МИЭТ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Лабораторные работы для студентов 4 курса

ПМ-41

Преподаватель:

Лебедев С.А.

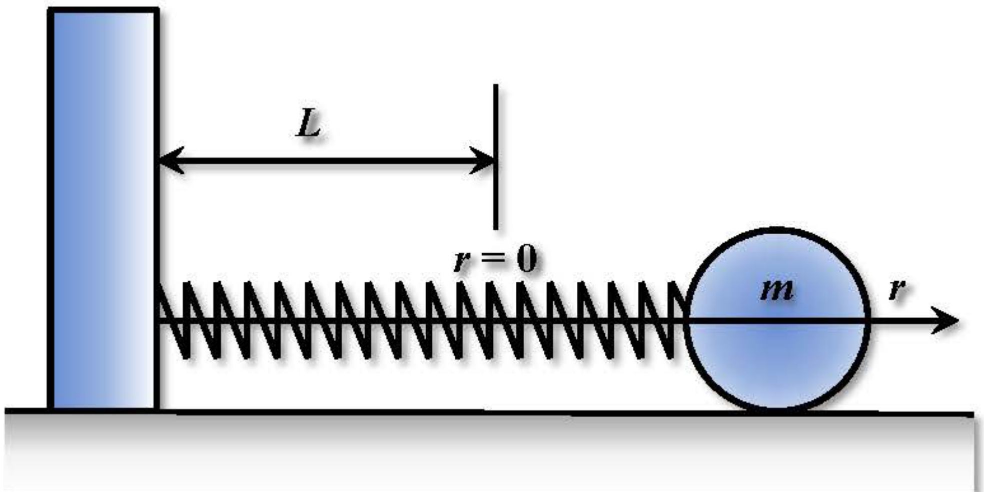
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4

ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ФОРМИРОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

МИЭТ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

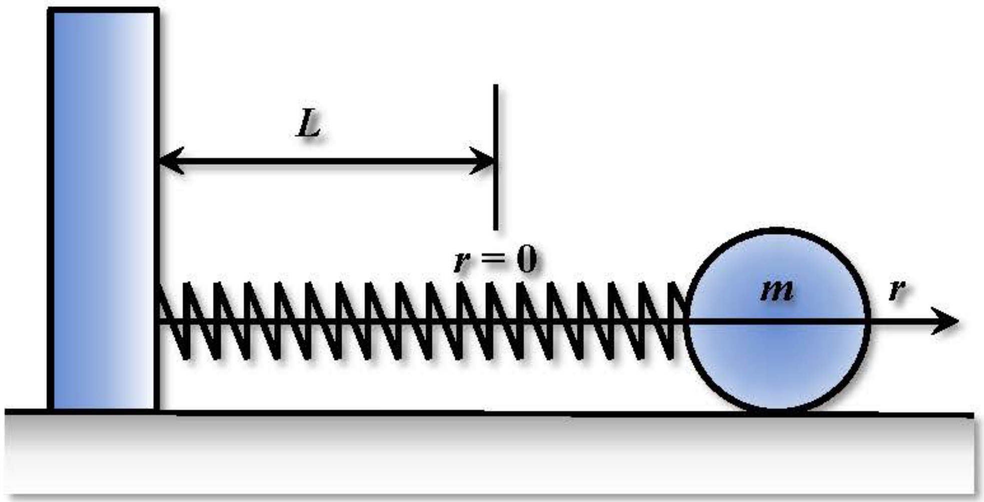
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
Лабораторные работы для студентов 4 курса

Общая схема принципа Гамильтон



Пусть имеется механическая система, формального и строгого определения которой пока давать не будем, имея в виду, однако, что все взаимодействия между элементами такой системы определяются законами механики (один из простейших примеров – система «шарик–пружина»). Введем понятие обобщенных координат $Q(t)$, полностью определяющих положение механической системы в пространстве. Величина $Q(t)$ может быть декартовой координатой (например, координата r в системе «шарик–пружина»), радиусом-вектором, угловой координатой, набором координат материальных точек, составляющих систему, и т. д. Величину dQ/dt естественно назвать обобщенной скоростью механической системы в момент времени t. Набор величин $Q(t)$ и dQ/dt t определяет состояние механической системы во все моменты времени.

