



МИЭТ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Лабораторные работы для студентов 4 курса
ПМ-41

Преподаватель:
Лебедев С.А.



ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 7

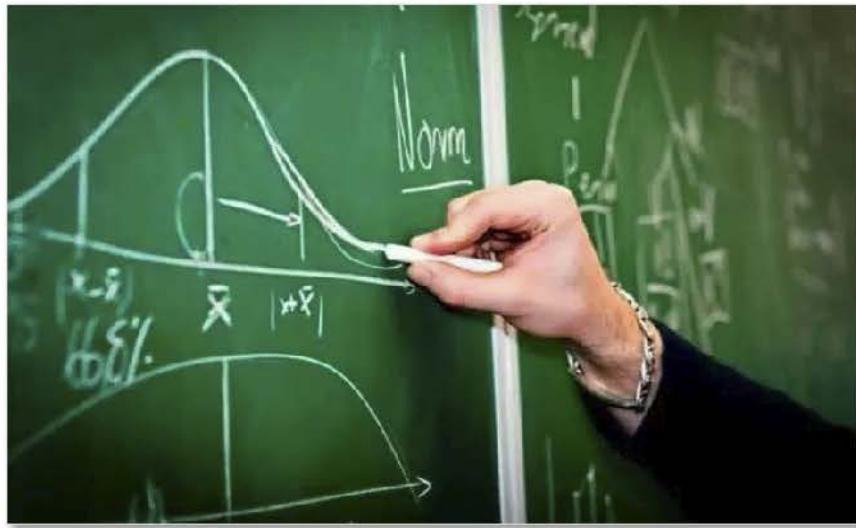
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ, ПРИВОДЯЩИЕ К ЗАДАЧЕ КОШИ



НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
Лабораторные работы для студентов 4 курса

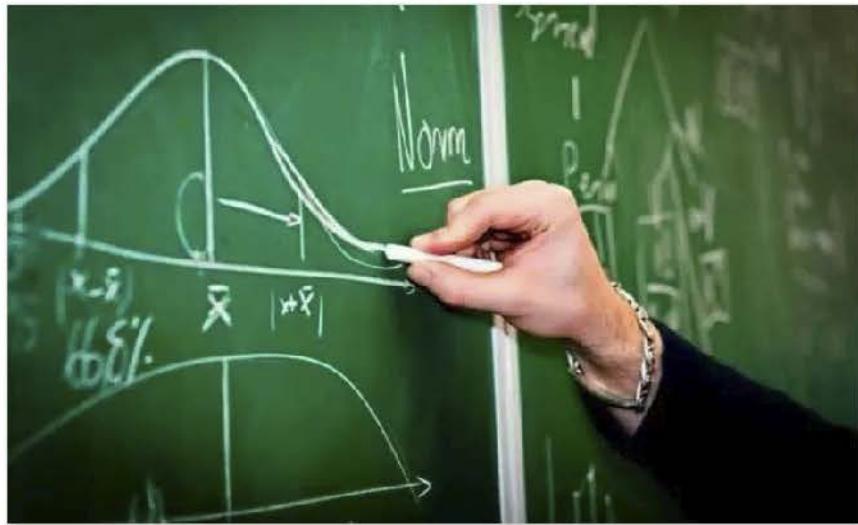
Задача Коши



Задача Коши – одна из основных задач теории дифференциальных уравнений (обыкновенных и с частными производными); состоит в нахождении решения (интеграла) дифференциального уравнения, удовлетворяющего так называемым начальным условиям (начальным данным).

Задача Коши обычно возникает при анализе процессов, определяемых дифференциальным законом эволюции и начальным состоянием (математическим выражением которых и являются уравнение и начальное условие). Этим мотивируется терминология и выбор обозначений: начальные данные задаются при $x = 0$, а решение отыскивается $x > 0$. От краевых задач задача Коши отличается тем, что область, в которой должно быть определено искомое решение, здесь заранее не указывается. Тем не менее задачу Коши можно рассматривать как одну из краевых задач.

