Отчет по лабораторной работе №N по Мат Моделированию

1-2. Содержательная постановка задачи

1.1

Суть поставленной задачи:
Исследовать изменчивость численности первой армии $N_2(t)$длясоотношенийтемповпотерьиз $-$ задействийсоперника(\beta_1 / \beta2), атакжеисследоватьизменчивостьармииN_2(t) приусловииполученияподкреплениякаждойармией(\gamma_1 !=0 и \gamma_2 !=0)

1.2

Суть поставленной задачи:
Исследовать изменчивость численности партизан $N_2(t)$ для разных соотношений темпов потерь из-за действий соперника (β_1/β_2), а так же исследовать изменчивость численности армии $N_1(t)$ при условии получения подкрепления армией (\gamma_1 != 0 и \gamma_2 !=0)

3. Концептуальная постанока задачи

3.1 и 3.2

Главной характеристикой противоборствующих сторон в рассматриваемой модели являются численности сторон $N_1(t) >= 0 и N_2(t) >= 0$. Если какой-то момент времени одна из численностей обращается в нуль, то данная сторона считается потерпевшей поражение (притом, что в этот момент численность другой стороны положительная).
В случае действий между регулярными частями динамика их численности определяется тремя факторами:

1. Скоростью уменьшения состава из-за причин, непосредственно не связанных с боевыми действиями (болезни, травмы, дезертирство), которое учитывается коэффициентами $\alpha_1(t) и \alpha_2(t)$ соответственно;
2. Темпом потерь, обусловленных боевыми действиями противоборствующей стороны (которые в свою очередь определяются качеством ее стратегии и тактики, уровнем морального духа и

профессионализмом бойцов, вооружениями и т.д.), которое учитывается коэффициентами $\beta_1(t) и \beta_2(t)$ соответственно;
3. Скоростью поступления подкреплений, которая считается некоторой заданной функцией времени $\gamma_1(t) и \gamma_2(t)$

4. Математическая постановка задачи

4.1

При этих предположениях для $N_1(t), N_2(t)$ получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = -\alpha_1(t)N_1 - \beta_2(t)N_2 + \gamma_1(t), \\ \frac{dN_2}{dt} = -\alpha_2(t)N_2 - \beta_1(t)N_1 + \gamma_2(t), \end{cases}$$

из которой при заданных функциях $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ (i=1,2) и начальных значениях $N_1(t_0) = N_1(0)$, $N_2(t_0) = N_2(0)$, однозначно определяется решение в любой момент времени t>0. Коэффициенты $\alpha_{1,2} >= 0$ характеризуют скорости потерь в силу обычных (не боевых) причин, $\beta_{1,2} >= 0$ - темпы потерь из-за действий соперника, $\gamma_{1,2} >= 0$-скорости поступлений подкреплений

Используем модель Ланчестера

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = -\alpha_1(t)N_1 - \beta_2(t)N_2 + \gamma_1(t), \\ \frac{dN_2}{dt} = -\alpha_2(t)N_2 - \beta_1(t)N_1 + \gamma_2(t), \end{cases}$$

в частном случае:
1.$\gamma_1 = \gamma_2 = 0$(стороны не получают подкреплений и как бы предоставлены сами себе).
2.$\alpha_1 = const$,$\alpha_1 = const$,$\beta_1 = const$,$\beta_2 = const$ (последнее означает, в частности, что у противников всегда найдется достаточное количество вооружений, которое может использоваться годными к несению службы бойцам).
Модель становиться автономной и принимает вид

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = -\alpha_1 N_1 - \beta_2 N_2, \\ \frac{dN_2}{dt} = -\alpha_2 N_2 - \beta_1 N_1. \end{cases}$$

Из данной системы уравнений видно, что в данном случае численности сторон с течением времени могут только убывать

4.2

Темпы потерь партизан, проводящих операции в разных местах на некоторой территории, пропорционален не только численности армейких соединений

$N_1(t)$, ноичисленностисамихпратизан, т.е.определяетсячленомвида\beta_1(t)*N_1(t)*N_2(t)

.Врезультатемодельстановитсянелинейной : $\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = -\alpha_1(t)N_1 - \beta_2(t)N_2 + \gamma_1(t), \\ \frac{dN_2}{dt} = -\alpha_2(t)N_2 - \beta_1(t)N_1N_2 + \gamma_2(t), \end{cases}$

Всевеличиныимеюттотжесмысл, чтоивмоделибоевыхдействийдвухармий.Коэффициенты

\alpha_{1,2}>=0характеризуютскоростипотерьвсилуобчных(небоевых)причин,\beta_{1,2}>=0

−темпыпотерьиз − задействийсоперника,\gamma_{1,2}>=0$ - скорости поступления подкреплений.

