МИЭТ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Лабораторные работы для студентов 4 курса
ПМ-41

Преподаватель:
Лебедев С.А.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 10

МОДЕЛИРОВАНИЕ БОЕВЫХ ДЕЙСТВИЙ ДВУХ АРМИЙ И АРМИИ ПРОТИВ ПАРТИЗАН

МИЭТ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
Лабораторные работы для студентов 4 курса

МОДЕЛИРОВАНИЕ БОЕВЫХ ДЕЙСТВИЙ ДВУХ АРМИЙ

МИЭТ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
Лабораторные работы для студентов 4 курса

Моделирование боевых действий двух армий

Главной характеристикой противоборствующих сторон в рассматриваемой модели являются численности сторон $N_1(t) \geq 0$ и $N_2(t) \geq 0$. Если в какой-то момент времени одна из численностей обращается в нуль, то данная сторона считается потерпевшей поражение (притом, что в этот момент численность другой стороны положительна).

Моделирование боевых действий двух армий

В случае действий между регулярными частями динамика их численности определяется тремя факторами:

1. скоростью уменьшения состава из-за причин, непосредственно не связанных с боевыми действиями (болезни, травмы, дезертирство), которое учитывается коэффициентами $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$ соответственно;
2. темпом потерь, обусловленных боевыми действиями противоборствующей стороны (которые в свою очередь определяются качеством ее стратегии и тактики, уровнем морального духа и профессионализмом бойцов, вооружениями и т.д.), которое учитывается коэффициентами $\beta_1(t)$ и $\beta_2(t)$ соответственно;
3. скоростью поступления подкреплений, которая считается некоторой заданной функцией времени $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(t)$.

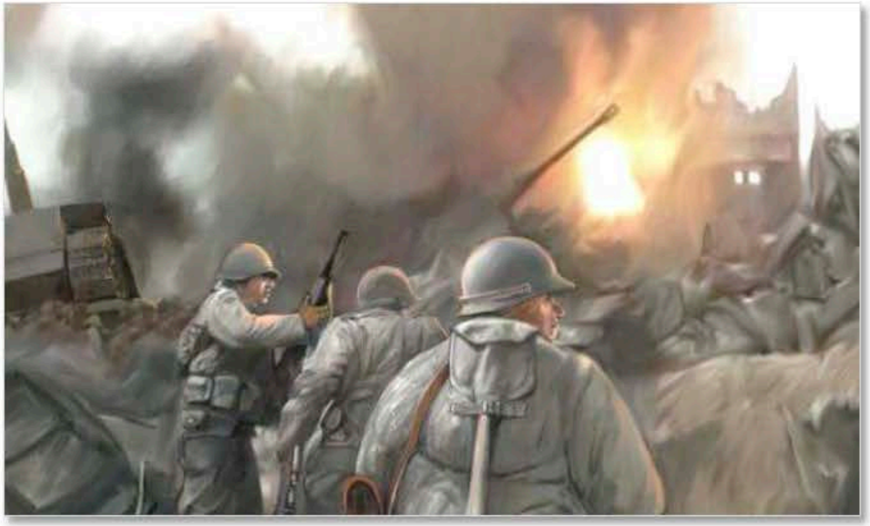
Моделирование боевых действий двух армий

При этих предположениях для $N_1(t)$, $N_2(t)$ получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dN_1}{dt} = -\alpha_1(t)N_1 - \beta_2(t)N_2 + \gamma_1(t) \\ \dfrac{dN_2}{dt} = -\alpha_2(t)N_2 - \beta_1(t)N_1 + \gamma_2(t) \end{cases},$$

из которой при заданных функциях α_i, β_i, γ_i ($i=1,2$) и начальных значениях $N_1(t_0) = N_1(0)$, $N_2(t_0) = N_2(0)$, однозначно определяется решение в любой момент времени $t > 0$. Коэффициенты $\alpha_{1,2} \geq 0$ характеризуют скорости потерь в силу обычных (не боевых) причин, $\beta_{1,2} \geq 0$ – темпы потерь из-за действий соперника, $\gamma_{1,2} \geq 0$ – скорости поступления подкреплений.

