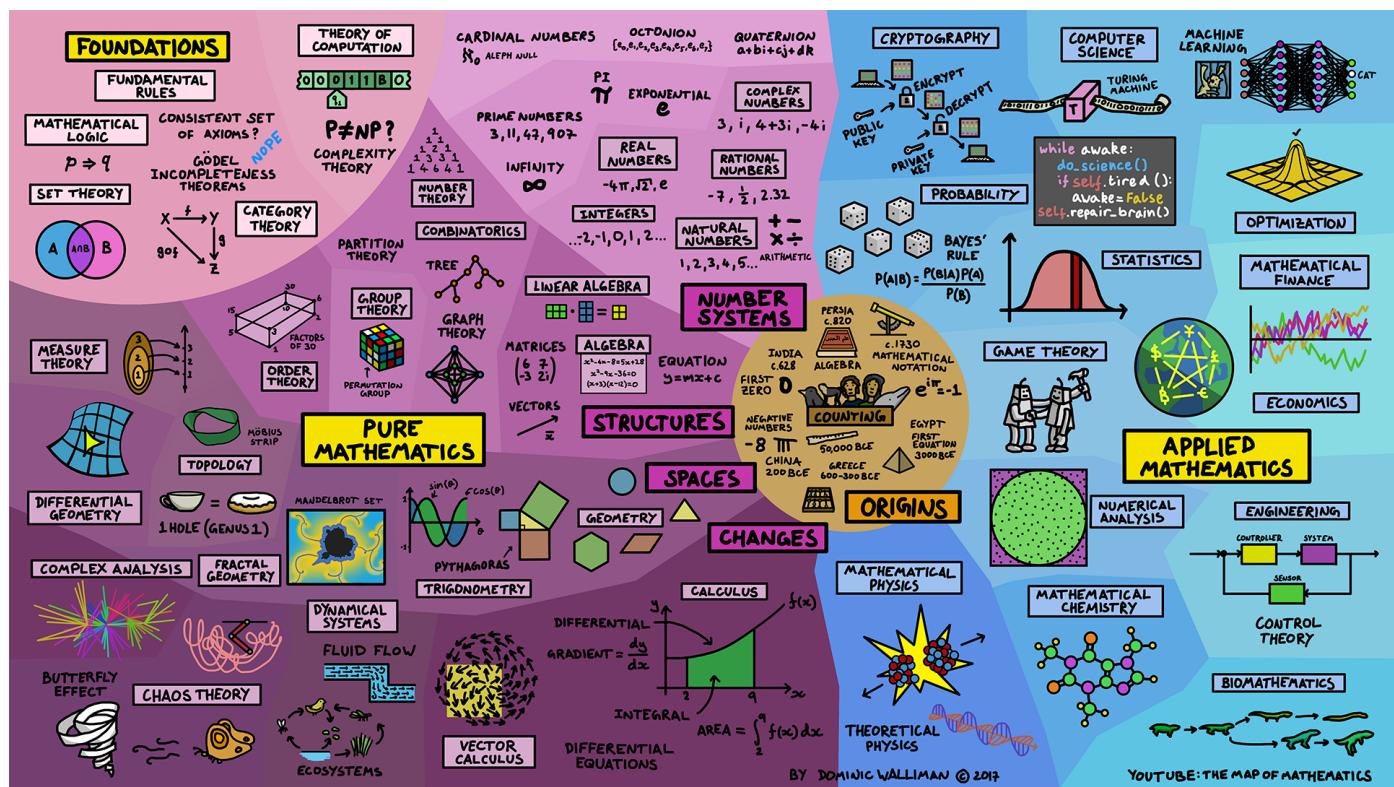
这个短篇主要可以告诉我们数学究竟有多博大精深。

备课素材

视频地址：

<https://www.youtube.com/watch?v=OmJ-4B-mS-Y>

数学地图：



课堂回顾

我们一起观看了视频。10分钟多一点的视频，中间暂停了无数次讲解，最后半个小时才看完。看到有理数的时候，小宝说她整数和小数掌握得还可以，但是分数不太好；看到 Calculus 时，她特别激动，一个劲问我什么时候才能真正开始教她微积分。

全部看完之后，小宝问我了三个问题：

1. 我现在学了哪些部分啊？
2. 爸爸这些你都会么？你学过哪些？
3. 985/211 的学校（她看了「少年派」）会学哪些？

心得体会

小宝对数学地图的兴趣比我想象的高，估计在看到在这个版图上有那么多她不知道的，甚至大部分她爹都没学过，她起了好胜之心。我计划把这个数学地图打印出来，等我们涉及到某个新的领域，就在那个领域上盖个戳。

贤者时刻

Because as we know, there are known knowns; there are things we know we know. We also know there are known unknowns; that is to say we know there are some things we do not know. But there are also unknown unknowns – the ones we don't know we don't know. - Rumsfield

In general, in every mission we can distinguish risk in three possible ways: a) known-known, b) known-unknown, and c) unknown-unknown.

- ON SPACE EXPLORATION AND HUMAN ERROR A paper on reliability and safety
- http://infolab.stanford.edu/~maluf/papers/hicss_ieee05.pdf

在伊拉克战争的听证会上，时任国防部部长拉姆斯菲尔德被问及有关的证据时，他发表了著名的「不知之不知」：「据我们所知，有‘已知的已知’，有些事，我们知道我们知道；我们也知道，有‘已知的未知’，也就是说，有些事，我们现在知道我们不知道。但是，同样存在‘未知的未知’——有些事，我们不知道我们不知道。」

之后，NASA 的一篇论文做了引用：「一般来说，每一个任务都可区分为三种可能的风险：a) 一个已知的已知的方法；b) 已知的未知；和 c) 未知的未知。」

「不知之不知」是最可怕的，因为我们连问题都无从问起。这样的片子给小宝看，并非想让她迅速掌握数学王国的图谱，而是让她知道，并且激发她的好奇心，爸爸目前跟她探索的，和浩瀚的海洋相比，只是沧海一粟。即便有一天爸爸无法教更多的东西，她可以顺着我们目前探索的轨迹，继续前行，去发掘更多的有趣的知识。

几何：尺规作图

这是「天叔奇谈」的第 010 篇文章，今天周六（2019/09/21），主题是几何。上次学着用圆规画圆之后，小宝一直缠着我要进一步学用圆规，我决定干脆引导她玩玩尺规作图。

研究内容

如何使用圆规，以及如何使用圆规和直尺做一些有意思的图形。

备课素材

需要准备：圆规，直尺，半圆仪。

尺规作图基础：

<https://www.youtube.com/watch?v=IksLmVBeREY>

六大基本作图：

1. 等线段作图：已知 PQ ，做一条线段，长度和 PQ 相等。
2. 等角作图：已知角 A ，做一个新的角和这个角相等。
3. 角平分线作图：已知角 A ，做一条角平分线，平分这个角。
4. 中垂线作图：已知线段 PQ ，做一条线垂直平分 PQ 。
5. 垂线作图：a. 过线上一点 b. 过线外一点。
6. 平行线作图：已知一条直线 L ，过线外一点 P ，做平行线。

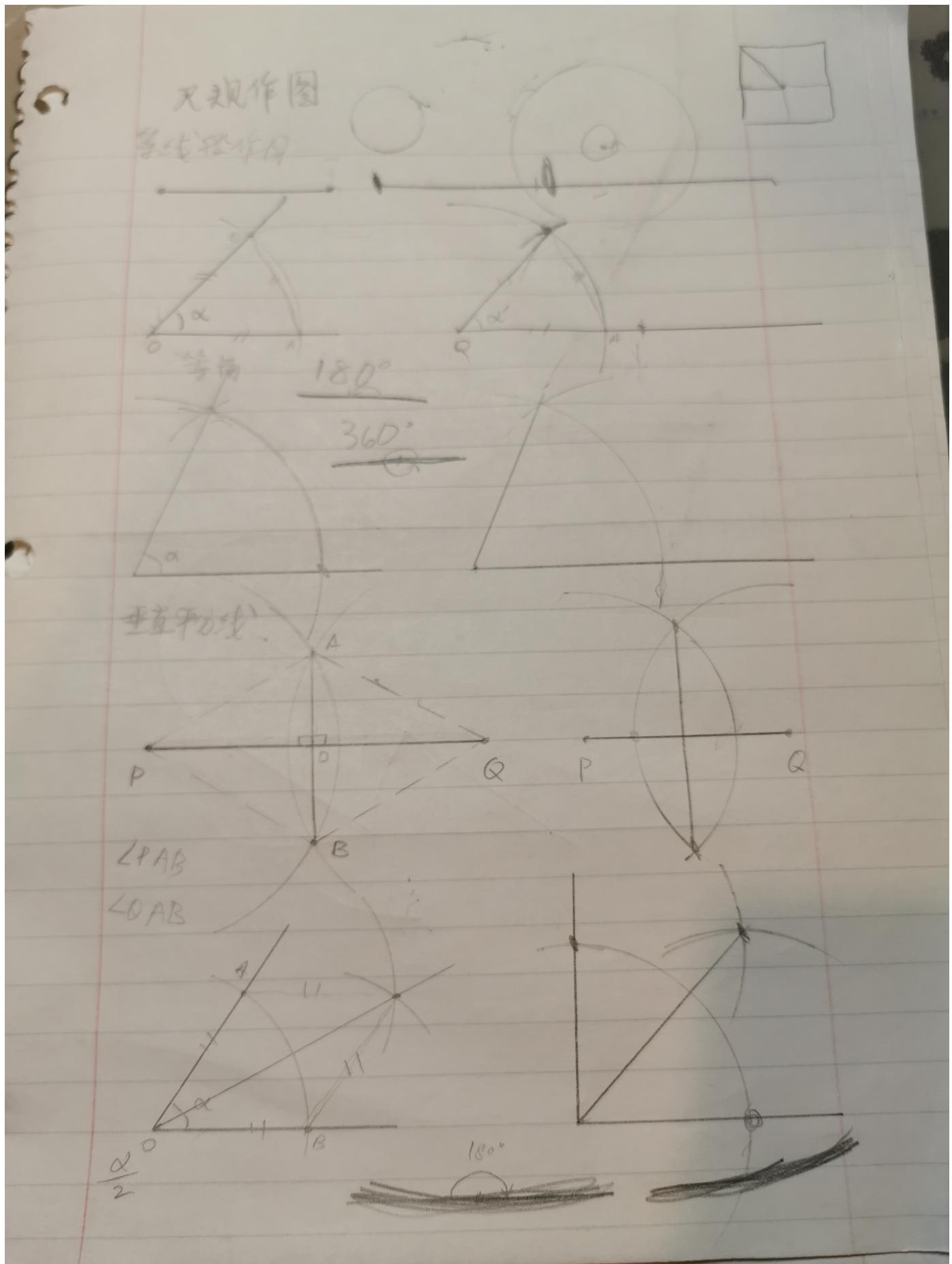
课堂回顾

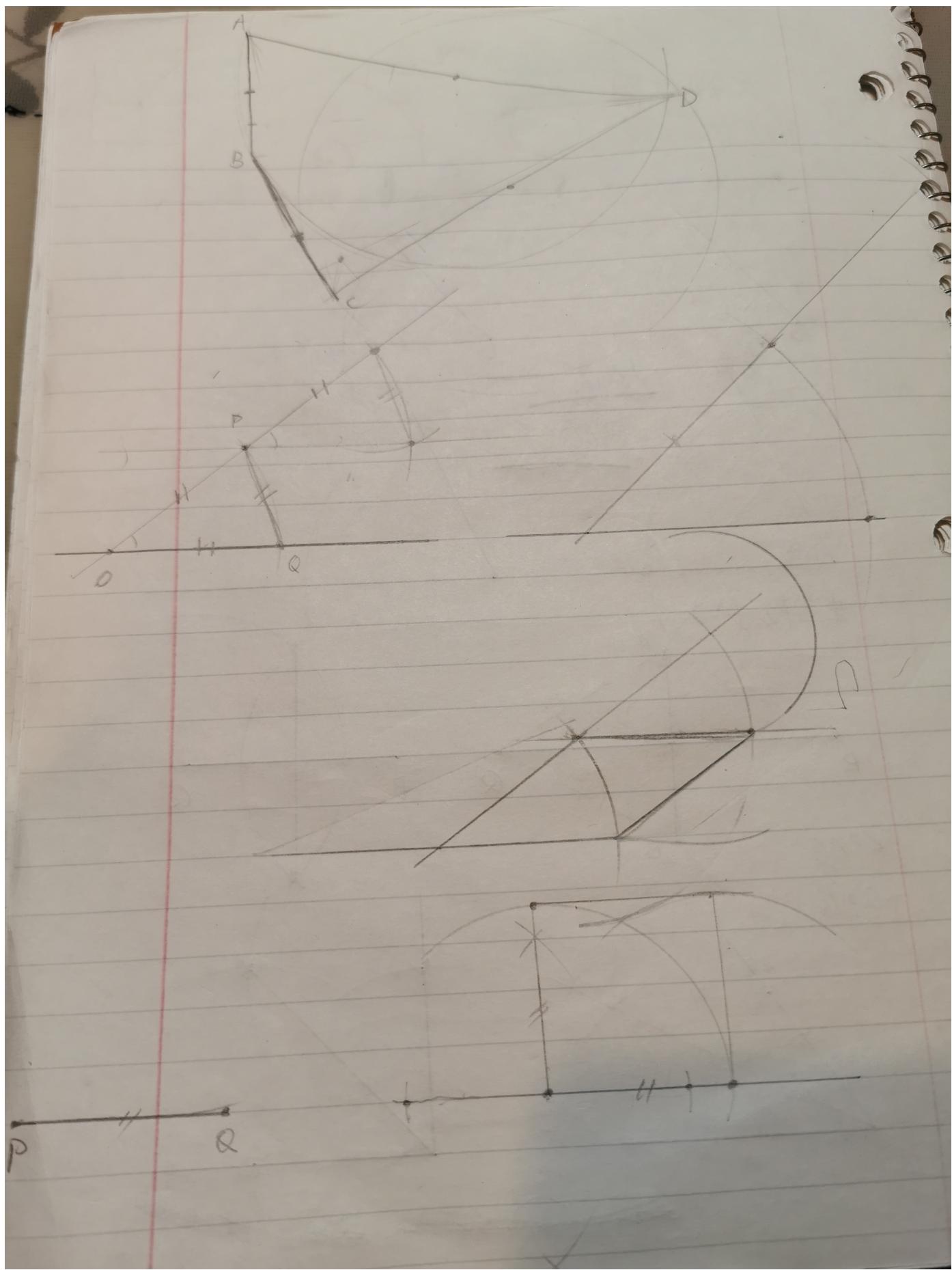
等线段作图很简单，等角作图小宝感觉很神奇，做完之后拿着半圆仪把前后两个角都测量了一遍。角平分线和中垂线她有些懵，但讲了原理之后她自己都可以做出来。时间关系，垂线我们略过，直接将平行线。平行线作图有些复杂，由于没有学几何里的那些公理定理，所以等角共斜边的两个三

角形底边平行这事我没有给她解释。最终她自己做出的平行线，我觉得大概率是凭记忆而非理解做好的。

小丫头给我出了两题，第一题是一个不规则的四边形，画一条线将其分隔成两个面积想等的形状。我以为她自己学过，特地考验我，思考了十多分钟，败下阵来，向她求教；结果她说自己也不会（我总觉得这像个奥数题），我只好说我们下回再研究。第二题是如何用尺规做一个给定长度的正方形。我问她怎么做，她说觉得做不出来。我问她先画一边的话，边长可以怎么样画出来？她用等线段画图的方式画了出来。我又问：那怎么画一个 90° 角？她说可以用作中垂线的方式，可是这里我们不是要找中点啊？我给她演示了以某个点为圆心，左右画和线段相交的弧，然后以两个焦点画中垂线。正方形的两条线画好后，我们（假设）用画平行线的方式，完成了整个正方形。

画好之后，小宝很开心，又问我能不能做（正）五边形，（正）六边形？时间关系，我答应她下次一起来做。





心得体会

尺规作图还是很考验动手能力的，整个过程也足够有趣。麻烦的是，这几种基本作图法全部讲完，差不多要一个小时，时间略长。小宝竟然全程都很投入，不容易。每个图让孩子亲手画一下，能够加深印象。尺规作图的证明基本都是使用全等三角形和相似三角形的概念，由于她还没有学习这部分知识，所以我讲的时候也略过，更多是以好玩来驱动，辅以让她用半圆仪来验证。事实证明，这样也足够了。

贤者时刻

学莫便乎近其人。《礼》《乐》法而不说，《诗》《书》故而不切，《春秋》约而不速。方其人之习君子之说，则尊以遍矣，周于世矣。故曰：学莫便乎近其人。

《荀子 劝学》

翻译：学习没有比亲近良师更便捷的了。《礼经》、《乐经》有法度但嫌疏略；《诗经》、《尚书》古朴但不切近现实；《春秋》隐微但不够周详；仿效良师学习君子的学问，既崇高又全面，还可以通达世理。所以说学习没有比亲近良师更便捷的了。

探索：为什么玩 monkey bar 手上会磨出泡

这是「天叔奇谈」的第 011 篇文章，今天周日（2019/09/22），随机主题（掷色子），小宝扔出了四点，所以题目是探索。这两天小宝在学校里课间休息的时候总去玩 monkey bar，结果手上磨出了个水泡，破了之后很疼，姥姥用碘伏给消了毒，用创可贴保护着。所以她问的问题是：为什么玩 monkey bar 手上会磨出泡？

研究内容

皮肤的组织结构，水泡产生的原因。

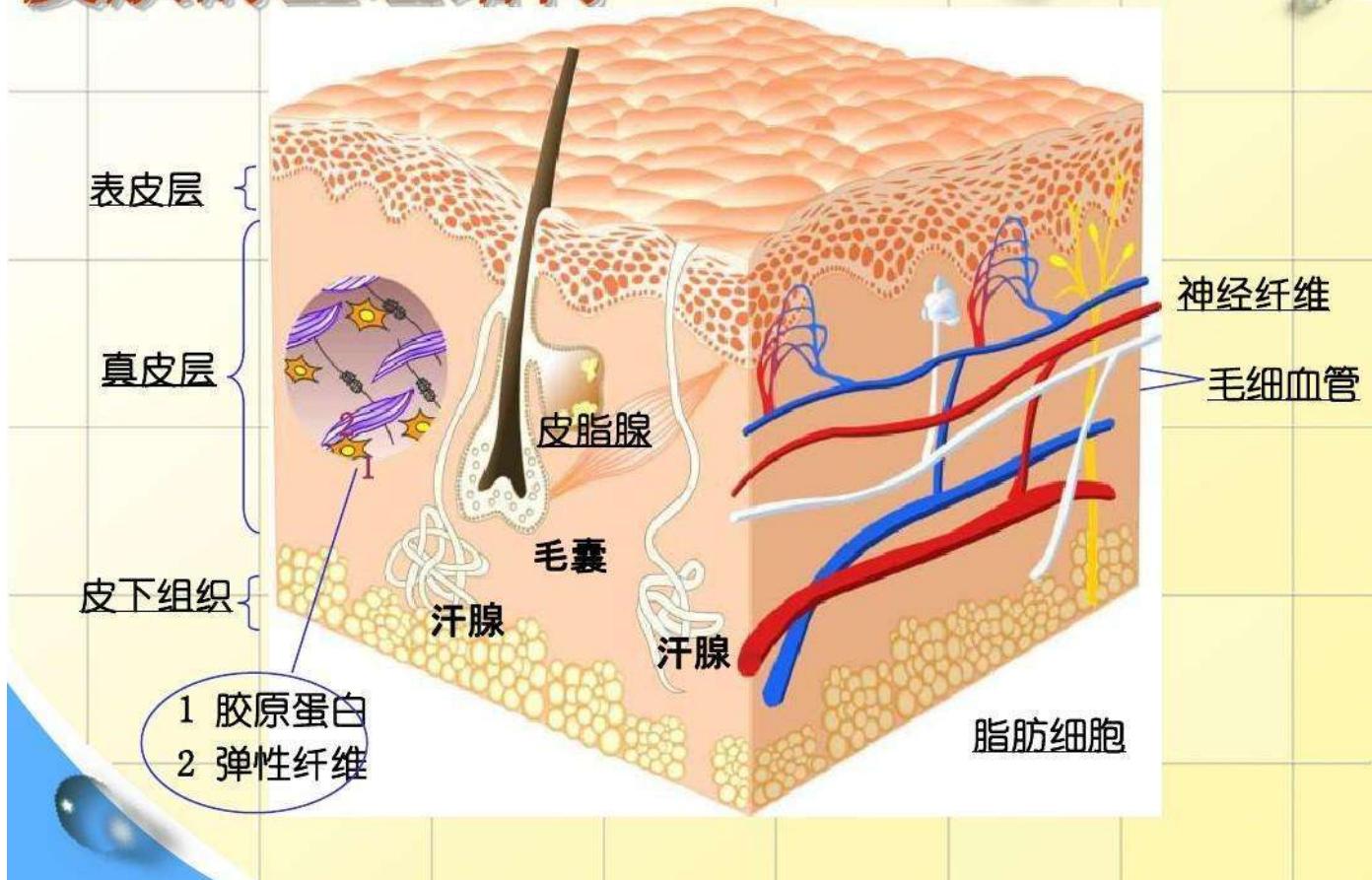
备课素材

因为今天开会没工夫备课，只草草在网上找了这篇文章：

<https://songshuhui.net/archives/3786>

以及这个图片来解答：

皮肤的生理结构



课堂回顾

我让小宝站着张开双臂，以她的手掌为例，告诉她人体从外到内由皮肤，组织和肌肉，骨骼组成。皮肤是人体的第一道防线，阻挡外界的几乎一切东西进入到我们的体内。皮肤是有层次的，最外面是表皮，负责保护内部的结构，比如真皮；里面依次是真皮和皮下组织。表皮最外面是角质层，就是摸上去有些硬的部分，它相当于皮肤和外界的一个缓冲。在玩 monkey bar 时，角质层不够厚，与下面的组织结合也不够紧密。这样反复摩擦后，角质层就会与表皮其他组织分离。这时，身体为了加强对内部组织的保护，就会形成大量体液渗入角质层和下面组织的空隙，水泡就出来了。水泡内部的液体就是为了保护皮肤，避免皮肤进一步受损而形成的缓冲部分。这也可以说作是皮肤的一种自我保护方式。如果水泡破裂了，这层保护就失效了，所以我们需要擦碘伏防止感染，然后用创可贴包扎来避免受伤的地方和外界继续摩擦。

那为什么碘伏可以消毒，防止感染？小宝又问。

我特地 google 了一下。碘伏的杀菌机理为：通过氧化细胞原浆蛋白的活性基团，并与氨基结合，是病原体氨基酸和酶变性，实现杀菌。不过这个给小宝解释很难，我就笼统地说，碘伏能够杀死细菌，这样对身体不好的细菌就无法通过破损的皮肤进入到我们体内了。

那为什么起水泡了我们会感觉到疼？小宝继续问。

因为这是身体的一个预警信号，身体的神经系统提醒我们要小心，不要继续磨损有问题的皮肤。

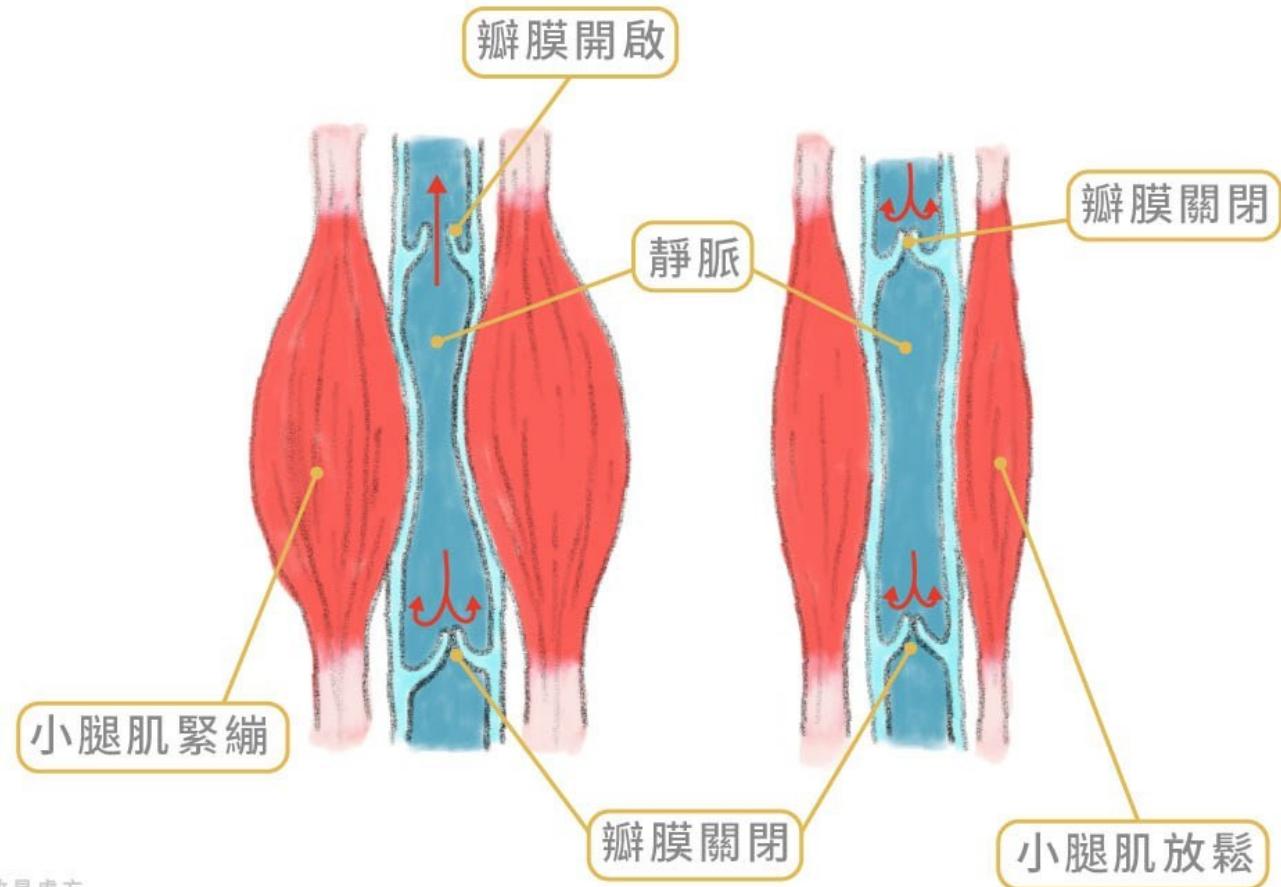
什么是神经系统？小宝穷追不舍。

因为她已经比较了解呼吸系统和消化系统，所以我干脆把神经系统和血液循环系统给她大致讲了一遍。可能是我用她的身体讲解血液循环，尤其是腿上动脉血如何被心脏压下去，静脉血又如何流回到心脏，结果这问一送一的不严谨解答又引发了新的问题。。。

