Отчет по лабораторной работе №9 по Мат Моделированию

1-2. Содержательная постановка задачи

1.1

Суть поставленной задачи:
Проанализировать, если начальные численности в точности равны величинам M_0 и N_0, то как с течением времени они изменяются, а также если по каким-то причинам численности ненамного отклоняются от величин M_0 и N_0, то вернется ли система в положение равновесияю.

1.2

Суть поставленной задачи:
Проанализировать, если начальные значения M_0 и N_0 заметно отличаются от равновесных, то каким образом они меняются со временем относительно величин M_0 и N_0, а также вычислить период колебаний в системе "хищник-жертва" в зависимости от ее характеристик (α,β,C1,C2) и начального состояния M_0 и N_0.

3. Концептуальная постанока задачи

3.1 3.2

Математическая модель наиболее простой, т.е. двувидовой системы «хищник – жертва» основывается на следующих предположениях:

1. Численности популяций жертв N и хищников M зависят только от времени (точечная модель, не учитывающая пространственное распределение популяции на занимаемой территории).

2. В отсутствие взаимодействия численность видов изменяется по модели Мальтуса при этом число жертв увеличивается, а число хищников падает, так как им в этом случае нечем питаться:
   $\frac{dN}{dt} = a_N N$, $\frac{dM}{dt} = a_M M$, $a_N > 0$, $a_M > 0$.
3. Естественная смертность жертвы и естественная рождаемость хищника считаются несущественными.
4. Эффект насыщения численности обеих популяций не учитывается.
5. Скорость роста численности жертвы уменьшается пропорционально численности хищников, т.е. величине $C_1 M > 0$, ($C_1 > 0$), а темп роста хищников увеличивается пропорционально численности жертвы, т. е. величине $C_2 N (C_2 > 0)$

4. Математическая постановка задачи

4.1 4.2

Объединяя предположения (1) – (5), приходим к системе уравнений Лотки – Вольтерра:

$$\begin{cases} \frac{dN(t)}{dt} = (\alpha - C_1 M) N(t) \\ \frac{dM(t)}{dt} = (-\beta - C_2 N) M(t) \end{cases}$$

из которой по начальным численностям $N(t_0) = N_0$, $M(t_0) = M_0$ определяется численность популяции в любой момент t>0.

Нелинейную систему удобно исследовать в плоскcти переменных N,M для чего первое уравнения поделим на второе :

$\frac{dN(t)}{dM(t)} = \frac{(\alpha - C_1 M) N(t)}{(-\beta + C_2 N) M(t)}$.

Уравнения имеют положения равновесия(или стационарное, не зависящее от времени решение) $M_0 = \frac{\alpha}{C_1}$, $N_0 = \frac{\beta}{C_2}$

5. Реализация

5.1

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import odeint

alpha = 0.6
beta = 0.45
C1 = 0.15
C2 = 0.1

N0 = beta / C2
M0 = alpha / C1

def ode_N_M(N_M, t):
    N, M = N_M
    dN = (alpha - C1 * M) * N
    dM = (-beta + C2 * N) * M
    return [dN, dM]

def calculation(Nt_0, Mt_0, style):
    t = np.linspace(0, 150, 1000)
    initial_conditions = [Nt_0, Mt_0]


    N_M = odeint(ode_N_M, initial_conditions, t)
    plt.figure()
    plt.plot(t, N_M[:, 0], label='Жертва')
    plt.plot(t, N_M[:, 1], label='Хищник')
    plt.xlabel('t')
    plt.ylabel('N, M')
    plt.legend()
    plt.grid()

    plt.figure()
    plt.plot(N_M[:, 0], N_M[:, 1], style)
    plt.xlabel('Жертва')
    plt.ylabel('Хищник')
    plt.grid()
```

```python
    plt.show()


Nt_0 = N0
Mt_0 = M0
calculation(Nt_0, Mt_0, '*')


