Отчет по лабораторной работе №N по Мат Моделированию

1-2. Содержательная постановка задачи

1.1

Суть поставленной задачи:
Найти число работающих и соотношение между потреблением и накоплением, при которых душевое потребление работников максимально, а также норму накопления, обеспечивающая максимальное душевое потребление работников

1.2

Суть поставленной задачи:
Определить при каких предположениях относительно начальных состояний системы будет наблюдаться ускоренный экономический рост; замедляющийся экономический рост; экономический спад. Для наглядности нужно построить соответствующие траектории на основе аналитиеского решения, а также исследовать экономический рост при изменении нормы накопления A(t).

3. Концептуальная постанока задачи

3.1 и 3.2

Рассматривать будем несколько упрощенную модель, в которой темп прироста занятых работников принимаем пропрциональным числу работающих. В этой модели работник производят национальный доход, который идет на потреление и частично на накопление $Y(t) = \omega(t) + A(t)$. В свою очередь сбереженный в единицу времени продукт $A(t)$ расходуется на создание новой мощности.

4. Математическая постановка задачи

4.1

Число работающих с течением времени R(t) описывается экспоненциальным ростом: $R(t) = R_0 e^{\alpha t}$
Мощность M(t) изменяется с темпоп $\gamma - \beta$. Реальный выпуск продукта зависит, естественно, от числа работающих и задается производственной функцией вида $Y(t) = M(t) * f(x(t))$, $x(t) = \frac{R(t)}{M(t)}$. Душевое потребление в свою очередь выражается величиной $c(t) = \frac{\omega(t)}{R(t)}$
Сбереженный в единицу времени продукт A(t) расходуется на создание новой мощности: $A(t) = \alpha I(t)$, где α>0 - сичтающееся заданным и постоянным количество фондообразующего продукта, необходимое для создания единицы новой мощности, I(t) - число единиц новой мощности.
Темп выбытия существующей мощности предполагается пропорциональным величине самой мощности, т.е. величине $\beta M(t)$, коэффициент выбытия $\beta > 0$ задается постоянным.
В итоге для изменения функции M(t) получаем балансное соотношение $\frac{dM(t)}{dt} = I(t) - \beta M(t)$
Для замыкания модели предположим, что скорость введения новой мощности пропрциональна величине уже существующей мощности:
$I(t) = \gamma M(t)$, где $\gamma > 0$ (величина, обратная характерному времени наращивания мощности) считается заданной и постоянной (естественно, $\gamma > \beta$). Тогда:
$M(t) = M_0 * exp((\gamma - \beta)t)$, а вместе с ним определяются и все остальные неизвестные величины.

4.2

Действовать будем из следующих предположениях(γ - темп роста ресурсов, β - коэффициент выбытия):

- Если γ > β, темп роста превышает темп потерь, и ресурсы увеличиваются.
- Если γ < β, темп потерь превышает темп роста, и ресурсы уменьшаются.
- Если $\gamma \approx \beta$, темп роста превышает темп потерь, и ресурсы стагнируют.
  Соответственно этим коэффициентам зададим функции, описанные в тексте для 4.1

ВТорой пункт будем рассматривать в трех сценариях:

1. Постоянная норма накопления $A(t)=const$:

   $A(t)=s$

2. Растущая норма накопления $A(t)$:

   $A(t)=b + kt, k>0$

3. Убывающая норма накопления $A(t)$:

   $A(t)=b + kt, k<0$

5. Реализация

5.1

```python
import numpy as np

alpha = 0.2
beta = 0.3
gamma = 0.4
R0 = 4
M0 = 20

def f(x):
    return np.sqrt(0.03 * x)

c = 0
A_m = 0
R_m = 0
w_m = 0

for t in range(51):
    R = R0 * np.exp(alpha * t)
    M = M0 * np.exp((gamma - beta) * t)

    x = R / M
    Y = M * f(x)
    A = alpha * gamma * M
    w = Y - A

    if w / R > c:
        c = w / R
        A_m = A
        R_m = R
        w_m = w

print(f"Число работающих R = {R_m:.0f}")
print(f"Соотношение между потреблением и накоплением w/A = {w_m / A_m:.5f}")

print(f"Норма накопления A/Y = {A_m / (w_m + A_m):.5f}")
```

5.2

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

alpha = 0.05
beta = 0.03
gamma_accelerated = 0.07
gamma_slow = 0.04
gamma_decline = 0.02
R0 = 100
M0 = 200
t = np.linspace(0, 50, 100)


def M(t, gamma):
    return M0 * np.exp((gamma - beta) * t)


def R(t):
    return R0 * np.exp(alpha * t)


def f(x):
    return np.minimum(x, 1)


M_accelerated = M(t, gamma_accelerated)
M_slow = M(t, gamma_slow)
M_decline = M(t, gamma_decline)