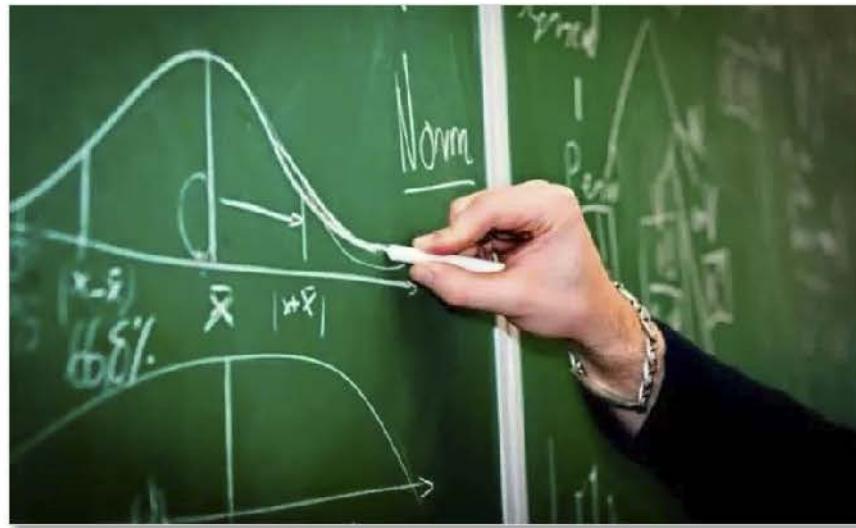
Задача Коши



Основные вопросы, которые связаны с задачей Коши, таковы:

- Существует ли (хотя бы локально) решение задачи Коши?
- Если решение существует, то какова область его существования?
- Является ли решение единственным?
- Если решение единственное, то будет ли оно корректным, то есть непрерывным (в каком-либо смысле) относительно начальных данных?

Различные постановки задачи Коши



Обыкновенное дифференциальное
уравнение первого порядка,
разрешённое относительно
производной

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial x} = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Система n обыкновенных
дифференциальных уравнений
первого порядка, разрешённая
относительно производных
(нормальная система n -го порядка)

$$\begin{cases} \frac{\partial y_1}{\partial x} = f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ \dots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x} = f_n(x, y_1, \dots, y_n) \\ y_1(x_0) = y_{01} \\ \dots \\ y_n(x_0) = y_{0n} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x} = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) \\ \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0 \end{cases}$$



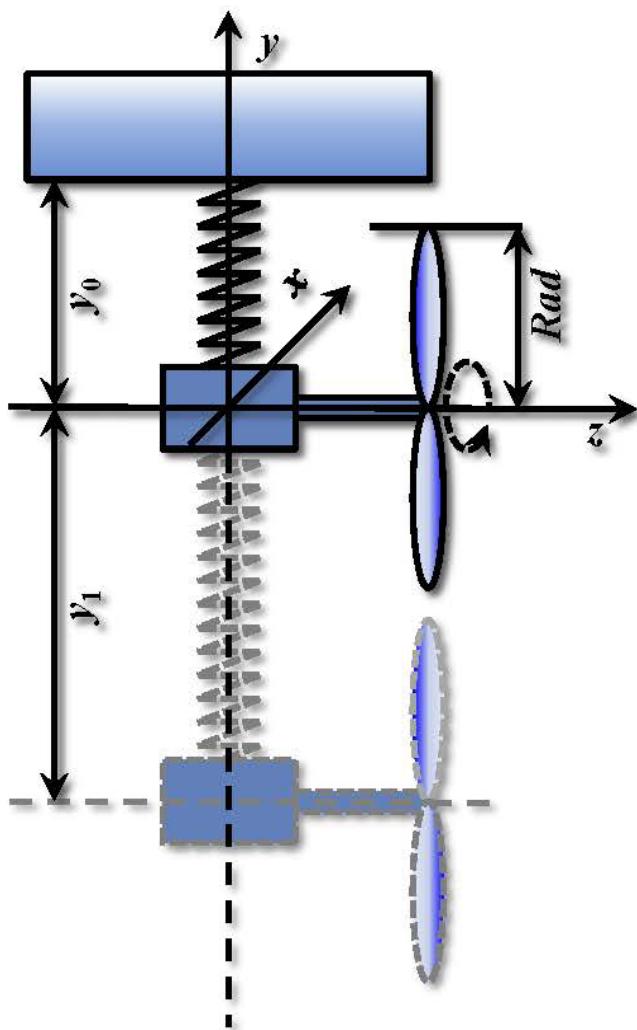
ВЕНТИЛЯТОР, ПОДВЕШЕННЫЙ НА ПРУЖИНЕ



НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
Лабораторные работы для студентов 4 курса

