МИЭТ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Лабораторные работы для студентов 4 курса
ПМ-41

Преподаватель:
Лебедев С.А.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 13

МАКРОМОДЕЛЬ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА

МИЭТ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
Лабораторные работы для студентов 4 курса

Макромодель экономического роста

В растущей экономике число работающих $R(t)$ не постоянно, а увеличивается с течением времени. В простейшей модели считается, что темп прироста занятых работников пропорционален числу уже работающих:

$$\frac{dR}{dt} = \alpha R(t)$$

Поэтому

$$R(t) = R_0 \exp(\alpha t)$$

– заранее известная функция времени (величина α задается, $R_0 = R(0)$ – число работающих в начальный момент $t = 0$).

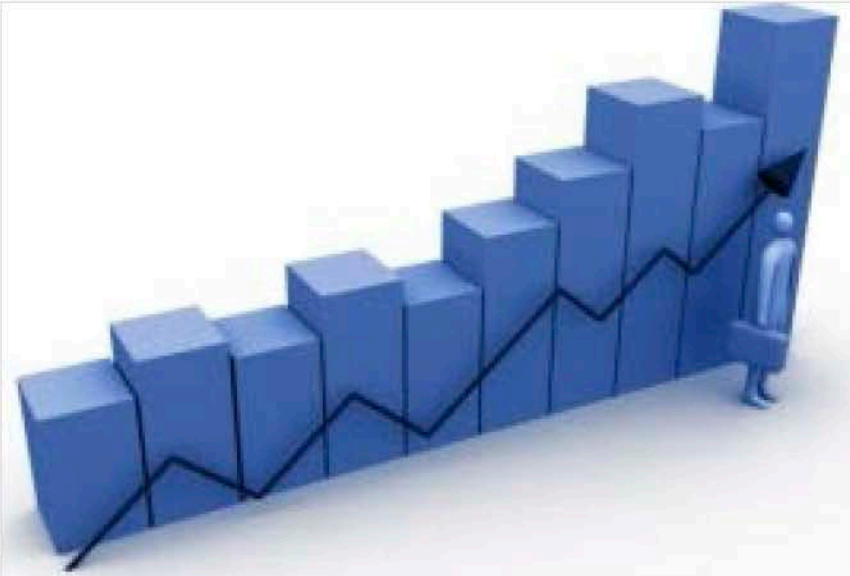
Макромодель экономического роста

Работники производят национальный доход $Y(t)$, который частично идет на потребление $\omega(t)$ и частично на накопление $A(t)$:

$$Y(t) = \omega(t) + A(t)$$

Накопленная часть продукта $A(t)$, возвращается в экономику с тем, чтобы скомпенсировать выбывающие из строя производственные мощности, а также для создания новых мощностей. Под мощностью $M(t)$ подразумевается максимально возможный выпуск продукта экономикой.

Макромодель экономического роста



Реальный выпуск продукта зависит, естественно, от числа работающих и задается производственной функцией вида

$$Y(t) = M(t) \cdot f(x(t)).$$

Величина

$$x(t) = \frac{R(t)}{M(t)}$$

по своему смыслу – количество работающих на единице мощности. Относительно функции $f(x)$ делаются следующие предположения: $f(0) = 0$, $\partial f(x)/\partial x > 0$ (выпуск растет с увеличением числа занятых) и $\partial^2 f(x)/\partial^2 x < 0$ (насыщение). Функция $f(x)$ определена для значений x на отрезке $0 < x < x_M$, где $x_M = R_M/M$, а $R_M(t)$ – число рабочих мест в хозяйстве при мощности $M(t)$. Если все места заполнены, то выпуск $Y(t)$ по определению равен $M(t)$., т. е. для $f(x)$ должно выполняться условие $f(x_M) = 1$.

Макромодель экономического роста

Одна из главных задач теории экономического роста – нахождение оптимальных в некотором смысле способов разделения произведенного продукта на потребляемую и накапливаемую части.

Критерием оптимальности можно выбрать, например, душевое потребление (количество продукта, потребляемого одним работающим), т. е. величину

$$c(t) = \frac{\omega(t)}{R(t)}.$$

Макромодель экономического роста

Сбереженный в единицу времени продукт $A(t)$ расходуется на создание новой мощности:

$$A(t) = \alpha I(t),$$

где $\alpha > 0$ – считающееся заданным и постоянным количество фондообразующего продукта, необходимое для создания единицы новой мощности,

$I(t)$ – число единиц новой мощности.

Макромодель экономического роста

Сбереженный в единицу времени продукт $A(t)$ расходуется на создание новой мощности:

$$A(t) = \alpha I(t),$$

где $\alpha > 0$ – считающееся заданным и постоянным количество фондообразующего продукта, необходимое для создания единицы новой мощности,
$I(t)$ – число единиц новой мощности.

Темп выбытия существующей мощности предполагается пропорциональным величине самой мощности, т. е. величине $\beta M(t)$, коэффициент выбытия $\beta > 0$ задается постоянным.

Макромодель экономического роста

Сбереженный в единицу времени продукт $A(t)$ расходуется на создание новой мощности:

$$A(t) = \alpha I(t),$$

где $\alpha > 0$ – считающееся заданным и постоянным количество фондообразующего продукта, необходимое для создания единицы новой мощности,
$I(t)$ – число единиц новой мощности.

Темп выбытия существующей мощности предполагается пропорциональным величине самой мощности, т. е. величине $\beta M(t)$, коэффициент выбытия $\beta > 0$ задается постоянным.

Макромодель экономического роста

В итоге для изменения функции $M(t)$ получаем балансное соотношение

$$\frac{dM(t)}{dt} = I(t) - \beta M(t).$$

Таким образом уравнения

$$Y(t) = \omega(t) + A(t),$$

$$Y(t) = M(t) \cdot f(x(t)),$$

$$\frac{dM(t)}{dt} = I(t) - \beta M(t),$$

содержат четыре неизвестных величины $- Y(t), \omega(t), M(t), I(t)$.
Для замыкания модели предположим, что скорость введения новой мощности пропорциональна величине уже существующей мощности:

$$\frac{dM(t)}{dt} = I(t) - \beta M(t).$$

Макромодель экономического роста

Для замыкания модели предположим, что скорость введения новой мощности пропорциональна величине уже существующей мощности:

$$I(t) = \gamma M(t),$$

где $\gamma > 0$ (величина, обратная характерному времени наращивания мощности) считается заданной и постоянной (естественно, $\gamma > \beta$). Тогда решение уравнения

$$\frac{dM(t)}{dt} = I(t) - \beta M(t).$$

легко находится:

$$M(t) = M_0 \exp\left(\left(\gamma - \beta\right)t\right),$$

а вместе с ним определяются и все остальные неизвестные величины.

Задачи для самостоятельно решения

- *Вариант 1*

1. Найдем число работающих и соотношение между потреблением и накоплением, при которых душевое потребление работников максимально.
2. Норма накопления, обеспечивающая максимальное душевое потребление работников.

- *Вариант 2*

1. Определить при каких предположениях относительно начальных состояний системы будет наблюдаться:
   a) ускоренный экономический рост;
   b) замедляющийся экономический рост;
   c) экономический спад.

   Построить соответствующие траектории на основе аналитического решения.
2. Исследовать экономический рост при изменении нормы накопления $A(t)$.