为什么我们站着的时候血液能流回到心脏？它们不是会被重力吸引往下走么？小宝问了一个难度高的。

这个问题着实让我吃了一惊。我笼统地回答因为心脏的收缩的力量足够强让血液能够流回到心脏。后来突然想到李永乐老师讲静脉曲张似乎讲到静脉有个单向开关，于是网上搜索了一下：

小腿肌肉幫助靜脈血液回流



政昇處方
宅配藥局

最终回答了这个问题。

心得体会

物理和生物，按照我们的课堂教育的理念，那是风马牛不相及的东西，就算孩子问生物老师或者物理老师为什么站立时腿上的静脉血回流心脏时不会受到重力的影响倒流，老师也会以超纲，考试不会考搪塞过去。知识是为解决问题服务的，这个世界上没有纯粹的生物或者物理。

贤者时刻

子路问君子。子曰：“修己以敬。”曰：“如斯而已乎？”曰：“修己以安人。”曰：“如斯而已乎？”曰：“修己以安百姓。修己以安百姓，尧舜其犹病诸？”

- 《论语·宪问》

译文：子路问什么叫君子。孔子说：“修养自己，保持严肃恭敬的态度。”子路说：“这样就够了吗？”孔子说：“修养自己，使周围的人们安乐。”子路说：“这样就够了吗？”孔子说：“修养自己，使所有百姓都安乐。修养自己使所有百姓都安乐，尧舜还怕难于做到呢？”

历史故事：魏文侯，李克和吴起

这是「天叔奇谈」的第 012 篇文章，今天周一（2019/09/23），主题是历史故事，这次讲《资治通鉴》中有关魏国早期的故事。

研究内容

1. 魏文侯守信仁义 (<https://tongjian.qiaopang.com/001.html#23>)
2. 子击谢罪 (<https://tongjian.qiaopang.com/001.html#24>)
3. 李克的用人观 (<https://tongjian.qiaopang.com/001.html#25>)
4. 吴起吮疽 (<https://tongjian.qiaopang.com/001.html#26>)
5. 在德不在险 (<https://tongjian.qiaopang.com/001.html#70>)
6. 吴起之死 (<https://tongjian.qiaopang.com/001.html#88>)

备课素材

《资治通鉴》中的故事全文：略

成语或俗语：

- 君仁则臣直
- 君明乐官，不明乐音
- 国君而骄人则失其国，大夫而骄人则失其家
- 家贫思良妻，国乱思良相
- 卑不谋尊，疏不谋戚
- 居视其所亲，富视其所与，达视其所举，穷视其所不为，贫视其所不取
- 在德不在险

课堂回顾

课前，小宝先自告奋勇回顾了上次三家分晋的内容。

之后，我们把魏国早期的一些事件串起来，探讨魏文侯，田子方，子击（后来的魏武侯），李克，以及吴起等人的特点。吴起的故事我略过了杀妻求将的内容，着重说他与士卒同甘共苦，三军用命。

心得体会

《资治通鉴》里的权谋和一些血腥的地方不太适合讲给孩子，比如赵襄子「漆智伯之头，以为饮器」，吴起「杀妻以求将，大破齐师」这样的内容能省则省，讲一些正面的，有关如何做人做事的故事。

贤者时刻

凡论人，通则观其所礼，贵则观其所进，富则观其所养，听则观其所行，止则观其所好。习则观其所言，穷则观其所不受，贱则观其所不为。喜之以验其守，乐之以验其僻，怒之以验其节，惧之以验其持。哀之以验其人，苦之以验其志。八观六验，此贤主之所以论人也。

《吕氏春秋·论人》

李克的用人观在吕氏春秋中得到拓展，称为八观六验。

八观的意思是：当一个人处境顺利时，观察他礼遇的是哪些人；当一个人处于显贵地位时，观察他推荐的是哪些人；当一个人富有时，观察他养的是哪些门客；当一个人听取别人的意见后，观察他采纳的是哪些内容；当一个人无事可做时，观察他有哪些爱好；当一个人处于放松的状态时，观察他讲哪些东西；当一个人贫穷时，观察他不接受什么；当一个人地位卑贱时，观察他什么事不会去做。

六验的意思是：使一个人高兴，借此考验他安分守己的能力，看他是否得意忘形；讨好一个人，看他有没有什么癖性；使一个人发怒，考验他自我控制的能力；使一个人恐惧，看他能否坚定立场、凛然有为；使一个人哀伤，考验他的为人；使一个人痛苦，考验他是否有志气。

数学：进制

这是「天叔奇谈」的第 013 篇文章，今天周二（2019/09/24），主题是数学。本来我们要研究 24 点游戏的，可惜我没时间来准备，所以换了个话题，和小宝探讨数的进制。

研究内容

我们通常使用的进制：十进制 和时间有关的进制：十二（二四，六十）进制 和计算机有关的进制：二进制

数学魔术：猜姓氏

备课素材

正常我应该准备百家姓来做这个数学魔术，可惜时间有限，我只能做一个十二生肖的简化版。先把十二生肖依次排列，算出每个数的二进制：鼠(0001) 牛(0010) 虎(0011) 兔(0100) 龙(0101) 蛇(0110) 马(0111) 羊(1000) 猴(1001) 鸡(1010) 狗(1011) 猪(1100)。之后把它们放在 A（最右边一位是 1），B（最右边第二位是 1），C（最右边第三位是 1），D（最右边第四位是 1）四个集合里，如图：

unhatched.

鼠	牛	虎	兔	龙	蛇	马	羊	猴	鸡	狗	猪
0000	0010	0011	0100	0101	0110	0111	1000	1001	1010	1011	1100

A: 鼠 虎 龙 马 猴 狗

B: 牛 虎 蛇 马 鸡 狗

C: 兔 龙 蛇 马 猪

D: 羊 猴 鸡 狗 猪

$\frac{99}{100}$

这个游戏可以让小宝心里默选一个动物（或者姓氏），然后告诉我在哪几组里，这样我就可以「猜」到这个动物（或者姓氏）。

课堂回顾

我们先从这个游戏开始，小宝一开始觉得很神奇，我们做了两三个后，她似乎发现了规律，然后让我想一个动物她来猜。因为四组里的内容并不多，所以她根据集合间的交运算（虽然她不知道集合和交运算）能够得出正确的答案。这个游戏还是猜百家姓比较好，规律不那么容易找到（还可以顺便普及一下语文）。尽管小宝很快找到了规律，她还是觉得这个游戏很有意思。我告诉她每种动物下面的编号和 A, B, C, D 四组的关系，她算了几个之后，愈发被吸引了。

于是我顺势抛出十进制的起源（十个手指头数数），然后问她如果人类进化的时候只进化出八个手指头会发生什么？她说八进制。我们顺势探讨了一下八进制，她能够理解逢八进一，7 之后就变做 10_8 。

之后我问她生活中的其它进制，她马上想到了时分秒的 60 进制，还有一天的 24 进制。我们讨论了时间使用 60 进制的好处，主要是 1-12 之间的数基本都可以被 60 除开 (7, 8, 9, 11 除外)。

之后我们转到二进制，尝试着把 1-12 写成二进制的形式。

然后我跟她探讨了进制的内在意义：一个形如 2536 的数字，实际上是 $2 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 6 \times 10^0$ 。她对 $10^0 = 1$ 有些不理解，我让她先记着。

二进制也是如此。我们算了几个二进制的数字到十进制的转换，然后转回我们一开始的游戏，这下豁然开朗了。最后，小宝很开心地拿着十二生肖的表格去跟妈妈炫耀她的魔法去了。

数的进制

10^3

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 十进制

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10 十一进制

时间 24小时

$$10\text{小时} = 60\text{分钟} + 10\text{分钟} = 60s \quad 1s = 1000ms$$

$$12 = 3 \times 2 \times 2$$

$$\begin{cases} 60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \\ 60/10 = 6 \end{cases}$$

$$60/5 = 12$$

$$60/2 = 30$$

$$60/6 = 10$$

$$60/3 = 20$$

$$4 =$$

$$24 \times 60 \times 60 \approx 1\text{天}$$

60 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12,

100, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.

~~20进制~~

二进制

0 1 10_2 , 11_2 , 100_2 , 101_2 , 110_2 , 111_2 ,

1000_2 , 1001_2 , 1010_2 , 1011_2 , 1100_2

$$\frac{1293}{4} = 1 \times \underline{\underline{10^3}} + 2 \times \underline{\underline{10^2}} + 9 \times \underline{\underline{10^1}} + 3 \times \underline{\underline{10^0}}$$

$\nearrow \searrow$ $\nearrow \searrow$ $\nearrow \searrow$ $\nearrow \searrow$

进制

$$\begin{array}{r} \boxed{1} \downarrow \boxed{1} \downarrow \boxed{0} \\ 1100_2 = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0 \\ 32 + 4 = 12 \end{array}$$

心得体会

魔法总是能够唤起好奇心，而对魔法的揭秘则让人恍然大悟，顿感领悟规则之后的那种通透。

贤者时刻

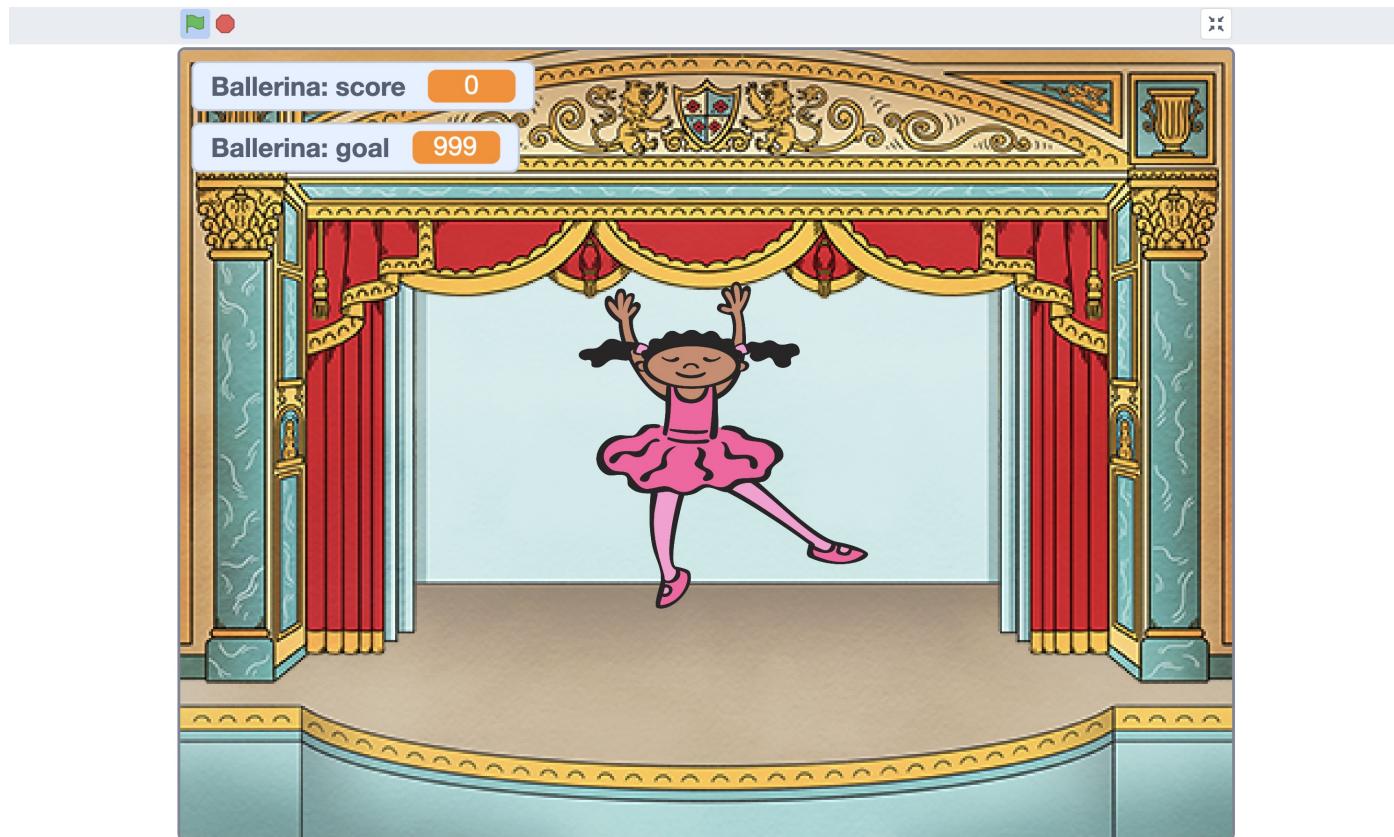
吾尝终日而思矣，不如须臾之所学也。吾尝跂而望矣，不如登高之博见也。登高而招，臂非加长也，而见者远；顺风而呼，声非加疾也，而闻者彰。假舆马者，非利足也，而致千里；假舟楫者，非能水也，而绝江河。君子生非异也，善假于物也。

荀子·劝学

Scratch：跳舞的小女孩

这是「天叔奇谈」的第 014 篇文章，今天周三（2019/09/25），主题是 scratch。果不其然，小宝要求以后换回 Scratch，不再使用 Scratch Jr. 所以我们今天换成网页版的 Scratch。

花了大概 40 分钟，小宝的作品如下：



项目已分享到：<https://scratch.mit.edu/projects/331682862>。

贤者时刻

颜渊问仲尼曰：“吾尝济乎觞深之渊，津人操舟若神。吾问焉，曰：‘操舟可学邪？’曰：‘可。善游者数能。若乃夫没人，则未尝见舟而便操之也。’吾问焉而不吾告，敢问何谓也？”仲尼曰：“善游者数能，忘水也。若乃夫没人之未尝见舟而便操之也，彼视渊若陵，视舟之覆犹其车却也。覆却万方陈乎前而不得入其舍，恶往而不暇！以瓦注者巧，以钩注者惮，以黄金注者惛。其巧一也，而有所矜，则重外也。凡外重者内拙。”

《庄子·达生》

颜渊问孔子说：“我曾经在觞深过渡，摆渡人驾船的技巧实在神妙。我问他：‘驾船可以学习吗？’摆渡人说：‘可以的。善于游泳的人很快就能驾船。假如是善于潜水的人，那他不曾见到船也会熟练地驾驶船。’我进而问他怎样学习驾船而他却不再回答我。请问他的话说的是什么意思呢？”

孔子回答说：“善于游泳的人很快就能学会驾船，这是因为他们习以成性适应于水而处之自然。至于那善于潜水的人不曾见到过船就能熟练地驾驶船，是因为他们眼里的深渊就像是陆地上的小丘，看待船翻犹如车子倒退一样。船的覆没和车的倒退以及各种景象展现在他们眼前却都不能扰乱他们的内心，他们到哪里不从容自得！用瓦器作为赌注的人心地坦然而格外技高，用金属带钩作为赌注的人而心存疑惧，用黄金作为赌注的人则头脑发昏内心迷乱。各种赌注的赌博技巧本是一样的，而有所顾惜，那就是以身外之物为重了。大凡对外物看得过重的人其内心世界一定笨拙。”

探索：为什么吃的东西那么香，拉出来的大臭那么臭？

这是「天叔奇谈」的第 014 篇文章，今天周四（2019/09/26），主题是探索与发现。小宝可以问我任何一个她感兴趣的问题，我们共同探索，寻找答案。她的问题是：为什么姥姥做的饭那么香，可我吃完拉出来的大臭那么臭？

这个问题令我哭笑不得。我没想到我们会探讨一个这么有味道的问题。

备课素材

youtube 素材：

大便为什么会臭？

https://www.youtube.com/watch?v=zlykBv_59mU

The poop cycle

https://www.youtube.com/watch?v=hMIHFR_P7QY

维基百科对解释：

粪臭素

即3-甲基吲哚，为一种具有中等毒性的白色结晶有机化合物，是吲哚的一种衍生物。在自然界中，存在于哺乳动物的粪便（为色氨酸在消化系统中的产物）、甜菜与煤焦油中，具有强烈的粪便气味。在低浓度下，粪臭素具有花香味，并存在于许多花朵与精油中，如橙花、茉莉与印度枣（*Ziziphus mauritiana*），因此被用于香水中的香精、定香剂以及食物香料等。其名称来自于希腊文的skato-，意指“动物的粪便”。

化学式： C_9H_9N 摩尔质量：131.172 g·mol⁻¹ 外观：白色结晶固体 熔点：93-95 °C (366-369 K) 沸点：265 °C (583 K) 溶解性（水）：不溶

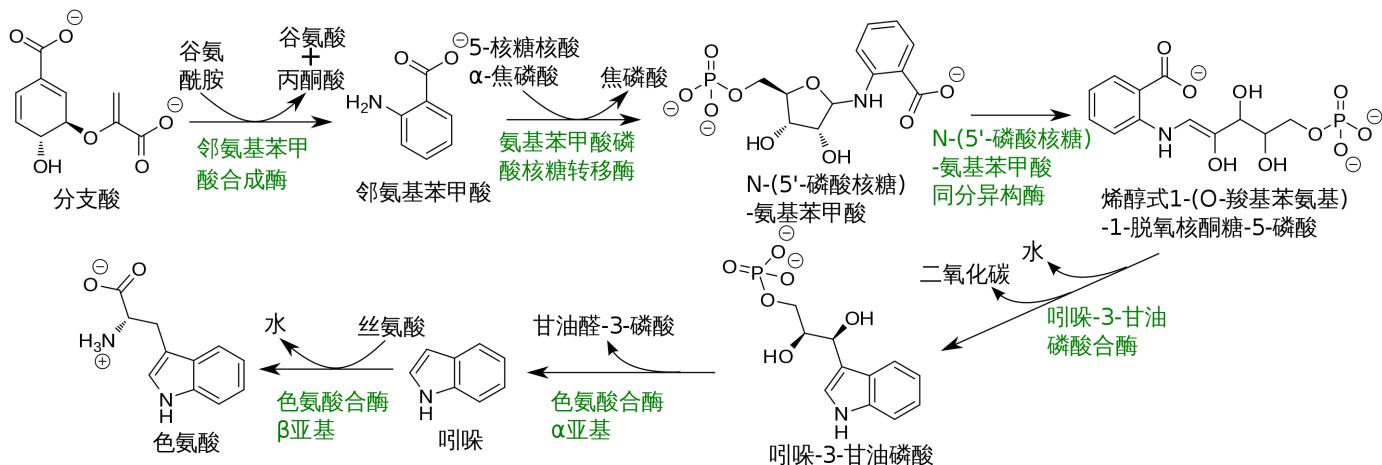
吲哚（英语：indole）

芳香杂环有机化合物，为双环结构，包含了一个六元苯环和一个五元含氮的吡咯环。因为氮的孤对电子参与形成芳香环，所以吲哚不是碱，性质也不同于简单的胺。

在室温，吲哚是固体。自然情况下，吲哚存在于人类的粪便之中，并且有强烈的粪臭味。然而，在很低的浓度下，吲哚具有类似于花的香味[1]，是许多花香的组成部分，例如橘子花，吲哚也用来制造香水，煤焦油也会有吲哚。

化学式： C_8H_7N 摩尔质量：117.15 g·mol⁻¹ 外观：白色固体 密度：1.22 g/cm³，固体 熔点：52 - 54°C (326 K) 沸点：253 - 254°C (526 K) 溶解性（水）：0.19 g/100 ml (20 °C)溶于热水

生成过程：



这里要敲黑板：香水里有低浓度的大便的成分。

这是进化过程中形成的自然选择——我们的嗅觉系统让我们警惕和远离那些高浓度的东西。

课堂回顾

略。

贤者时刻

夫有材而无势，虽贤不能制不肖。故立尺材于高山之上，则临千仞之溪，材非长也，位高也。桀为天子，能制天下，非贤也，势重也；尧为匹夫，不能正三家，非不肖也，位卑也。千钧得船则浮，锱铢失船则沈，非千钧轻锱铢重也，有势之与无势也。故短之临高也以位，不肖之制贤也以势。

《韩非子 功名》

纪录片：数学的历史

这是「天叔奇谈」的第 016 篇文章，今天周五（2019/09/27），主题是纪录片。小宝现在对数学的热情空前高涨，所以我想趁热打铁，陪她看看 IMO 最年轻的金牌得主，著名数学家 Terry Tao 的故事。后来我发现这个片子有点干涩，我看还可以，她看估计吸收不了太多东西，所以临时换了一个片子：The History of Mathematics and Its Applications。小宝对这个片子感兴趣的程度大大出乎我的意料，原本 21 分钟的内容，我们花了整整一个小时才看完。

备课素材

视频地址：

https://www.youtube.com/watch?v=2No_CMrxBe8

视频贯穿数学发展的简史，浮光掠影般讲了这些主题：

- Numbers/Counting
- Logic
- Euclid's Elements/Euclidean Algorithm
- Cryptography
- Calculating the Radius of Earth
- Calculus
- Graph Theory
- Topology
- Fourier Analysis
- Group Theory
- Boolean Algebra
- Set Theory
- Markov Chains
- Game Theory
- Chaos Theory
- Geodesics
- Fermat's Last Theorem
- Millennium Prize Problems

其实我觉得真要讲数学史，可以整一个几十期的系列，每期讲个二十分钟，才能尽兴。

原本想要研讨的视频：

<https://www.youtube.com/watch?v=MXJ-zpJeY3E>

课堂回顾

视频一开始提及进制。因为这个正好这周跟她讲过，所以她很兴奋。讲到 Logic 部分，我暂停下来跟她详细讲解，并让她算视频中的几个逻辑题的真假。讲到 Euclidean Algorithm 时，因为小宝还没接触过最大公约数（Greatest Common Divisor），我停下来给她解释这个概念，原本最大公约数和最小公倍数我计划花一堂课的时间和她研究的，结果我给她讲了基本的概念，然后又通过因式分解举例 9 和 12 的最大公约数是 3，小宝就已然可以算出来 12 和 18 的最大公约数是 6。我告诉她我们的方法不是最优的，大的数字就不好算了，欧几里得的算法更好。我们一起看了视频中的例子 1054 和 714 的最大公约数怎么算的，然后我给她出了 27 和 15 两个数字让她用欧氏算法算最大公约数，小宝很快就通过三次除法，得到公约数为 3。这个领悟能力，我和老婆都惊呆了。

讲 Cryptography 的时候，我说，假设你给爸爸写一段话，通过妈妈转交给我，你不想让妈妈知道你写了些什么，但还能让爸爸能读懂，要怎么做？她说：那我发明一种语言，然后教给你，就我们两个人知道。我说对，这是一种方法。爸爸现在工作中使用的是另一种方法——比如你给我写：Hi, daddy. 你可以把字母表中的所有字母统一移六位，比如 A 变成 G。H 变成 N。小宝算了一下，问，那爸爸，y 该怎么变化呀？我说：你可以把 26 个字母放在一个圆里，yzabcde，所以 y 变成 z。

