Отчет по лабораторной работе №1 по Математическому Моделированию

1-2. Содержательная постановка задачи

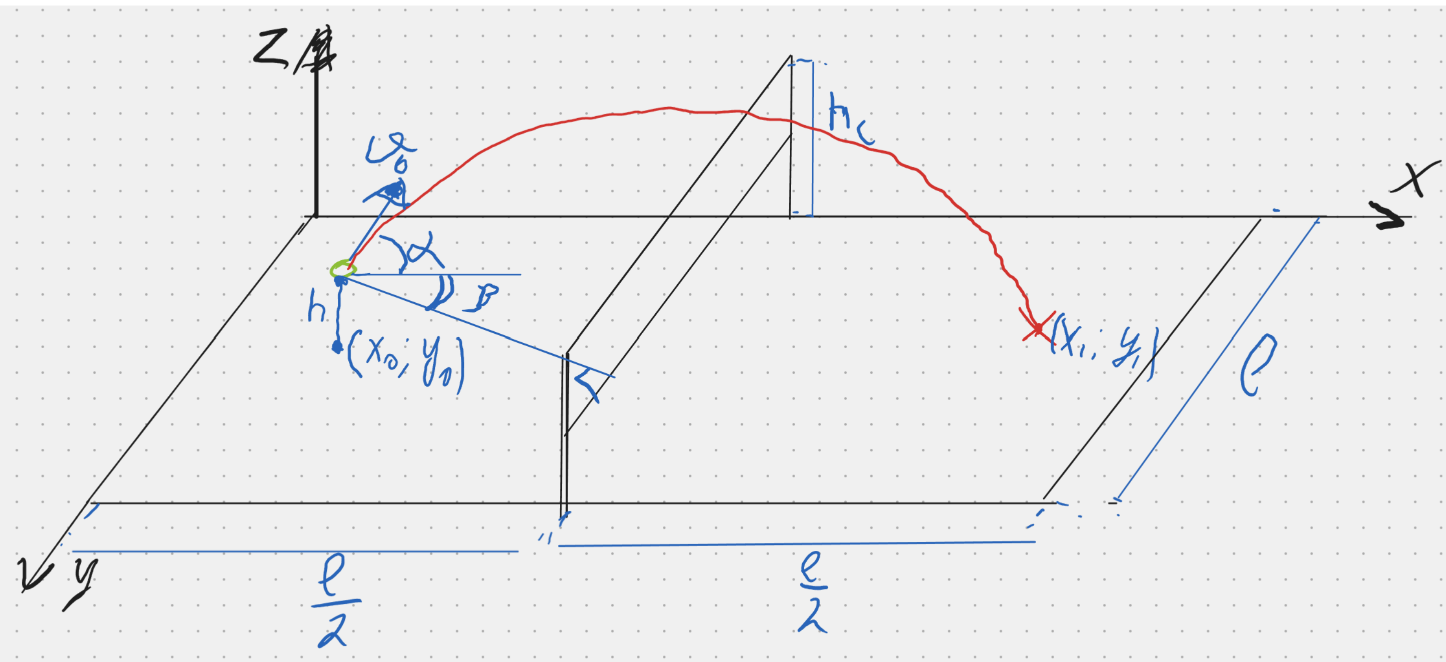
$$\text{Задача о волейболистке}$$

Разработать математическую модель, позволяющуюю описать полет мяча, отправленого игроком на площадку соперника. Модель должна позволять:

- Вычислять положение мяча в любой момент времени.
- Определять часть плащадки, из которой игрок попадает на територию противника

Исходные данные:

- угол α бросания мяча к горизонту и угол β между линией сетки и линией броска
- начальная скорость мяча ν_0
- высота, с которой совершается бросок h
- размеры площадки 18 на 9 метров
- высота сетки h_c = 2.43 м
- масса мяча m



3. Концептуальная постанока задачи

Движение мяча может быть описаны в соответсвии с законами класической механики Ньютона. Применим следующие гипотезы:

