

Отчет по лабораторной работе №12 по Мат Моделированию

1-2. Содержательная постановка задачи

Суть поставленной задачи заключается в необходимости свести систему к одному уравнению относительно величины Y . Доказать существование решения полученного уравнения, основываясь на анализе графиков функций, входящих в его левую и правую части.

Также, свести систему к одному уравнению относительно величины s . Доказать существование решения полученного уравнения, основываясь на анализе графиков функций, входящих в его левую и правую части.

3. Концептуальная постановка задачи

Математическая модель экономического равновесия строится при следующих предположениях:

- Совершенная рыночная конкуренция, означающая отсутствие как крупных производственных корпораций, так и объединений работников, могущих диктовать свои условия для всей системы
- Неизменность производственных возможностей системы: оборудование, производственные помещения, технологии не изменяются со временем
- Неизменные во времени экономические интересы партнеров: предприниматели не пытаются увеличить свою прибыль, рабочие – зарплату, инвесторов устраивают проценты, получаемые по ценным бумагам, и т. д.
- Равновесие на рынке труда обеспечивается равенством предельного продукта труда и заработной платы, скорректированной на уровень цен. $\frac{\partial F(R)}{\partial R} = \frac{s}{p}$

4. Математическая постановка задачи

Первый макропоказатель системы - национальный доход Y

Соотношение $Y = F(R)$ определяет связь между рынками труда и доходом Y

Если записать изменение последнего уравнения на Δ в дифференциальной форме, то получим

$$\frac{\partial Y}{\partial R} = \frac{s}{p} \text{ или } \frac{\partial F(R)}{\partial R} = \frac{s}{p}, \text{ где } s - \text{ зароботная плата работника}$$

Произведенный продукт частично потребляется, частично сберегается $S(Y) = y - \omega(Y)$

При этом функции $\omega(Y)$ и $F(R)$ обладают свойством насыщения:

чем больше выпуск, тем меньшая доля дополнительного выпуска ΔY (ΔR) тратится на потребление и тем большая доля сберегается.

В условиях равновесия предложение фондообразующего продукта $S(Y)$ сбалансировано со спросом на инвестиции $A(r)$: $S(Y) = A(r)$ или, учитывая $S(Y) = Y - \omega(Y)$: $A(r) = Y - \omega(Y)$

Считается, что деньги выпускает государство, и их количество (предложение) Z является заданным управляющим параметром системы. Относительно спроса на деньги делается следующее предположение: спрос на деньги представляет собой сумму операционного и спекулятивного спроса.

Спекулятивный спрос задаётся функцией $I(r)$ такой, что $\frac{\partial I(r)}{\partial r} < 0$ при $r > r_1$ и $I(r)$ резко возрастает при $r \rightarrow r_1$

Так как финансовый рынок находится в равновесии, то баланс денег в системе определяется уравнением: $Z = \tau p Y + I(r)$

Объединяя все уравнения получим математическую систему рыночного равновесия:

$$\begin{cases} Y = F(R) \\ \frac{\partial F(R)}{\partial R} = \frac{s}{p} \\ A(r) = Y - \omega(Y) \\ Z = \tau p Y + I(r) \end{cases}$$

Выразим R, p, r :

$$r = A^{-1}(Y - \omega(Y))$$

$$p = \frac{s}{\frac{\partial F(R)}{\partial R}}$$

$$R = F^{-1}(Y)$$

Окончательное уравнение относительно переменной Y

$$Z - I(A^{-1}(Y - \omega(Y))) = \tau \frac{sY}{\frac{\partial F}{\partial R}(F^{-1}(Y))}$$

Окончательное уравнение относительно переменной R

$$Z - I(A^{-1}(F(R) - \omega(F(R)))) = \tau \frac{sF(R)}{\frac{\partial F}{\partial R} R}$$

5. Реализация

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def F(R):
    return R**(1/4)

def dF(R):
    return 1 / (4*R**(3/4))

def w(Y):
    return np.sqrt(Y)

def g(Y):
    return Y - w(Y)

def A_inv(r):
    return np.where(r > r1, 0, -10 * (r - r1))

def F_inv(R):
    return R**4

def dF_inv(R):
    return 4*R**3

def I(r):
    return np.where(r < r2, 0, 8 / (r - r2))