Моделирование боевых действий двух армий



Изучим модель (модель Ланчестера)

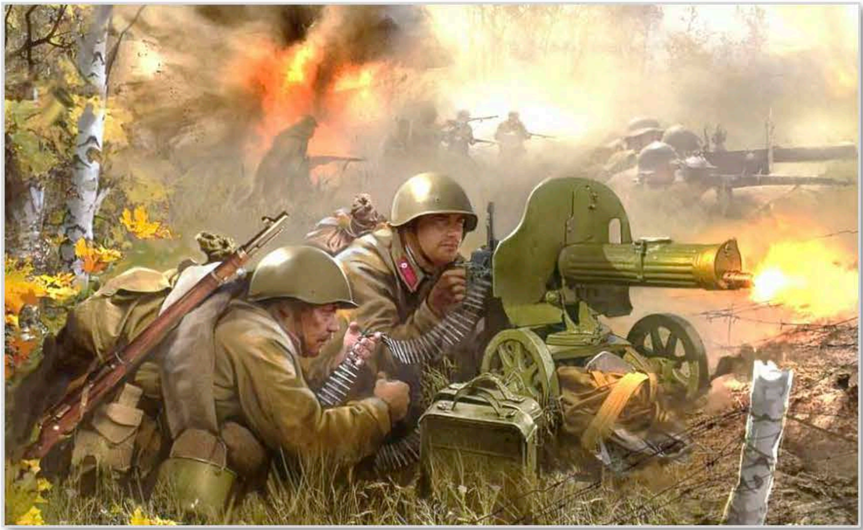
$$\begin{cases} \dfrac{dN_1}{dt} = -\alpha_1(t)N_1 - \beta_2(t)N_2 + \gamma_1(t) \\ \dfrac{dN_2}{dt} = -\alpha_2(t)N_2 - \beta_1(t)N_1 + \gamma_2(t) \end{cases},$$

в частном случае:

1 $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ (стороны не получают подкреплений и как бы предоставлены самим себе);

2. α_1 = const, α_2 = const; β_1 = const, β_2 = const (последнее означает, в частности, что у противников всегда найдется достаточное количество вооружений, которое может использоваться годными к несению службы бойцами).

Моделирование боевых действий двух армий



Модель становится автономной и принимает вид

$$\begin{cases} \dfrac{dN_1}{dt} = -\alpha_1 N_1 - \beta_2 N_2 \\ \dfrac{dN_2}{dt} = -\alpha_2 N_2 - \beta_1 N_1 \end{cases}.$$

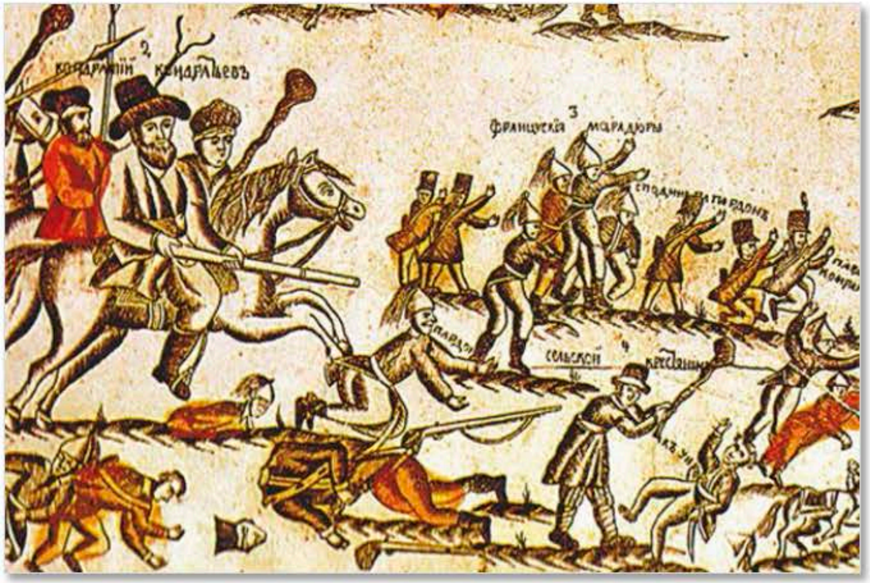
Из данной системы уравнений видно, что в данном случае численности сторон с течением времени могут только убывать.

