



**МИЭТ**

НАЦИОНАЛЬНЫЙ  
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Лабораторные работы для студентов 4 курса  
ПМ-41

Преподаватель:  
Лебедев С.А.



# ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 14

## МОДЕЛЬ ВЗАИМОЗАЧЕТА ДОЛГОВ ПРЕДПРИЯТИЙ



**МИЭТ**

НАЦИОНАЛЬНЫЙ  
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
Лабораторные работы для студентов 4 курса



# Модель взаимозачета долгов предприятий



Пусть экономическая система состоит из  $N$  предприятий, могущих иметь взаимные долги. Обозначим долги  $n$ -го предприятия  $m$ -му через  $x_{nm}$ , где  $1 < n, m < N$  ( $x_{nm} < 0$ , если первое предприятие должно второму, и  $x_{nm} > 0$  в обратном случае). Ясно, что

$$x_{nm} = -x_{mn}, \quad x_{nn} = x_{mm} = 0,$$

т.е. совокупность долгов описывается кососимметричной матрицей размера  $N \times N$  с нулевой диагональю ( $x_{nn} = 0$ , поскольку предприятие самому себе должно быть не может).

# Модель взаимозачета долгов предприятий



Сумма всех взаимных долгов вычисляется через индивидуальные долги по простой формуле

$$X = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N |x_{nm}|.$$

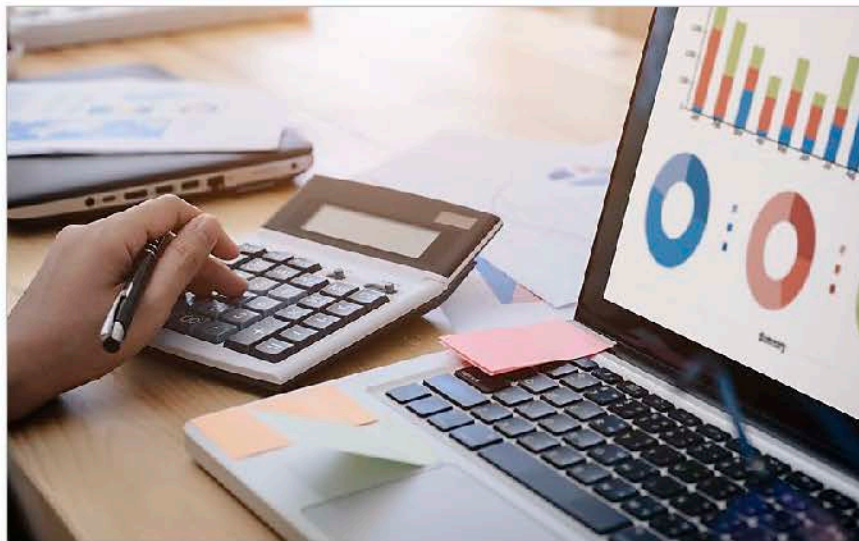
Величина служит одной из интегральных количественных характеристик финансового положения системы: если она сопоставима с суммой всех свободных средств предприятий  $X_0$ , т.е.

$$X \geq X_0 = \sum_{n=1}^N x_n,$$

то описываемая неравенством ситуация и означает кризис неплатежей (здесь  $x_{nm} \geq 0$  – индивидуальные свободные средства предприятий) .



# Модель взаимозачета долгов предприятий



Еще одна важная характеристика – баланс кредитов и долгов (сальдо) каждого предприятия

$$S_n = \sum_{m=1}^N x_{nm},$$

причем, как из этого выражения очевидно, возможны варианты  $S_n > 0$ ,  $S_n < 0$ ,  $S_n = 0$ . При  $S_n > 0$  предприятие является в некотором смысле кредитором предприятий-должников

, т.е. тех, у кого  $S_n < 0$  (при  $S_n = 0$  предприятие в отношении долгов «нейтрально»). При  $S_n < x_n$  индивидуальное финансовое состояние предприятия по существу нормальное, поскольку его реальные суммарные долги (или кредиты, «данные» им другим) меньше его свободных средств.