Рассмотрим теперь действия регулярной армии против партизан в тех же упрощениях, что и в предыдущем случае. Модель приобретает вид

$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = -\beta_2 N_2, \\ \frac{dN_2}{dt} = -\beta_1 N_1 N_2. \end{cases}$ Численностисторон, какипрежде, убываютсовременем, employees ноподругомузакону.

5. Реализация

5.1

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import odeint

def ode_n1_n2(N, t, alpha, beta, gamma):
    N1, N2 = N
    dN1 = -alpha[0] * N1 - beta[0] * N2 + gamma[0]
    dN2 = -alpha[1] * N2 - beta[1] * N1 + gamma[1]
    return [dN1, dN2]

alpha = [0.05, 0.05]
gamma = [0, 0]

plt.figure(figsize=(10, 6))
for beta1 in np.arange(0, 1.1, 0.2):
    beta = [beta1, 1.0]
    N0 = [500, 500]
    t = np.linspace(0, 1, 100)

    N = odeint(ode_n1_n2, N0, t, args=(alpha, beta, gamma))

    plt.plot(t, N[:, 0], label=f'$\\beta1/\\beta2 = {beta[0] / beta[1]:.5f}$')

plt.xlabel('t')
plt.ylabel('N1')
plt.title('Изменчивость численности первой армии N1(t)')
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()

alpha = [0.05, 0.05]
beta = [0.1, 0.1]

plt.figure(figsize=(10, 6))
for gamma1 in np.arange(0, 151, 50):
    gamma = [gamma1, 50]
    N0 = [500, 500]
    t = np.linspace(0, 1, 100)

    N = odeint(ode_n1_n2, N0, t, args=(alpha, beta, gamma))
```

```
    plt.plot(t, N[:, 1], label=f'$\\gamma1/\\gamma2 = {gamma[0] / gamma[1]:.5f}$')