R_values = R(t)


x_accelerated = R_values / M_accelerated
x_slow = R_values / M_slow
x_decline = R_values / M_decline


Y_accelerated = M_accelerated * f(x_accelerated)
Y_slow = M_slow * f(x_slow)
```

```python
Y_decline = M_decline * f(x_decline)


s = 0.2
A_accelerated = s * Y_accelerated
A_slow = s * Y_slow
A_decline = s * Y_decline


plt.figure(figsize=(12, 8))


plt.subplot(2, 2, 1)
plt.plot(t, M_accelerated, label="Ускоренный рост")
plt.plot(t, M_slow, label="Замедляющийся рост")
plt.plot(t, M_decline, label="Экономический спад")
plt.xlabel("Время")
plt.ylabel("Мощность M(t)")
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.tight_layout()
plt.show()
```

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

alpha = 0.05
gamma = 0.06
beta = 0.03
R0 = 100
M0 = 200
t = np.linspace(0, 50, 100)


def f(x):
    return np.minimum(x, 1)

def R(t):
    return R0 * np.exp(alpha * t)

def A_constant(t, s=0.2):
    return s * np.ones_like(t)

def A_increasing(t):
    return 0.1 + 0.01 * t

def A_decreasing(t):
    return 0.3 - 0.005 * t


def M_with_savings(t, A_func):
    M = np.zeros_like(t)
    M[0] = M0
    for i in range(1, len(t)):
        dt = t[i] - t[i-1]
        Y = M[i-1] * f(R(t[i]) / M[i-1])
        M[i] = M[i-1] + dt * (A_func(t[i]) * Y - beta * M[i-1])
    return M

M_constant = M_with_savings(t, A_constant)
M_increasing = M_with_savings(t, A_increasing)
M_decreasing = M_with_savings(t, A_decreasing)

plt.figure(figsize=(12, 6))

plt.plot(t, M_constant, label="Постоянная норма накопления (20%)")
```

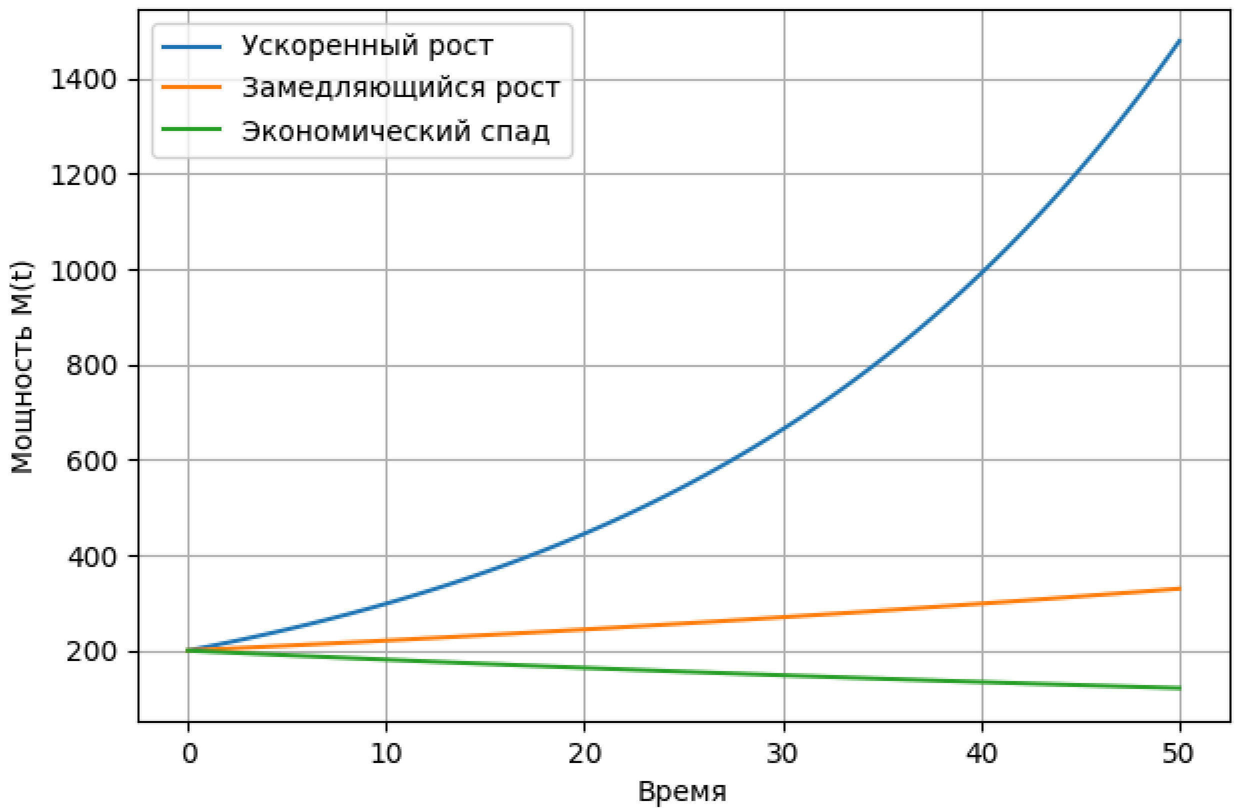
```
plt.plot(t, M_increasing, label="Растущая норма накопления")
plt.plot(t, M_decreasing, label="Уменьшающаяся норма накопления")
plt.xlabel("Время")
plt.ylabel("Мощность M(t)")
plt.title("Влияние изменения нормы накопления на экономический рост")
plt.grid(True)
plt.legend()

plt.show()
```