Общая схема принципа Гамильтон

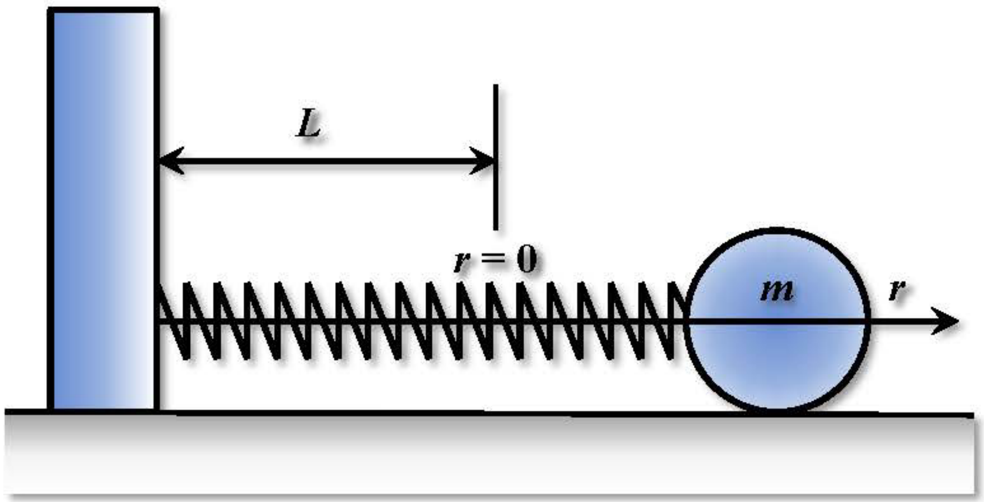


Для описания механической системы вводится функция Лагранжа, построение которой – отдельный вопрос, более подробно. В простейших случаях функция Лагранжа имеет ясный смысл и записывается в виде

$$L\left(Q,\frac{dQ}{dt}\right)=E_k-E_p,$$

где E_k, E_p – кинетическая и потенциальная энергии системы соответственно. В рассматриваемых примерах они вычисляются очевидным образом.

Общая схема принципа Гамильтон



Введем далее величину $S[Q]$, называемую *действием*:

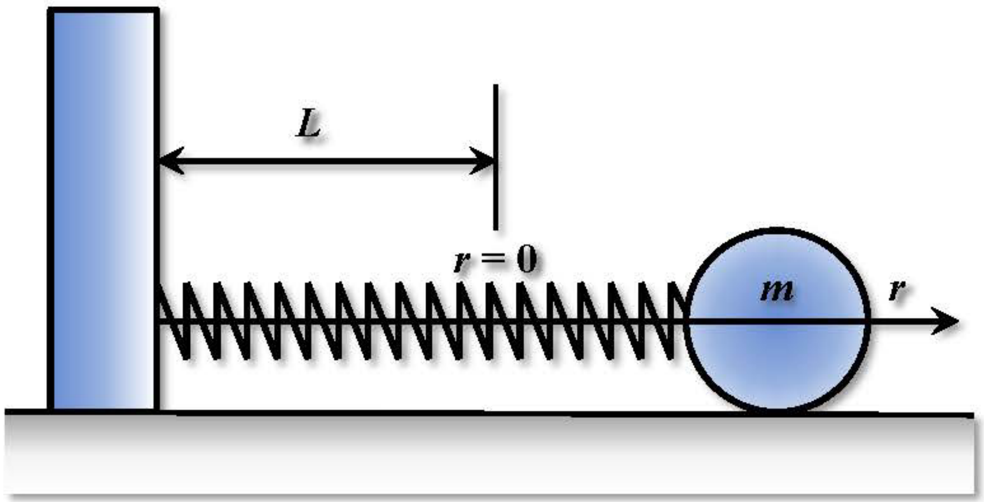
$$S[Q] = \int_{t_1}^{t_2} L\left(Q, \frac{dQ}{dt}\right) dt.$$

Интеграл, очевидно, является функционалом от обобщенной координаты $Q(t)$, т. е. функции $Q(t)$, заданной на отрезке $[t_1, t_2]$, он ставит в соответствие некоторое число S (*действие*).