Nt_0 = N0 + 1
Mt_0 = M0 - 1
calculation(Nt_0, Mt_0, '')
```

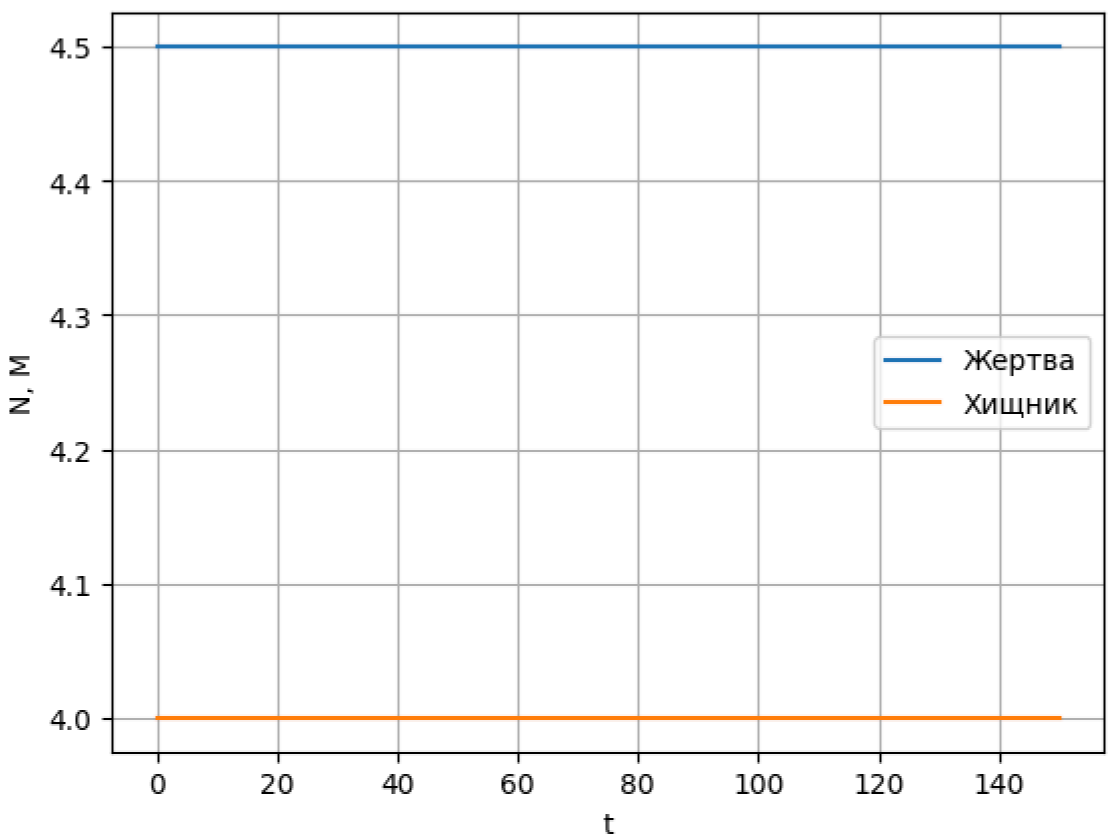
5.2