# Модель взаимозачета долгов предприятий



Аналогично, суммарное абсолютное сальдо системы

$$S = \sum_{n=1}^N |S_n|$$

служит макропоказателем ее возможного финансового «здоровья». Если  $S < X_0$ , то свободных средств в системе больше, чем действительных долгов, и потенциально она может

успешно функционировать (подобно системе трех предприятий из приведенного выше примера).

Между величинами  $X$  и  $S$  всегда существует определенное соотношение. Для любой произвольной матрицы долгов выполняется неравенство

$$X \geq S,$$

т.е. суммарный долг никак не может быть меньше суммарного сальдо.



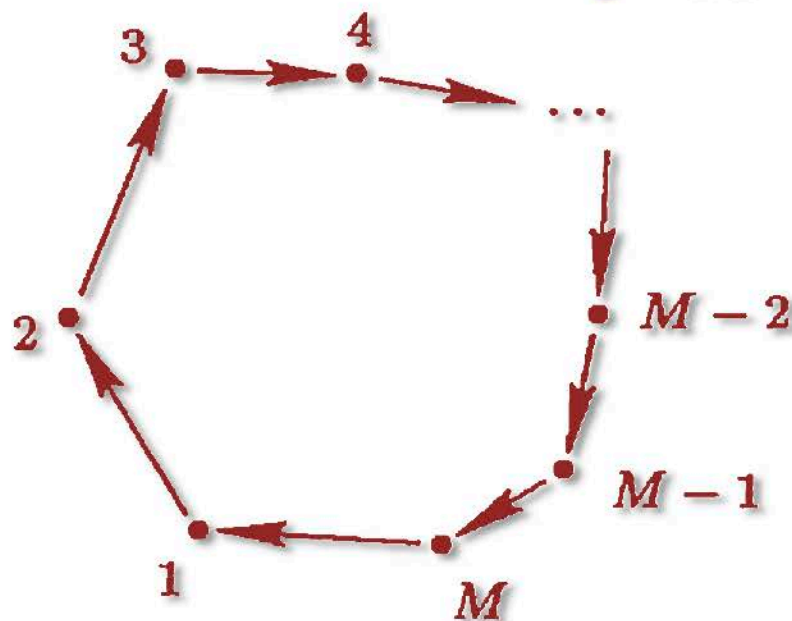
# Модель взаимозачета долгов предприятий



Задача погашения взаимных долгов состоит в том, чтобы, зная матрицу  $x_{nm}$ , найти матрицу  $x'_{nm}$  «новых» долгов, для которой выполнялось бы  $X' < X$ .

Очевидно, что идеальным ее решением было бы  $X' = S$ , т.е. когда неравенство  $X \geq S$  становится равенством. Заметим, что тогда для благополучной по существу системы с  $S \leq X_0$  достигалось бы соотношение  $X' = S \leq X_0$ , и после взаимозачета она могла бы нормально работать (хотя уменьшение величины  $X$  в любом случае полезно).

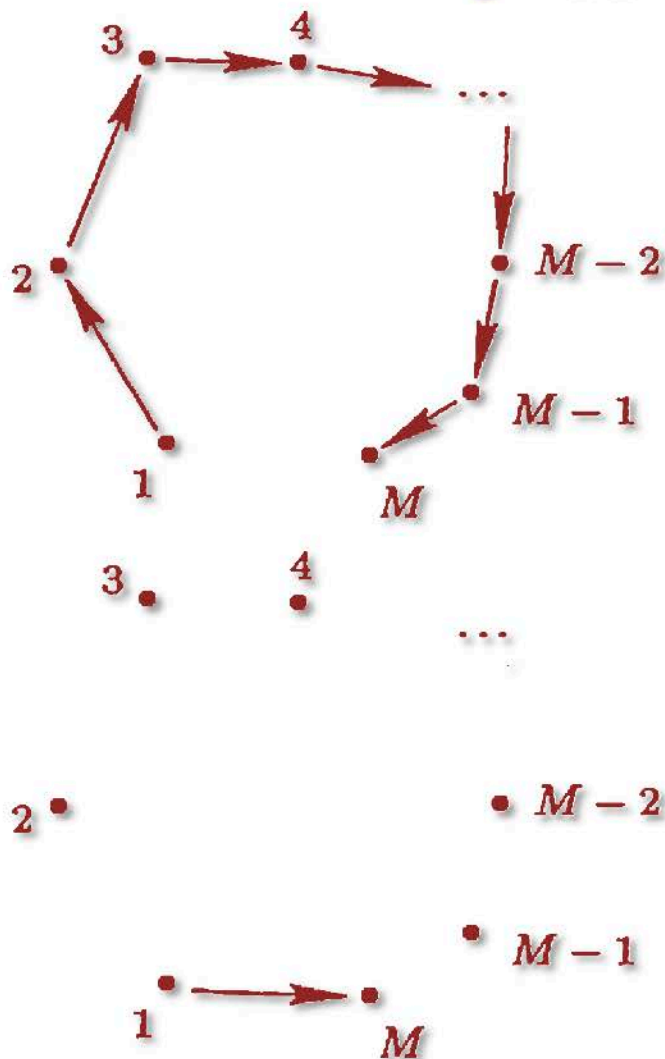
# Модель взаимозачета долгов предприятий