plt.xlabel('t')
plt.ylabel('N2')
plt.title('Изменчивость численности второй армии N2(t)')
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
```

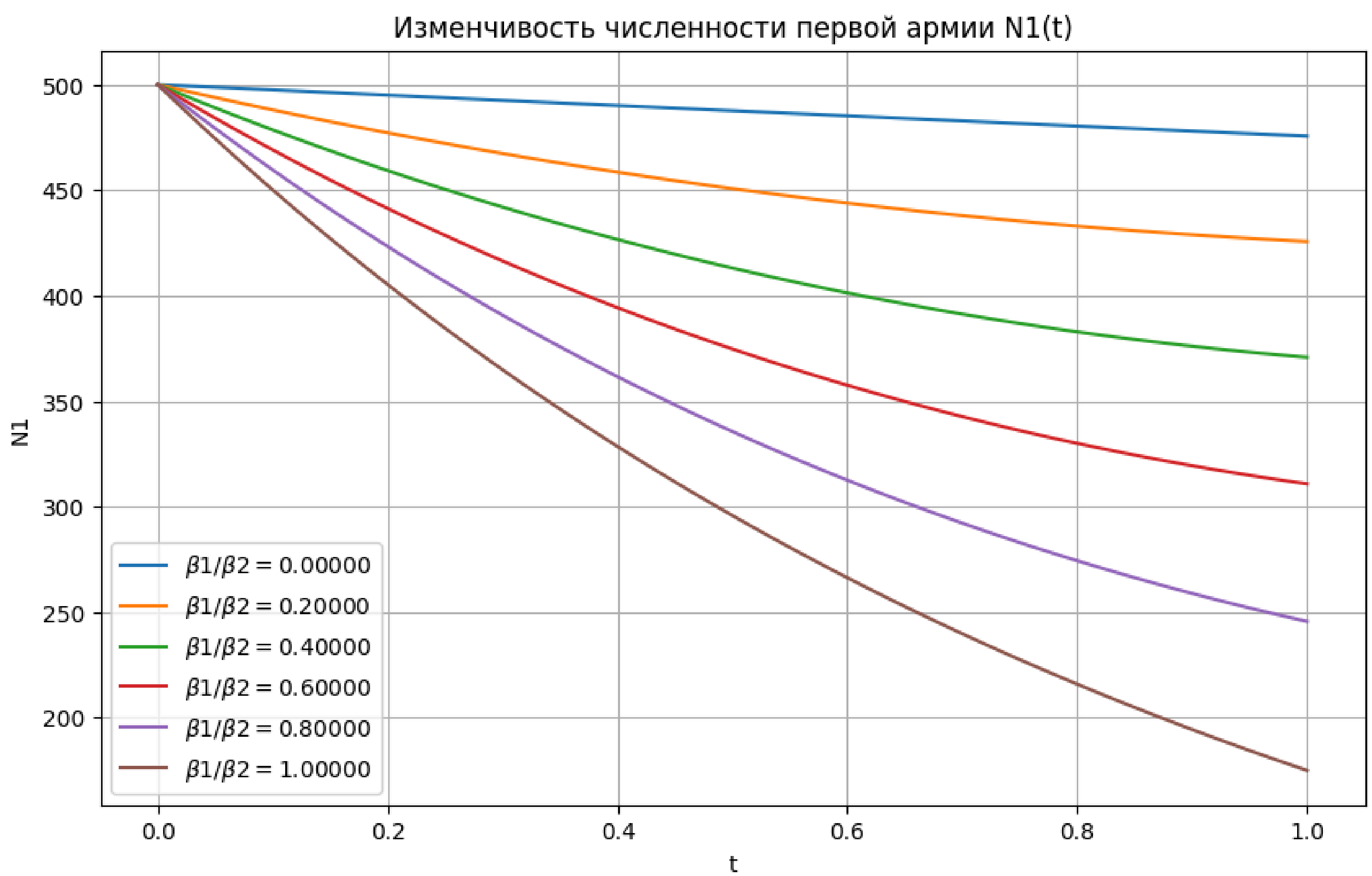
5.2

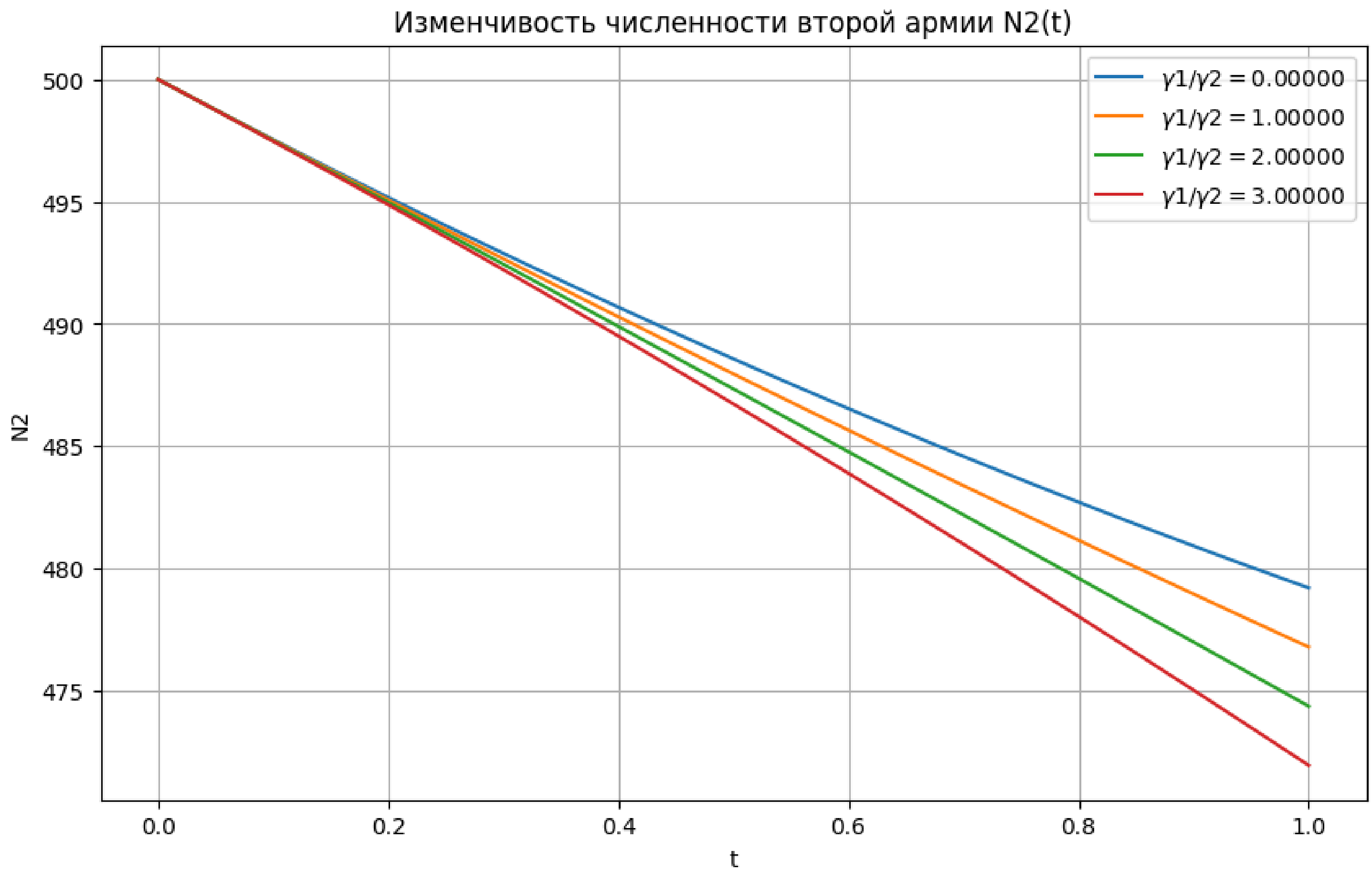
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import odeint

def ode_n1_n2(N, t, alpha, beta, gamma):
    N1, N2 = N
    dN1 = -alpha[0] * N1 - beta[1] * N2 + gamma[0]
    dN2 = -alpha[1] * N2 - beta[0] * N1 * N2 + gamma[1]
    return [dN1, dN2]


alpha = [0.05, 0.05]
gamma = [0, 0]


plt.figure(figsize=(10, 6))
for beta1 in np.arange(0, 1.1, 0.2):
    beta = [beta1, 0.7]
    N0 = [100, 1000]
    t = np.linspace(0, 1, 100)

    N = odeint(ode_n1_n2, N0, t, args=(alpha, beta, gamma))

    plt.plot(t, N[:, 1], label=f'beta1/beta2 = {beta[0] / beta[1]:.5f}')

plt.xlabel('t')
plt.ylabel('N2')
plt.title('Изменчивость численности партизан N2(t)')
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()


plt.figure(figsize=(10, 6))
alpha = [0.05, 0.05]
beta = [0.1, 0.1]

for gamma1 in np.arange(0, 151, 50):
    gamma = [gamma1, 50]
    N0 = [500, 500]
    t = np.linspace(0, 1, 100)
```

```
    N = odeint(ode_n1_n2, N0, t, args=(alpha, beta, gamma))


    plt.plot(t, N[:, 0], label=f'gamma1/gamma2 = {gamma[0] / gamma[1]:.5f}')

plt.xlabel('t')
plt.ylabel('N1')
plt.title('Изменчивость численности армии N1(t)')
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
```