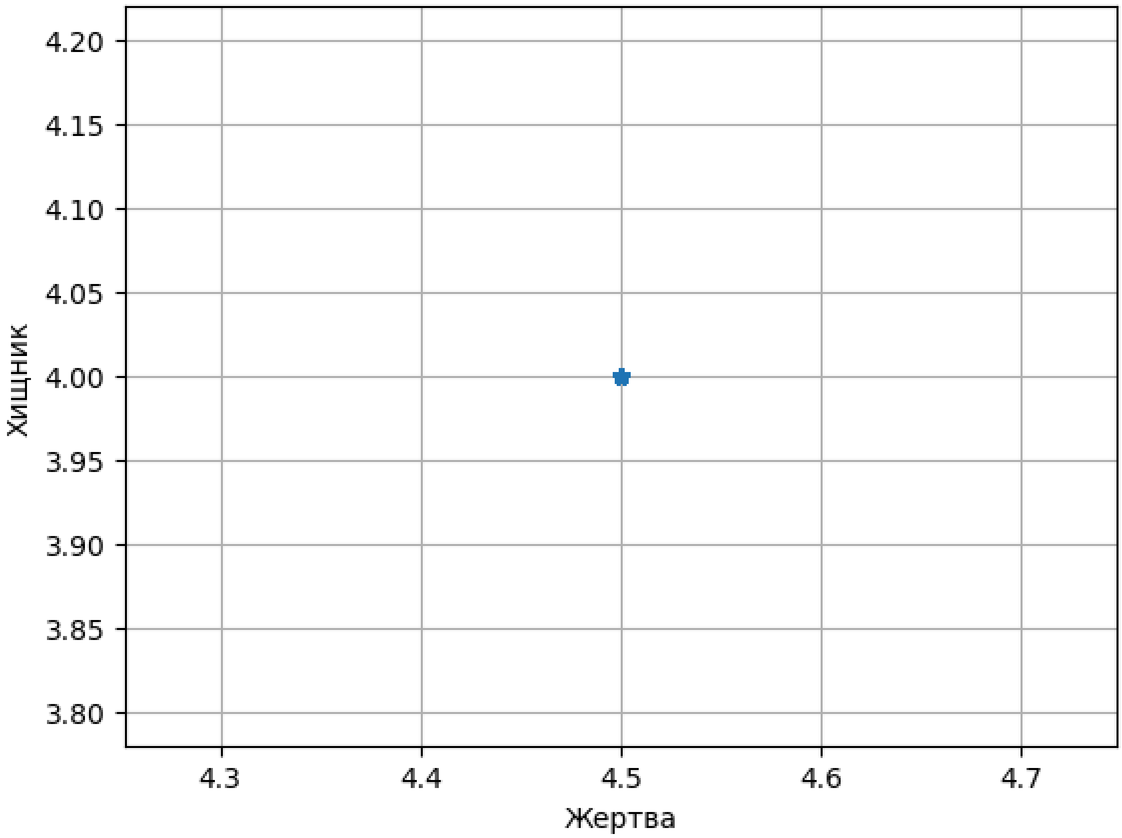
```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import odeint