Вентилятор, подвешенный на пружине

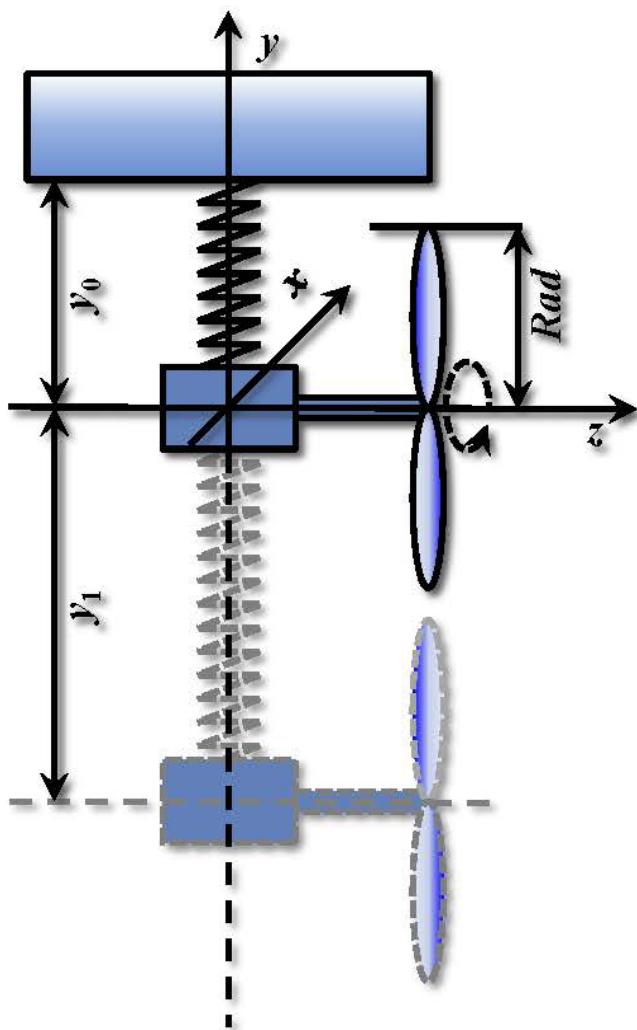


Рассмотрим вращающийся вентилятор, подвешенный на пружине.

Масса вентилятора вместе с подвесом – m . Вентилятор подвешенный на упругой пружине с жесткостью k .

Лопасти вентилятора движутся по окружности заданного радиуса Rad с периодом T .

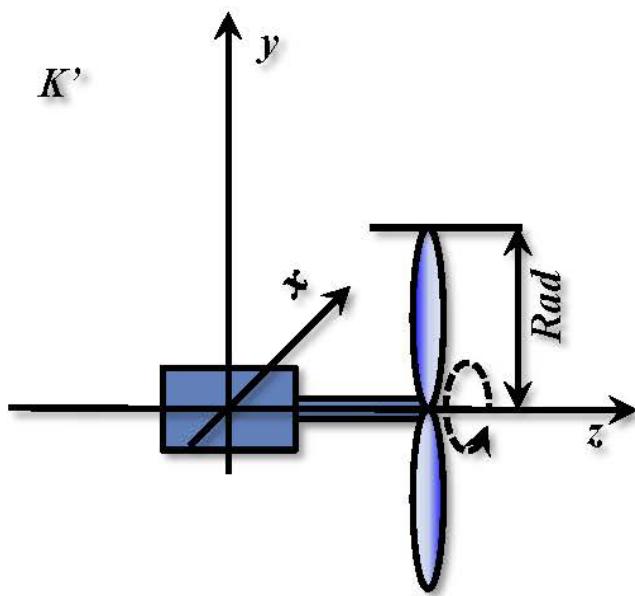
Вентилятор, подвешенный на пружине



Для нахождения траекторий относительных движений в классической механике используется предположение об абсолютности времени во всех системах отсчета, как инерциальных, так и неинерциальных.