最终，我们算出来的密文是：Nm, jgjjz. 我告诉她，这就是最简单的加密方法。也是古罗马时代使用的方式。

接下来是最美的科学实验之一的使用影子测量地球半径，这个实验我在其他视频看过，《非平面》里也提及：

在两千多年前的亚历山大城，厄拉多塞也曾以类似方法测量地球。

记录显示，在遥远的南方城市塞尼城，夏至正午之时，太阳可以直射深井井底，且当地的立柱没有投影。

然而，相同时间的亚历山大城却存在阴影，也就是说，这里的太阳并非直射。

厄拉多塞知道太阳离我们非常远，因此照到地球上的太阳光线是彼此平行的。

亚历山大城

也就是说，两地影子的差异，只能是地球本身表面弯曲的结果（这也证实了一个长久以来的推测）。

厄拉多塞并未止步于此。

通过测量亚历山大城柱子的高度，以及此柱投影的长度，他计算出了两座城市地理位置的角度差。

（基本等于两座城市之间圆周的度数。）

接着，他测出两城间的实际距离，并利用这个数据和角度差，非常精确地求出了地球的周长。

$$C = \frac{360^\circ}{\theta^\circ} \times D_{A-S}$$

两点（两眼）的联系促成了一种更广阔的视野，让我们重新认识了地球。

基于此，可以提出一个有待完善的定义：“非平面”是多个观察点同时作用，从而产生全新观察方式的过程。

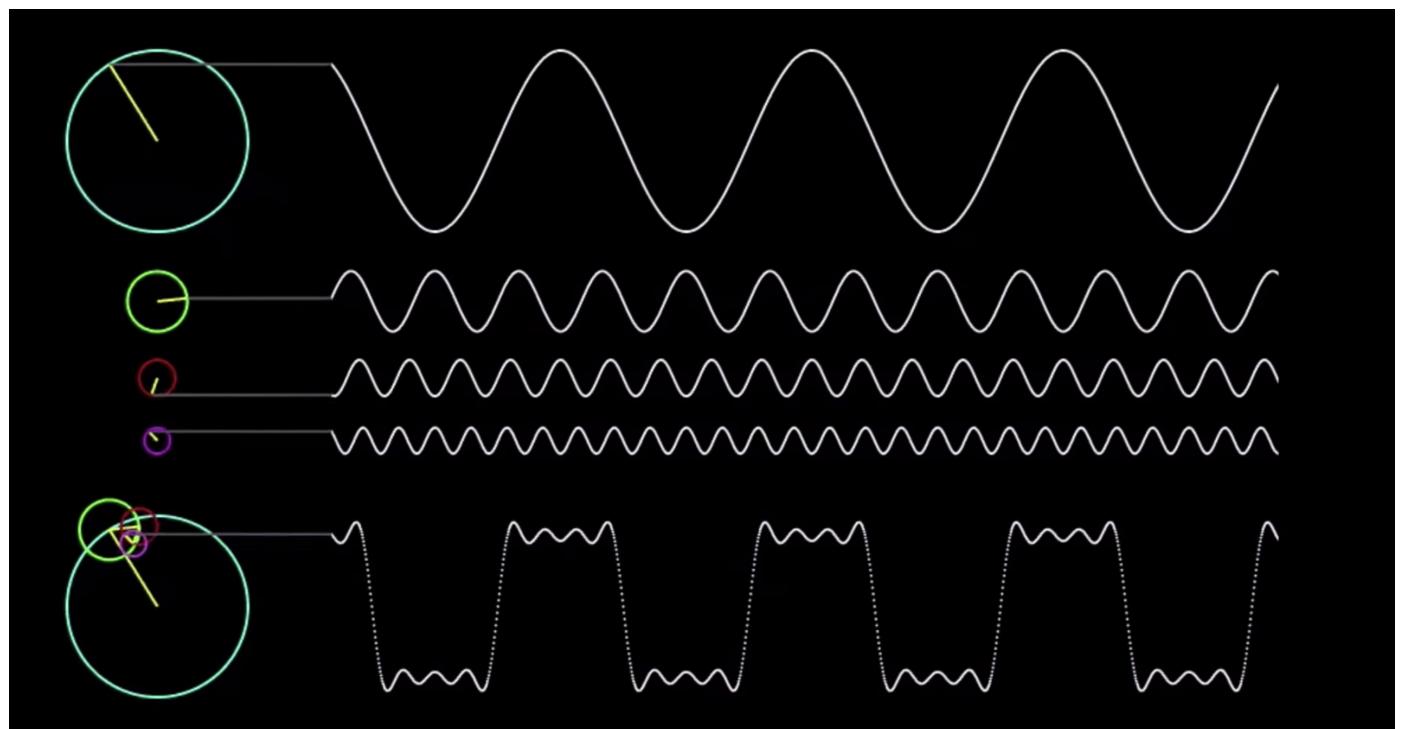
(图片来源：《非平面》截图)

我跟小宝详细讲了整个过程，又特意强调了里面用了微积分的思想。

接下来的微积分，是小宝最感兴趣的部分——我曾经跟她讲过微积分是数学的王冠，是现代科学之母，所以她一直嚷嚷着要学微积分。她问我微积分是谁发现的？我说是这个世界上曾经最伟大的物理学家牛顿，以及大数学家莱布尼茨共同发明的。随着视频的推进，我跟她介绍微积分是如何描述变化的。

柯尼斯堡七桥问题，在我给小宝讲解的时候，变成了「巴塞尔七桥问题」——我还煞有介事地讲这是大数学家欧拉和朋友们饭后在巴塞尔的河边散步想出来的一个问题，blabla 的。小宝对这个问题挺感兴趣的，让我把视频停下来自己试着走了一遍。

傅里叶变换我也是停下来特别强调了一会。因为我觉得傅里叶变换背后的思想是使用数学解决问题的两大瑰宝之一：**把复杂问题转换成若干个简单问题的集合，然后解决这些简单问题**。考虑到 \sin , \cos 这些概念她还不懂，我简单告诉她傅里叶变换将一个复杂的波形，比如我们说话发出来的声音的振动，或者手机拍出来的照片，变成若干个简单的波形的叠加，这样我们只要用这些简单问题来模拟和还原复杂问题就可以了。看她似懂非懂，我就以晚上吃饭时教她算平方的方法为例，来阐述这个思路。这个方式是： $x^2 = (x + a)(x - a) + a^2$ ，或者说把一个数的平方尽可能凑出好计算的两个数的乘法，比如 $37^2 = 40 * 34 + 3^2$ 来更快速的计算。



(图片来源：https://www.youtube.com/watch?v=2No_CMrxBe8 截图)

之后的 group theory (应该叫 Category theory) 和 Set theory 我做了简单的讲解，这个现在她还只能很浅地理解。Game theory 讲到囚徒困境时我本来没想暂停仔细讲解，结果她要求停下来看看，所以我以我和她为例介绍了整个场景，让她做理性的选择。她选择告密。原因是相比来看，两种情况结果都要好一些。

The Prisoners' Dilemma

		Prisoner A Choices	
		Stay Silent	Confess and Betray
Prisoner B Choices	Stay Silent	Each serves one month in jail	Prisoner A goes free Prisoner B serves full year in jail
	Confess and Betray	Prisoner A serves full year in jail Prisoner B goes free	Each serves three months in jail

(图片来源：https://www.youtube.com/watch?v=2No_CMrxBe8 截图)

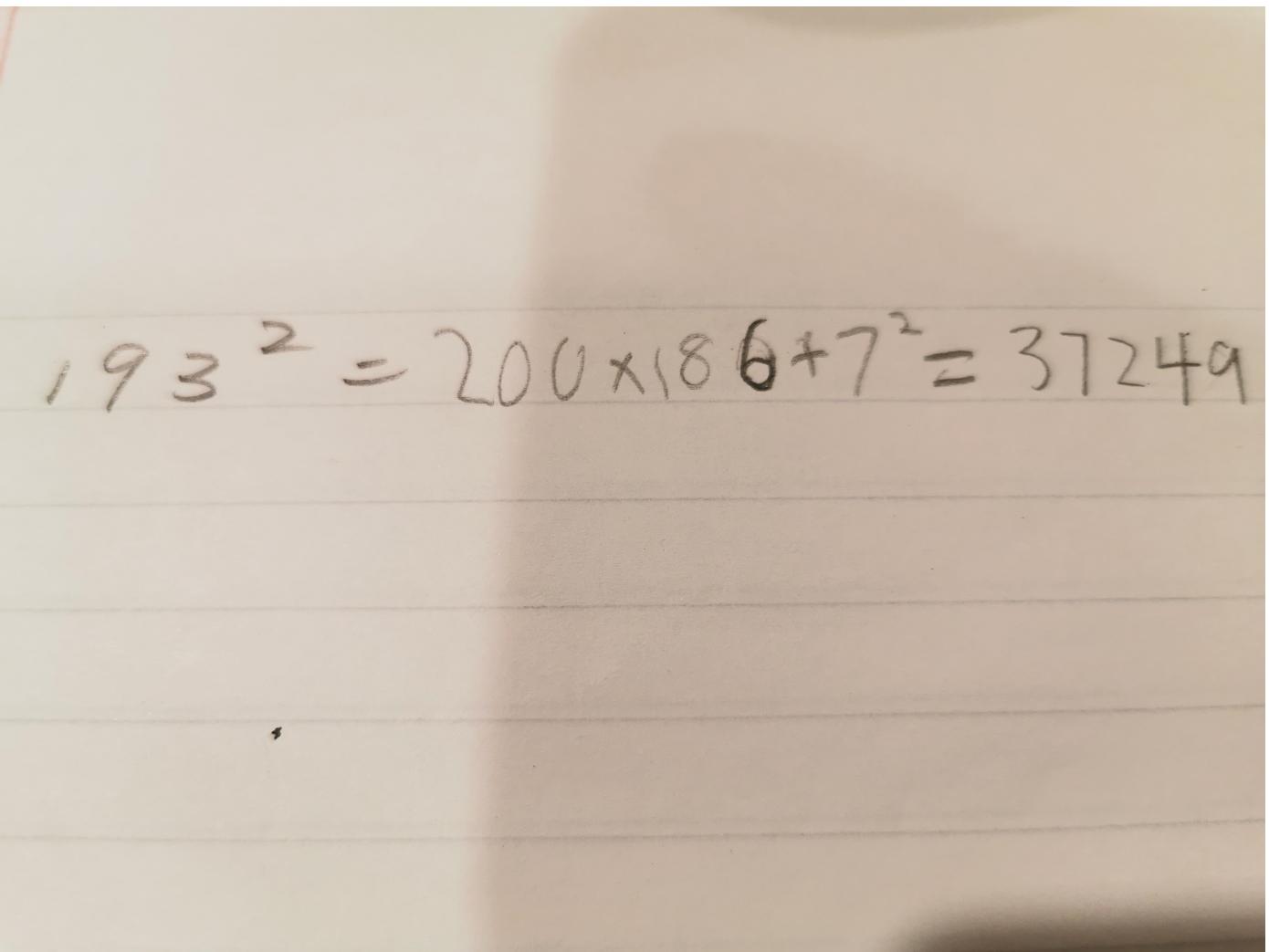
混沌理论我自然是抛出那个著名的论断，只不过把地名改成了她更熟悉的西雅图和北京。她直觉是不可能——西雅图的蝴蝶扇翅膀，怎么会让北京下大雨呢？我说这就是个比喻，一个复杂的系统，初始条件稍微变一点点，后续的状态就千差万别。我们的天气预报，预报明天的天气，还比较准；一周后，就只能是个大概；一年之后，更抛硬币没什么区别。

最后，费马大定律，曾经的费马猜想，我把整个故事给她讲了一遍。当她听到视频上说这么简单的一个猜想，数学家几百年后用了一百多页纸才证明出来，差点惊掉了下巴。

整个视频看完之后，意犹未尽，她让我给她出道数学题，于是我在纸上写下了 193^2 ，让她用晚饭时我教她的方法算。她先是凑 190，我提示她凑什么其他的数字更简单？于是她写下了：

$$193^2 = 200 \times 186 + 7^2 = 37249$$

她先写下的是 37200，之后发现 + 49 不用写，就直接擦掉了后面两个零，变作 37249。我让她拿计算器验算一下，当结果出来时，她兴奋地大吼一声：yeah!



心得体会

数学的历史值得我们好好研究，未来我会尽可能搜集足够全面的和数学有关的历史和轶事，作为我们饭桌上探讨的素材。

贤者时刻

道冲，而用之或不盈。渊兮似万物之宗。挫其锐，解其纷，和其光，同其尘。湛兮似或存。吾不知谁之子，象帝之先。

《老子 道德经》

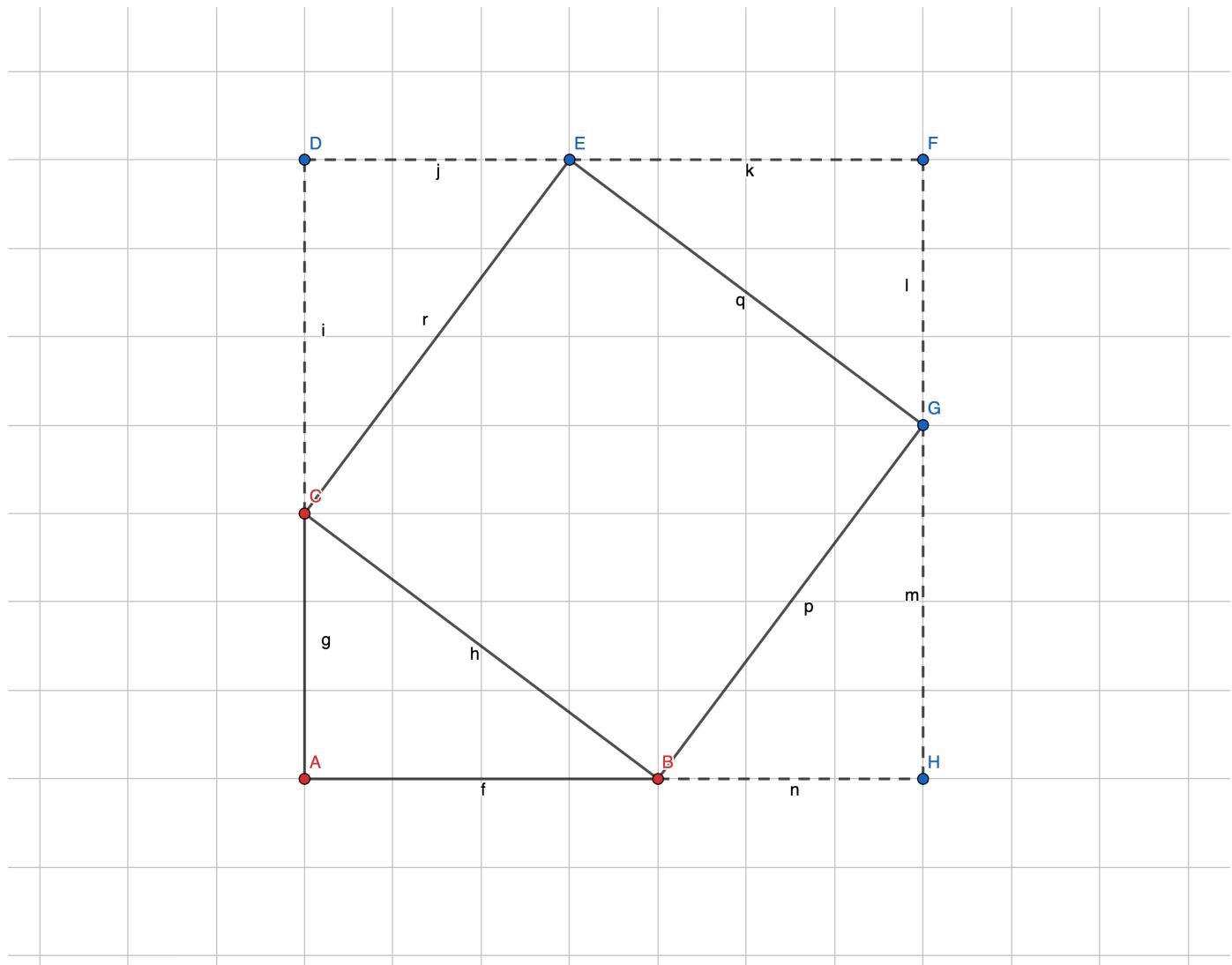
白话文：道空虚无形，而作用又是无穷无尽。它是那样的深邃，好像是万物的主宰——掩损自己的锋芒，排解自己的纷扰，隐蔽自己的光耀，把自己混同于尘俗之中。它是那样的无形无象，似亡而实存。我不知道它是谁的后代，似乎是天帝的祖先。

几何：勾股定理

这是「天叔奇谈」的第 017 篇文章，今天周六（2019/09/28），主题是几何。今天尝试着教小宝勾股定理。之前我们简单聊过勾股定理，她对 $a^2 + b^2 = c^2$ 有简单的认识，也问过我为什么一个直角三角形的两条直角边的平方之和等于斜边的平方。所以想看看能不能帮她更好地理解勾股定理。

备课素材

毕达哥拉斯的证明方式有些复杂，所以我选用了比较简单的方式：



我在 GeoGebra 上做的原图可以在这里找到：[点此链接](#)

<https://www.geogebra.org/graphing/nycxxxvv>

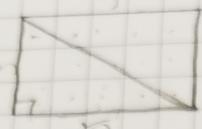
顺嘴提一句，Geogebra 真是太赞了，做图非常方便！

课堂回顾

因为她妈妈跟她讲过几何的初步知识，如维度，角度，直线，射线，线段，三角形等基础概念，我们就大概过了一下，然后开始研讨勾股定理。在这个过程中，我发现小宝对周长和面积的概念还有些混乱，又回过头补了一下这些概念。

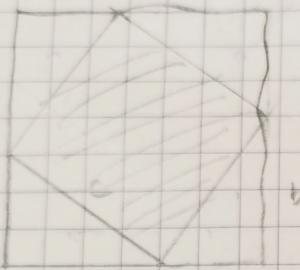
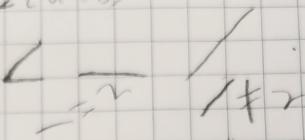
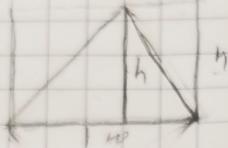
目前，形如： $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 这样的展开式，如果用数字表示，她还比较好理解，一旦换成字母，她就很难跟得上。所以，虽然用数字表示的勾股定理的证明我们很快就搞明白了，换成字母表述时，还是费了不少功夫。

讲完后，她让我用尺规再给她出中垂线和平分角的题目，她想再回顾一下，这两个她都做出来了，但随后我给她出的过直线外一点做平行线的题目，在我的帮助下，她才弄出来。



$$C = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\text{total area} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$$



$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= (a+b)(a+b) \\ &= a \times (a+b) + b \times (a+b) \\ &= a^2 + ab + ba + b^2 \\ &= a^2 + b^2 + 2ab \end{aligned}$$

$$\text{四邊形的面積} = \frac{1}{2} ab \times 4 = 2ab$$

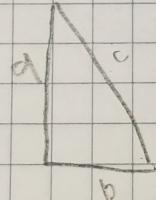
$$(3+4)(3+4)$$

$$\begin{aligned} &= 3 \times 3 + 3 \times 4 + 4 \times 3 + 4 \times 4 \\ &= 3^2 + 2 \times 3 \times 4 + 4^2 \end{aligned}$$

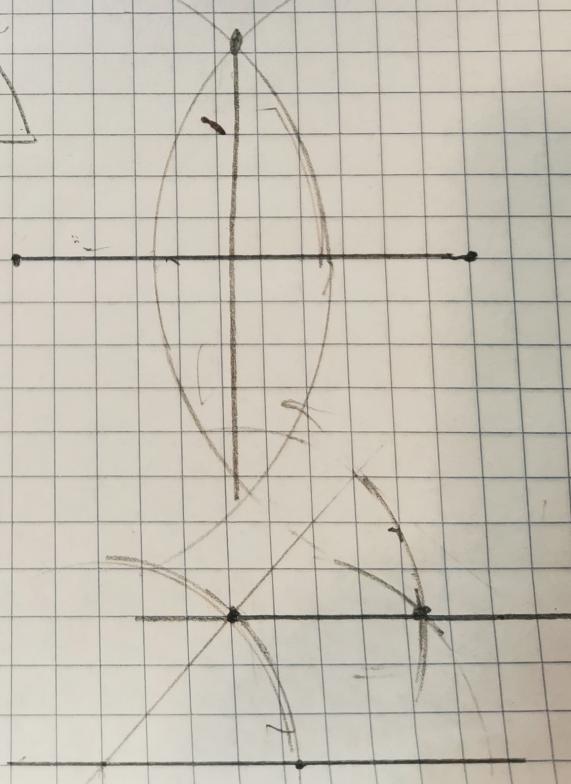
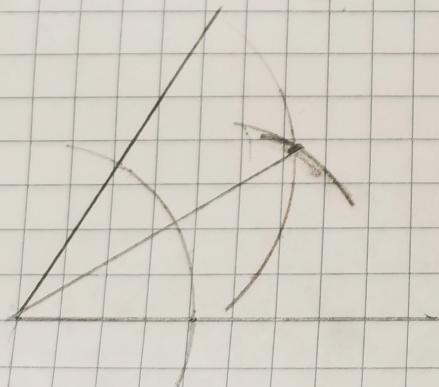
$$32^2 = 30 \times 34 + 2^2$$

$$(32-2)(32+2)$$

$$= 32^2 - 2^2 = 32^2 - 2^2$$



$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 + 2ab - 2ab \\ &= a^2 + b^2 = c^2 \end{aligned}$$



心得体会

几何我有些操之过急了。勾股定理我还是应该以图形的方式帮助她理解，然后用具体的数字证明就好了，目前代数的方式对她来说还是过于抽象。

贤者时刻

臣之所好者道也，进乎技矣。始臣之解牛之时，所见无非牛者。三年之后，未尝见全牛也。方今之时，臣以神遇，而不以目视，官知止而神欲行。依乎天理，批大郤，导大窾，因其固然。技经肯綮之未尝，而况大軱乎！

《庄子 养生主》

scratch：我和我的祖国

这是「天叔奇谈」的第 018 篇文章，今天周日（2019/09/29），随机主题（掷色子），小宝直接选择了 scratch，她说要祝贺祖国国庆节快乐。还逼迫我献声我不太会唱的《我和我的祖国》。

花了大概 40 分钟，小宝的作品如下：



项目还是之前那个：<https://scratch.mit.edu/projects/331682862>。

历史故事：中国近代史

这是「天叔奇谈」的第 019 篇文章，今天周一（2019/09/30），主题是历史故事。今天《资治通鉴》暂停一周，由于 70 年大庆，小宝看了阅兵式后非常兴奋（以及这两天看的《我和我的祖国》的预告片，她对黄渤演的那段开国大典前夜的故事尤其感兴趣），想让我先讲讲中华人民共和国是怎么成立的，于是我们就一起回顾了一下 1840 年第一次鸦片战争到 1949 年新中国成立发生的一些大事。

课堂回顾

在看阅兵的时候，小宝一直在搭建「升旗台」，并且多次模仿《我和我的祖国》前夜篇中升旗的场景，要求我和她妈妈一起唱国歌，然后她「电动升旗」。阅兵后她就缠着我讲近代史。





我们的主要素材是混子曰这一期的《新中国诞生记》，由于混子整理得太好了，这里我就不再赘述，大家可以自己去看。这么多历史事件串在一起，她肯定是消化不了的，所以过两天我们会再看一遍。在我跟她讲述了解放战争自己人打自己人，光军人就死伤五百多万人（后经维基百科查实，国民党军被歼灭 807 万，解放军伤亡 130 万）的惨烈之后，她跟我比划说那是一百万我们这样的家庭啊。我说老百姓的死伤那就更多了，战争最苦的永远是没有武器的平民。

她又问我那新中国成立之后还打仗么？我说打呀，紧接着就是一场朝鲜战争，就和美国，还有其他很多国家打。美国军队打到我们家门口，我们的军队出击，一直打到——我打开 google map，滑到朝鲜韩国交界的三八线——这个位置，打了三年，谁都打不动了，就和平谈判了。这场仗是我们的立国之战，从鸦片战争以来中国积弱的形象被颠覆，从此全世界对中国刮目相看，不敢再轻视中国。小宝接过话茬：是不是就像我刚来 Sunny Hills（她的小学），我旁边的那些男生总是欺负我——不是揍我那种欺负，就是老打扰我，不让我好好学习——后来他们发现我学习比他们好，懂的比他们多，就不欺负我了，我们也做朋友了那样？

我笑笑说是。我接着说：之后，62 年我们和印度打了一仗，79 年我们又和越南打了一仗，总算打出来周边一个和平的环境。小宝若有所思：还是不打仗好，你说大家都快快乐乐地一起工作一起赚

钱多好？我说是啊，所以我们 80 年代改革开放，把紧闭的国门打开开始学习其他国家的优点，跟大家做贸易，接受国外资本的投资。也就是那个时候开始，香港——我把地图挪到了香港并且放大——开始成为中国和其它国家，比如美国英国这些西方国家交流的窗口。

「香港」？就是现在很乱的那个香港？我看着都觉得可怕。小宝问。

是。香港原来是一个很美好的地方，有很多好吃的，好玩的，你小时候还去过呢。只不过现在那里的年轻人不懂事，被冲昏了头。你看，不管有什么要求，动手打人都是不对的，就像你跟贝贝，打架能解决问题么？最后都要体谅对方，和和气气的，才能双赢。我们要多学习，多思考，让我们自己有智慧，有思想。如果一个人知识不够，又不勤于思考，要么容易被人洗脑，要么容易被煽动，就像那些不遵守法律，动手打人的黑衣人。