alpha = 0.6
beta = 0.45
C1 = 0.15
C2 = 0.1

N0 = beta / C2
M0 = alpha / C1

def model(N_M, t):
    N, M = N_M
    dNdt = (alpha - C1 * M) * N
    dMdt = (-beta + C2 * N) * M
    return [dNdt, dMdt]

def calculation(Nt_0, Mt_0):
    t = np.linspace(0, 100, 500)
    N_M0 = [Nt_0, Mt_0]
    N_M = odeint(model, N_M0, t)

    plt.figure()
    plt.plot(t, N_M[:, 0], label='Жертва (N)')
    plt.plot(t, N_M[:, 1], label='Хищник (M)')
    plt.xlabel('Время (t)')
    plt.ylabel('Численности (N, M)')
    plt.legend()
    plt.grid()
    plt.title('Динамика численностей при отклонениях')
    plt.show()

    plt.figure()
    plt.plot(N_M[:, 0], N_M[:, 1])
    plt.xlabel('Жертва (N)')
    plt.ylabel('Хищник (M)')
    plt.title('Фаза (N-M) плоскости')
    plt.grid()
    plt.show()
```

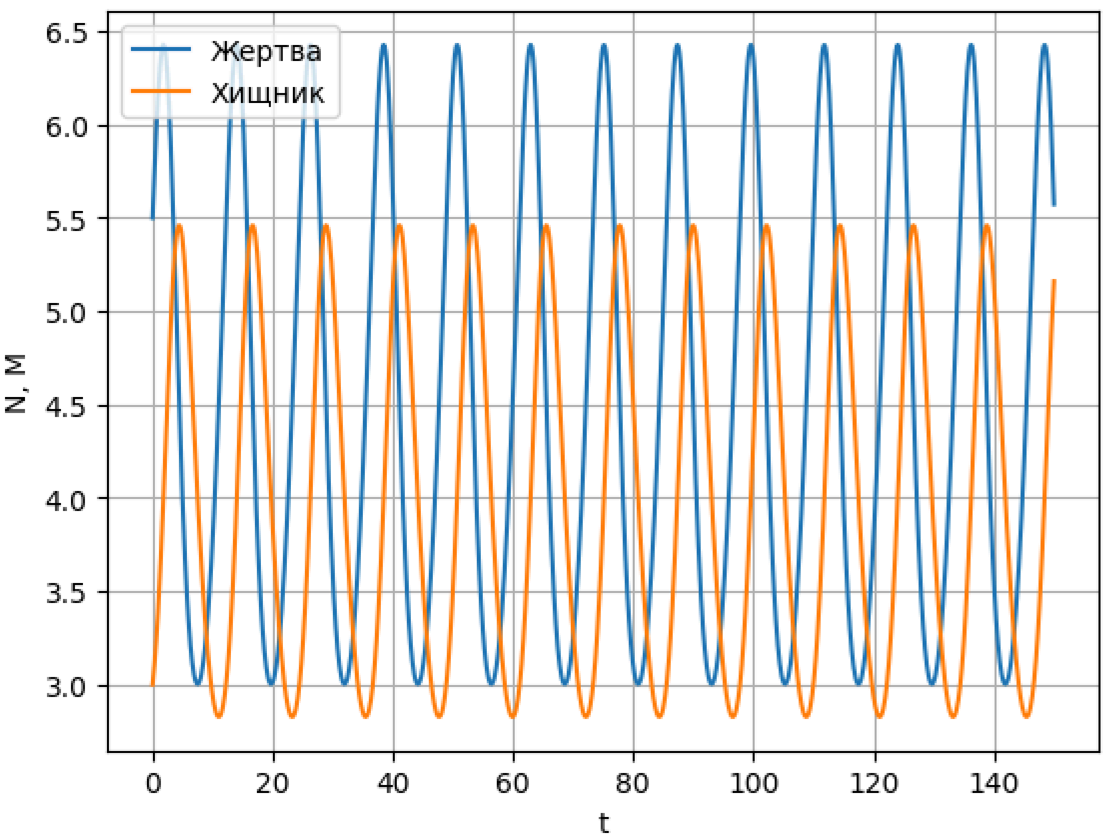
```
calculation(N0 * 0.5, M0 * 2)

def calculate_period(C1, C2):
    return 2 * np.pi * np.sqrt(1 / (C1 * C2*M0*N0))