Принцип Гамильтона для механической системы гласит: если система движется по законам механики, то $Q(t)$ – стационарная функция для $S[Q]$, или

$$\frac{d}{d\varepsilon} S[Q + \varepsilon\varphi]_{\varepsilon=0} = 0.$$

Общая схема принципа Гамильтон



Фигурирующая в принципе наименьшего действия

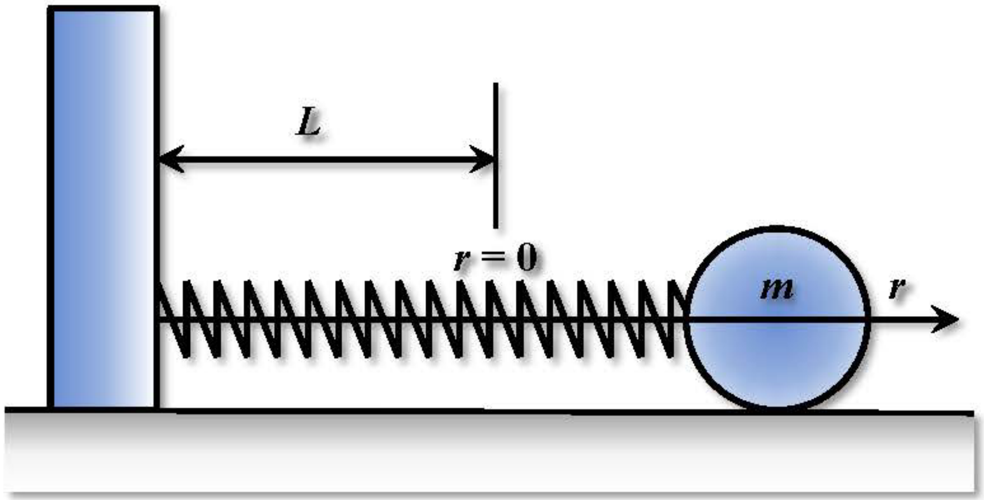
$$\frac{d}{d\varepsilon} S\left[Q+\varepsilon\varphi\right]_{\varepsilon=0} = 0.$$

функция $\varphi(t)$ – некоторая пробная функция, обращающаяся в нуль в моменты t_1, t_2 и удовлетворяющая тому условию, что

$$Q(t)+\varepsilon\varphi(t)$$

– возможная координата данной системы (в остальном $\varepsilon\varphi(t)$ произвольна).

Общая схема принципа Гамильтон

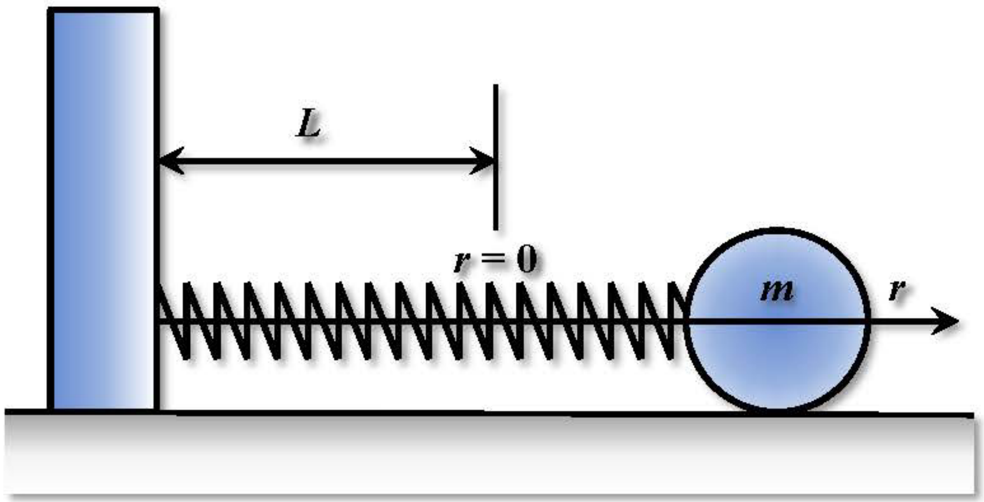


Смысл принципа

$$\frac{d}{d\varepsilon} S\left[Q + \varepsilon\varphi\right]_{\varepsilon=0} = 0.$$

в том, что из всех априори мыслимых (допускаемых) траекторий (движений) системы между моментами t_1, t_2 выбирается (реализуется) движение, доставляющее минимум функционалу *действия* (отсюда происходит и название принципа). Функция $\varepsilon\varphi(t)$ называется вариацией величины $Q(t)$.