Процедура прослеживания цепочек неплатежей, примененная выше для трех предприятий, не только трудновыполнима для  $N$  предприятий, но имеет также и принципиальный недостаток. Действительно, рассмотрим сначала цепочку, в которой каждое предприятие с первого по  $M$ -е ( $M \leq N$ ) должно другому одинаковую сумму, и такую же сумму должно  $M$ -е предприятие первому. Цепочка замкнута, и решение очевидно – все долги в цепочке погашаются.

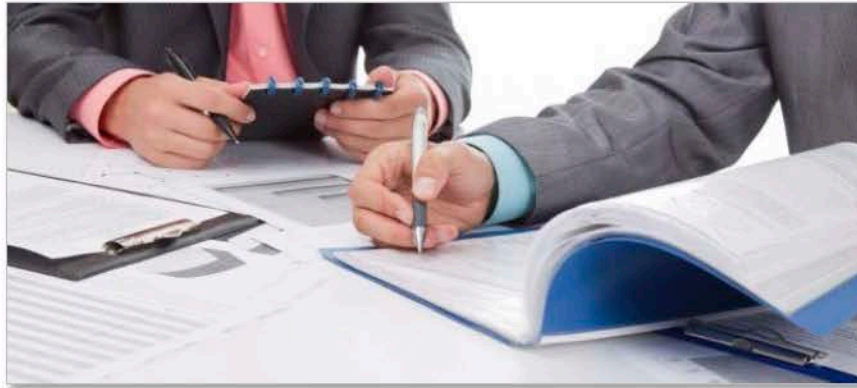


# Модель взаимозачета долгов предприятий



Пусть теперь  $M$ -е предприятие не должно первому. Тогда цепочка разомкнута, и этот метод неприменим. В то же время простое решение заключается в том, что долги предприятий со второго по  $(M-1)$ -е аннулируются, а долг первого переадресовывается  $M$ -му). Экономический смысл переадресации соответствует вексельному обращению, когда долговое обязательство меняет своих хозяев, и в результате у должника (первое предприятие) появляется новый кредитор ( $M$ -е предприятие).

# Модель взаимозачета долгов предприятий



В отличие от ситуации с долгами в цепочках полная система долгов по всем цепочкам замкнута, так как рассматриваются взаимные долги. В самом деле, из свойства  $x_{nm} = -x_{mn}$  следует, что

$$\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N x_{nm} = 0$$

для любой совокупности неплатежей.

Учитывая, что  $S_n = \sum_{m=1}^N x_{nm}$ , из последнего равенства получаем

$$\sum_{n=1}^N S_n = 0, \quad \text{или} \quad \sum_{S_n > 0} S_n = - \sum_{S_n < 0} S_n = \frac{S}{2},$$

т.е. сумма положительных сальдо предприятий равна по абсолютной величине сумме отрицательных сальдо. Рассматриваемая на макроуровне система взаимных долгов обладает свойством «симметричной консервативности» (второе уравнение), а «закон сохранения» (первое уравнение) – аналог обычных законов сохранения (массы, энергии и т. д.) применительно к изучаемой ситуации.