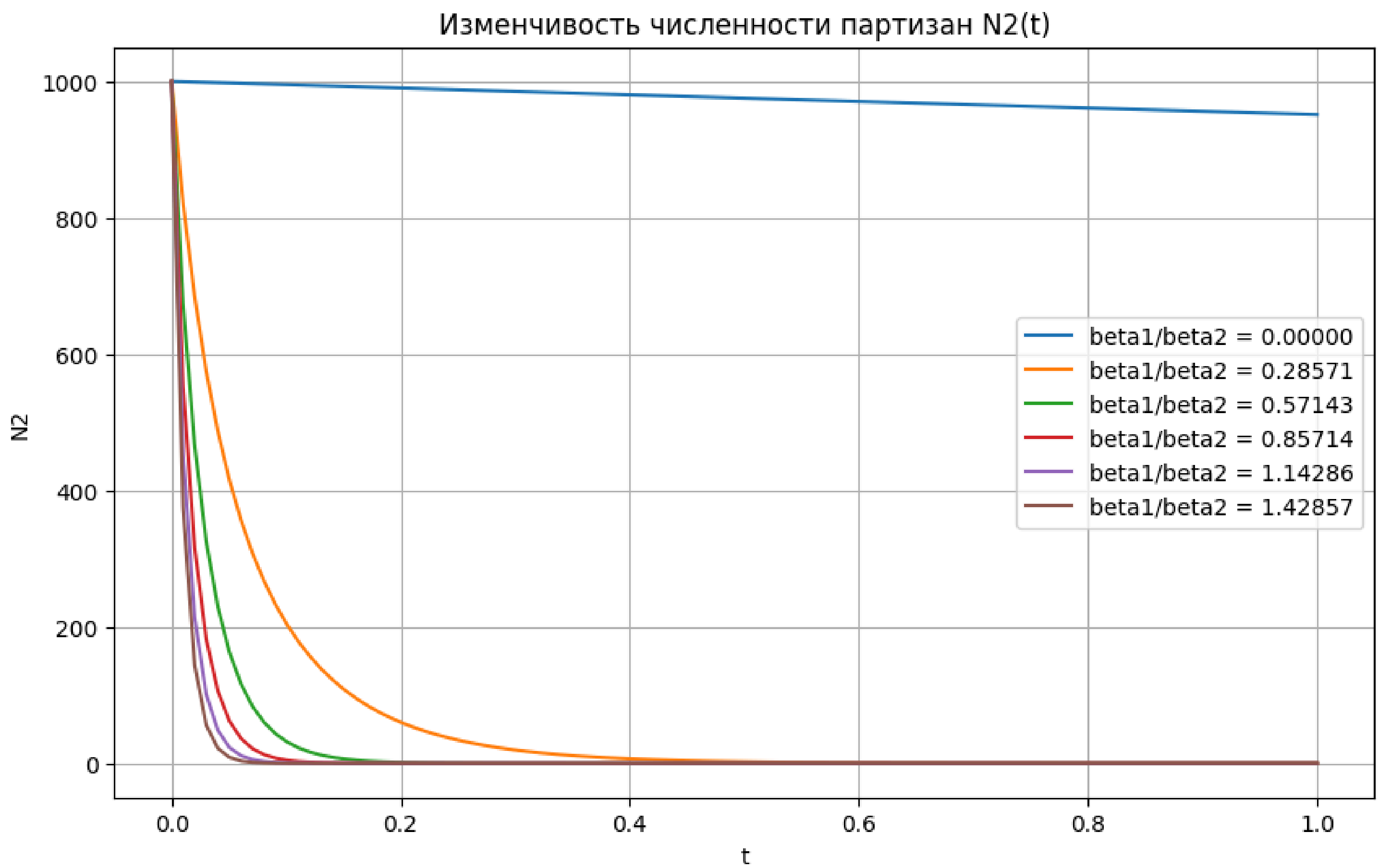
6. Численное иследование модели

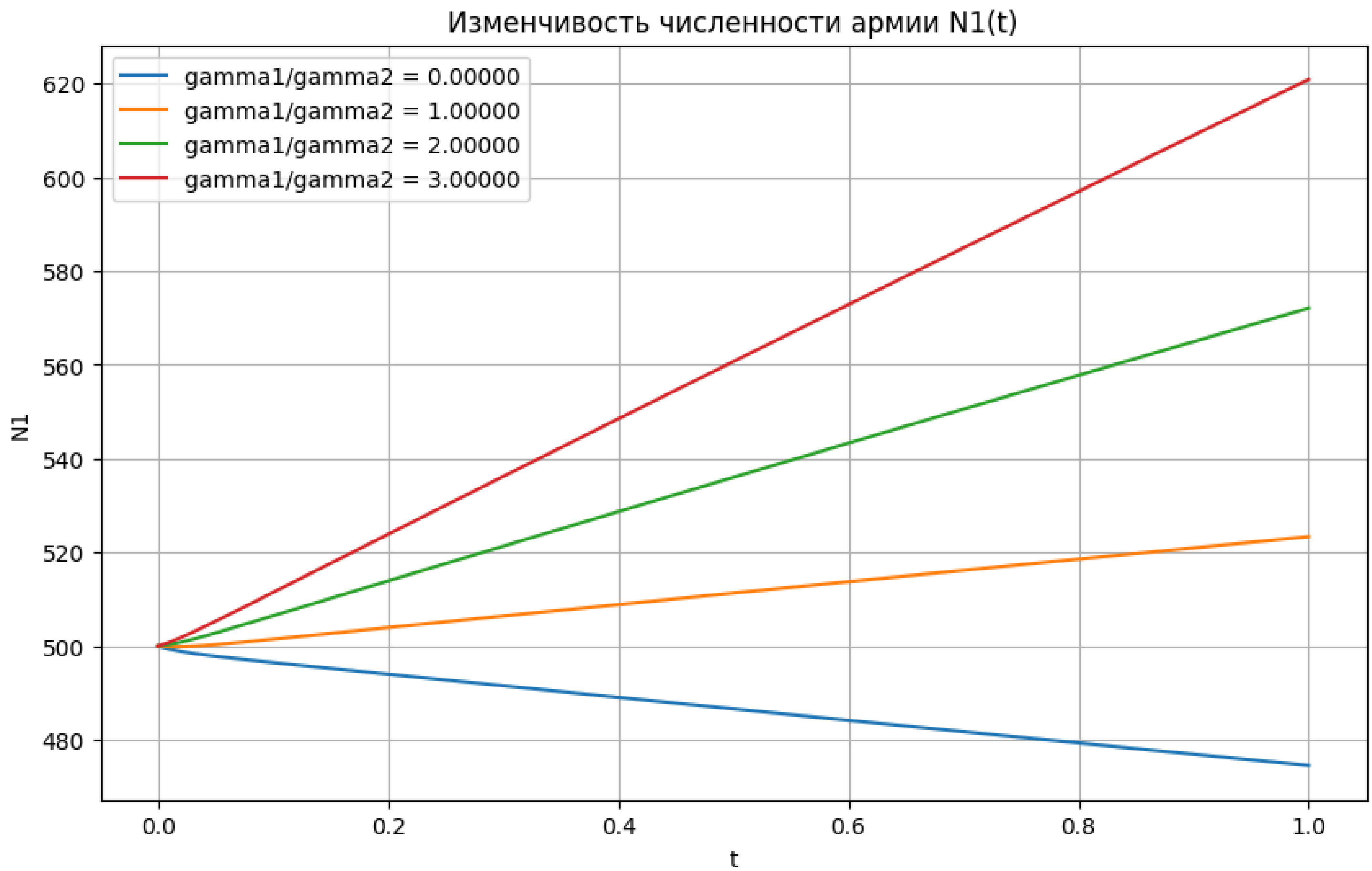
6.1




Изменчивость численности второй армии N2(t)
N2
t
500
495
490
485
480
475
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
$\gamma 1/\gamma 2 = 0.00000$
$\gamma 1/\gamma 2 = 1.00000$
$\gamma 1/\gamma 2 = 2.00000$
$\gamma 1/\gamma 2 = 3.00000$

6.2


Изменчивость численности партизан N2(t)
1000
800
600
400
200
0
N2
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
t
beta1/beta2 = 0.00000
beta1/beta2 = 0.28571
beta1/beta2 = 0.57143
beta1/beta2 = 0.85714
beta1/beta2 = 1.14286
beta1/beta2 = 1.42857


Изменчивость численности армии N1(t)
gamma1/gamma2 = 0.00000
gamma1/gamma2 = 1.00000
gamma1/gamma2 = 2.00000
gamma1/gamma2 = 3.00000
N1
t
620
600
580
560
540
520
500
480
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0