Z = 500
tau = 1.2
s = 2.5
r2 = 2
r1 = 10
plt.figure(figsize=(15,6))
plt.subplot(1,3,1)
Y = np.linspace(0.1, 5, 100)
plt.plot(Y, tau * Y * s / dF(F_inv(Y)), label='Right part')
plt.plot(Y, Z - I(A_inv(Y - w(Y))), label='Left part')
plt.legend(loc = 'best')
plt.xlabel('Y')
```

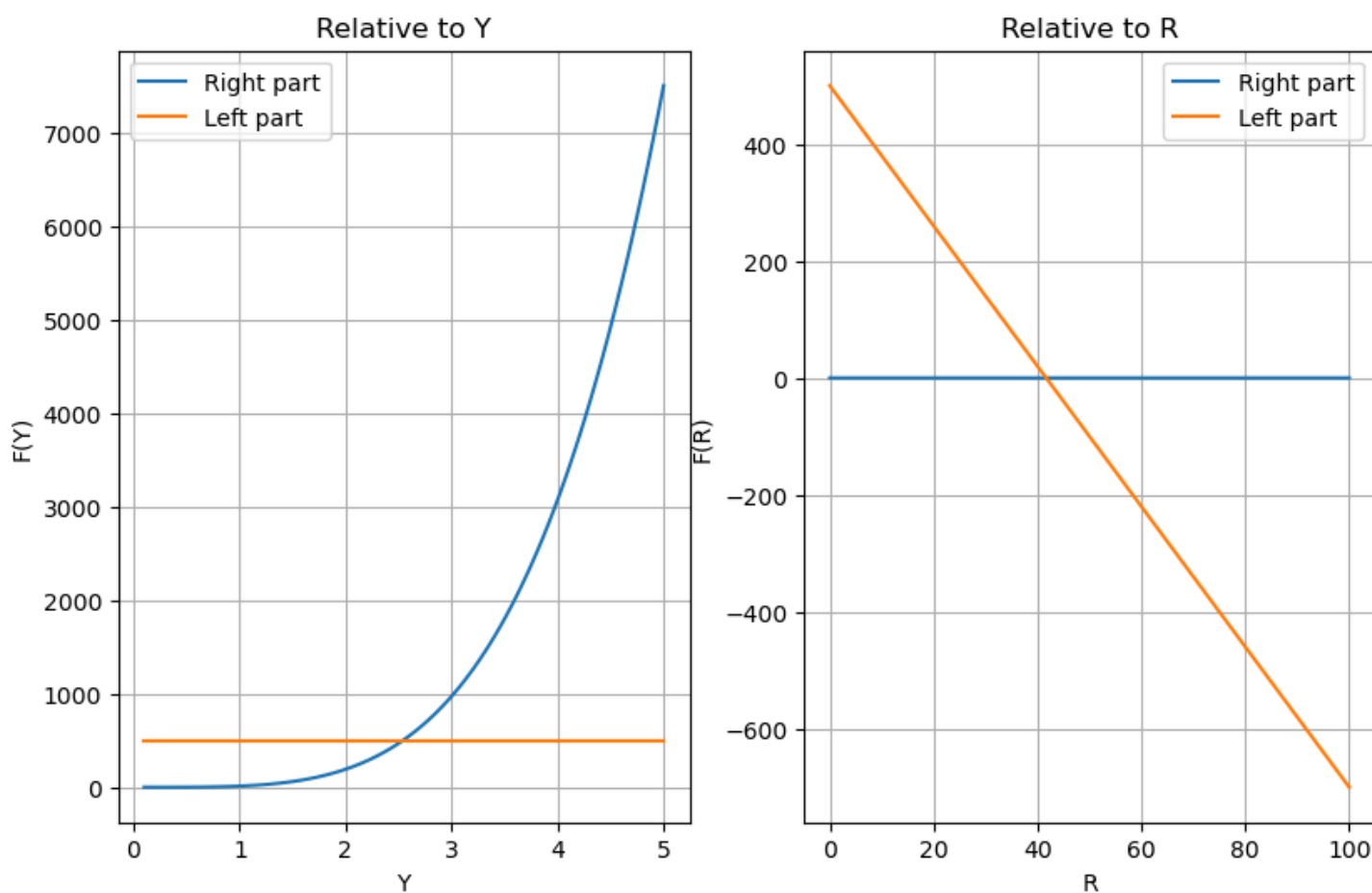
```

plt.ylabel('F(Y)')
plt.title('Relative to Y')
plt.grid()

plt.subplot(1,3,2)
R = np.linspace(0, 100, 100)
plt.plot(R, I(A_inv(F(R) - w(F(R)))), label='Right part')
plt.plot(R, Z-tau*s*F(R)/dF(R), label='Left part')
plt.legend()
plt.xlabel('R')
plt.ylabel('F(R)')
plt.title('Relative to R')
plt.grid()

```

7. Численное исследование модели



Так как кривые на графиках, отображающие левую и правую части уравнений пересекаются в одной точке, то, в силу монотонности функций, можно утверждать, что модель имеет

единственное решение, описывающее равновесное состояние экономики.