period = calculate_period(C1, C2)
print(f"Период колебаний системы: {period:.2f}")
```

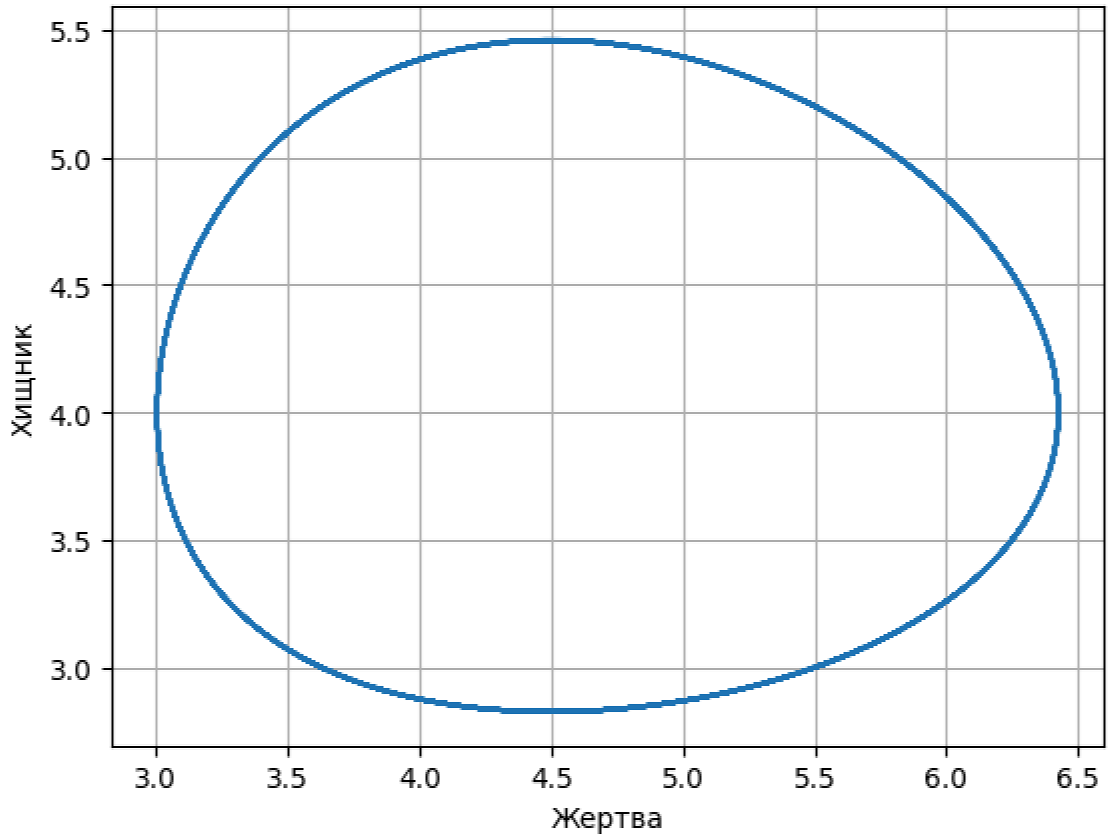
7. Численное иследование модели

7.1

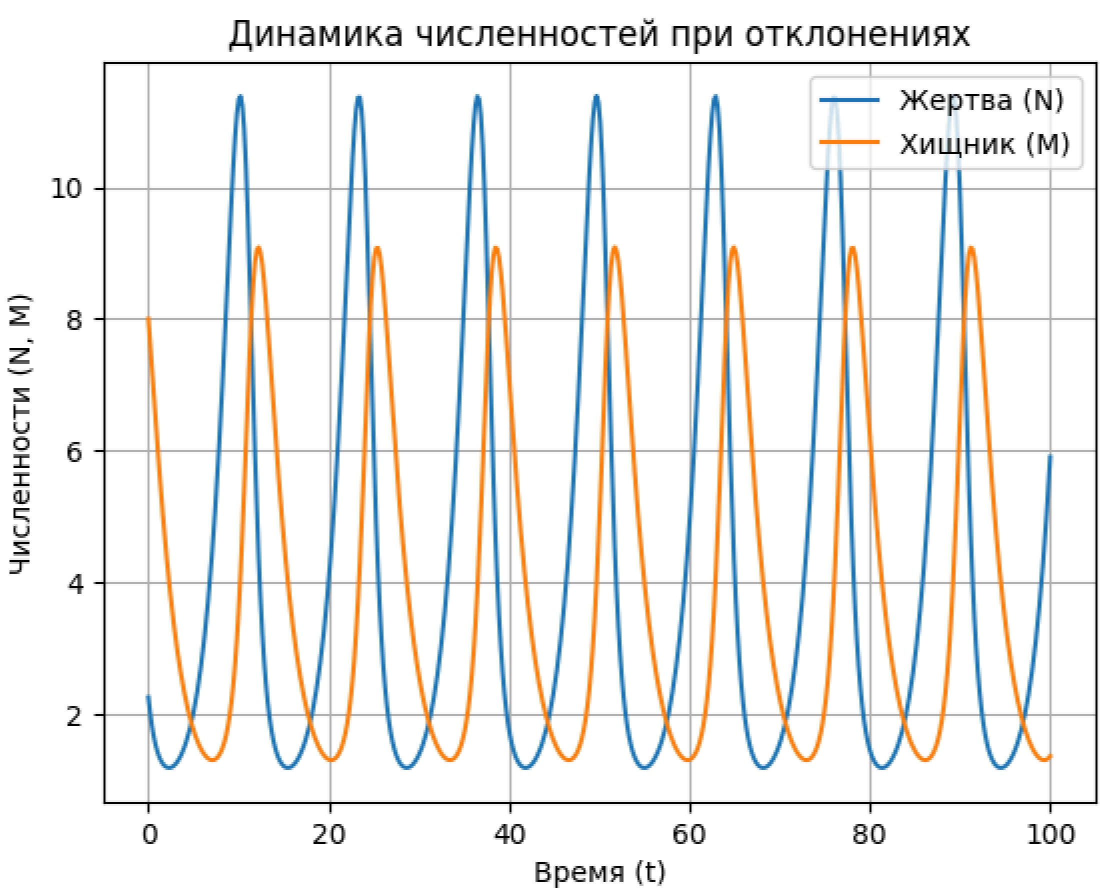


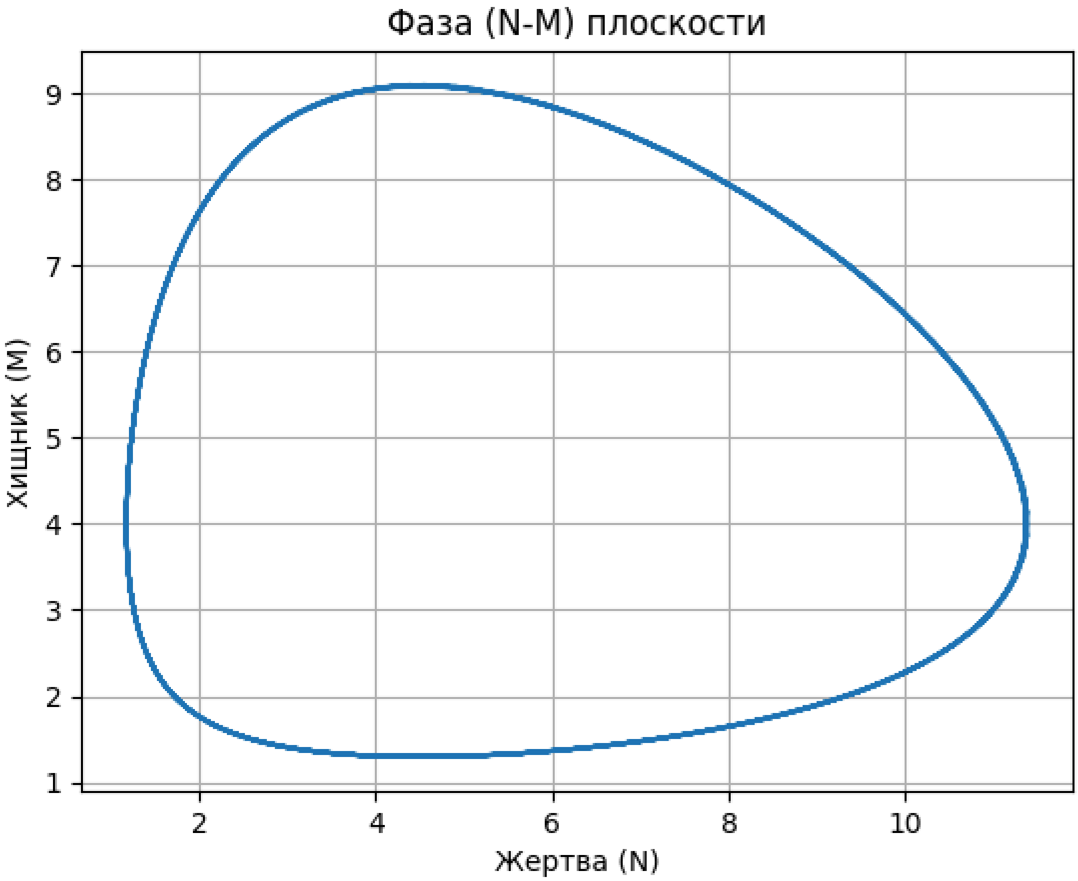

4.20
4.15
4.10
4.05
4.00
3.95
3.90
3.85
3.80
Хищник
4.3
4.4
4.5
4.6
4.7
Жертва


Жертва
Хищник
6.5
6.0
5.5
5.0
4.5
4.0
3.5
3.0
N, M
0
20
40
60
80
100
120
140
t


Хищник
Жертва
5.5
5.0
4.5
4.0
3.5
3.0
3.0
3.5
4.0
4.5
5.0
5.5
6.0
6.5

7.2


Динамика численностей при отклонениях
Жертва (N)
Хищник (M)
Численности (N, M)
Время (t)
0
20
40
60
80
100
2
4
6
8
10



Период колебаний системы: 12.09