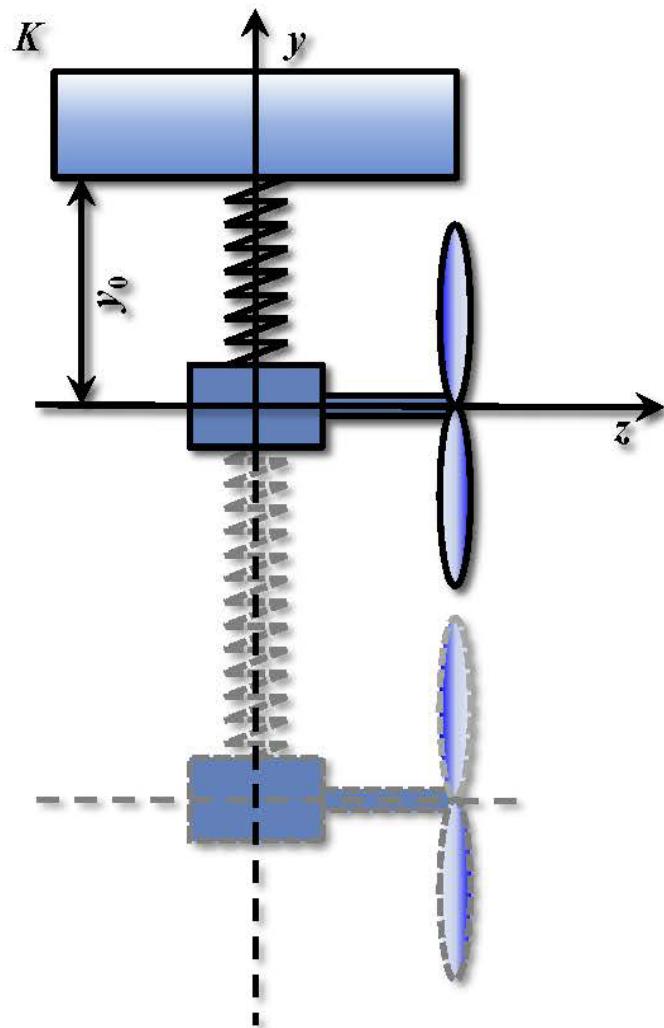
Рассмотрим движение одной и той же точки в двух различных системах отсчета K и K' .

Вентилятор, подвешенный на пружине



Система отсчета K' связана с осью вращения вентилятора и центром тяжести системы вентилятор-подвес. Лопасти вращаются в плоскости xy .

Вентилятор, подвешенный на пружине



Система отсчета K' связана с центром тяжести системы вентилятор-подвес. Движение системы происходит в плоскости yz .

Расстояние от точки подвеса до центра тяжести системы вентилятор-подвес в состоянии равновесия соответствует y_0 .



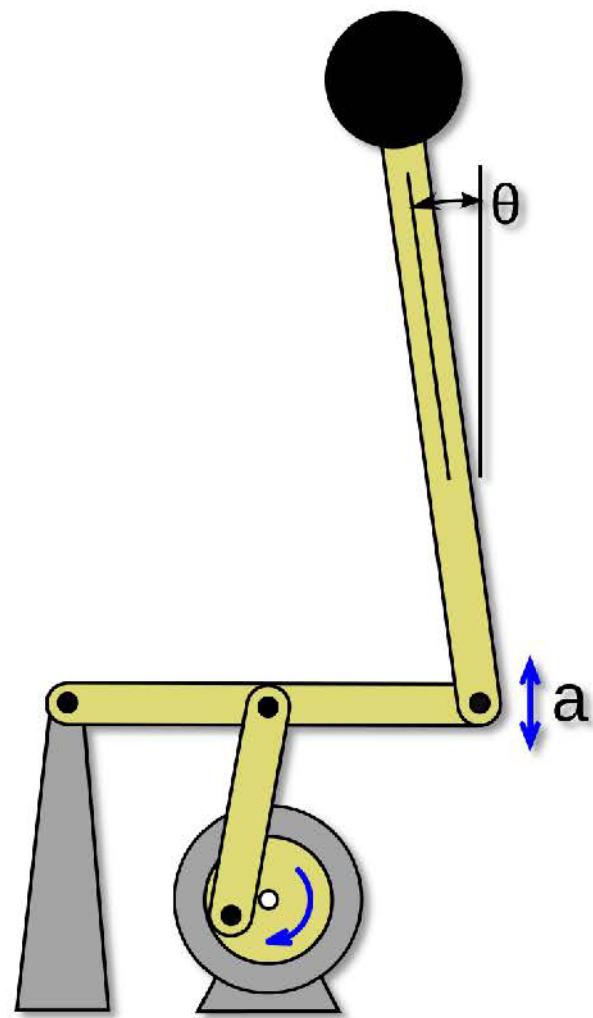
МАЯТНИК КАПИЦЫ



НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
Лабораторные работы для студентов 4 курса