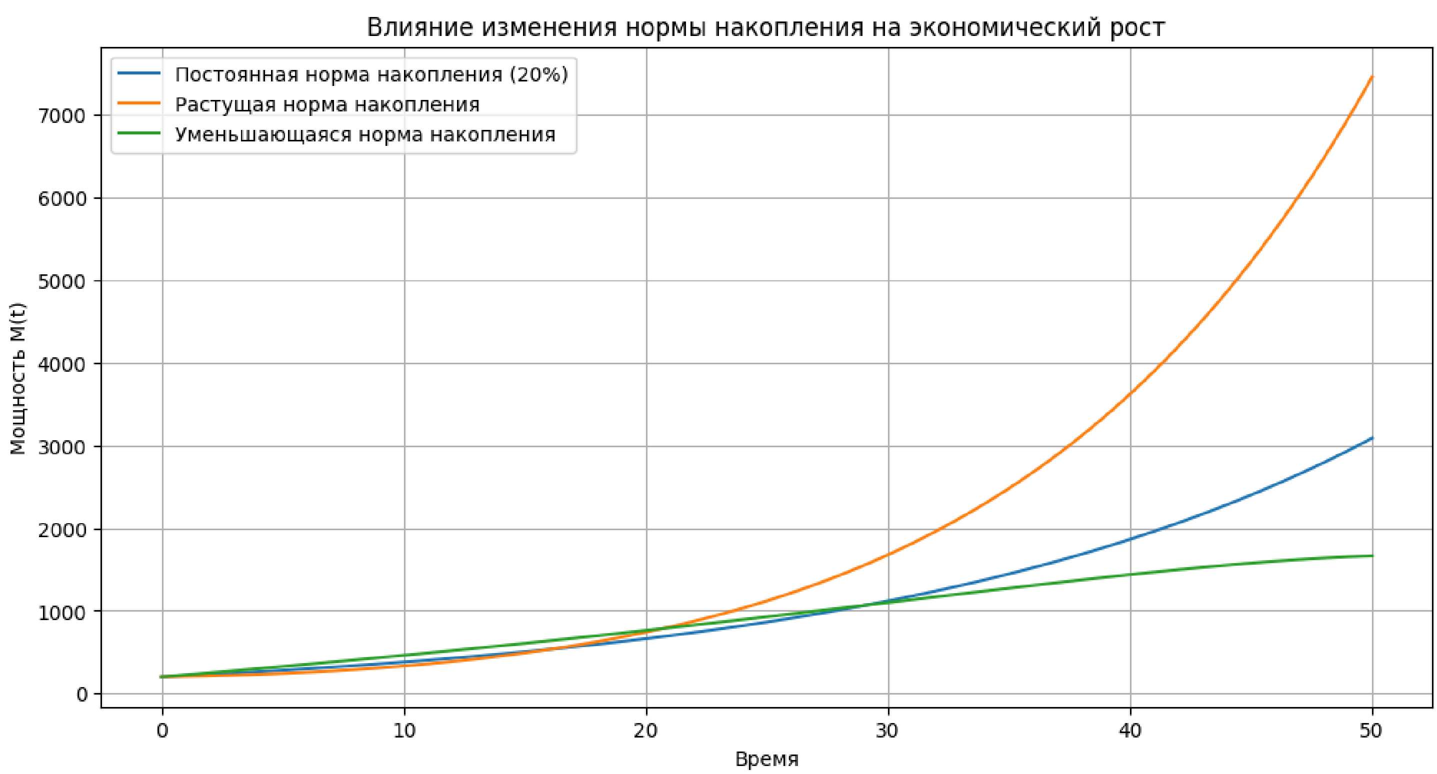
7. Численное иследование модели

7.1

```
Число работающих R = 80
Соотношение между потреблением и накоплением w/A = 1.04978
Норма накопления A/Y = 0.48786
```

7.2


Ускоренный рост
Замедляющийся рост
Экономический спад
Мощность M(t)
Время


Влияние изменения нормы накопления на экономический рост
Постоянная норма накопления (20%)
Растущая норма накопления
Уменьшающаяся норма накопления
Мощность M(t)
Время