МОДЕЛИРОВАНИЕ БОЕВЫХ ДЕЙСТВИЙ АРМИИ ПРОТИВ ПАРТИЗАН

МИЭТ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

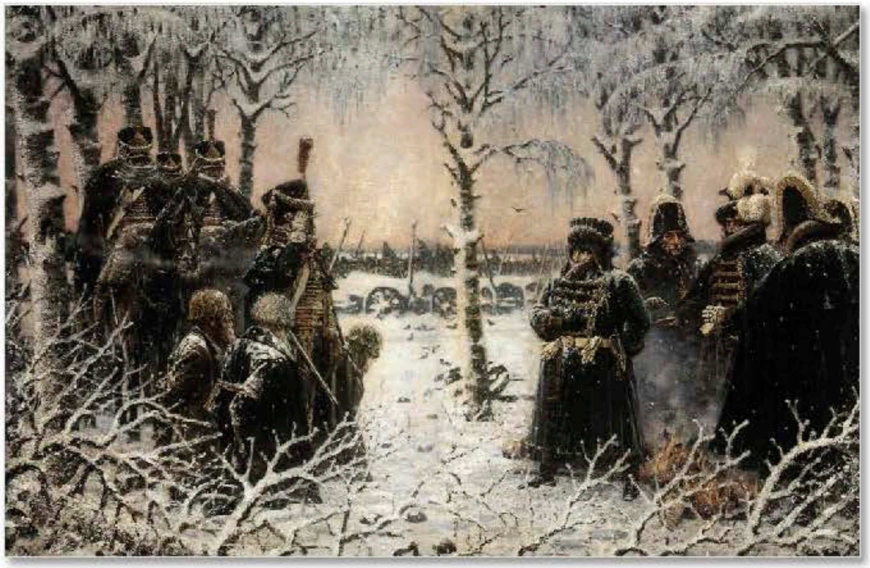
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
Лабораторные работы для студентов 4 курса

Моделирование боевых действий армии против партизан



Война между регулярными и партизанскими частями описывается другой моделью. Главное отличие в том, что нерегулярные соединения в сравнении с армейскими менее уязвимы, так как действуют скрытно, зачастую оставаясь невидимыми для соперника, вынужденного действовать неизбирательно, по площадям, занимаемым партизанами.

Моделирование боевых действий армии против партизан



Поэтому считается, что темп потерь партизан, проводящих свои операции в разных местах на некоторой территории, пропорционален не только численности армейских соединений $N_1(t)$, но и численности самих партизан $N_2(t)$, т.е. определяется членом вида $\beta_1(t) \cdot N_1(t) \cdot N_2(t)$. В результате модель становится нелинейной:

$$\begin{cases} \dfrac{dN_1}{dt} = -\alpha_1(t)N_1 - \beta_2(t)N_2 + \gamma_1(t) \\ \dfrac{dN_2}{dt} = -\alpha_2(t)N_2 - \beta_1(t)N_1N_2 + \gamma_2(t) \end{cases}.$$

Моделирование боевых действий армии против партизан

Все величины имеют тот же смысл, что и в модели боевых действий двух армий.

Коэффициенты $\alpha_{1,2} \geq 0$ характеризуют скорости потерь в силу обычных (не боевых) причин,
$\beta_{1,2} \geq 0$ – темпы потерь из-за действий соперника,
$\gamma_{1,2} \geq 0$ – скорости поступления подкреплений.

Моделирование боевых действий армии против партизан

Рассмотрим теперь действия регулярной армии против партизан в тех же упрощающих предположениях, что и в предыдущем случае.
Модель приобретает вид

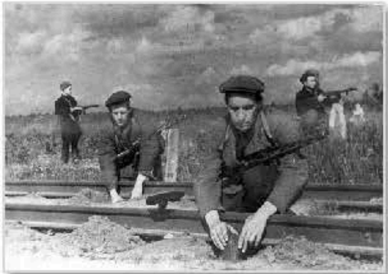
$$\begin{cases} \dfrac{dN_1}{dt} = -\beta_2 N_2 \\ \dfrac{dN_2}{dt} = -\beta_1 N_1 N_2 \end{cases}.$$

Численности сторон, как и прежде, убывают со временем, но по другому закону.

Задачи для самостоятельно решения

- ***Моделирование боевых действий двух армий***

1. Исследовать изменчивость численности первой армии $N_1(t)$ для разных соотношений темпов потерь из-за действий соперника (β_1 / β_2).
2. Исследовать изменчивость численности второй армии $N_2(t)$ при условии получения подкрепления каждой армией ($\gamma_1 \neq 0$ и $\gamma_2 \neq 0$)



- ***Моделирование боевых действий армии против партизан***

1. Исследовать изменчивость численности партизан $N_2(t)$ для разных соотношений темпов потерь из-за действий соперника (β_1 / β_2).
2. Исследовать изменчивость численности армии $N_1(t)$ при условии получения подкрепления армией ($\gamma_1 \neq 0$ и $\gamma_2 = 0$)