# Модель взаимозачета долгов предприятий



Равенство

$$\sum_{S_n > 0} S_n = - \sum_{S_n < 0} S_n = \frac{S}{2}$$

проясняет построение математической модели идеального взаимозачета, который производится при следующих естественных условиях:

- 1) все долги  $x_{nm}$  известны и признаются предприятиями;
- 2) при проведении взаимозачета сальдо предприятий  $S_n$  остаются неизменными:  $S'_n = S_n$ , т.е. индивидуальное финансовое положение каждого из них в этом смысле не изменяется;
- 3) часть долгов  $x_{nm}$  списывается, а часть переадресовывается, т.е. у предприятий могут появиться новые должники и кредиторы и исчезнуть часть старых.

# Модель взаимозачета долгов предприятий



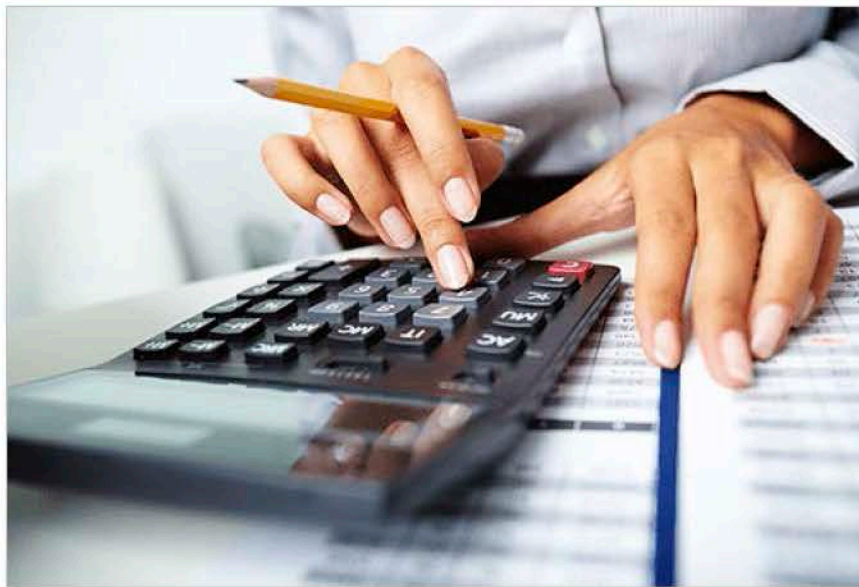
Суть макропроцедуры взаимозачета состоит в том, что вместо величин  $x_{nt}$  рассматриваются величины  $S_n$ . Предприятия с  $S_n < 0$  объявляются должниками (в размере своих сальдо), а предприятия с  $S_n > 0$  – кредиторами (в тех же размерах). Затем долги предприятий с  $S_n < 0$  каким-то образом распределяются между кредиторами, т.е. находится новая система долгов  $x'_{nt}$ . При этом выполнены закон сохранения

$$\sum_{n=1}^N S_n = 0,$$

условие 2) и достигается равенство  $X' = S$ ; поэтому решение задачи является оптимальным.



# Модель взаимозачета долгов предприятий



Таких оптимальных решений может быть, вообще говоря, много, так как распределять долги между кредиторами можно разными способами. Приведем два наиболее простых и наглядных. Первое из них дается несложной формулой, по которой новые долги вычисляются через старые:

$$x'_{nm} = \frac{S_n |S_m| - S_m |S_n|}{S}.$$

Согласно этому алгоритму долг любого предприятия (равный  $S_n$ , если  $S_n < 0$ ) расписывается по предприятиям-кредиторам в долях, пропорциональных величинам их сальдо (равным  $S_m$ , если  $S_m > 0$ ). Предприятиям с большим положительным сальдо причитается от каждого из должников большая часть его долгов, причем в сумме они дают величину  $S_m$ . Для предприятий с нулевым сальдо взаимозачет сводится к погашению всех их долгов и всех долгов им.