Общая схема принципа Гамильтон



Итак, схема применения принципа Гамильтона

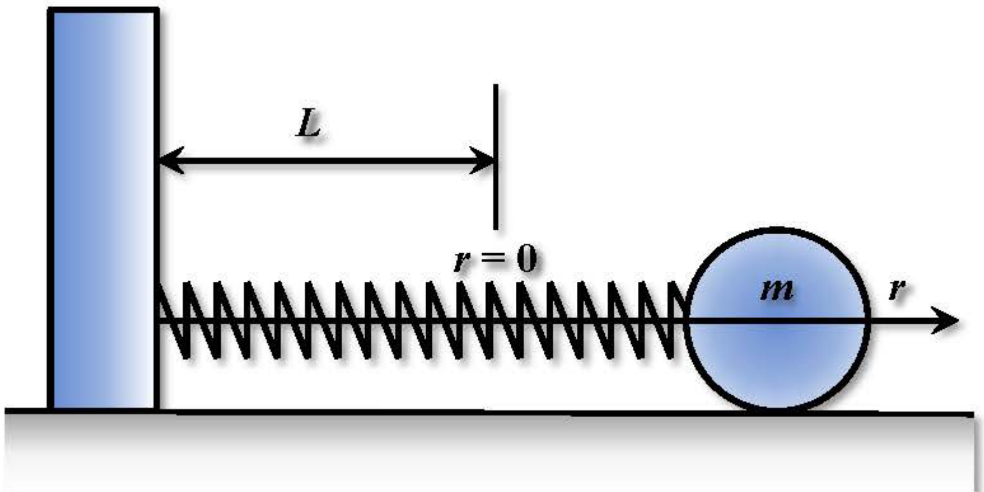
$$\frac{d}{d\varepsilon} S\left[Q+\varepsilon\varphi\right]_{\varepsilon=0} = 0.$$

для построения моделей механических систем состоит в следующем: определяются обобщенные координаты $Q(t)$ и обобщенные скорости dQ/dt системы, строятся функция Лагранжа

$$L\left(Q, \frac{dQ}{dt}\right)$$

и функционал *действия* $S[Q]$, минимизация которого на вариациях $\varepsilon\varphi(t)$ координаты $Q(t)$ и дает искомую модель

Применение принципа Гамильтон



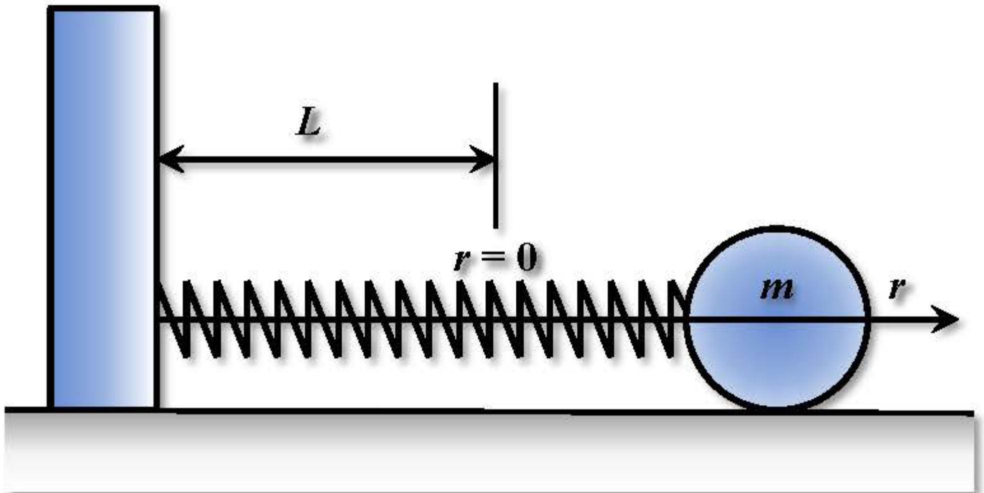
Воспользуемся принципом Гамильтона для построения модели движения шарика, соединенного с пружиной.
В качестве обобщенной координаты системы естественно выбрать обычную эйлерову координату шарика $r(t)$. Тогда обобщенная скорость $dr/dt = V(t)$ – обычная скорость шарика.

