Timo Kötzing, Aleksander Beloseikins und Tyron Franzke — Sommer 2024

Knobelaufgaben Tag 10

Eine Übersicht über unsere Themen findest du hier:

https://hpi.de/friedrich/docs/scripts/24_Vorkurs/index.html

Es lohnt sich, diese Seite beim Bearbeiten der Aufgaben offen zu haben. Für unsere Freunde das analogen Aufgabenblattes gibt es am Ende noch einen QR-Code.

Prolog

Keine Panik auf der Titanic! Wenn du dieses Aufgabenblatt jetzt ansiehst und denkst: Die haben wirklich keine Hobbys. Dann liegst du damit natürlich vollkommen richtig. Dem habe ich nichts entgegenzusetzten. Ich habe hier jetzt auch nichts weiter zu sagen, außer: Dann leg mal los und genieße die wundervolle Palette an frisch gebackenen Kombinatorikaufgaben!

Aufgabe 1: Binomischer Lehrsatz - 1

Wir steigen ganz entspannt ein. Multiplizier die Terme mithilfe des binomischen Lehrsatzes aus (bei (a) könnt ihr euch ein + dazudenken).

(a) 37^2

(b) $(x + y)^3$

(c) $(x + 2)^4$

Aufgabe 2: Fakultäten - 1

Es geht klassisch weiter. Berechne das Ergebnis der folgenden Terme.

(1) $4!$

(2) $7!$

(3) $\frac{8!}{5!}$

(4) $\frac{12!}{7! \cdot 5!}$

(5) $5! \cdot 5!$

Aufgabe 3: Binomialkoeffizienten - 1

Immer noch nicht wach? Dann bring deinen Kreislauf mit Binomialkoeffizienten in Schwung! Berechene auch hier das Ergebnis der folgenden Terme.

(1) $\binom{14}{12}$

(2) $\binom{6}{3}$

(3) $\binom{100}{98}$

Aufgabe 4: Summende Summen - 1

Schreibe die folgenden Terme mithilfe des Summenzeichens etwas kürzer.

(1) $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + ... + 42$

(2) $2 + 4 + 6 + ... + 120$

(3) $\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{261}$

(4) $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + ... + \frac{n+1}{n+2}$

(5) $x - x^2 + \frac{x^3}{2!} - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^5}{4!} - \frac{x^6}{5!}$

Aufgabe 5: Die MATHE

Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Buchstaben des Wortes **MATHE** neu anzuordnen?

Aufgabe 6: Das Schweigen der Summen

Jetzt hat es den Summen die Sprache verschlagen! Dann drehen wir mal den Spieß um. Schreibe nun die Summen voll aus. Wie wäre es mit einem schönen Chianti dazu?

(1) $\sum_{r=0}^{7} r^2(-x)^r$

(2) $\sum_{k=3}^{8} \frac{k-1}{k+1} x^{2k}$

(3) $\sum_{k=1}^{n+1} k(k-1)x^{3k}$

Aufgabe 7: So stehen Sieger herum! Schalalala!

Wie viele Möglichkeiten gibt es, 7 Personen auf den 1. 2. und 3. Platz des Podestes zu platzieren?

Aufgabe 8: Binomischer Lehrsatz - 2

Mehr hilft mehr, benutze den binomischen Lehrsatz für Umformungen!

(a) $(x + y + z)^2$

(b) $(x + 1)^n$

(c) Und damit es nicht immer das gleiche ist, zeige noch für welche $n \in \mathbb{N}$ ist $x^n + y^n$ jeweils kleiner, gleich und größer als $(x + y)^n$ ist!

Aufgabe 9: Fakultäten - 2

Berechene das Ergebnis des folgenden **!**Terme.

(1) $3! \cdot 0!$

(2) $\frac{4!}{0!}$

(3) $\frac{6!}{2! \cdot 4!}$

(4) $\frac{(10!/5!)}{10}$

(5) $\frac{((3!)!)!}{3!}$

Aufgabe 10: Summende Summen - 2

Du bist ja fast wie die Axt im Walde! Mache diese langen Summen mal etwas kürzer.

(1) $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} - \frac{1}{36}$

(2) $7 - 10 + 13 - 16 + ... + 31$

(3) $16 + 25 + 36 + 49 + ... + (n + 2)^2$

(4) $\frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} + \frac{1}{9!} + ... + \frac{1}{(n+5)!}$

(5) $3x^2 + 6x^4 + 9x^6 + 12x^8 + ... + 36x^{24}$

Aufgabe 11: Gleichung + Fakultät

Diese beiden Gleichungen sind sich ähnlicher als man denken mag. Findest du heraus, wieso? Löse die folgenden Gleichungen.

(1) $x! = 24$

(2) $(x + 1)! = 5 \cdot x!$

Aufgabe 12: Einer unter Hundert

Finde die Einerstelle der Summe. $\sum_{i=1}^{100} (i!)^2$

Aufgabe 13: Pascalsches Dreieck

Schon einmal etwas vom pascalschen Dreieck gehört? Kein Problem: `https://de.wikipedia.org/wiki/Pascalsches_Dreieck`

Da du nun weißt, worum es hier geht, schreibe die ersten 8 Ebenen des Dreiecks auf, ohne nach der Lösung zu suchen.