# Модель взаимозачета долгов предприятий



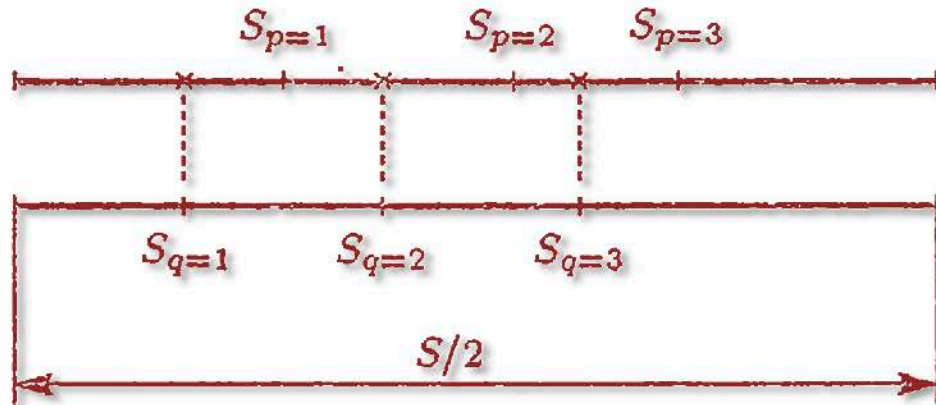
Заметим, что в решении

$$x'_{nm} = \frac{S_n |S_m| - S_m |S_n|}{S}.$$

для новых долгов имеем  $x'_{nm} = 0$  при  $S_n < 0, S_m < 0$  либо при  $S_n > 0, S_m > 0$  (после взаимозачета должники не должны должникам, а кредиторы – кредиторам). Это означает, что число получившихся финансовых связей между предприятиями значительно меньше максимально возможного, когда каждое предприятие является должником или кредитором любого другого, и матрица долгов не имеет нулевых элементов (кроме, разумеется, диагональных).



# Модель взаимозачета долгов предприятий



Количество связей может быть значительно уменьшено, если провести предварительное упорядочивание предприятий по абсолютным значениям их сальдо и установить непосредственные связи между должниками и кредиторами одного масштаба (крупных с крупными, мелких с мелкими и т. д.). Эта процедура допускает простую геометрическую

интерпретацию. На рисунке на верхней прямой линии описано распределение сальдо кредиторов (в убывающем порядке). Длина отрезков этой прямой равна величине сальдо каждого предприятия  $S_p > 0$ ,  $1 < p < N$ , а её общая длина, очевидно, равна  $S/2$ . На нижней прямой описано распределение сальдо должников  $S_q < 0$ ,  $1 < q < N$ ,  $p + q \leq N$  (сальдо взяты с обратным знаком) также в убывающем порядке. Её длина равна  $S/2$ . Штриховые линии, проведенные из узлов нижней прямой, делят «прямую кредиторов» на  $q$  отрезков, равных величине долга каждого предприятия. Этот долг либо достается одному кредитору, либо делится между несколькими в соответствии с расположением узлов верхней прямой относительно данного отрезка.

# Модель взаимозачета долгов предприятий

Описанный алгоритм оптимален по критерию  $X' = S$  и представляется наилучшим по числу связей, остающихся после взаимозачета.

Пример подобного взаимозачета в системе с  $N = 10$  и начальной матрицей долгов с 90 ненулевыми недиагональными элементами приведен ниже. Конечная матрица содержит лишь 7 ненулевых элементов. В специальных случаях у одного должника остается один кредитор, и наоборот.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Начальная матрица ( $X = 3729$ )									
2	-25								
3	-1	-20							
4	4	25	-2						
5	25	-450	25	30					
6	-15	150	-30	20	-928				
7	3	-40	3	3	5	25			
8	1	-22	-2	-2	4	-15	5		
9	10	322	-15	-25	498	-800	-10	20	
10	1	-25	-2	1	-20	15	-1	-3	30

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Конечная матрица ( $X' = S = 62$ )									
2	2								
3	0	0							
4	0	0	0						
5	0	0	0	0					
6	0	0	0	0	-28				
7	1	0	0	0	0	0			
8	0	-7	0	0	0	0	0		
9	0	-18	0	0	-2	0	0	0	
10	0	0	0	0	0	4	0	0	0



# Задачи для самостоятельно решения



- *Вариант 1*

1. Придумать матрицу взаимодолгов 15 предприятий.
2. Провести взаимозачет для смоделированной ситуации.



- *Вариант 2*

1. Придумать матрицу взаимодолгов 20 предприятий.
2. Провести взаимозачет для смоделированной ситуации.