Функция Лагранжа $$L\left(Q, \frac{dQ}{dt}\right) = E_k - E_p,$$

записывается через уже найденные значения кинетической и потенциальной энергии системы:

$$L = \frac{m\left(dr/dt\right)^2}{2} - k\frac{r^2}{2}.$$

Применение принципа Гамильтон



Для величины *действия* получаем выражение

$$S[r]=\int_{t_1}^{t_2} L\left(r,\frac{dr}{dt}\right)dt=$$

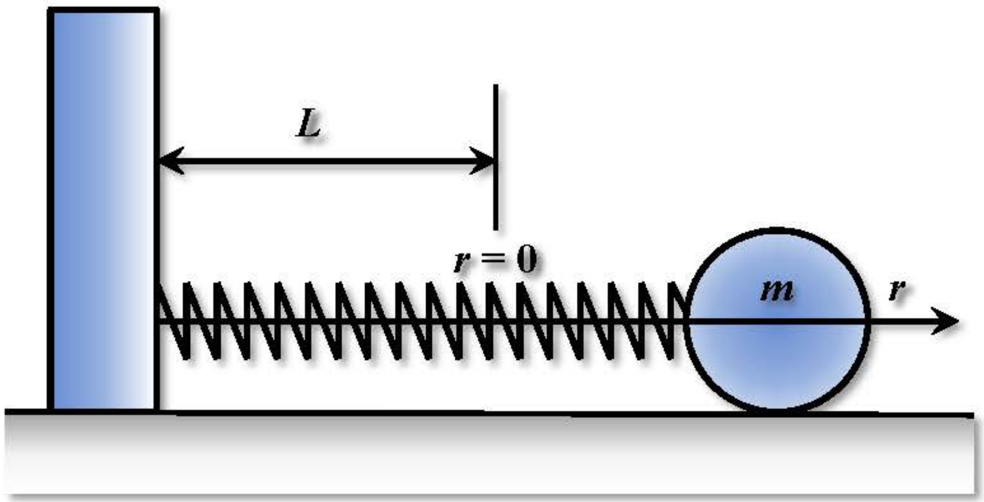
$$=\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{m}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2-\frac{k}{2}r^2\right]dt.$$

Теперь вычислим *действие* на вариациях $\varepsilon\varphi(t)$ координаты $r(t)$:

$$S[r+\varepsilon\varphi]=\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{m}{2}\left(\frac{d(r+\varepsilon\varphi)}{dt}\right)^2-\frac{k}{2}(r+\varepsilon\varphi)^2\right]dt.$$

Последнюю формулу необходимо продифференцировать по ε (учитывая, что функции r, φ, dr/dt, $d\varphi/dt$ от ε не зависят):

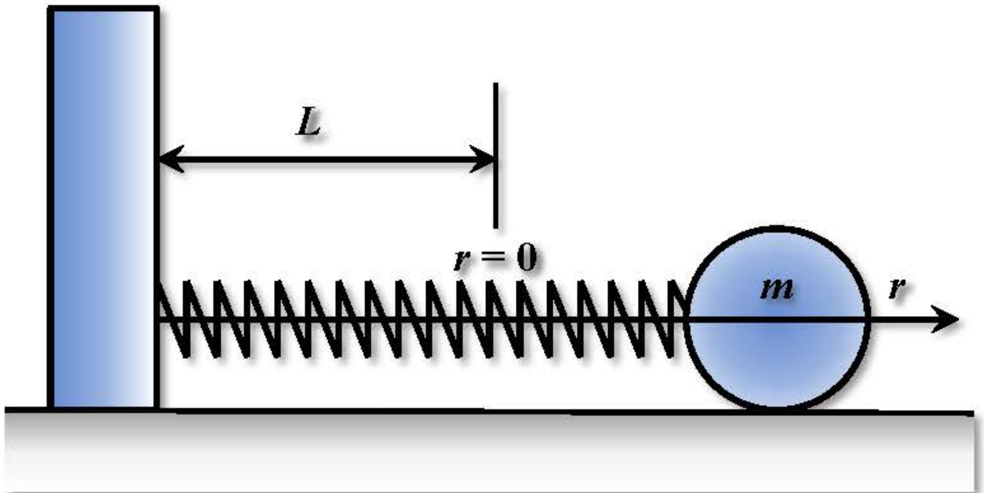
Применение принципа Гамильтон



В итоге получаем

$$\frac{d}{d\varepsilon}S\left[r+\varepsilon\varphi\right]=\frac{d}{d\varepsilon}\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\left[m\left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+2\varepsilon\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}+\varepsilon^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right\}-k\left\{r^2+2\varepsilon r\varphi+\varepsilon^2\varphi^2\right\}\right]dt.$$