Aufgabe 14: Einfach vereinfachen

Vereinfache die folgenden Terme. Achte dabei auf deinen nun gut bekannten Freund: die Fakultät! :O

(1) $\frac{n!}{(n-2)!}$

(2) $\frac{(n+2)!}{n!}$

(3) $\frac{(2n+2)!}{(2n)!}$

(4) $\frac{(n-1)!}{(n+1)!}$

(5) $\frac{(n+1)!}{n!}$

(6) $\frac{(n+2)!}{(n-1)!}$

Aufgabe 15: Binomialkoeffizienten - 2

Genug der Rechnerei, vereinfacht die folgenden Terme soweit es geht.

(1) $\binom{n}{k} - \binom{n}{n-k}$

(2) $\frac{n-k}{n}\binom{n}{k}$

(3) $\frac{n(n-1)}{2}$

Aufgabe 16: Summende Summen - 3

Immer noch nicht genug? Dann ist hier Nachschlag! Schreibe diese langen Terme mittels eines Summenzeichens kurz und kompakt auf.

(1) $x^7 + \frac{x^9}{1!} + \frac{x^{11}}{2!} + \frac{x^{13}}{3!} + \ldots + \frac{x^{31}}{12!}$

(2) $5x - 9x^2 + 13x^3 - 17x^4 + \ldots - 41x^{10}$

(3) $\frac{5}{2}x^3 + 3x^4 + \frac{7}{2}x^5 + 4x^6 + \ldots + \frac{n}{2}x^{n-2}$

(4) $6x^{12} + 7x^{14} + 8x^{16} + 9x^{18} + \ldots + (n+1)x^{2n+2}$

Aufgabe 17: 13 Spieler

Es gibt 13 Spieler und 11 Plätze sind im Team frei. (Reihenfolge spielt keine Rolle) Welche Anzahl an Plätzen muss gewählt werden, damit die gleiche Anzahl an Befüllungsmöglichkeiten wie bei 11 Plätzen besteht?

Aufgabe 18: Binomischer Lehrsatz - 3

Diese Summen kollabieren ja schneller als wir beim Aufgaben schreiben um 3 Uhr morgens! Zeige, dass es auch wirklich stimmt.

(a) $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$

(b) $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^n = 2^n x^n$

(c) $\sum_{i=0}^{n} 2^i \binom{n}{i} x^n = 3^n x^n$

(d) $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} x^n = 0$

BONUS - Kleiner Gauß

Es gibt eine Anekdote, dass der Mathelehrer von Carl Friedrich Gauß ihm aufgetragen hat, die ersten 100 Zahlen zu addieren, um ihm eine nervige und fehleranfällige Aufgabe zu geben (das Bildungssystem hat sich in den letzten Jahrhunderten nicht deutlich verändert). Gauß konnte die Aufgabe aber in wenigen Sekunden lösen, weil er die Summanden clever angeordnet hat und so eine kurze Formel für die Summe der ersten n natürlichen Zahlen aufgestellt hat. Mach es ihm nach!

$$\sum_{i=1}^{n} =$$

Begründe dann damit, dass gilt

$$\prod_{i=0}^{n} x^i = x\left(\sqrt{x^n}\right)^n$$

BONUS - Konfuse Binomialkonfusion

Benutze den binomischen Lehrsatz um folgende Aussage für $n \geq 2$ zu zeigen:

$$x^n + y^n + n(xy) \leq (x+y)^n \leq \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{(\frac{n}{2})!} \cdot x^i y^{n-i}$$

BONUS - Sortieren ist schwierig

Sortieren ist in der Informatik ziemlich wichtig. Deshalb wollen wir die Anzahl an Operation möglichst kleinhalten, dies ist allerdings nicht immer möglich, vor allem bei vergleichsbasierten Sortieren, wie z.B. Bubble-Sort oder Quicksort. Diese Sortieralgorithmen bauen darauf auf, dass in jedem Schritt 2 Zahlen aus der zu sortierenden Liste miteinander verglichen werden. Das Resultat des Vergleichs ist entweder Kleinergleich oder Größer. Das heißt, dass die Menge der möglichen Permutationen, die der Algorithmen noch berücksichtigen muss, nach jedem Vergleich maximal halbiert wird (das könnt ihr erstmal so hinnehmen oder Informationstheorie googeln wenn ihr Langeweile habt). Am Ende muss es genau eine mögliche Permutation geben (die sortierte Liste), die der Algorithmus ausgibt.
Zeige, dass für vergleichsbasierte Algorithmen die Anzahl der Vergleiche im besten Fall zwischen $(x-1) \cdot \log_2(x-1)$ und $x \log_2(x)$ liegt.

BONUS - Veritasium Video

Na, sieh mal einer an: ein Veritasium-Video! Wenn du nicht noch weiter deinen Kopf zum Glühen bringen möchtest, können wir zur guten Unterhaltung dieses Video empfehlen!

https://www.youtube.com/watch?v=iSNsgj1OCLA&pp=ygUSdmVyaXRhc2l1bSBwcmlzb24g

Rätselzeit

Mir brummt der Kopf! Zeit für eine Abkühlung. Wie wär's mit einem Rätsel - geschüttelt, nicht gerührt? Frage deine Tutorin oder deinen Tutor, ob er dir eins mixen kann.

Skript - Kombinatorik