- Объектом моделирования является волейбольный мяч
- Мяч будем считать материальной точкой массой m
- Движение происходит в поле силы тяжести с постоянным ускорением g
- Мы принебрегаем размерами мяча, сччитая его материальной точкой, сопротивлением воздуха и возмущениями, вызваными собственным вращением мяча вокруг центра масс

На основании гипотез имеем следующие выводы:

- В качестве параметров движения мяча используем его координаты (x, y, z) и скорость его центра масс V (соответствующие проекции V_x, V_y, V_z)
- Условием перелета мяча на площадку соперника считаем, что при некотором угле β положение мяча при перелете через середину площадки должно быть выше сетки.
- Для определения положения мяча в конечный момент времени полета необходимо найти зависимость координат (x, y, z) и вектора скорости V от времени t и угла β. Будем считать, что пложение броска такое, что из него можно попасть на поле соперника, если конечные координаты мяча меньше пределов площадки ($x < L_x, y < L_y$, z=0).

4. Математическая постановка задачи

Математическую постановку задачи представим в координатной форме:

Найти зависимость $x(t), y(t)$ и $V_x(t), V_y(t), V_z(t)$ из решения системы дифференциальных уравнений:

$$m\frac{\delta V_x}{\delta t} = 0, \quad V_x = \frac{\delta x}{\delta t}$$

$$m\frac{\delta V_y}{\delta t} = 0, \quad V_y = \frac{\delta y}{\delta t}$$

$$m\frac{\delta V_z}{\delta t} = -mg, \quad V_z = \frac{\delta z}{\delta t}$$

При начальных условиях:

$$x(t_0) = x, \quad y(t_0) = y, \quad z(t_0) = z$$

$$x(t_c) = x_c, \quad y(t_c) = x_c sin(\beta) + y(y_0)$$

$V_x(t_0) = Vcos(\alpha)cos(\beta), \quad V_y(t_0) = Vcos(\alpha)sin(\beta), \quad V_z(t_0) = Vsin(\alpha)$

Вычислить параметр $z(t_c)$ и проверить условие $z(t_c) > h_c$

Вычислить параметры $t_{end}, x(t_{end}), y(t_{end})$ из условия $z(t_{end}) = 0$, проверить выполнение условия $x(t_{end}) < L_x, y(t_{end}) < L_y$

5. Реализация

Техническое задание

- Проверка условий перелета мяча на поле соперника, нахождение координат поля, из которого можно попасть в поле соперника при заданных начальных условиях
- Программа должна определять область поля, из которого можно попасть на поле соперника. Для этого необходимы две функции, отвечающие следующим требованиям соответственно:

1. Расчет положения мяча при заданных начальных координатах, углах альфа и бета, моменте времени и начальной скорости.
2. Определение полное время полета мяча и результат прохождения условий попадания мяча на базу противника.

- Управление режимами программы может проходить напрямую пользователем через задание начальных условий в коде программы
- Входные данные:
  - h0 - заданная высота броска,
  - alpha - заданный угол к горизонту
  - v - заданная скорость
- Выходные данные:
  - Массивы координат поля, т.е. область, из которой мяч попадает на поля соперника.
  - График игрового поля, на котором цветом отмечена область, из которой можно совершить успешный бросок.
- Возможные ошибки пользователя при работе с программой:
  - Неверно введенные начальные условия (нереалистичные данные, как слишком большая скорость, высота, отрицательный угол у горизонту). Такие данные не приведут к ошибке выполнения программы, однако покажут неинформативный результат, так как они не соответствуют реальным физическим ситуациям. Для диагностики данной проблемы стоит заменить входные данные на реалистичные.

Програмная реализация метода

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from IPython.display import HTML, display
import ipywidgets as widgets



v0=r'$\nu = $'
alpha1=r'$\alpha = $'
h1=r'$h = $'
ms=r'$\frac{м}{c}$'

def trajectory_2d(v, alpha, theta, t, x0, y0):
    alpha_rad = np.radians(alpha)
    theta_rad = np.radians(theta)
    x = x0 + v * np.cos(alpha_rad) * np.cos(theta_rad) * t
    y = y0 + v * np.cos(alpha_rad) * np.sin(theta_rad) * t
    z = h0 + v * np.sin(alpha_rad) * t - (g * t**2) / 2
    return x, y, z