嗯，我知道了。爸爸，你刚才说香港是鸦片战争被英国给抢了？

是啊。

那后来又怎么回归了？

我们过两天看《我和我的祖国》，里面有讲到回归，到时候我再给你讲吧。

数学：24 点游戏

这是「天叔奇谈」的第 020 篇文章，今天周二（2019/10/01），主题是数学。今天我们研究 24 点游戏。我跟小宝之前玩过几轮，她意犹未尽，所以我们决定探讨一下 24 点的奥妙。

研究内容

24 点游戏是从一副除去大小王的扑克牌中随便抽取四张牌，A, 1, 2, ..., K 表示数字 1-13，抽出来的四张牌得到四个数字，用任何四则运算处理这四个数字，使其结果等于 24。24 点游戏大部分有解，实在找不出来的话可以在 <http://dffyw.com/tool/24.html>（或者 google 24 点）找答案。

备课素材

由于之前我们已经了解基本的做法，小宝对简单（所谓简单，就是我也能算出来的）的 24 点游戏很多时候比我算得还快，所以我这次主要准备的是一类问题：有重复的牌面出现，比如我们有次游戏中出现的 7, 4, 7, 4。这个当时我们认为是无解的。

除了 7, 4, 7, 4，我还准备了：

- 2, 4, 10, 10
- 2, 7, 7, 10
- 2, 6, 6, 12

另外，还有一个也是之前我们没算出来的 2, 3, 5, 12。

这几个例子都是典型的需要除法来凑 24 点的解。

课堂回顾

我们先把 24 可以表述的两个数字之和找出来：

$24 = 23 + 1 = 11 + 13 = 10 + 14 = 20 + 4 = \dots$

两个数字之差：

$24 = 25 - 1 = 26 - 2 = \dots = 30 - 6 = \dots$

然后是两个数字之积：

$24 = 2 \times 12 = 3 \times 8 = 4 \times 6$

然后是两个数字之比：

$24 = \frac{48}{2} = \frac{72}{3} = \frac{96}{4} = \dots = \frac{240}{10}$

对于形如 2, 4, 10, 10 的牌面，关键是要能够凑出：

$\frac{24}{10} \times 10$

而一旦这个坎过了，用 2 和 4，还有一个可以和分母约掉的 10 凑 24 就很方便了。

我们用同样的方式解决了 2, 7, 7, 10。

对于 2, 6, 6, 12，这题准备的不太好，光想着怎么凑除法了，结果小宝直接找到了好几种简单使用乘除的方式。

2, 3, 5, 12 的解法对小宝来说有些难——像上面那样通过约分来凑 24，她可以理解；但用 2, 3, 5 三个数凑 $1/2$ ，即便在我的提示下，她还是不能找出规律。

烧脑的游戏结束后，她非要给我出几道题，结果出了四道，三道无解。小妮子坏得很！都知道出题要避开 2, 3, 6, 12, 8 这些数，净给我至少三个素数和一个奇数这样的奇葩组合，比如 13, 7, 3, 11。

2 4 10 10

$$(2+4 \div 10) \times 10 = 24$$

$$(2+\frac{4}{10}) \times 10$$

$$(2+4/10) \times 10$$

$$2 \times 7 + 10 \div 7 = 24$$

$$\frac{7 \times 2 + 10}{7} \times 7$$

$$2 = \frac{14}{7} (2 + \frac{10}{7}) \times 7$$

2 5 6 12

$$16 - 6 + 2 \times 12$$

$$12 \div (6 \div 2) \times 6$$

$$\frac{12 \times 2}{6} \times 6$$

4 4 7 7

$$747 ? \frac{24}{4} \times 4$$

2 3 5 12

$$1 3 9 10 \quad (1+10) \times 3 - 9$$

13 11 3 9

$$13 11 9 \quad \frac{13+9}{2} \times 10 = 120$$

$$8 7 9 \\ 2 \times 3 \times 7$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ \hline 23+1 \\ \hline 11 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2223 \\ 2 \times 12 \quad 3 \times 8 \quad 6 \times 4 \\ \hline 24 \end{array}$$

$$24 = 10 \times ? \quad \frac{24}{10} = \frac{2}{1} \quad \frac{2}{10} = \frac{4}{10}$$

$$24 = \frac{24}{7} \times 7$$

$$\frac{4 \times 7 - 4}{7} = \frac{4 \times 7}{7} - \frac{4}{7}$$

$$\frac{13}{7} \quad (3+6) \times ? = 55$$

$$a \times 6 = 100 \quad 5 \quad 11$$

$$10 \times 10$$

$$25 \times 4$$

$$20 \times 5$$

$$50 \times 2$$

$$\frac{24}{7} \times 7 - \frac{4 \times 7 - 4}{7} \times 7 = (4 - 4/7) \times 7$$

12 3 5

$$- 12 \div \frac{1}{2} = 24$$

$$12 \div (3 - 5/2) = 24$$

$$\frac{39}{(9+3) \times (13-1)}$$

在课程结束后，我稍微花了点时间又跟她回顾了一下晚饭时候我们讨论的数学问题：

- 一个数加上 6，再乘以它自己，等于 55，这个数是多少？
- 一个数加上 7，再乘以它自己，等于 98，这个数是多少？
- 一个数加上 3，再乘以它自己，等于 108，这个数是多少？

因为她有因式分解的底子，所以一顿饭下来，我们算了八九道。但当时没有归纳总结。这类问题其实是一元二次方程 $x^2 + bx - c = 0$ ，由于她还不能理解代数，我变了个方式来问她。

当时她算 108 那题时花了好长时间，原因是 108 可以分解的可能太多，她有些迷失。所以我们以一个稍微不那么复杂的数 100，列出所有的质因数，然后把这些质因数组合成两个数的乘积，然后通过两个数的关系来很快找到答案。

探索：为什么一盘菜，表面的很快就变凉了？

这是「天叔奇谈」的第 021 篇文章，今天周四（2019/10/03），主题是探索与发现。小宝可以问我任何一个她感兴趣的问题，我们共同探索，寻找答案。她的问题是：为什么一盘菜，表面的部分很快就变凉了？

备课素材

这是一个复杂的问题。从宏观上讲，这是热传递的现象，热会从温度高的系统传导到温度低的系统；从微观上讲，这是熵增。这个问题还可以引申到温度究竟是什么？为什么有摄氏温度和华氏温度？什么东西传热快？什么东西传热慢？

我找到了这些视频：

- 热传递：<https://www.youtube.com/watch?v=UezbnKvn1xQ>
- 熵：
 - 熵和麦克斯韦妖啥意思：<https://www.youtube.com/watch?v=3KMg8nuypwc>
 - 熵是什么：<https://www.youtube.com/watch?v=084cwqiKzx0>
- 温度
 - 宇宙中最低温度是多少？<https://www.youtube.com/watch?v=Xx7tLZ1c9FQ>
 - 华氏度和摄氏度有啥区别？<https://www.youtube.com/watch?v=VOmdCiSgmtw>

课堂回顾

我们先到 1 楼，往炒菜用的铁锅里稍微加了一点点水，打开煤气。铁锅很快被加热，然后这个热量传导给水，水慢慢开始运动，直至沸腾。我让小宝一边观察，一边感受炒菜的铲子，铁锅的把手的温度，让她知道不同的物体对热量的传导是不同的。铁锅很快把热传导给水，而滚烫的铁锅的把手却是凉的。最后，锅中所有的水都蒸发干了。我们把滚烫的铁锅放在一边，课后再看看它的温度。

有了感性的认识之后，我们开始研究「热传递」。热传递的视频很好的诠释了整个过程，我随时停下来给她做详细解释。随后我把话题引导到温度和温度计，和她一起研究了华氏温度和摄氏温度的转换——惭愧啊，我原来知道有个转换公式，但一直不知道为什么这么转换，直到为了给小宝讲课，才知道华氏把冰点的水定义为 32 度，沸点是 212 度。所以才有这么奇葩的计算公式。后来我们又练习演算了几组摄氏转华氏的习题和一道华氏转摄氏的习题。

最后我给她放了李永乐老师的「宇宙中最低温度是多少？」的前半截，让她对温度的微观表述有一个大概的了解。期间，我给她简单解释了分子，动能等视频中出现的概念。

课程结束之后，我们又回到 1 楼，摸摸四十分钟前还滚烫的锅，发现完全冷却下来了。小宝很开心，我问她：为什么锅的热量传递到空气中，我们却没有觉得空气变热了呢？小宝想了一下，说：因为房间里的空气太多了，锅的热量太少。

我又问她：我们刚才其实一直都有一个前提：热量是从温度高的物体传导到温度低的物体，可是为什么热量会从温度高的物体往温度低的物体传导呢？

小宝摇摇头。我故作神秘地说：想知道的话，你需要先知道数学的一门分支——统计。

贤者时刻

子贡曰：「贫而无谄，富而无骄，何如？」子曰：「可也。未若贫而乐，富而好礼者也。」子贡曰：「《诗》云：‘如切如磋，如琢如磨。’其斯之谓与？」子曰：「赐也，始可与言诗已矣！告诸往而知来者。」

《论语 学而》

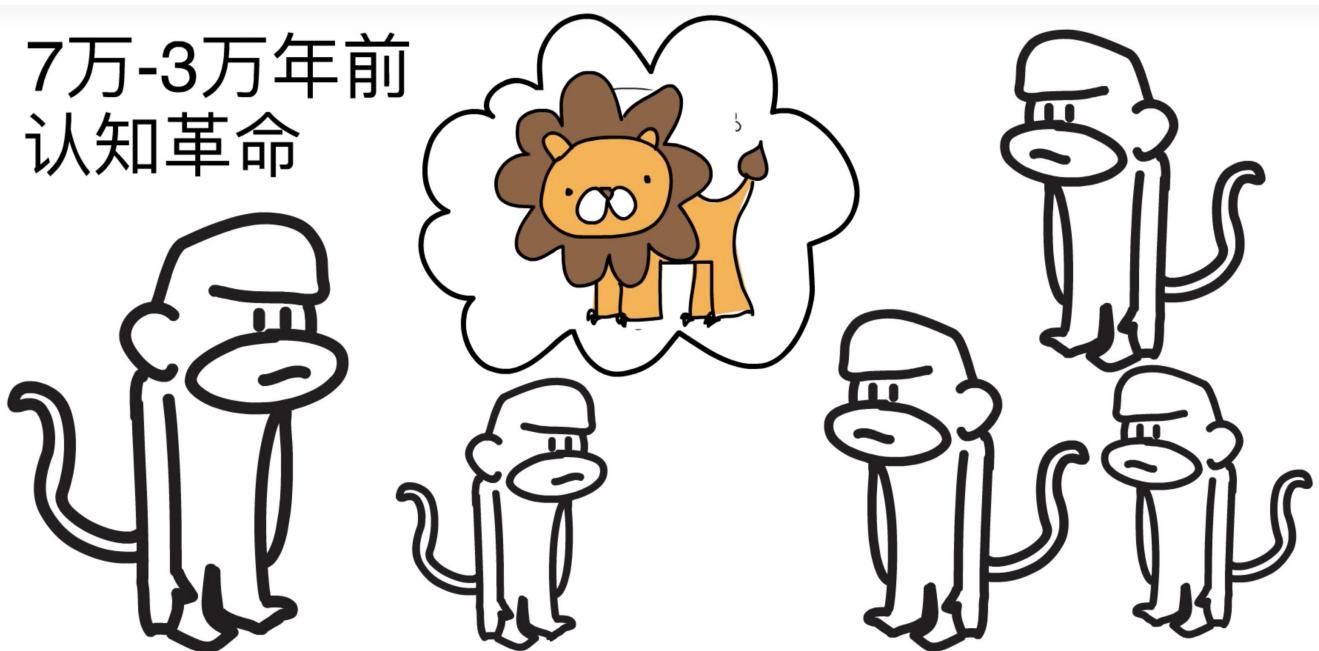
纪录片：人类简史 & 终极密码

这是「天叔奇谈」的第 022 篇文章，今天周五（2019/10/04），主题是纪录片。今天的纪录片我让小宝在「人类简史」和「终极密码」里二选一，小宝都感兴趣，我们先看了「人类简史」，看完之后意犹未尽，又看了「终极密码」的第一集，数字。

备课素材

人类简史：

https://www.youtube.com/watch?v=1Z0Mw1_XYT0



终极密码：

<https://www.bilibili.com/video/av4169474/>

 π

课堂回顾

「人类简史」的整体绘画风格不错，对人类的发展历史总结很到位：语言的形成，认知革命，农业革命，科技革命等。这本书我没有读过，已列在待读书籍的清单中。视频比较短，15分钟，看起来比较轻松，我只需要稍微介绍一下相关的出场人物，比如汉谟拉比，瓦特等。

「终极密码」是一部关于数学的纪录片。我一直想找和数学有关，尤其是讲述数学家故事，或者数学发展史的纪录片，无奈没有特别合适的。「阿基米德的秘密」不错，但对小宝来说太难。「终极密码」第一集我简单过了一下，感觉还行，里面讲的内容小宝应该会感兴趣，于是看完「人类简史」后，我们又看了这个。

视频中提到的一些有意思的数字，比如12，比如素数， π ，都是我之前跟小宝介绍过的，我们平日里的数学游戏也大多围绕着素数（质因数分解，判断一个数是否为素数）进行，所以她看起来没有太多障碍。整个纪录片把生活中的很多问题和数学结合得很好，比如周期蝉的繁殖周期是素数（13年），根据钓到的鱼的质量标准差 σ 和 π 的一个公式可以估算出最大的鱼的质量等。

贤者时刻

释法术而心治，尧不能正一国。去规矩而妄意度，奚仲不能成一轮。废尺寸而差短长，王尔不能半中。使中主守法术，拙匠守规矩尺寸，则万不失矣。君人者，能去贤巧之所不能，守中拙之所万不失，则人力尽而功名立。

《韩非子 用人》

数学：揭秘数字

这是「天叔奇谈」的第 023 篇文章，今天周二（2019/10/08），主题是数学。今天我们研究 1-100 间的数字的奥妙。之前三天，由于我跑马拉松的缘故，耽搁了两趟几何课（小宝掷色子掷出了 6）和一趟历史故事，所以今天我们 8 点就开始上课，试图在讲完数字之后，找时间补上原本打算周末讲的尺规作图续集。结果，光是研究这些数字就花了一个半小时。

研究内容

我们主要的目的是探索数字的特征，看看 1-100 间的数字是否可以根据其特征放入其中某一类：

- 素数
- 平方数
- 立方数
- 两个素数乘积
- 三个素数乘积
- 2 的幂乘以一个素数
- ...

课堂回顾

这是我跟小宝上过的最长的一堂课，整整 90 分钟，都是她在计算。

我先是让她把 1-100 间的素数写出来。她在纸上挨个写出了：

素数（25 个）：2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97

随后，我让她写出平方数和立方数：

- 平方数（10 个）：1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100
- 立方数（3 个）：8, 27, 64

之后，是两个素数的乘积的数（30个）：

- 2和其它素数（14个）：6, 10, 14, 22, 26, 34, 38, 46, 58, 62, 74, 82, 86, 94
- 3和其它素数（9个）：15, 21, 33, 39, 51, 57, 69, 87, 93
- 5和其它素数（5个）：35, 55, 65, 85, 95
- 7和其它素数（2个）：77, 91

之后，是三个素数的乘积的数（5个）：30, 42, 66, 70, 78

剩下的数字，我们一起列出来，找规律（27个）：

12, 18, 20, 24, 28, 32, 40, 44, 45, 48, 50, 52, 54, 56, 60, 63, 68, 72, 76, 80, 84, 88, 90, 92, 96, 98, 99

我们发现，它们进一步可以分为：

- $2^n \times \text{素数}$ （16个）
 - 2^2 （8个）：12, 20, 28, 44, 52, 68, 76, 92
 - 2^3 （4个）：24, 40, 56, 88
 - 2^4 （3个）：32, 48, 80
 - 2^5 （1个）：96
- $n^2 \times \text{素数}$ （6个）：
 - 3^2 （4个）：18, 45, 63, 99
 - 5^2 （1个）：50
 - 7^2 （1个）：98
- 立方数 \times 素数（1个）：54
- 剩下的：60, 72, 84, 90

素数: 2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 59 61 67 71 73 79 83 89 97
(25个).

平方数: 1 4 9 16 25 36 49 64 81 100
(10个)

两个素数之和: 6 10 14 22 26 34 38 46 62 74 82 86 94
乘积: 15 21 33 39 51 57 69 87 93
(30个) 35 55 65 85 95
77 91

三个素数之和:
乘积: 30 42 66 70 78
(5个)

立方数: 8 27 64
(3个)

$$\begin{array}{r} 174387 \\ \times 3 \\ \hline 523 \\ -3 \\ \hline 22 \\ -21 \\ \hline 13 \\ -10 \\ \hline \end{array}$$

27个: 12 18 20 24 28 32 40 44 45 48 50 52 54 56 60 63 68 76 80 84 88 90 92 96 98 99

$2^2 \times$ 素数: 12 20 28 44 52 68 76 92

$3^2 \times$ 素数: 18 45 63 99

$2^3 \times$ 素数: 24 40 56 88

2^n : 1 2 4 8 16 32 64

$2^4 \times$ 素数: 48 80

$5^2 \times$ 素数: 50

立方数 \times 素数: 54

$2^5 \times$ 素数: 96

$7^2 \times$ 素数: 98

$2^n \times$ 素数: 12 20 28 44 52 68 76 92

24 40 56 88

32 48 80

96

$11^2 \times$ 素数: 18 45 63 99

50

98

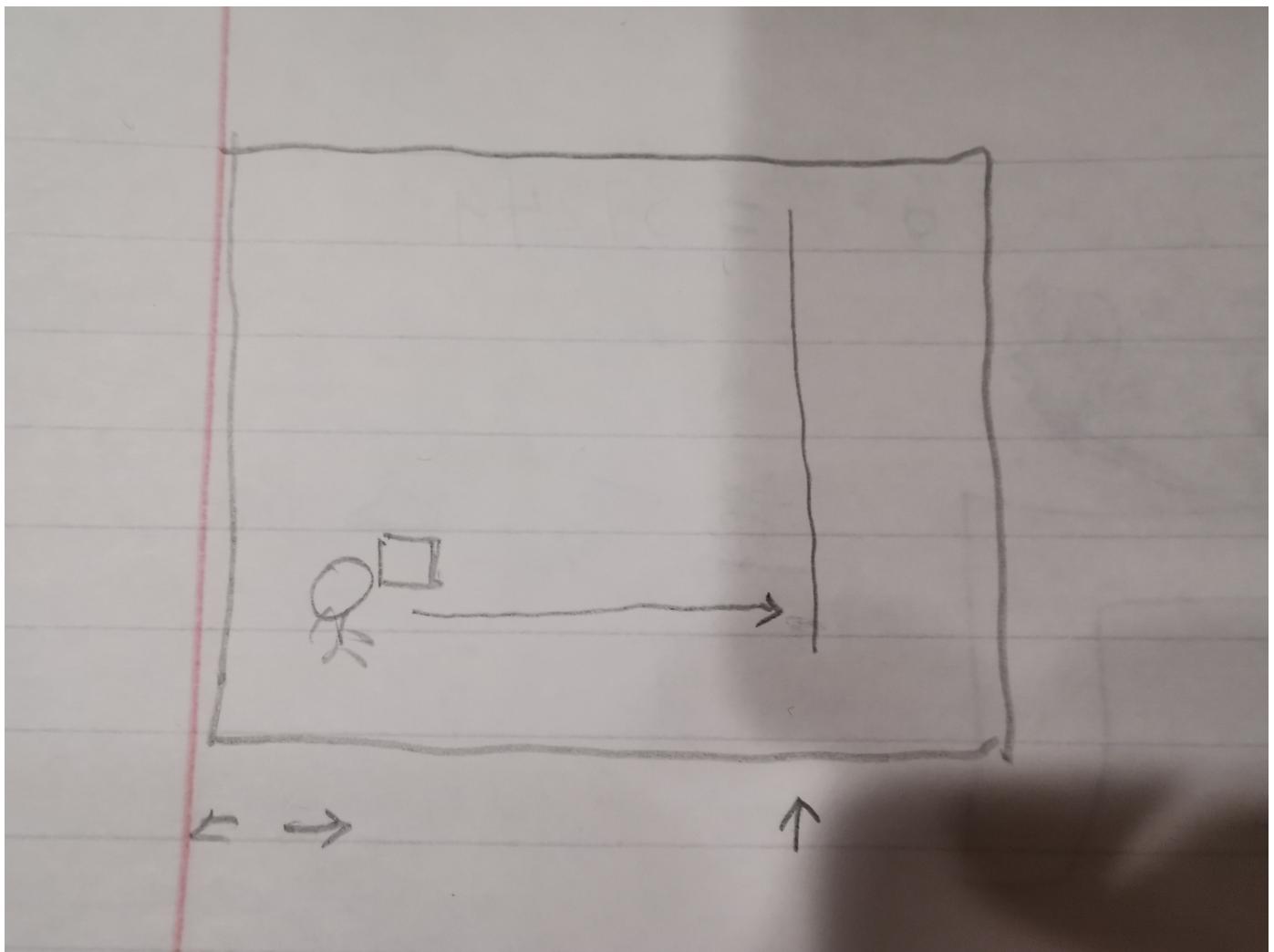
立方数 \times 素数: 54

这一晚上，因式分解和各种乘除的拼凑，确实烧脑。课后，我问小宝累不累，她说有点累，不过挺有意思的。:)

Scratch: 电动升旗不能保证万无一失

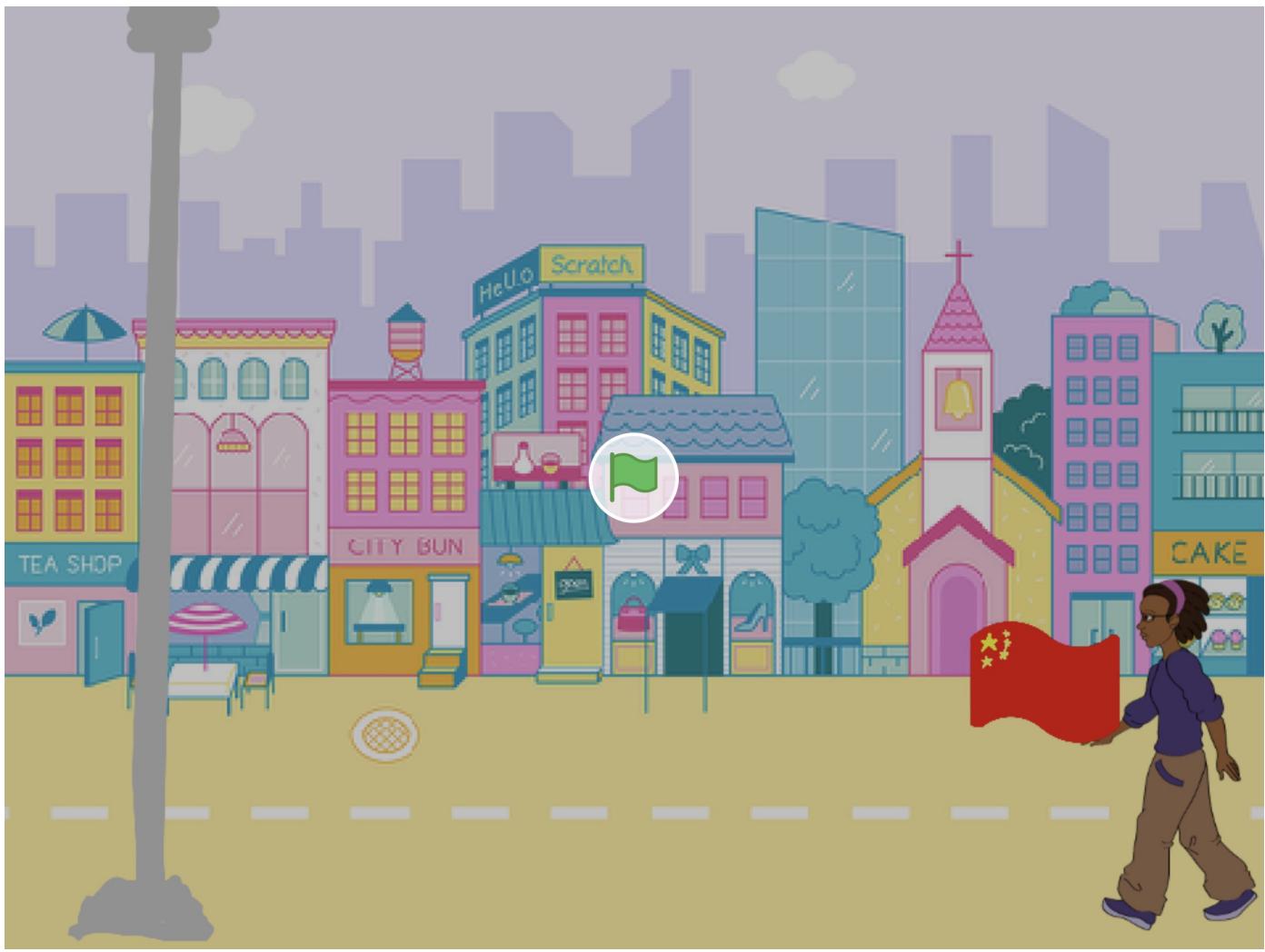
这是「天叔奇谈」的第 024 篇文章，今天周三（2019/10/09），主题是 scratch。上周三我们看了《我和我的祖国》，之前小宝看预告片的时候，就对《前夜》非常感兴趣，天天学着黄渤的语气说：电动升旗，不能保证万无一失！于是我们就打算做一个电动升旗的 app。上周看完电影太晚，就拖到了这一周。

