МИЭТ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Лабораторные работы для студентов 4 курса
ПМ-41

Преподаватель:
Лебедев С.А.

# ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 8

# ЛОГИСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РОСТА НАРОДОНАСЕЛЕНИЯ МИРА

МИЭТ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
Лабораторные работы для студентов 4 курса

# Логистическая модель роста народонаселения мира


Большинство реальных процессов и соответствующих им математических моделей нелинейны. Линейные же модели отвечают весьма частным случаям и, как правило, служат лишь первым приближением к реальности. Например, популяционные модели сразу становятся нелинейными, если принять во внимание ограниченность доступных популяции ресурсов. При их выводе считается, что:

- существует «равновесная» численность популяции $N_p(t)$, которую может обеспечить окружающая среда т.е. производство продовольствия;
- скорость изменения численности популяции пропорциональна самой численности, умноженной (в отличие от модели Мальтуса) на величину ее отклонения от равновесного значения, т. е.

$$\frac{dN(t)}{dt} = \alpha(t)\left(1 - \frac{N(t)}{N_p(t)}\right)N(t), \quad \alpha(t) > 0.$$

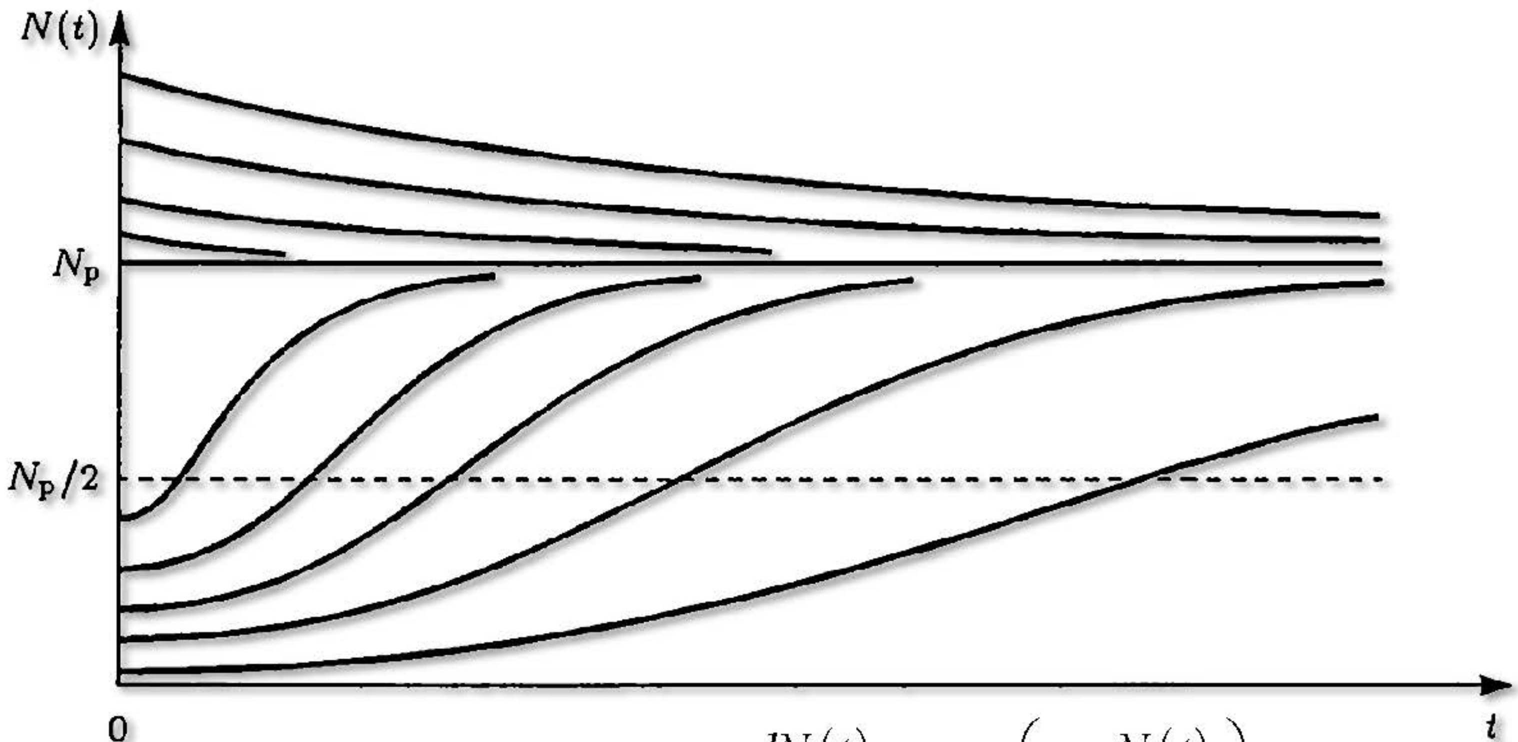
# Логистическая модель роста народонаселения мира