def check_trajectory_2d(v, alpha, theta, x0, y0):
    alpha_rad = np.radians(alpha)
    t_flight = (v * np.sin(alpha_rad)+ np.sqrt((v * np.sin(alpha_rad))**2 + 2 * g * h0)
    t_net = (d - x0) / (v * np.cos(alpha_rad) *np.cos(np.radians(theta)))
    _, y_net, z_net = trajectory_2d(v, alpha, theta, t_net, x0, y0)
    if z_net < H:
        return False
    x_land, y_land, _ = trajectory_2d(v, alpha, theta, t_flight, x0, y0)

    if x_land < d:
        return False
    elif x_land > d + L:
        return False
    elif abs(y_land) > W / 2:
        return False
    else:
        return True

g = 9.81
d = 9.0
L = 9.0
```

```python
W = 9.0
H = 2.43
h0 =        # заданная высота броска
alpha =     # заданный угол к горизонту
v =         # заданная скорость
court_width = 9.0
court_length = 9.0
grid_size = 400

x_positions = np.linspace(-court_length, 0, grid_size)
y_positions = np.linspace(-court_width / 2, court_width / 2, grid_size)
x_coords, y_coords = np.meshgrid(x_positions, y_positions)

successful_x = []
successful_y = []

for i in range(grid_size):
    for j in range(grid_size):
        x0 = x_coords[i, j]
        y0 = y_coords[i, j]
        for theta in range(-90, 90, 1):
            if check_trajectory_2d(v, alpha, theta, x0, y0):
                successful_x.append(x0)
                successful_y.append(y0)
                break

fig, ax = plt.subplots(figsize=(10, 5))

ax.add_patch(plt.Rectangle((-court_length, -court_width / 2), court_length,\
     court_width, fill=False, color='black'))
ax.add_patch(plt.Rectangle((0, -court_width / 2), court_length,\
     court_width, fill=False, color='black'))

ax.scatter(successful_x, successful_y, color='green', s=10, label='Попадание')
ax.set_xlim(-court_length, court_length)
ax.set_ylim(-court_width / 2, court_width / 2)
ax.set_xlabel("Длина площадки (м)")
ax.set_ylabel("Ширина площадки (м)")
ax.set_title("Область на нашей половине, из которой можно попасть на вражескую площадку'

ax.text(7,2,f"НУ:\n{v0}{v} {ms}\n{alpha1}{alpha}°\n{h1}{H} м")
ax.legend()
plt.grid()
```