为了做这个 app，她比我们正式上课的时间提前了半个小时。我们先是简单构思了一下 app：



升旗手的移动用左右箭头控制，红旗和升旗手的移动保持同步。本来我想找一首国歌放进来就好，可小宝非要逼我再次献声。录好的国歌 46s，所以我们简单算了一下升旗的高度，得出每秒钟要升高 5 步。

最终花了 80 分钟，作品如下：



项目已分享到：<https://scratch.mit.edu/projects/335250453>。

贤者时刻

礼起于何也？曰：人生而有欲，欲而不得，则不能无求。求而无度量分界，则不能不争；争则乱，乱则穷。先王恶其乱也，故制礼义以分之，以养人之欲，给人之求。使欲必不穷乎物，物必不屈于欲。两者相持而长，是礼之所起也。

故礼者养也。刍豢稻梁，五味调香，所以养口也；椒兰芬苾，所以养鼻也；雕琢刻镂，黼黻文章，所以养目也；钟鼓管磬，琴瑟竽笙，所以养耳也；疏房櫩貌，越席床第几筵，所以养体也。故礼者养也。

《荀子·礼论》

探索：为什么汽车不用推可以自己走？

这是「天叔奇谈」的第 025 篇文章，今天周四（2019/10/10），主题是探索与发现。小宝想探索的问题是：为什么汽车不用推，可以自己走？

备课素材

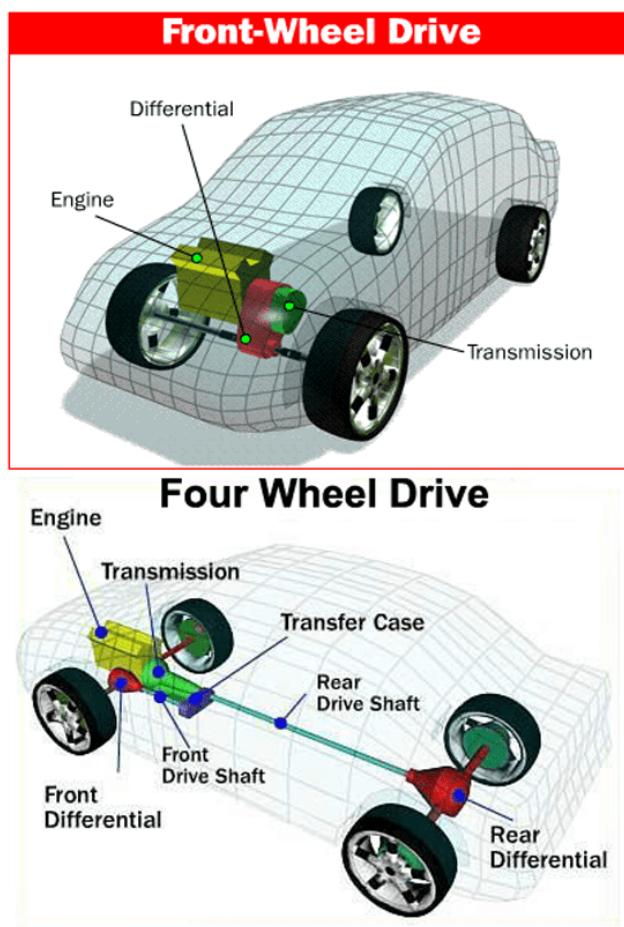
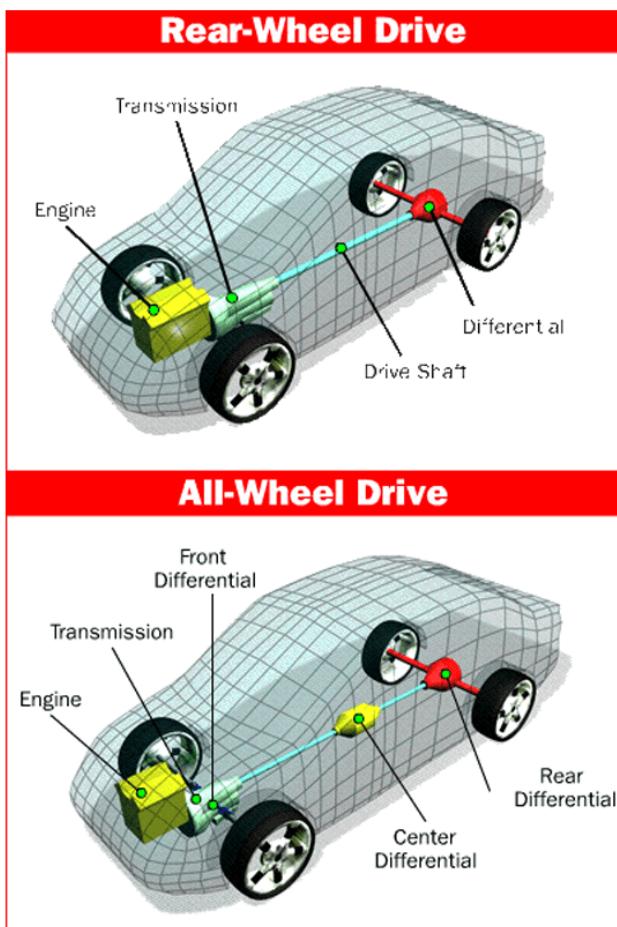
这是一个复杂的问题。首先需要了解内燃机如何做功？之后这个功如何传导给轮胎，如何加速减速，如何刹车等。

涉及的概念：速度的概念，角速度的概念，摩擦力，牛顿第三定律

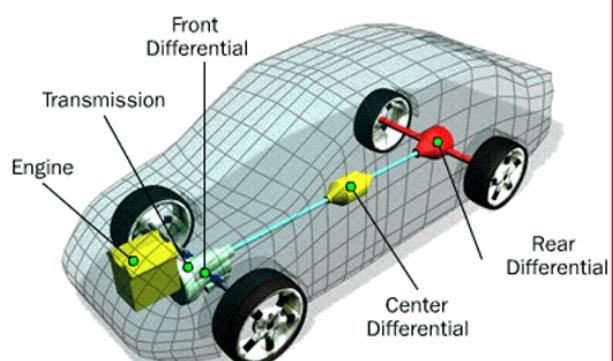
我找到了这些视频：

- 汽车发动机啥原理（李永乐）：<https://www.youtube.com/watch?v=sbzjqLLQINI>
- How an engine works：https://www.youtube.com/watch?v=zA_19bHxEYg
- 驱动方式：<https://www.youtube.com/watch?v=aQKVSKIStCs>
- 变速箱如何工作：https://www.youtube.com/watch?v=u_y1S8C0Hmc
- 电动车如何工作：<https://www.youtube.com/watch?v=3SAxXUIre28>
- 刹车系统如何工作：<https://www.youtube.com/watch?v=MAuVDB-G-HQ>
- 刹车如何工作（有历史演变）：https://www.youtube.com/watch?v=6H7nwIT_qNY
- 防抱死如何工作（李永乐）：<https://www.youtube.com/watch?v=ZY09nRQs6WQ>
- 霍尔效应（李永乐）：<https://www.youtube.com/watch?v=rax16bKNpKE>

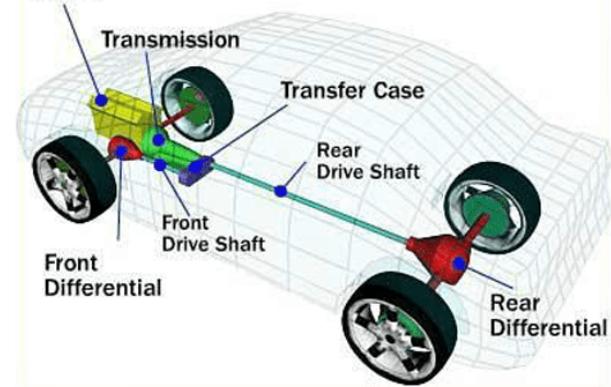
文章：<https://thereviewstories.com/awd-vs-fwd-vs-rwd-vs-4wd/>



All-Wheel Drive



Four Wheel Drive



课堂回顾

今天的课程更适合实操。我先让小宝骑了一下自行车，模拟了起步，加速，减速，刹车的环节，然后非常简单地介绍了履带，齿轮，轮胎的角速度。然后我们两个对掌，让她感受了一下牛三的作用力与反作用力，最后告诉她加速时带动车子前进的力是地面向前的摩擦力。

随后我在纸上简单对比了自行车传动装置和汽车的异同，介绍了 FWD, RWD 和 AWD，我们家恰好先后拥有的三辆车（现代，宝马，奔驰）分属三种驱动方式。小宝很自然把话题引向了引擎。我告诉她引擎的 engine 引申出来 engineer，早期的 engineer 是造引擎的，爸爸虽然是 engineer，但是是 software engineer，我们写的 engine 已经不是看得见摸得着的 engine 了。

我们先一起观看了 How an engine works。这个视频的动画不错，我时不时停下来给她讲解，尤其是发动机做功的四个阶段，以及四缸先后运作的必要。这样讲解下来，再看李永乐老师的汽车发动机啥原理，她就能领悟更多。

随后我们快速回顾了一下汽车的驱动方式——加深她的印象。最后，时间关系，我们跳过了变速箱和电动车的工作原理，简单学习了一下刹车系统如何工作，有个视频有刹车技术的演变，非常不错。

在课程结束前，我带着小宝进入车库，给她介绍汽车的轮胎，底盘和排气管，然后又打开前盖，抱起她给她看发动机（虽然也看不出所以然）。

贤者时刻

绵蛮黄鸟，止于丘阿。道之云远，我劳如何。饮之食之，教之诲之。命彼后车，谓之载之。

绵蛮黄鸟，止于丘隅。岂敢惮行，畏不能趋。饮之食之，教之诲之。命彼后车，谓之载之。

绵蛮黄鸟，止于丘侧。岂敢惮行，畏不能极。饮之食之，教之诲之。命彼后车，谓之载之。

《诗经·小雅·都人士之什·绵蛮》

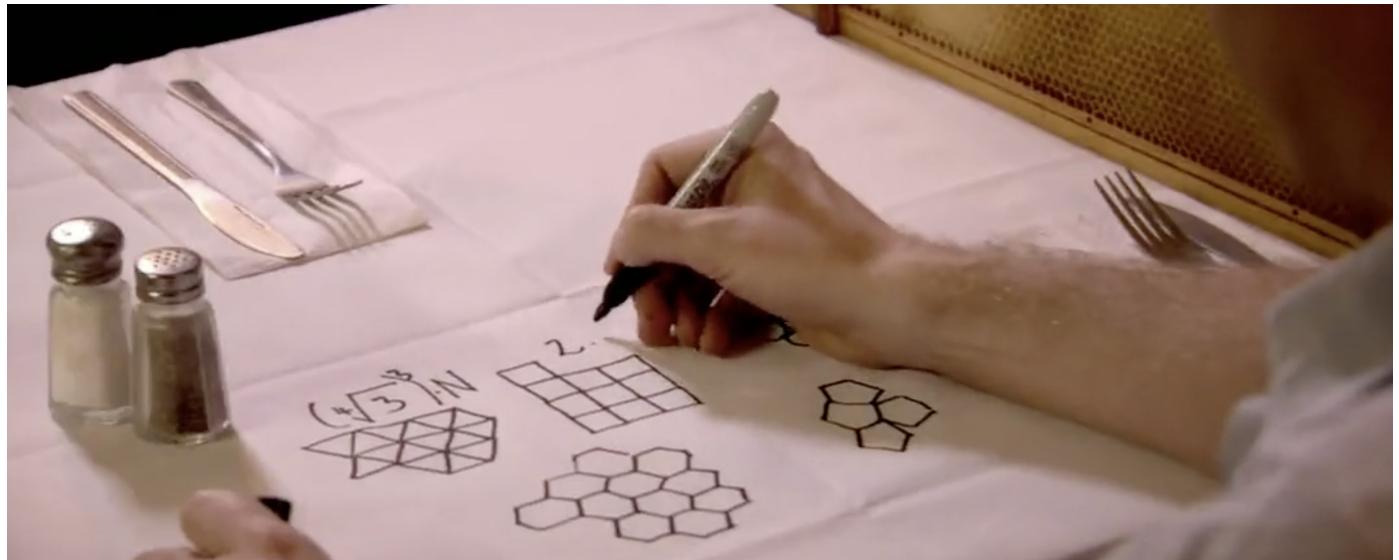
纪录片：终极密码 - 形状

这是「天叔奇谈」的第 026 篇文章，今天周五（2019/10/11），主题是纪录片。今天的纪录片是「终极密码」第二集，形状。

备课素材

终极密码：

<https://www.bilibili.com/video/av4169474/?p=2>



课堂回顾

上次我们观看了「终极密码」第一集。今天看第二集——形状。这一集非常棒，把自然界的简单和复杂表现得淋漓尽致。蜜蜂蜂巢的正六边形结构，和熔岩断裂形成的结构，以及若干肥皂泡围出的形状惊人一致。说到肥皂泡，主持人请来了 Tom Noddy，著名的肥皂泡表演艺术家，演示了用若干个相接的肥皂泡中间围出一个完美的正六边形。我后来专门 youtube 找了一下 Tom Noddy 的表演，看到了这个视频：

<https://www.youtube.com/watch?v=pDhrylTm7hc>

真是叹为观止！这是真正的，来自自然界的魔术啊。可惜这个视频的主要辅助道具是香烟，我考虑再三还是没给小宝看。

这一集对我来说最震撼的地方是皮克斯的洛伦卡朋特在为波音做演示动画时，头疼于如何渲染复杂的山地环境——按照 80 年代的技术，要花上 100 年才能渲染出来。他偶然发现了曼德勃罗的分形几何，觉得可以将其应用在创建虚拟世界中。于是他用三角形——不断变小的三角形来逼近复杂的山脉地形，最终 500 万个三角形「完美」地呈现了逼真的山脉，并且由于分形几何的特点，镜头从近到远，从远到近，都非常自然，最关键的是，每帧画面只需要 15 分钟渲染。这个短片中使用的技术最终重塑了整个动画业，游戏业和好莱坞。我看的时候激动地抓住小宝晃，看，这又是微积分的思想——把复杂的问题（山脉的渲染）变成无数个简单问题（三角形的渲染）的叠加。

影片看完后，我自己意犹未尽，翻出来曼德勃罗的 Ted Talk，看了一下：

https://www.ted.com/talks/benoit_mandelbrot_fractals_the_art_of_roughness

这个演讲也非常棒，围绕着 order of the roughness。我印象最深的是：Something so complicated as a cloud, so unstable, so varying, should have a simple rule behind it. 这句话拿高中政治的术语来分析，是高度矛盾统一，荒谬地非常有道理。

贤者时刻

道冲，而用之或不盈。渊兮似万物之宗。挫其锐，解其纷，和其光，同其尘。湛兮似或存。吾不知谁之子，象帝之先。

道德经

几何：尺规作图加减乘除

这是「天叔奇谈」的第 027 篇文章，今天周六（2019/10/12），主题是几何。上周没有上几何课，本来打算要教小宝用尺规作图来表述数轴上的数字和加减乘除的运算，只得挪到今天进行。

备课素材

尺规作图的方法，李永乐老师讲过一课。可以参考：

<https://www.youtube.com/watch?v=l2pf3gjz5QU>

不过他的方法不适合小宝的年龄，所以我用的方式略有不同。

课堂回顾

我们先尝试着从数字 1 开始，把数轴上的任意整数用尺规作图表述出来。一开始小宝认为这不可能，我就让她画出来 2。她很快想到以 1 为半径画圆，然后圆的直径就是 2。有了 2, 3 就可以出来，之后就可以一路无穷迭代下去，把所有整数表述出来。老子说：道生一，一生二，二生三，三生万物，就是这个道理。

随后我们用尺规表述加法。我给她一个 4，一个 3，让她用尺规表述加法。她一下子就做出来，并且还找到了减法的做法。然后还没等我问她，她就问我：那能不能尺规做乘法除法？因为小宝还没有比较系统地学过三角形相似和比例关系，我大概给她介绍了一下这里的知识，然后问她如果我们有四个数字：1, 3, 4, 12，我们想构造一个等式，让两边的两个数字相除的结果相等，该怎么弄？小宝找到了一组关系： $4 \div 1 = 12 \div 3$ 。于是我们通过做平行线（上次讲过基本的尺规作图）做出了乘法。

我问小宝除法怎么做？她第一反应是 $4 \div 3$ 不能除开，所以没法做除法。我问她除法和乘法有什么关系？她说除法是乘法的逆运算。我让她先不管能不能除开，我们换两个数字， $8 \div 4$ 能不能表示成乘法，经过我提示，她能够理解

$$8 \div 4 = 8 \times \frac{1}{4}$$

但她很疑惑 $1/4$ 怎么用尺规作图做出来。于是我又让他在四个数字中找等式：4, 1, 1, $1/4$ 。她找到了

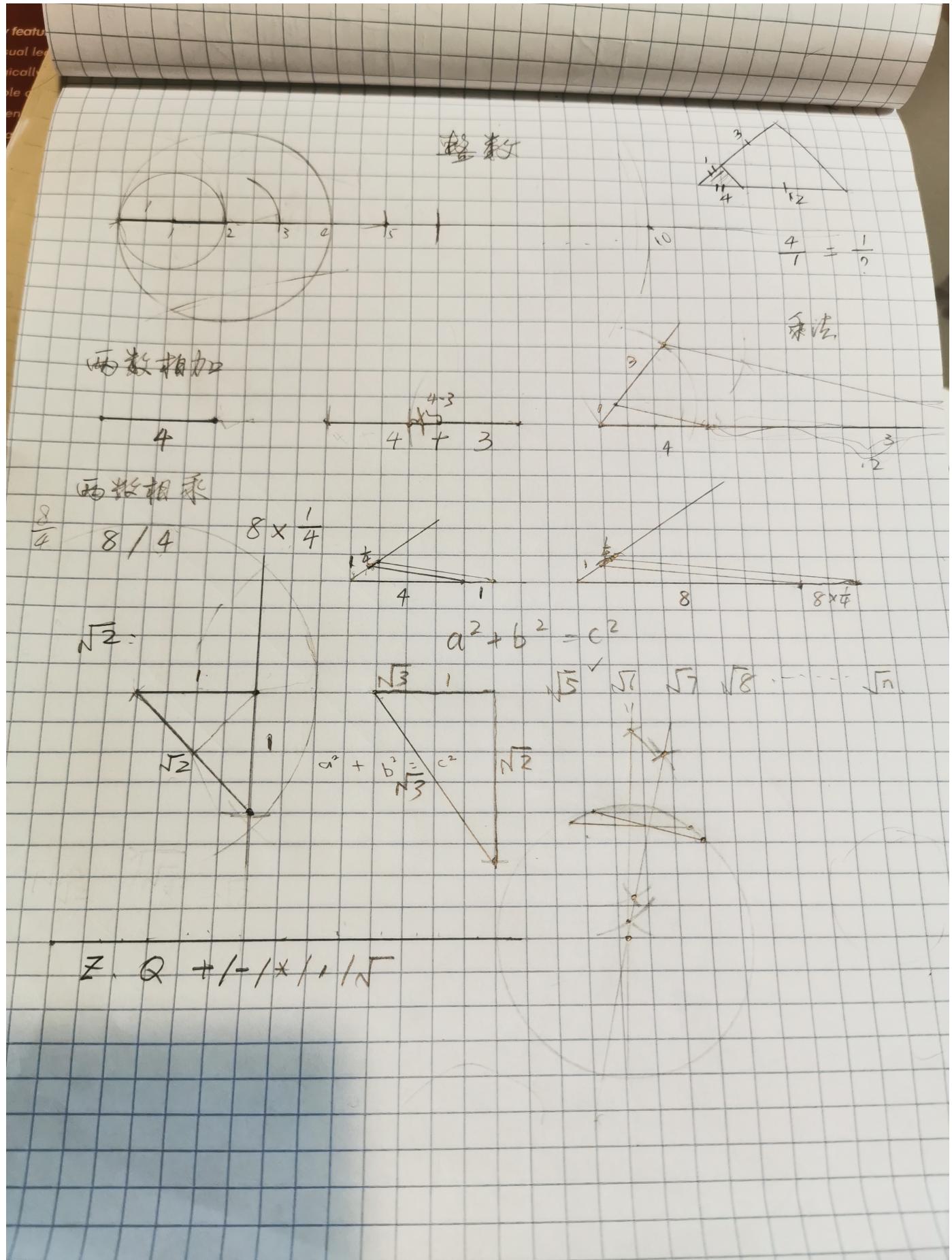
$$4 \div 1 = 1 \div \frac{1}{4}$$

我们用尺规画出来 $1/4$ ，之后又用乘法的方式画出 $8 \div 4$ 。

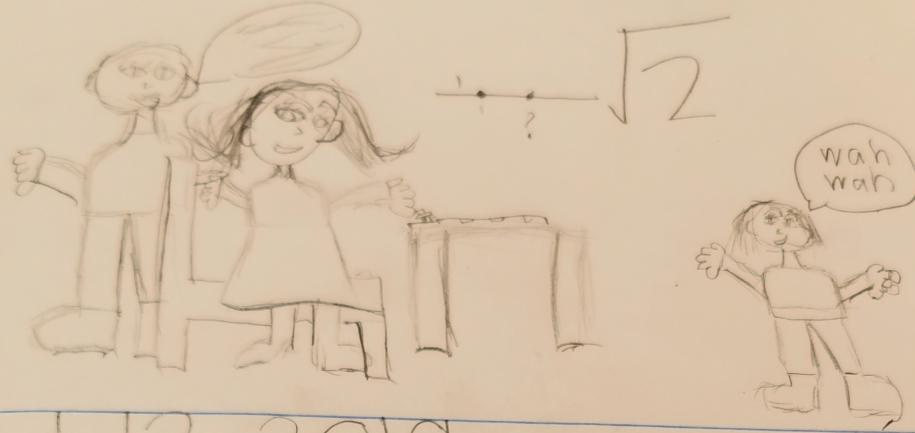
这样，所有的有理数就可以用尺规表示了。我又问她能不能表示 $\sqrt{2}$ 。她觉得不能。我问她 $\sqrt{2}$ 的平方是多少，她说 2，我提示她用勾股定理（上堂课讲的），想想怎么样构造一个直角三角形，让斜边是 $\sqrt{2}$ ，她想到了腰为 1 的直角等腰三角形，于是我随便给定一个线段为 1，让她做 $\sqrt{2}$ 。她用作中垂线的方式（先以一端为圆心做出直径，然后做过圆心的中垂线），做出了一个直角，且让两腰相等，连出来的斜边就是 $\sqrt{2}$ 。我紧接着问她 $\sqrt{3}$ ，她想了一下说不知道怎么做。我提示她，现在你已经有 $\sqrt{2}$ ，用勾股定理怎么凑出来 $\sqrt{3}$? 她想到了用 1 和 $\sqrt{2}$ ，于是我们顺势在口头上完成了 $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$ 等的尺规作图。令人惊喜的是，每个数字她都找到了不止一种方法用勾股定理凑。

于是所有有理数和无理数的开平方我们都可以尺规做出来了。这是小宝疑惑：爸爸，我们上的不是几何课么？为什么都在讲数字？我说：你看，数学多奇妙，我们用几何的方法表述出了代数——一把直尺，一个圆规我们就可以做出实数轴上有理数和无理数的平方根。小宝点点头。

最后，我决定考考小宝尺规作图的能力，就随便用圆规画了条弧给她，让她在不知道圆心和半径的情况下画出完整的圆。她想了一会，表示不会。我问她圆心和圆上的圆弧有什么关系？她答任意一点到圆心距离都是相等的。我引导她在圆弧上任意取两点，做垂直平分线，做好后，我问她圆心会在这条线上么？她想了想，说肯定是，因为这条线到圆弧上这两点的距离都相等。但她还是不知道如何找到圆心，我引导她再做一条垂直平分线，她才明白过来，两者的焦点就是圆心。最终，把圆画出来了。



今天白天在车里聊天时，不知怎么就聊起《毛毛头日记》（我前同事孩子的公众号），我和老婆就鼓励小宝让她每天上完课之后写个简单的日记，记录一下学到了什么。我说正好爸爸每天给你上完课也要记录一下，写成公众号，不如我们就一起写，这样有什么不清楚的还可以问我。小宝同意了。上完课后，她写下了这个日记：



Oct. 12 2019

Learning Geometry

Today my daddy taught me geometry, ruler and compass construction. I learned to do

numbers, oh and square root

booty(?) . I felt happy!!