Применение принципа Гамильтон



Если положить $\varepsilon = 0$:

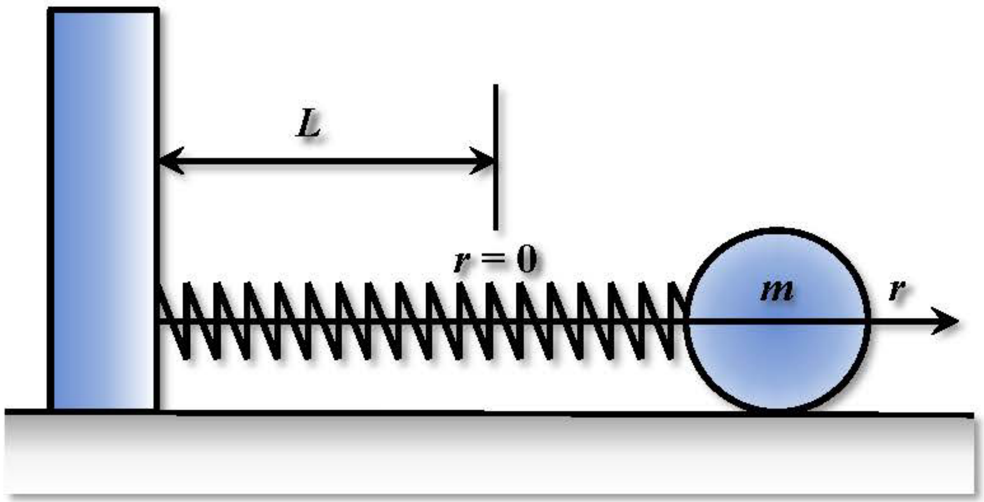
$$\frac{d}{d\varepsilon} S\left[r+\varepsilon\varphi\right]_{\varepsilon=0} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\left[m\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt} - kr\varphi\right]dt = 0.$$

Правая часть этого выражения (равного нулю в согласии с принципом) с помощью интегрирования ее первого члена по частям и с учетом того, что $\varphi = 0$ в моменты t_1, t_2, преобразуется к виду

$$\frac{d}{d\varepsilon} S\left[r+\varepsilon\varphi\right]_{\varepsilon=0} = -\int_{t_1}^{t_2}\varphi\left[m\frac{d^2r}{dt^2} - kr\right]dt = 0.$$

Применение принципа Гамильтон



Поскольку пробная функция $\varphi(t)$, фигурирующая в формулировке принципа наименьшего *действия*, произвольна, то часть выражения,

$$\frac{d}{d\varepsilon} S\left[r+\varepsilon\varphi\right]_{\varepsilon=0} =$$

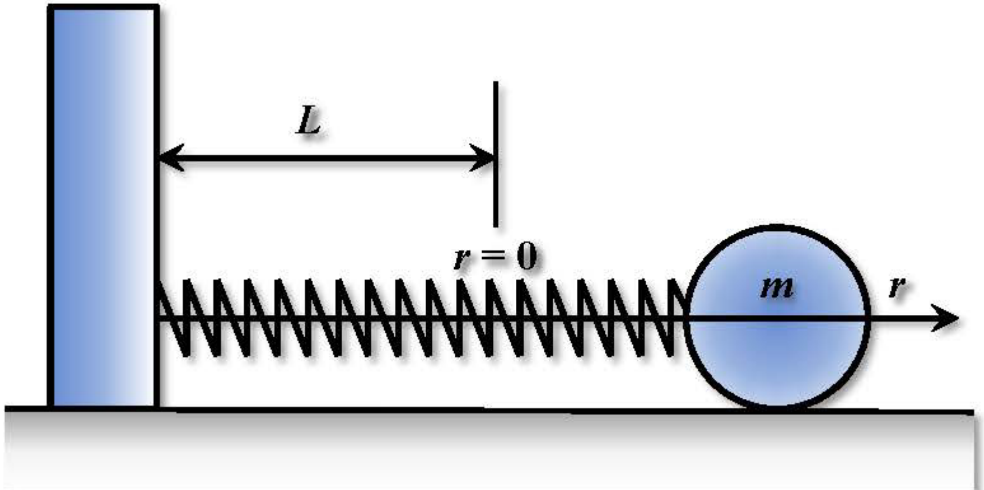
$$= -\int_{t_1}^{t_2} \varphi\left[m\frac{d^2r}{dt^2} - kr\right]dt = 0,$$

стоящая под знаком интеграла в квадратных скобках, должна быть равна нулю во все моменты времени $t_1 < t < t_2$:

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -kr,$$

т. е. движение системы должно описываться уравнением, полученным из закона Ньютона (первый способ) и закона сохранения энергии (второй способ).