```
plt.show()
```

6. Качественный анализ задачи

С математической точки зрения задача свелась к задаче Коши для системы дифференциальных уравнений 1-го порядяка с заданными начальными условиями.

Выполним контроль размерности задач:

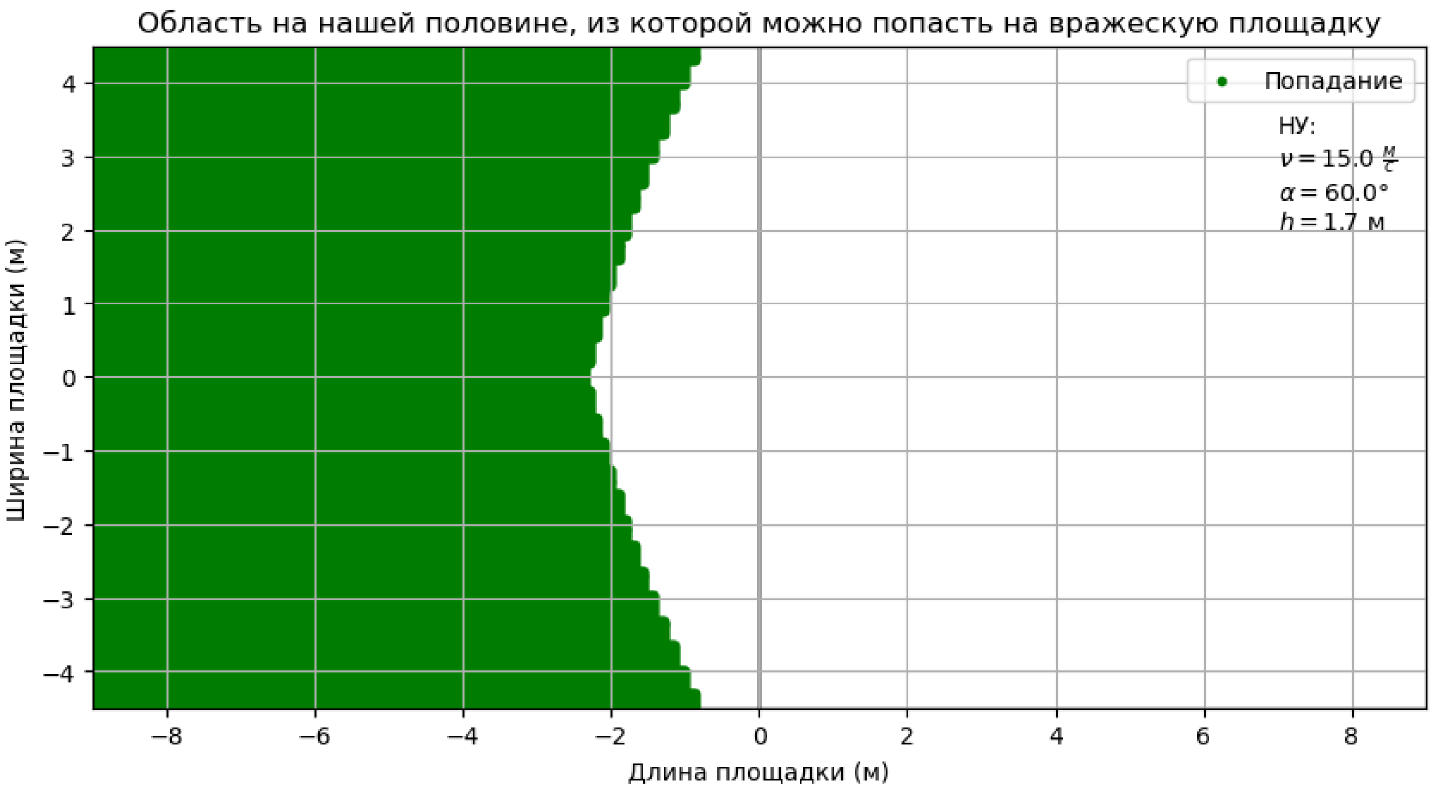
$$m\frac{\partial V_x}{\partial t} = mg \rightarrow [\text{кг}]\frac{\text{м}}{\text{с}^2} = \left[\text{кг}\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right]$$
$$V_x = \frac{\partial x}{\partial t} \rightarrow \left[\frac{\text{м}}{\text{с}}\right] = \frac{[\text{м}]}{[\text{с}]} = \left[\frac{\text{м}}{\text{с}}\right]$$

$$m\frac{\partial V_y}{\partial t} = mg \rightarrow [\text{кг}]\frac{\text{м}}{\text{с}^2} = \left[\text{кг}\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right]$$
$$V_y = \frac{\partial y}{\partial t} \rightarrow \left[\frac{\text{м}}{\text{с}}\right] = \frac{[\text{м}]}{[\text{с}]} = \left[\frac{\text{м}}{\text{с}}\right]$$

$$m\frac{\partial V_z}{\partial t} = mg \rightarrow [\text{кг}]\frac{\text{м}}{\text{с}^2} = \left[\text{кг}\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right]$$
$$V_z = \frac{\partial z}{\partial t} \rightarrow \left[\frac{\text{м}}{\text{с}}\right] = \frac{[\text{м}]}{[\text{с}]} = \left[\frac{\text{м}}{\text{с}}\right]$$

7. Численное иследование модели

При исследовании задачи было получено следующее решение



Область на нашей половине, из которой можно попасть на вражескую площадку
Попадание
НУ:
$v = 15.0\ \frac{м}{с}$
$\alpha = 60.0°$
$h = 1.7$ м
Ширина площадки (м)
Длина площадки (м)
−8
−6
−4
−2
0
2
4
6
8
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4