

Timo Kötzing, Tyron Franzke

Sommer 2024

Knobelaufgaben Tag 5

Eine Übersicht über unsere Themen findest du hier:

https://hpi.de/friedrich/docs/scripts/24_Vorkurs/index.html

Es lohnt sich, diese Seite beim Bearbeiten der Aufgaben offen zu haben. Für unsere Freunde das analogen Aufgabenblattes gibt es am Ende noch einen QR-Code.

Rätselzeit

Moment mal?! Warum kommt denn jetzt schon die Rätselzeit? Ganz einfach: Heute sind alle Aufgaben knifflige Rätsel, die sehnstüchtig auf einen Knobler in silberner Rüstung hoffen, der sie aus ihrer Ungewissheit befreit! Also dann, schreitet wacker zur Tat!

Aufgabe 1: Primfaktoren - 1

Hier sind die Ersten, die von euch Erlösung erhoffen.

- (1) Zerlege die folgenden Zahlen in ihre Primfaktoren:
60, 1024, 777, 1000, 77
- (2) Was ist die Primfaktordarstellung von 945252000?

Aufgabe 2: Beweise, Beweise, Beweise

- (1) Zeige $a|a$, $1|a$ und $a|0$.
- (2) Zeige: Falls $0|a$, so gilt $a = 0$.
- (3) Zeige: Falls $d|a$ und $a|d$, so gilt $|d| = |a|$.
- (4) Zeige: Falls $d|a$ und $d|b$, so gilt auch $d|(na+mb)$, für beliebige natürliche Zahlen n und m .

Aufgabe 3: Erdbereis

Aleander hat drei Töchter. Sein Freund Siegfried möchte wissen, wie alt die drei sind und Aleander gibt den ersten Hinweis: „Das Produkt der Alter meiner Töchter ist 72 und die Summe ist meine Hausnummer.“ Siegfried schaut die Hausnummer nach und sagt „Dann weiß ich das Alter deiner Töchter immer noch nicht!“ „Stimmt!“ sagt Siegfried, „meine älteste Tochter mag Erdbeereis.“ „Danke, jetzt weiß ich das Alter deiner Töchter.“ Wie alt sind die Töchter?

Aufgabe 4: Der größte gemeinsame Teiler

Was ist der größte gemeinsame Teiler von $(2^{2021} + 2^{2022})$ und $(3^{2021} + 3^{2022})$?

Aufgabe 5: Jack of all trades

Finde alle 10-stelligen Primzahlen, die jede Ziffer von 0 bis 9 in ihrer Dezimaldarstellung genau einmal enthalten.

Aufgabe 6: Der Nullenzähler

Wie viele Nullen gibt es am Ende von $(100!) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 99 \cdot 100$?

Aufgabe 7: Der lange Flur

100 Leute stehen am Beginn eines langen Flures mit 100 Türen, welche anfangs alle geschlossen sind. Dann geht die erste Person los und öffnet jede geschlossene Tür. Die zweite Person geht zu jeder zweiten Tür und schließt sie, wenn sie offen ist, bzw., öffnet sie, wenn sie geschlossen ist. Die dritte Person macht dies mit jeder dritten Tür, die vierte Person mit jeder vierten Tür, usw. Wie viele Türen sind geöffnet, nachdem alle 100 Personen durch den Flur gegangen sind?

Aufgabe 8: Durch Sieben teilbar

Ich denke mir eine Zahl zwischen 100 und 999 aus. Wenn ich diese Zahl zweimal hintereinander schreibe, erhalte ich eine sechs-stellige Zahl. Warum ist dieses sechs-stellige Zahl durch 7 Teilbar?

Aufgabe 9: Ganz schön heiß hier.

Die berühmten Mathematiker Carl Friedrich Gauß und Leonhard Euler landen nach ihrem Tod in der Hölle. Luzifer verspricht ihnen die Freiheit, wenn sie die beiden ganzen Zahlen zwischen 1 und 100 (d.h. im Bereich $\{2, 3, \dots, 99\}$) erraten, die er sich ausgedacht hat. Er nennt Gauß das Produkt und Euler die Summe der beiden Zahlen; darauf entwickelt sich zwischen den Mathematikern folgender Dialog:

Gauß: „Ich kenne die beiden Zahlen nicht.“ Euler: „Das war mir klar.“ Gauß: „Jetzt kenne ich die beiden Zahlen.“ Euler: „Dann kenne ich sie jetzt auch.“ Was waren die beiden Ausgangszahlen?