Применение принципа Гамильтон



Поскольку пробная функция $\varphi(\,t\,)$, фигурирующая в формулировке принципа наименьшего *действия*, произвольна, то часть выражения,

$$\frac{d}{d\varepsilon} S\left[r+\varepsilon\varphi\right]_{\varepsilon=0} =$$

$$= -\int_{t_1}^{t_2} \varphi\left[m\frac{d^2 r}{dt^2} - kr\right] dt = 0,$$

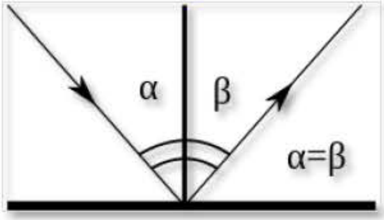
стоящая под знаком интеграла в квадратных скобках, должна быть равна нулю во все моменты времени $t_1 < t < t_2$:

$$m\frac{d^2 r}{dt^2} = -kr,$$

т. е. движение системы должно описываться уравнением, полученным из закона Ньютона (первый способ) и закона сохранения энергии (второй способ).

Задачи для самостоятельно решения

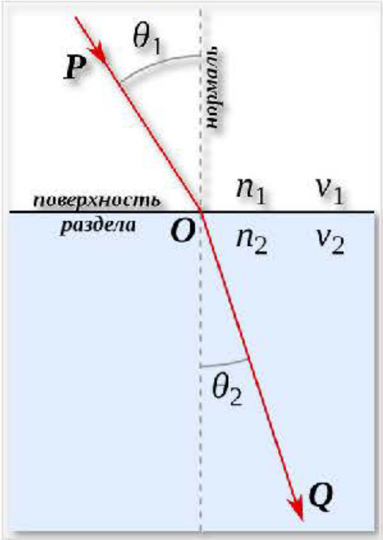
- ***Закон отражения***



Отраженный и падающий лучи лежат в плоскости, содержащей перпендикуляр к отражающей поверхности в точке падения, и угол падения α равен углу отражения β

$$\alpha = \beta.$$

- ***Закон преломления***

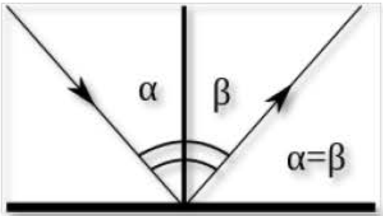


Угол падения света на поверхность связан с углом преломления соотношением:

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2,$$

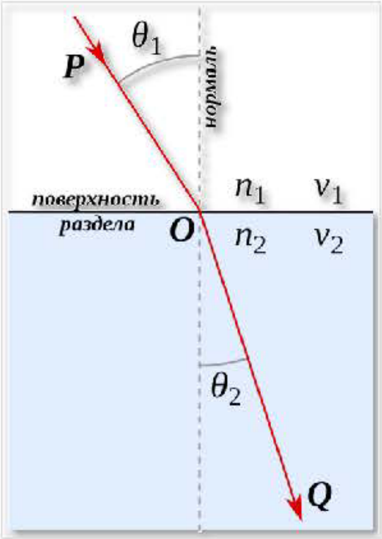
где n_1 – показатель преломления среды, из которой свет падает на границу раздела;
θ_1 – угол падения света – угол между падающим на поверхность лучом и нормалью к поверхности;
n_2 – показатель преломления среды, в которую свет попадает, пройдя границу раздела;
θ_2 – угол преломления света – угол между прошедшим через поверхность лучом и нормалью к поверхности.

Задачи для самостоятельно решения



- *Закон отражения*

1. Определять точность попадания света в приемник при различных начальных параметрах
2. Вычислять значение вариационной переменной, при котором свет попадем в приемник



- *Закон преломления*

1. Определять точность попадания света в приемник при различных начальных параметрах
2. Вычислять значение вариационной переменной, при котором свет попадем в приемник