scratch：迷宫 - 基础篇

这是「天叔奇谈」的第 028 篇文章，今天周日（2019/10/13），随机主题（掷色子），小宝掷出了 3，于是我们进行 scratch，题目是：迷宫。

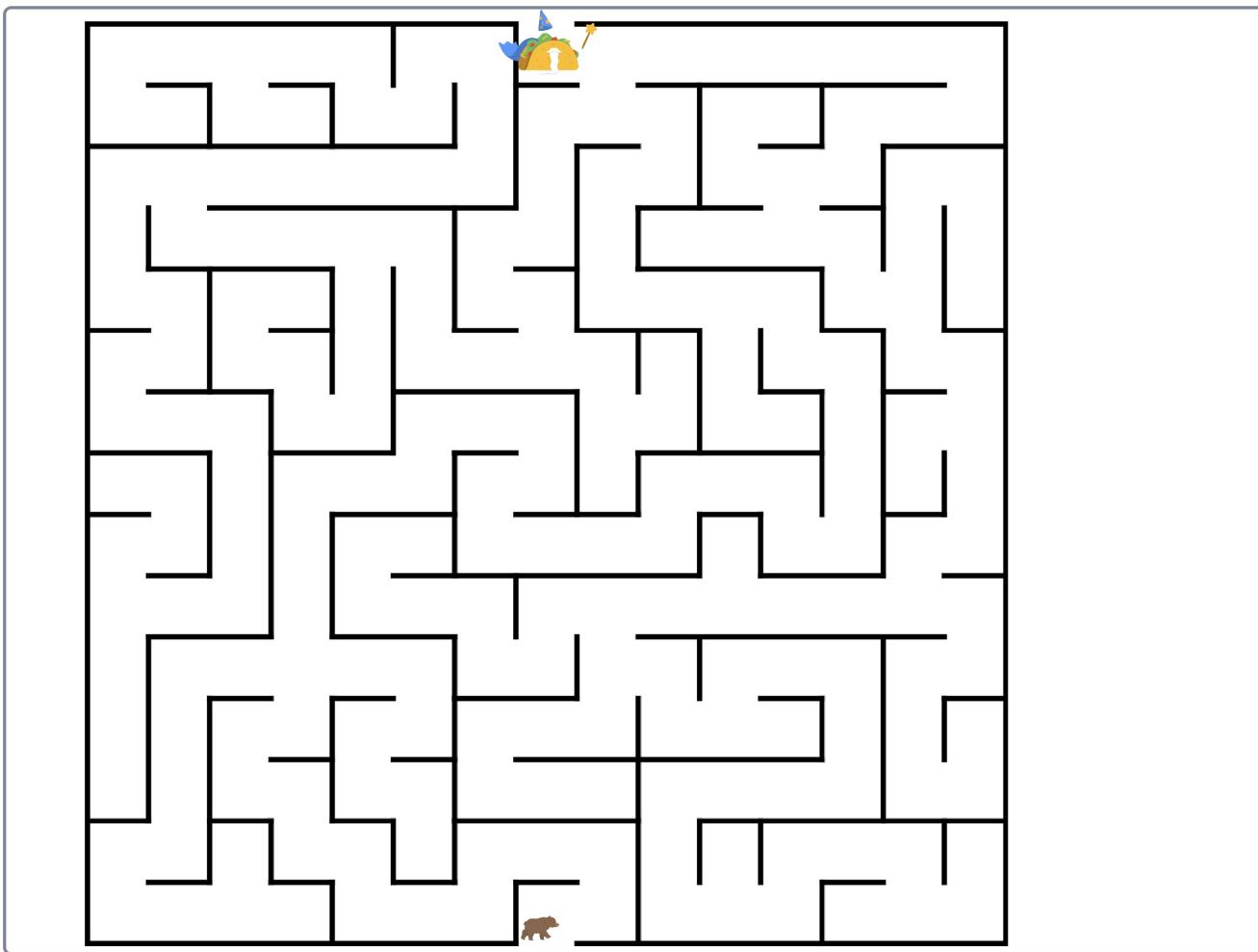
课堂回顾

迷宫类的游戏之前我们做过，难点主要是迷宫本身是一个 sprite。这样的话，我们可以通过两个 sprite 之间的碰撞，来限制主人公的运动。运动的控制可以通过 when XXX key pressed 事件来完成。上一次做迷宫游戏时小宝选择了一只小老鼠作为主人公，这次她选了一头「饥饿的熊」。

这次我们有两个改进：

1. 用 mazegenerator.net 生成迷宫。注意，生成 svg 的格式，png 有白色背景。
2. 使用 sensing 里的 touching color，而非 touching sprite。

花了大概 30 分钟，小宝的作品如下：



项目地址:

[https://scratch.mit.edu/projects/336080292/。](https://scratch.mit.edu/projects/336080292/)

历史故事：田氏代齐

这是「天叔奇谈」的第 029 篇文章，今天周一（2019/10/14），主题是历史故事。今天是哥伦布日，晚饭的时候我跟小宝简单讲了一下因为对东方香料，丝绸和瓷器的痴迷，而陆路贸易被奥斯曼土耳其帝国把持，西方国家，主要是葡萄牙和西班牙不得不拓展海路，向西寻找东方世界，结果找到美洲新大陆的故事。晚上的上课时间，我们继续讲《资治通鉴》中田氏代齐的故事。

备课素材

《资治通鉴》中的故事全文很短，前后就十几二十字。《史记·田敬仲完世家》中的故事更完整也更绘声绘色：

1. <https://tongjian.qiaopang.com/001.html#76>
2. <https://tongjian.qiaopang.com/001.html#93>
3. <https://shiji.qiaopang.com/046.html>
4. <https://zh.wikipedia.org/wiki/%E7%94%B0%E6%B0%8F%E4%BB%A3%E9%BD%90>

成语或俗语：

- 田氏代齐
- 凤皇于蜚，和鸣锵锵
- 以大斗出贷，以小斗收

课堂回顾

今天我们先是回顾了周公旦定下的周礼制度，周天子，诸侯国和大夫之家的关系，然后回顾了齐国的起源（武王伐纣后分封姜尚）在齐。

田氏代齐源于陈国逃亡于齐国的公子完。春秋时陈田（Tan）不分，所以陈完也被称作田完。到田恒田成子时，田氏收买人心，大斗出，小斗入。这里我特意给小宝介绍了籴（di）和粜（tiao），这两个体现了中文的优美。后来田氏民心所向，又通过一些手段驱逐了栾氏和高氏，彻底把持了齐

国政坛。最终，被放逐在海上的齐康公卒——「齐康公薨，无子，田氏遂并齐而有之」，田氏彻底占有齐国。

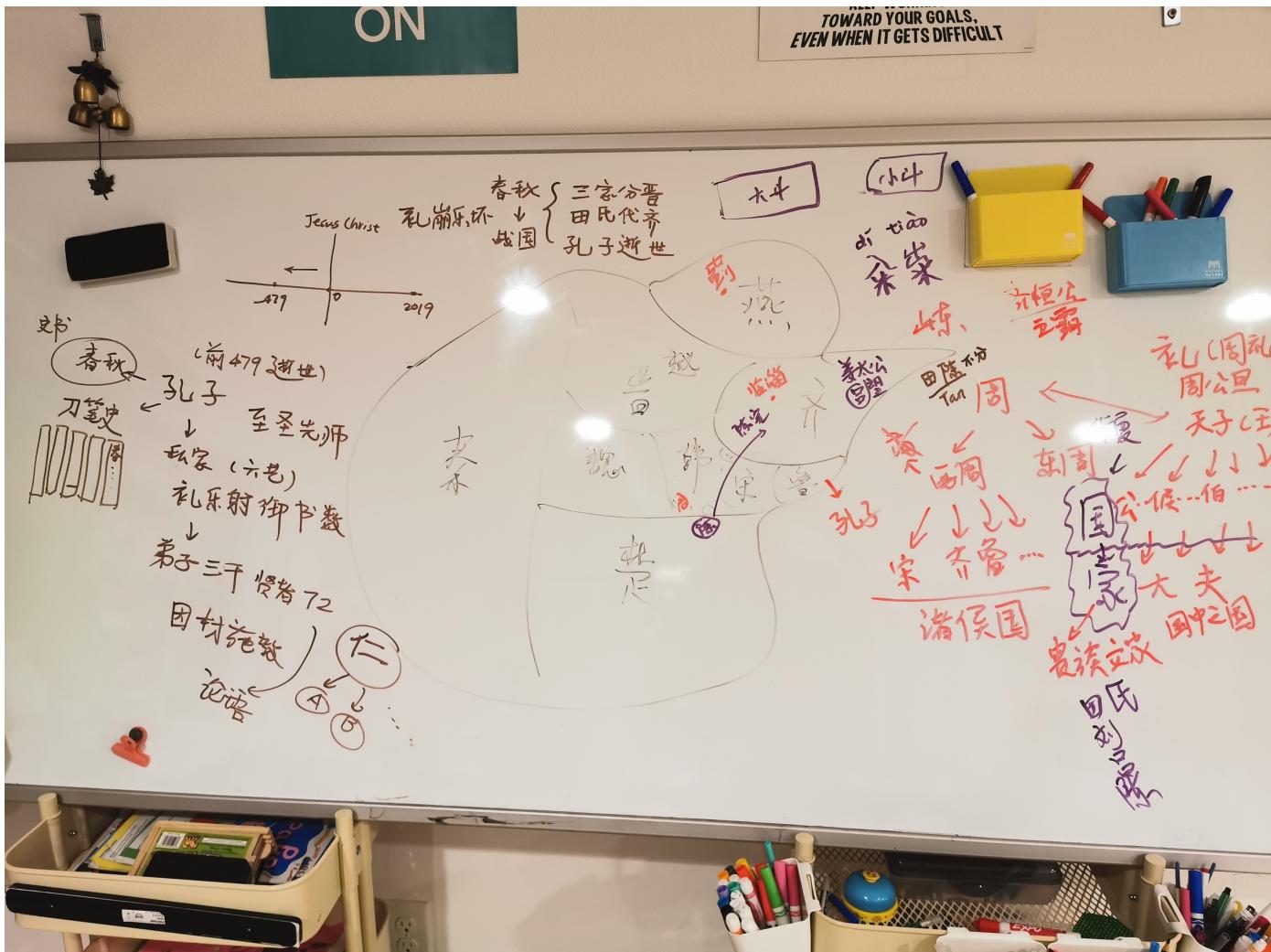
之前讲过了三家分晋，今天讲了田氏代齐，这两件事情加上孔子逝世，是春秋转向战国的标志。之前没有系统地讲过孔子，今天也一并讲完。孔子作为至圣先师，万世师表，除了是伟大的思想家，教育家，政治家，还是伟大的历史学家。他编撰的《春秋》是中国历史难得的直笔，比较真实反映了那二百多年发生的事情，非常珍贵（毕竟过去了两千多年）。孟子赞：孔子成《春秋》而乱臣贼子惧。讲到《春秋》作为史书的伟大，我给小宝提了一嘴齐太史的故事：

大史书曰：“崔杼弑其君。”崔子杀之。其弟嗣书而死者，二人。其弟又书，乃舍之。南史氏闻大史尽死，执简以往。闻既书矣，乃还。

《左传·襄公二十五年》

齐国大臣崔杼弑君，齐太史秉笔直书：“崔杼弑其君。”崔杼大怒，杀了齐太史。太史的两个弟弟也如实记载，都被崔杼杀了。太史的第三个弟弟又继续写，崔杼无可奈何，只好放了他。与此同时，南史氏以为太史一家全部殉职，拿着简赶过来准备接替史官的职责。他听说这段历史已经被正确书写，就回去了。

可见那时刀笔吏的良心！



数学：揭秘数字 II

这是「天叔奇谈」的第 030 篇文章，今天周二（2019/10/15），主题是数学。今天我们继续研究 1-100 间的数字的奥妙。

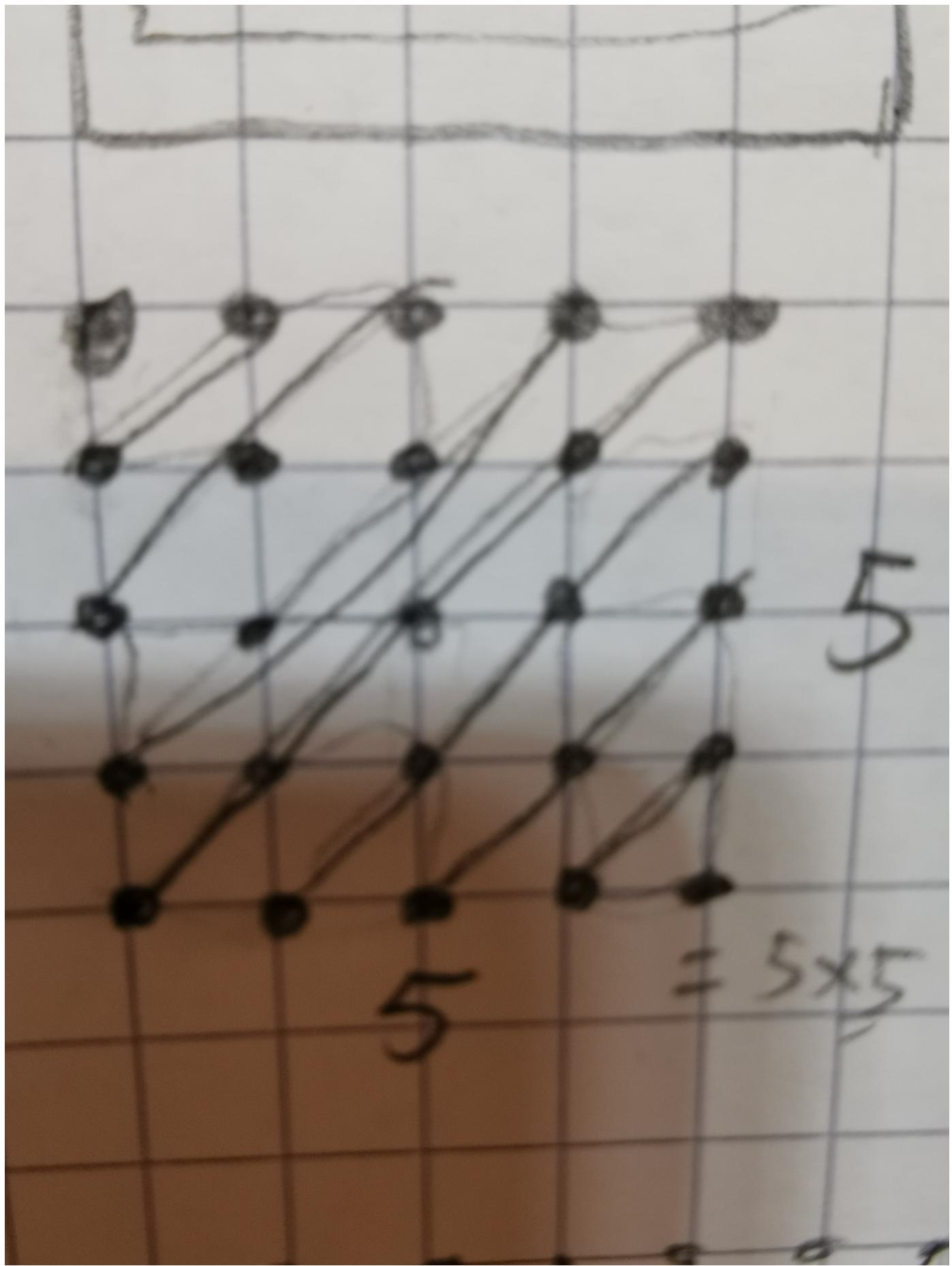
研究内容

我们主要的目的是探索数字 1-100 的特征：

- 求和: $1 + 2 + 3 + \dots + 100$
- 偶数求和: $2 + 4 + 6 + \dots + 100$
- 奇数求和: $1 + 3 + 5 + \dots + 99$
- 求和的变化形式
- 杨辉三角形

课堂回顾

我们先从 5×5 的点阵开始。

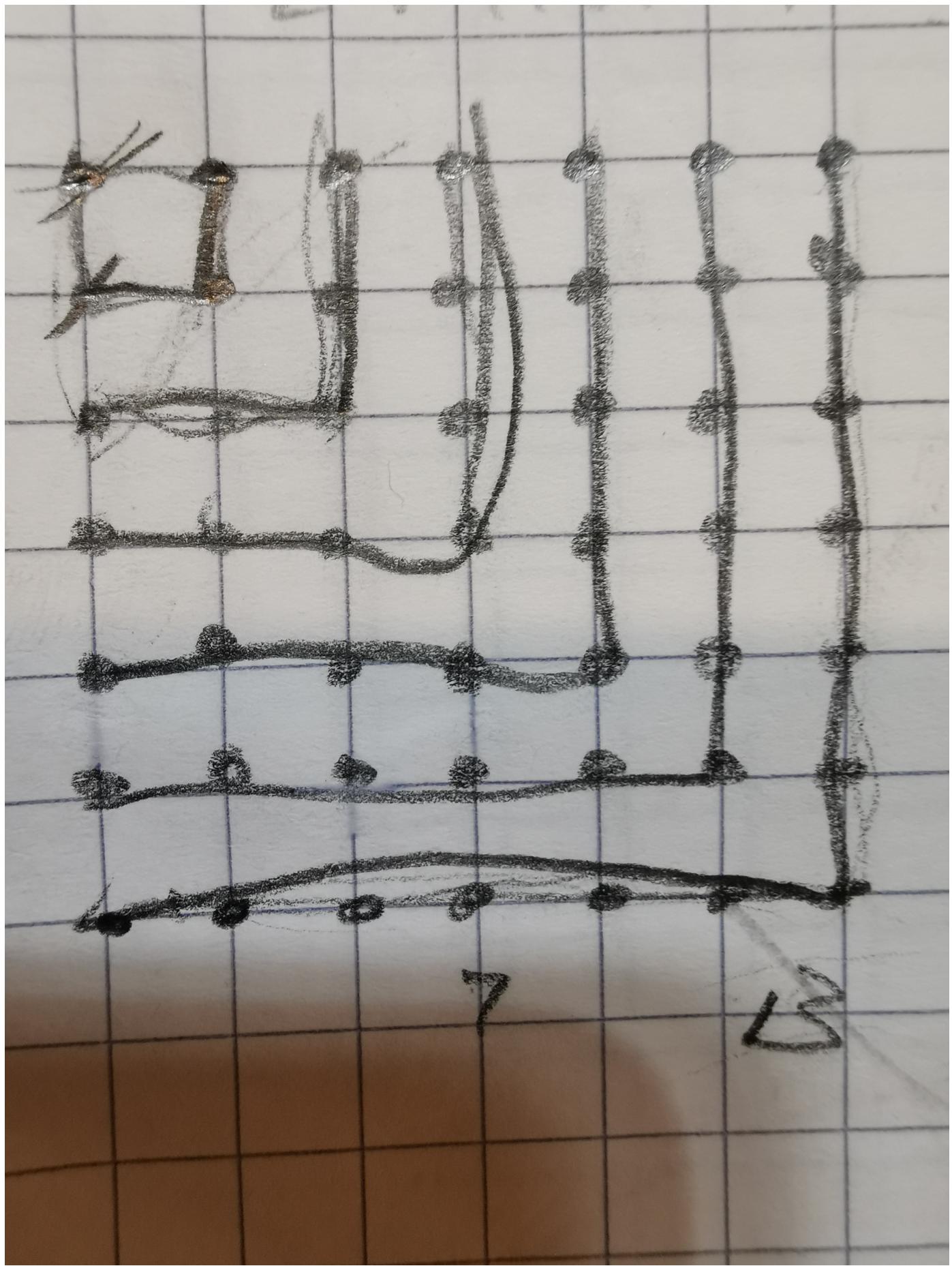


我让小宝看看能不能找到里面 $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$ 的规律。小宝找了很久没有找到，我提示她先找找看 5。当她找到对角线时，我把正方形的一半遮住，问她能不能看到 4, 3, 2, 1。小宝很快发现了规律，很兴奋地说 $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 5^2 = 25$ 。然后，我问她， $1 + 2 + \dots + 12 + 11 + \dots + 1 = ?$ ，她想了一下，得到了 12^2 ，因为我教过她平方数的速算，所以她得到了 144。

接下来，我们研究 $1 + 2 + 3 + \dots + 11 + 12$ 是多少？她脱口而出： $12^2 \div 2 + 12$ 。我让她再想想，12 是先加上去再除以 2 还是后加上去除以 2，她说这是前者。之后我把著名的 $1 + 2 + \dots + 99 + 100$ 抛给她，她套取公式 $(100^2 + 100) \div 2$ ，得到了和高斯一样的 5050。我顺便把数学小王子高斯的故事和高斯的算法跟她介绍了一下。

之后 $2 + 4 + 6 + \dots + 12 = ?$ ，她没有想到解法（提取公因子的方法她还不知道），我提示她试试每一项除以 2。她试了几项后，反应过来，可以用 $(6^2 + 6) \div 2 \times 2$ 得到结果。我又跟她试验了 $2 + 4 + \dots + 98 + 100$ ，她很快算出是 2550。

前 N 个自然数的和 $1 + 3 + \dots + 11 + 13$ 很有意思，我们依旧用点阵来找规律，我画了 7×7 的点阵，让她找里面是否有 $1 + 3 + \dots + 11 + 13$ 的规律。她看不出来。我圈掉左上角第一个点，让她看 1×1 的正方形，再看 2×2 的正方形，以此类推。她试着用线连了一下，开心地大喊我找到了！



于是我们得到 $1 + 3 + \dots + 11 + 13 = 7^2 = 49$ 。我又让他算了几组之后，跟她总结了一下我们发现的三条规律。

之后，我们回顾了一下之前饭桌上讲过的，但没有系统总结过的，神奇的数字（这些 mathjax 的式子估计公众号肯定会显示得乱七八糟，我就只好截个图了）— 数学的美感在这些简单的数字中展示得淋漓尽致：

平方数：

$$\begin{array}{ll} 1 = & 1 = 1^2 \\ 1 + 3 = & 4 = 2^2 \\ 1 + 3 + 5 = & 9 = 3^2 \\ 1 + 3 + 5 + 7 = & 16 = 4^2 \\ 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = & 25 = 5^2 \\ 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = & 36 = 6^2 \end{array}$$

立方数：

$$\begin{array}{ll} 1 = & 1 = 1^3 \\ 3 + 5 = & 8 = 2^3 \\ 7 + 9 + 11 = & 27 = 3^3 \\ 13 + 15 + 17 + 19 = & 64 = 4^3 \\ 21 + 23 + 25 + 27 + 29 = & 125 = 5^3 \end{array}$$

立方数相加（三角形数）：

$$\begin{array}{ll} 1^3 = & 1 = 1^2 = T_1^2 = 1^2 \\ 1^3 + 2^3 = & 9 = 3^2 = T_2^2 = (1+2)^2 \\ 1^3 + 2^3 + 3^3 = & 36 = 6^2 = T_3^2 = (1+2+3)^2 \\ 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = & 100 = 10^2 = T_4^2 = (1+2+3+4)^2 \\ 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = & 225 = 15^2 = T_5^2 = (1+2+3+4+5)^2 \end{array}$$

并且，立方数相加，等于每个数字之和的平方！

在结束课程之前，我又给她出了两道题：

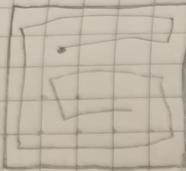
1. $7 + 8 + \dots + 14 + 15$
2. $11 + 13 + \dots + 19 + 21$

我让她对着我们总结出来的式子凑，最终两个都凑出来了。

持续烧脑进行了四十多分钟，杨辉三角形估计没有功夫讲了，我看小宝意犹未尽，就干脆让她计算 9×9 乘法表里的所有数字：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Sum
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	
										?