Член $(1 - N(t)/N_p(t))$ в уравнении

$$\frac{dN(t)}{dt} = \alpha(t)\left(1 - \frac{N(t)}{N_p(t)}\right)N(t),$$

обеспечивает механизм «насыщения» численности — при $N(t) < N_p(t)$ ($N(t) > N_p(t)$) скорость роста положительна (отрицательна) и стремится к нулю, если $N(t) \to N_p(t)$

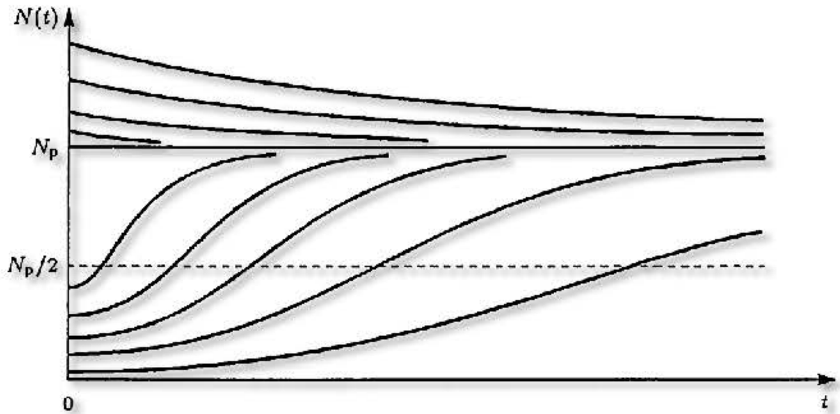
# Логистическая модель роста народонаселения мира




Член $(1 - N(t)/N_p(t))$ в уравнении $$\frac{dN(t)}{dt} = \alpha(t)\left(1 - \frac{N(t)}{N_p(t)}\right)N(t),$$

обеспечивает механизм «насыщения» численности — при $N(t) < N_p(t)$ ($N(t) > N_p(t)$) скорость роста положительна (отрицательна) и стремится к нулю, если $N(t) \to N_p(t)$.

# Логистическая модель роста народонаселения мира




Представляя уравнение в виде

$$\frac{dN(t)}{dt} = \alpha(t)\left(1 - \frac{N(t)}{N_p(t)}\right)N(t),$$

в виде

$$\frac{dN(t)}{N_p(t) - N(t)} + \frac{dN(t)}{N(t)} = \alpha(t)$$

и интегрируя его, получаем $-\ln\left(N_p(t) - N(t)\right) + \ln\left(N(t)\right) = \alpha(t)t + C$

Постоянная интегрирования определяется из условия $N(t_0) = N_0$ , $N_p(t_0) = N_{p0}$ и $\alpha(t_0) = \alpha_0$, т. е. $C = \ln(N_0 / (N_p - N_0)$. В результате находим

$$N(t) = N_p(t)\frac{N_0}{N_{p0} - N_0}\exp\left(\alpha(t)t\right) - N(t)\frac{N_0}{N_{p0} - N_0}\exp\left(\alpha(t)t\right),$$

или, в окончательном виде,

$$N(t) = \frac{N_p(t)N_0\exp\left(\alpha(t)t\right)}{N_{p0} - N_0\left(1 - \exp\left(\alpha(t)t\right)\right)}.$$

# Логистическая модель роста народонаселения мира

- ***Вариант 1***

  1. Логистическая модель роста народонаселения мира
  2. Зависимость времени достижения 1/2 «равновесной» численности популяции $Np(t_0)$ от коэффициента пророста населения $\alpha(t_0)$.

- ***Вариант 2***

  1. Зависимость численность народонаселения при условии, что «равновесная» численность популяции $Np(t)$ линейно изменяется со временем.
  2. Зависимость численность народонаселения при условии, что коэффициент пророста населения $\alpha(t)$ экспоненциально изменяется со временем