这是今天课程的全部内容：



$$Y = 13 \\ N = 12$$

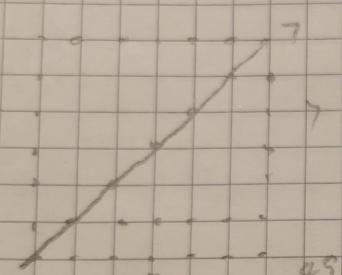
13 12
Y N Y N Y N Y N Y N
N Y N Y ... 10 Y N
12 24



$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 25$$

$$1 + 2 + \dots + 11 + \frac{12}{2} + 11 + \dots + 1 = 144 = 12^2$$

$$5 = 5 \times 5$$



$$1 + 2 + \dots + 12 = ?$$

$$\frac{12^2 + 12}{2} = 78$$

$$1 + 2 + \dots + 100 = ?$$

$$\frac{100^2 + 100}{2} = 5050$$

$$2 + 4 + 6 + \dots + 12 = ?$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + 6 = \frac{6^2 + 6}{2} = 21 - 6 = 15$$

$$2 + 4 + 6 + \dots + 100 = ?$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + 50 = ?$$

$$\frac{50^2 + 50}{2} = 2550$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + ? =$$

$$2 + 4 + 6 + \dots + ? =$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = ?$$

$$1 + 3 + \dots + 41 = 21^2 = 441$$

$$1 + 3 + \dots + 41 + 43 = 484$$

$$\textcircled{1} \quad 1 + 2 + \dots + n = \frac{n^2 + n}{2}$$

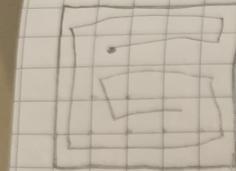
$$\textcircled{2} \quad 2 + 4 + \dots + 2n = n^2 + n$$

$$\textcircled{3} \quad 1 + 3 + \dots + (2n-1) = n^2$$

$$(1 + \dots + 15) 7 + 8 + \dots + 15 = ? \quad \frac{15^2 + 15}{2} = 120 - 21 = 99$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + 6 = \frac{6^2 + 6}{2}$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + \dots + 21 = ? \quad 11^2 = 121 - 5^2 = 96$$



$$Y = 13 \\ N = 12$$

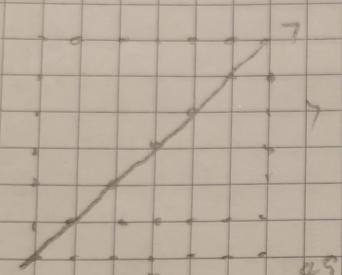
13 12
Y N Y N Y N Y N Y N
N Y N Y ... 10 Y N
12 24



$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 25$$

$$1 + 2 + \dots + 11 + \frac{12}{2} + 11 + \dots + 1 = 144 = 12^2$$

$$5 = 5 \times 5$$



$$1 + 2 + \dots + 12 = ?$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + 6 = \frac{6^2 + 6}{2} = 21 - 6 = 15$$

$$2 + 4 + 6 + \dots + 100 = ?$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + 50 = ?$$

$$\frac{50^2 + 50}{2} = 2550$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + ? =$$

$$2 + 4 + 6 + \dots + ? =$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = ?$$

$$1 + 3 + \dots + 41 = 21^2 = 441$$

$$1 + 3 + \dots + 41 + 43 = 484$$

$$\textcircled{1} \quad 1 + 2 + \dots + n = \frac{n^2 + n}{2}$$

$$\textcircled{2} \quad 2 + 4 + \dots + 2n = n^2 + n$$

$$\textcircled{3} \quad 1 + 3 + \dots + (2n-1) = n^2$$

$$(1 + \dots + 15) 7 + 8 + \dots + 15 = ? \quad \frac{15^2 + 15}{2} = 120 - 21 = 99$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + 6 = \frac{6^2 + 6}{2}$$

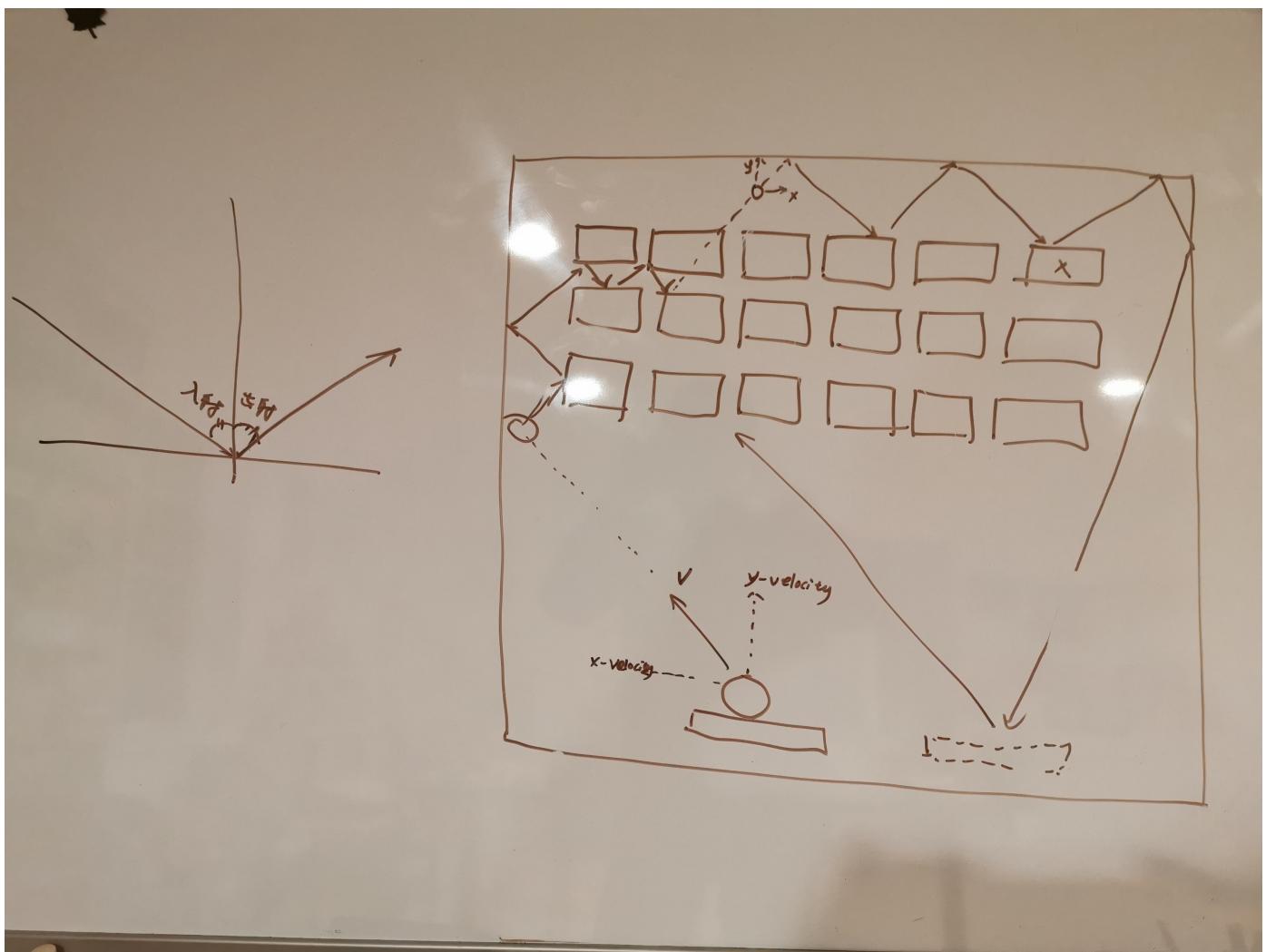
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + \dots + 21 = ? \quad 11^2 = 121 - 5^2 = 96$$

scratch：敲砖块 I

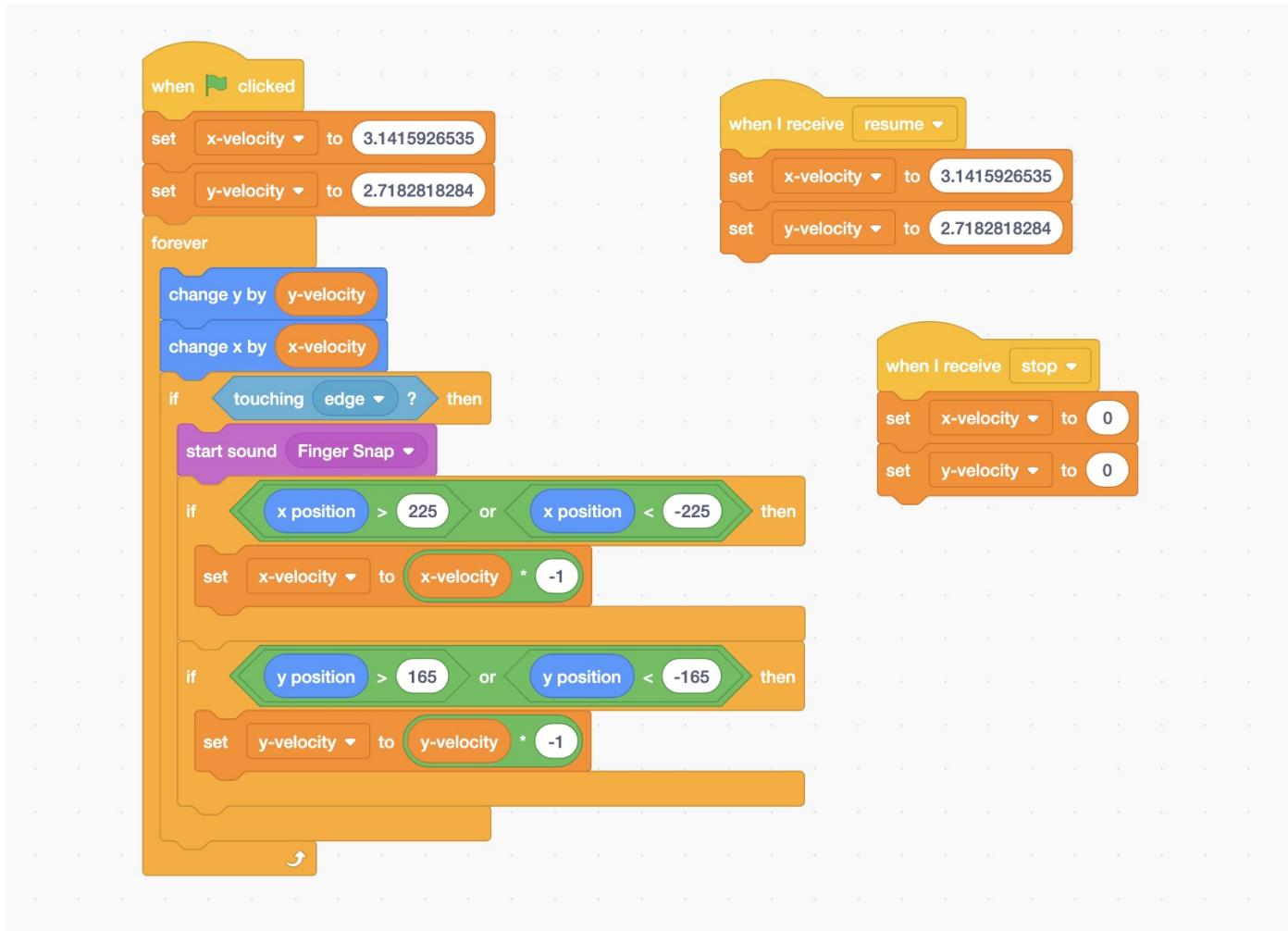
这是「天叔奇谈」的第 031 篇文章，今天周三（2019/10/16），主题 scratch，题目是：敲砖块。这一期我们的目标是搞清楚弹性碰撞是如何处理的。

课堂回顾

敲砖块是个玩起来很简单的游戏，大家在红白机上应该都玩过。游戏虽然简单，里面蕴含着物理和数学的知识。比如反弹——入射角等于反射角。而小球的速度 v ，按照初中物理的知识，可以分解成水平方向的 x -velocity 和垂直方向的 y -velocity，水平碰撞时 x -velocity 翻转， y -velocity 不变，竖直碰撞时， y -velocity 翻转， x -velocity 不变。我把这些基本的概念跟小宝尽可能通俗地讲解了一下。



由于小宝还没有三角函数 sin/cos 的概念，所以我们就直接设置 x-velocity 和 y-velocity，而不是通过 v 和运动的方向（角度）生成。小宝把 x-velocity 设成了 π ，y-velocity 设成了 e。核心代码如下：



整个开发的过程比较顺畅，她卡住时我再给她讲解。花了大概 30 分钟，小宝的作品如下：

项目地址：

[https://scratch.mit.edu/projects/336986062/。](https://scratch.mit.edu/projects/336986062/)

Oct 16 by Lindsey

Learning Scratch I love to learn Scratch especially with my dad, because I love my dad. We made a game called Pin ball. There are two variables named X-velocity and Y-velocity It was a fun game. It was so fun! THE END!

探索：为什么钢琴能发出好听的声音？

这是「天叔奇谈」的第 032 篇文章，今天周四（2019/10/17），主题是探索与发现。小宝想探索的问题是：为什么钢琴能发出悦耳动听的声音？音乐的原理是什么？

我觉得小宝简直就是李永乐老师口中的「小朋友」。这么刁钻的问题，我白活了 37 年也没想过。虽然我知道声音是振动发出的，但为什么钢琴这些乐器发出的声音就悦耳动听（当然同样是乐器，我拉小提琴的声音可以给人吊丧），我从来没研究过。小宝这个问题难住了我，还好，这个世界有李永乐老师——现在小宝问我的一些问题我干脆就 google “xxx 李永乐”，别说，好多问题的答案就都直接找到了。上一期讲发动机原理，我们看了两个李永乐老师的视频，这次我又找到一个。

备课素材

视频：<https://www.youtube.com/watch?v=v5QlocAclXY>

文章：钢琴的触键方式是如何影响弹出来的音色的？<https://zhuanlan.zhihu.com/p/19964066>

课堂回顾

今天的课程拉着精通音律的老婆一起上，这样小宝的随堂提问，可以有人顶。我先把钢琴的顶盖打开，让她边弹边观察按下琴键时，木槌是如何敲击琴弦，在木槌击打琴弦时，消音器是如何拉起，而当释放琴键时，消音器是如何阻止琴弦振动，从而使声音停止的。



之后，我们就一起看李永乐老师的视频：音乐也有科学道理吗？Do、Re、Mi...都是如何确定的？

看完之后，我们惊叹，数学真是无处不在：2:1, 4:3, 3:2 的频率就可以组织出好听的声音，而宫商角徵羽的背后竟然也有数学的影子。当然，朱载堉的十二平均律最出乎我们的意料，没想到在西方大放异彩的古典和现代音乐源自于中国。

这堂课内容还是挺深，我觉得小宝可能能听懂十分之二三。不过有个印象，知道音乐是怎么形成的，两个琴键之间（比如 C 和 #C）频率之比是 $\sqrt[12]{2}$ ，也就够了。

贤者时刻

优美的文字，也如优美的音乐，余音绕梁，三日不绝。

忽闻水上琵琶声，主人忘归客不发。

寻声暗问弹者谁，琵琶声停欲语迟。

移船相近邀相见，添酒回灯重开宴。

千呼万唤始出来，犹抱琵琶半遮面。

转轴拨弦三两声，未成曲调先有情。

弦弦掩抑声声思，似诉平生不得志。

低眉信手续续弹，说尽心中无限事。

轻拢慢捻抹复挑，初为霓裳后六么。

大弦嘈嘈如急雨，小弦切切如私语。

嘈嘈切切错杂弹，大珠小珠落玉盘。

间关莺语花底滑，幽咽泉流水下滩。

水泉冷涩弦凝绝，凝绝不通声渐歇。

别有幽愁暗恨生，此时无声胜有声。

银瓶乍破水浆迸，铁骑突出刀枪鸣。

曲终收拨当心画，四弦一声如裂帛。

东船西舫悄无言，唯见江心秋月白。

来源：shici.qiaopang.com

纪录片：伟大的作曲家：莫扎特

这是「天叔奇谈」的第 033 篇文章，今天周五（2019/10/18），主题是纪录片。今天我们把「终极密码」第三集先放一放，换个口味，看看莫扎特的生平——BBC 的纪录片「伟大的作曲家」的第六集。之所以突然切换这个主题，是因为小宝上周末钢琴课终于上手了第一首莫扎特的曲子，值得纪念。而钢琴，或者说音乐作为一门艺术，我们不光要学习那些技法和乐章的演奏，还要学会欣赏，通过欣赏领略音乐存在的意义，通过欣赏，去探寻音乐和音乐家背后的故事——所以，带孩子去音乐会，去追寻伟大艺术家的生平，去了解每一首曲子的来龙去脉，练习的意义，以及谁练习过它，某种程度上，比训练技法本身更加重要。

备课素材

《BBC 伟大的作曲家》第六集：莫扎特

<https://www.youtube.com/watch?v=PRbT01aQ-bQ>



课堂回顾

这个片子用莫扎特自己的音乐把他的坎坷一生展现出来，组织和衔接地非常美妙。作为一个乐盲，我也看得如痴如醉。我才知道，莫扎特 5 岁就能谱写出流畅动听的曲子，12 岁就谱写了自己第一部歌剧；而《g 小调第四十交响曲》，也就是 SHE 引用在《不想长大》里面的旋律，也是莫扎特的作品。我觉得小宝因为学着钢琴的缘故，从这个片子里感知到的内容会比我多，整个过程她就静静地听着，没有多少发问（这和其它的纪录片非常不同）。

贤者时刻

莫扎特的名言：

Neither a lofty degree of intelligence nor imagination nor both together go to the making of genius. Love, love, love, that is the soul of genius.

I pay no attention whatever to anybody's praise or blame. I simply follow my own feelings.

第二句拿庄子的话说就是：且举世而誉之而不加劝，举世而非之而不加沮，定乎内外之分，辩乎荣辱之境，斯已矣。

几何：基本概念

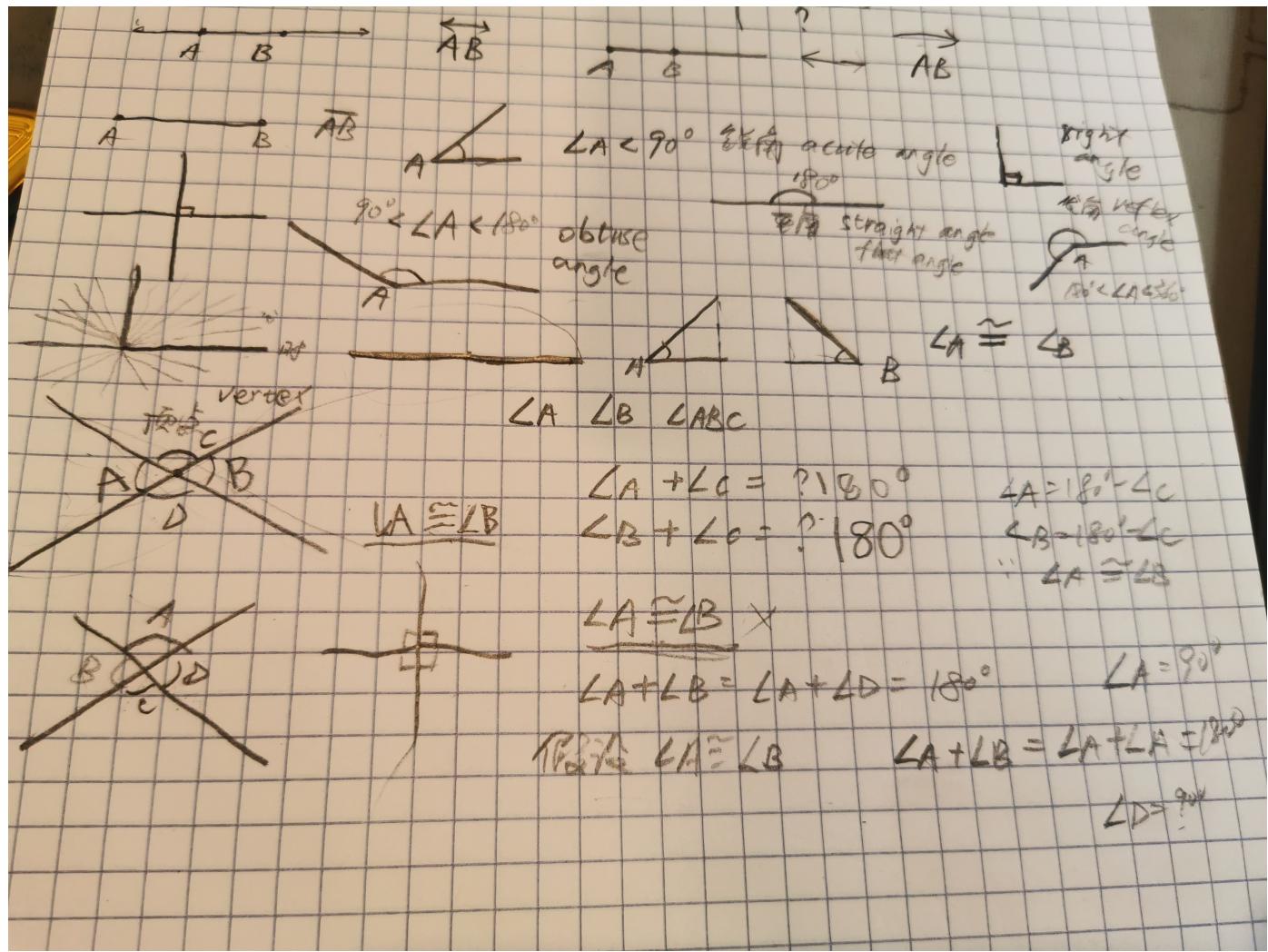
这是「天叔奇谈」的第 034 篇文章，今天周六（2019/10/19），主题是几何。之前成功用测量 π ，以及尺规作图成功地引起了小宝的兴趣，接下来需要逐步介绍基本概念和方法。

备课素材

- 直线 (straight line) : \overleftrightarrow{AB}
- 射线 (ray) : \overrightarrow{AB}
- 线段 (line segment) : \overline{AB}
- 锐角 (acute angle) : $0^\circ < \angle ABC < 90^\circ$
- 直角 (right angle) : $\angle ABC = 90^\circ$
- 垂直 (perpendicular)
- 钝角 (obtuse angle) : $90^\circ < \angle ABC < 180^\circ$
- 平角 (straight/flat) : $\angle ABC = 180^\circ$
- 优角 (reflex angle) : $180^\circ < \angle ABC < 360^\circ$
- 全等 (congruent) : 两角相等 $\angle ABC \cong \angle DEF$
- 顶点 (vertex)
- 对顶角 (vertical/opposite angles)

课堂回顾

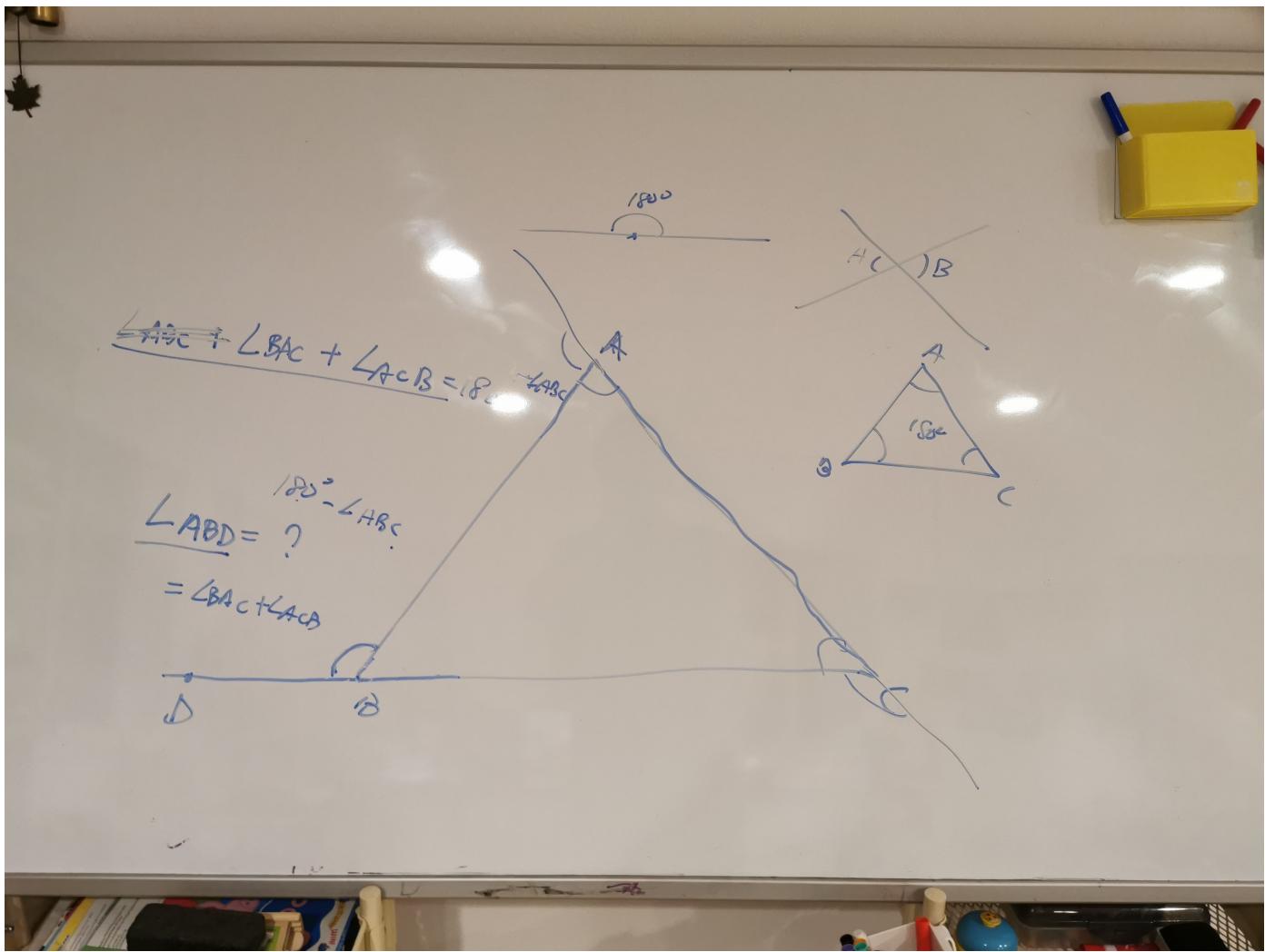
宝妈之前给小宝上过基本的几何课，所以她知道平角之前的所有概念。我帮她把中英文建立了一个对应，毕竟在这边学习。之后我们证明了两直线相交，对顶角相等的定理。这里面引入了一个很重要的数学方法：在已知和未知之间寻找和建立联系。



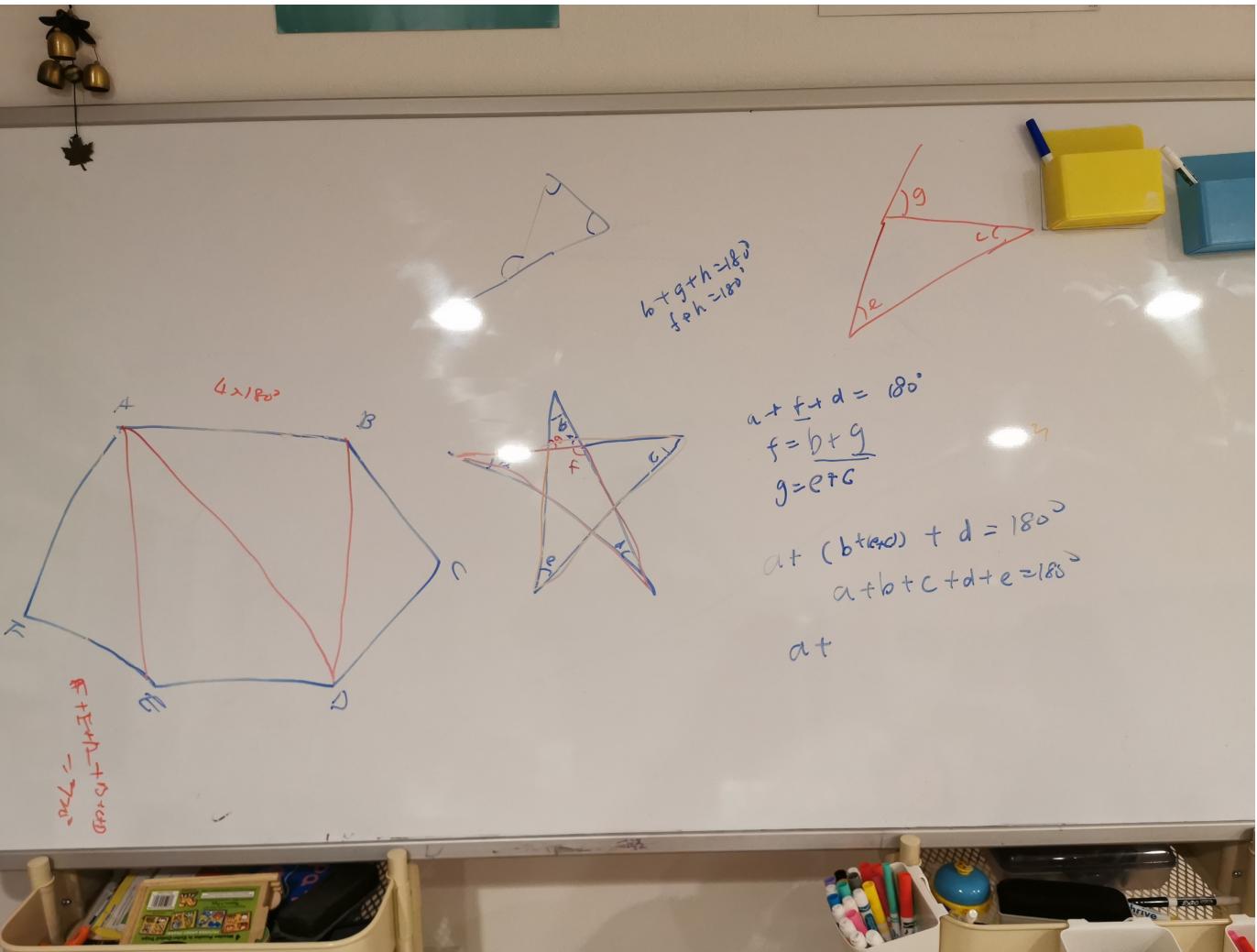
随后我们开始研究三角形的特性，尤其是角的特性。

首先是「三角形的三个内角和是 180° 」。这个我们没有证明，把它作为一个基础知识。我曾经在一个视频中看过一个方法，就是拿一支笔从某个顶点出发，走到头旋转相应的角度，这样走一圈之后笔正好方向相反。小宝惊呆于这个方法，自己试验了两边还不断说：太神奇了！

顺着这个定理，我们证明了「三角形一个外角等于和它不相邻两个内角和」。



之后，我们又研究了六边形和五角星的内角和。



纪录片：终极密码 - 预测

这是「天叔奇谈」的第 035 篇文章，今天周日（2019/10/20），随机主题。因为今天去加拿大温哥华开了一天的车，太累没有精力给小宝上课，我就征得了她的同意，今天看纪录片「终极密码」第三集，预测。

备课素材

终极密码：

<https://www.bilibili.com/video/av4169474/?p=3>

课堂回顾

上次我们观看了「终极密码」第二集。在第二集无比惊艳的映衬下，第三集显得比较平庸。数学在我们的生活中无处不在，通过一些公式，我们可以精准地预测未来将要发生的事情——比如弹出的小球在重力的影响下形成的抛物线。

自然界的有些行为看上去难以捉摸，比如成群的星掠鸟在天空飞翔所形成的图案。

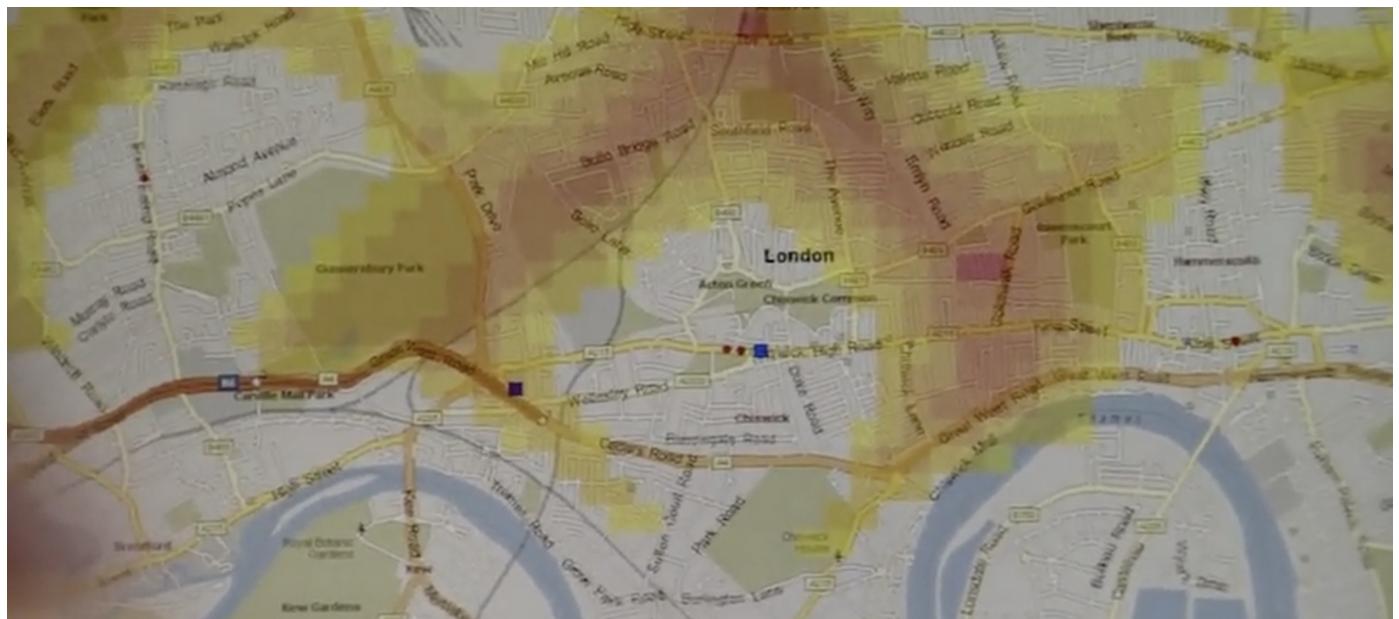


科学家用了简单的模型：

1. 每只鸟的速度相同
2. 尽量靠近自己的邻居
3. 看到天敌就躲开

竟然在计算机里完美重现了它们的状态。看到这里，小宝很惊奇，问我为什么，我便说我们找时间在 scratch 的课堂里也用同样的方式模拟星掠鸟的飞行。

人类作为一个群体，其行为具有可预测性；每个单独的人也有一些习性是我们作为人与生俱来的，比如懒——能在楼下便利店买东西，就绝不走 10 公里去远处的超市买。所以，通过这些特征而建立的模型，使得我们在破案方面也颇有建树。视频中科学家就成功用模型预测连环杀人犯的位置，让原本大海捞针的侦破过程变得简单许多：



但是有很多事情我们无法很好地预测，因为我们无法用公式简单地描述，或者即使用公式描述，也会因为初始条件的微小改变，导致结果的不确定性，这便是混沌理论。

历史故事：盘点各国历史和富国强兵之路

这是「天叔奇谈」的第 036 篇文章，今天周一（2019/10/21），主题是历史故事。齐国和三晋的故事讲了很多，今天讲讲战国七雄中燕国，楚国和秦国的历史。

备课素材

楚国：筚路蓝缕以启山林，晋楚争霸

燕国：没有存在感

秦国：秦穆公，秦献公

各国变法： 1. 魏国李悝变法 2. 楚国吴起变法 3. 秦国商鞅变法（下堂课讲）

成语或俗语：

- 精诚所至，金石为开
- 碧路蓝缕，以启山林

课堂回顾

这一期的故事都还挺有意思。

燕国在整个春秋除了让齐桓公帮忙打了戎狄外，没有存在感，放下不表。

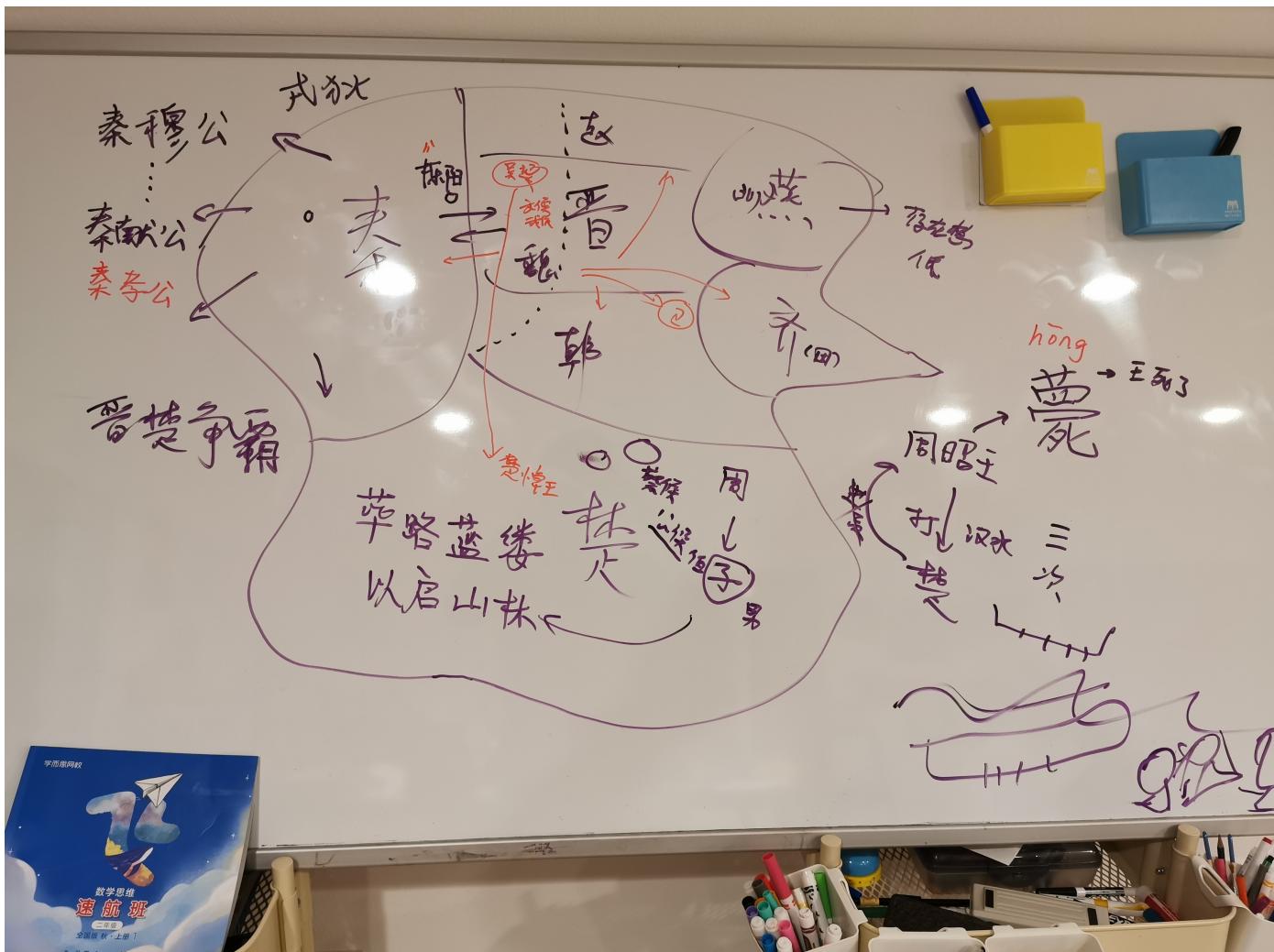
楚国是周初的小诸侯国，国君爵位仅仅是「公侯伯子男」中的「子」。有一次周成王盟会诸侯，楚子熊绎兴冲冲赶去，结果落得个爵位太低不得就座，还要像下人一样在宴会上忙前忙后，非常不爽，回去之后就奋发图强，有了「筚路蓝缕以启山林」的故事（习大大很爱引用这句话）。后来楚子熊渠「夜行，寝石，以为伏虎，弯弓而射之，没金殷羽，下视，知其为石」，于是有了「精诚所至，金石为开」的成语（高度怀疑李广的版本是移花接木）。楚国强大了，广地千里，藐视周王朝，不再纳贡称臣，于是周昭王三次讨伐楚国，尽皆败北，最后一次还在汉水送了命。我在黑板上大大写下了「薨」，让小宝猜这是什么意思，小宝问：「是和死有关么？」我告诉她，天子死去叫

薨。这里我可能给她解释错了，《礼记·曲礼》说：「天子死曰崩，诸侯曰薨，大夫曰卒，士曰不禄，庶人曰死」。

等到平王东迁后，周王朝走向了春秋时期，在齐桓公霸业之后，晋楚争霸成为春秋的主旋律。楚国之后出了死前请食熊掌的楚成王，一鸣惊人的楚庄王，好细腰的楚灵王等几个厉害国君，一直维系着楚国在南方的霸业。

秦国春秋时期出了不世出的秦穆公，之后便在春秋期间逐渐没了存在感。直到伍子胥五战入郢，申包胥哭秦廷请求秦国出救兵对楚国社稷施以援手，才稍稍展现了一下大国的风貌。战国初期，秦献公果断将都城迁入栎阳，以方便秦国东进，夺回祖上（秦穆公）的河西之地，从战略上为后世秦国的扩张奠定了基础。之后秦孝公重用商鞅，开启七国之中最彻底的变法图强，最终为秦国统一六国打下了坚实的政治，军事，经济和制度基础。

战国初期魏国文侯武侯的李悝变法，让魏国很快成为霸主。然而，武侯时吴起因被谗言陷害逃亡楚国，魏国就埋下了衰落的影子。之前我跟小宝讲过魏国以及吴起的故事，她还记得，所以这里很快跳过。吴起到了楚国后，主导了楚国的变法，通过牺牲部分贵族的利益让楚国强大，对于旧贵族来说，吴起是眼中钉，楚悼王一死，痛恨吴起的贵族就诛杀了吴起。吴起很聪明地借用楚悼王的尸体，在死前布好局把这些贵族们一网打尽，给自己报了仇。



小宝

今天，我学习了历史故事：筚路蓝缕以启山林和吴起。我还学习了楚国和秦国。我很开心。

数学：最大公约数和最小公倍数

这是「天叔奇谈」的第 037 篇文章，今天周二（2019/10/22），主题是数学。今天我们学最大公约数和最小公倍数。

研究内容

GCD(a, b): 辗转相除法

$\text{LCM}(a, b) = a / \text{GCD}(a, b) * b$

课堂回顾

最大公约数 (GCD) 和最小公倍数 (LCM) 似乎是小学高年级的内容，但其实只要熟悉了因式分解，了解 GCD 和 LCM 的概念，就可以计算这两个值。之前小宝已经可以口算因式分解两三百的数，所以这两个概念我想尽早教给她。这样对她计算分数的约分，分数的加减都很有帮助。

在介绍完 GCD 的概念后，我们先是使用最原始的方式来算最大公约数——把两个数做质因数分解，然后找出它们相同的因子。我出了两道题给小宝，她都能正常做出来。

之后我给她介绍欧几里得的辗转相除法。因为之前给她介绍过欧几里得，今天就没有多讲。辗转相除法方法对小宝而言很「神奇」，我得用尽量通俗的方法告诉她原理——假设我们把 a 写作 $b*y + c$ ，如果 c 不为零，那么 c 也能除开 x 。所以， $\text{GCD}(a, b) = \text{GCD}(b, c) = \dots$ 所以，我们可以这样一步步化简问题，直到找到答案。辗转相除法是典型的递归算法，递归是数学中一个重要的思想，可以把难的问题不断降级，直到解决。

小宝很快掌握了辗转相除法的要领——我给她出了两道题，她都正常完成。

随后，我们开始学习 LCM。同样的，在介绍完 LCM 的概念后，我们先用质因式分解的方式来算 LCM，之后再一起从中归纳出公式。

虽然内容不多，两个算法学习完之后竟然过了一个小时！我们草草计算了 $1/2 + 1/3$ ，以及 $2/5 + 3/8$ ，就下课了。

这是今天课程的全部内容：

$$\begin{array}{r} 12 \ 6 \\ \cancel{6} \end{array} \quad \text{最大公因数 GCD}$$

$$\begin{array}{r} 12 + 6 = ? \\ 2(6+5) \\ \hline 2 \times 2 \times 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} 12 \ 18 \\ \cancel{1} \cancel{1} \end{array} \quad \begin{array}{r} 2 \times 3 \times 3 \\ \hline 6 \end{array}$$

结论：1. 两个数互素， $\text{GCD}(a, b) = 1$

2. 一个数是另一个数的倍数， $\text{GCD}(a, b) = b$

3. $\text{GCD}(a, b)$

$$a \cdot 0 = 72 -$$

$$b \cdot 0 = 54$$

$$a \cdot 0 - b \cdot 0 = 72 - 54$$

$$(a-b) \cdot 0 =$$

$$a \cdot x = b \cdot x$$

$$x \cdot (a-b)$$

$$72 - 54$$

$$= 18$$

$$\begin{array}{r} 72 \\ 54 \end{array} \quad \begin{array}{r} 18 \\ \hline 18 \end{array}$$

$$72 / 18 = 1 \cdots 18$$

$$54 / 18 =$$

$$\text{GCD}(a, b)$$

$$\begin{array}{l} a/b \cdots m \cdots r \\ b/p \cdots n \cdots s \end{array}$$

$$1580 / 750 = 2 \cdots 80$$

$$750 / 80 = 9 \cdots 30$$

$$80 / 30 = 2 \cdots 20$$

$$30 / 20 = 1 \cdots 10$$

$$20 / 10 = 2$$

$$222 \quad 117$$

$$222 \div 117 = 1 \quad \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \quad 05$$

$$117 / 05 = 1 \quad \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \quad 12$$

$$105 / 12 = 8 \quad \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \quad 9$$

$$12 / 9 = 1 \quad \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \quad 3$$

$$9 / 3 = 3 \quad \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \quad 00$$

$$160 \quad 248$$

$$248 / 160 = 1 \cdots 88$$

$$160 / 88 = 1 \cdots 72$$

$$88 / 72 = 1 \cdots 16$$

$$72 / 16 = 4 \cdots 8$$

$$16 / 8 = 2 \cdots 0$$

$$240 \quad 180$$

$$240 / 180 = 1 \cdots 60$$

$$180 / 60 = 3 \cdots 0$$

$$24 \quad 9 = 2 \cdots 16$$

$$\begin{array}{r} 24 \times 9 \\ 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \\ \hline 8 \times 9 \end{array} \quad 72$$

最小公倍数 (LCM)

$$12 \quad 18$$

$$360$$

1. 互素 $\text{LCM}(a \times b) = a \times b$

2. 一个数 a 是另一个数 b 的倍数 $\text{LCM}(a, b) = a$

3. $\text{LCM}(a, b)$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 12 \\ \hline 144 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 18 \\ \times 323 \\ \hline 54 \\ 54 \\ 18 \end{array}$$

36

$$LCM(a, b) = ab / GCM(a, b)$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \neq \frac{2}{5}$$

$$\frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6}$$

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{8}$$

$$\frac{2 \times 8}{5 \times 8}$$

$$\frac{16}{40} \quad \frac{15}{40} \quad \frac{31}{40}$$

$$\frac{4}{10}$$

$$160 \quad 240$$

$$240 \div 160 = 1 \dots 80$$

$$80 \div 80 = 1 \dots 0$$

$$\begin{array}{r} 160 \\ \times 240 \\ \hline 480 \end{array}$$

$$160 \times 240 / 80$$

Scratch: 迷宫 - 基础

<http://www.mazegenerator.net/>

历史故事：商鞅变法

秦孝公

招贤令

昔我缪公自岐雍之间，修德行武，东平晋乱，以河为界，西霸戎翟，广地千里，天子致伯，诸侯毕贺，为后世开业，甚光美。会往者厉、躁、简公、出子之不宁，国家内忧，未遑外事，三晋攻夺我先君河西地，诸侯卑秦、丑莫大焉。献公即位，镇抚边境，徙治栎阳，且欲东伐，复穆公之故地，修穆公之政令。寡人思念先君之意，常痛于心。宾客群臣有能出奇计强秦者，吾且尊官，与之分土。

公叔痤举荐卫鞅，魏文侯的态度

景监举荐卫鞅，秦孝公的态度

徙木立信

一诺千金

作法自毙

子虔之徒告商君欲反，发吏捕商君。商君亡至关下，欲舍客舍。客人不知其是商君也，曰：“商君之法，舍人无验者坐之。”商君喟然叹曰：“嗟乎，为法之敝一至此哉！”史记·卷六十八·商君列传

善。吾闻穷巷多怪，曲学多辨。愚者之笑，智者哀焉；狂夫之乐，贤者忧焉。拘世以议，寡人不之疑矣。

《商君书·更法第一》

代立不忘社稷，君之道也；错法务明主长，臣之行也。

今吾欲变法以治，更礼以教百姓，恐天下之议我也。

秦孝公据崤函之固，拥雍州之地，君臣固守，以窥周室，有席卷天下、包举宇内、囊括四海之意，并吞八荒之心。当是时，商君佐之，内立法度，务耕织，修守战之备；外连衡而斗诸侯。于是秦人拱手而取西河之外。

贾谊《过秦论》

卫鞅亡魏入秦，孝公以为相，封之于商，号曰商君。商君治秦，法令至行，公平无私，罚不讳强大，赏不私亲近，法及太子，黥劓其傅。期年之后，道不拾遗，民不妄取，兵革大强，诸侯畏惧。然刻深寡恩，特以强服之耳。孝公行之八年，疾且不起，欲传商君，辞不受。

孝公已死，惠王代后，莅政有顷，商君告归。人说惠王曰：“大臣太重者国危，左右太亲者身危。今秦妇人婴儿皆言商君之法，莫言大王之法。是商君反为主，大王更为臣也。且夫商君，固大王仇雠也，愿大王图之。”商君归还，惠王车裂之，而秦人不怜。

《战国策》

<https://www.jianshu.com/p/2bb90e0e4330>

Scratch: 迷宫 - 进阶

历史故事：齐威王，孙膑，庞涓和田忌

不鸣则已一鸣惊人

齐威王（徐州相王，桂陵之战）

Scratch: 太阳系

历史故事：千人之诺诺，不如一士之谔谔

Scratch: 敲砖块 I

<https://inventwithscratch.com/book/chapter5.html>

历史故事：诸子百家

兵家：兵法十三篇 道家：道德经 儒家：论语 墨家：墨子 法家：韩非子

Scratch: 敲砖块 II

历史故事：张仪和苏秦

Scratch: 敲砖块 III

历史故事：孟尝君和四大公子

Scratch: 超级马里奥 I

历史故事：六国三次合纵伐秦

Scratch: 超级马里奥 II

历史故事：司马错伐蜀

Scratch: 超级马里奥 III

历史故事：子之之乱及燕昭王招贤纳士

Scratch: 超级马里奥 IV

历史故事：赵武灵王

Scratch: 超级马里奥 V