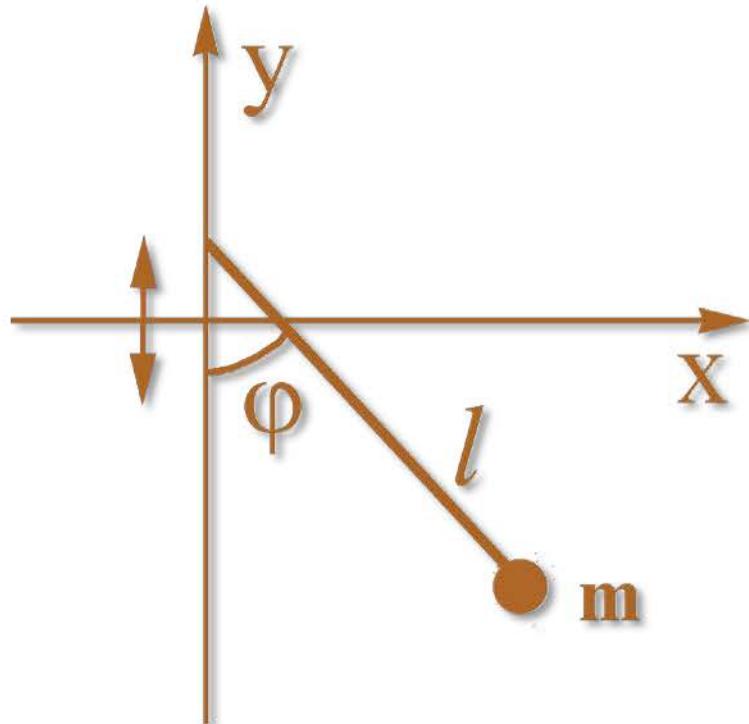
Маятник Капицы



Маятником Капицы называется система, состоящая из грузика, прикреплённого к лёгкой нерастяжимой спице, которая крепится к вибрирующему подвесу. Маятник носит имя академика и нобелевского лауреата П.Л. Капицы, построившего в 1951 г. теорию для описания такой системы.

При неподвижной точке подвеса, модель описывает обычный математический маятник, для которого имеются два положения равновесия: в нижней точке и в верхней точке. При этом равновесие математического маятника в верхней точке является неустойчивым, и любое сколь угодно малое возмущение приводит к потере равновесия.

Маятник Капицы



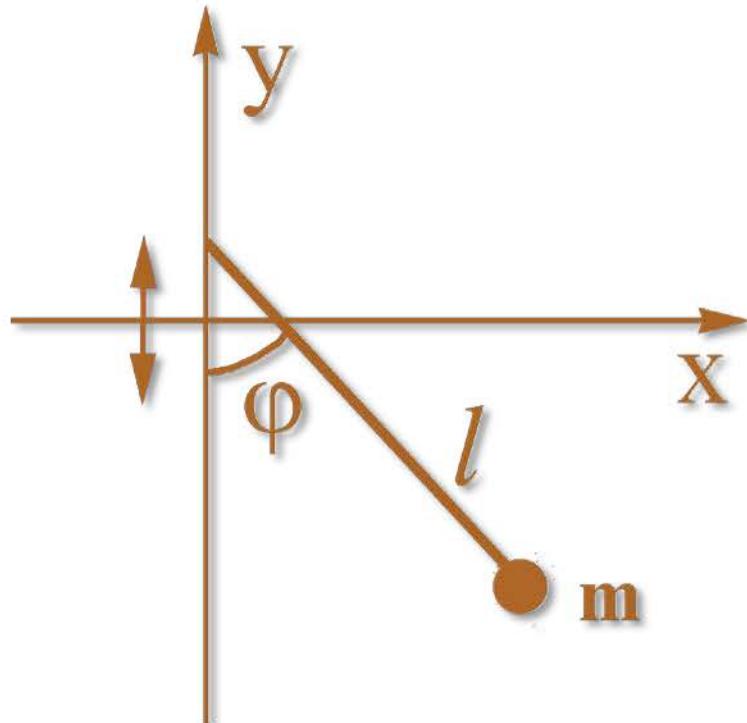
Схематичное изображение маятника

Направим ось у вертикально вверх, а ось x горизонтально, так чтобы плоское движение маятника происходило в плоскости (x – y).

Введем обозначения.

- v – частота вынуждающих вертикальных гармонических колебаний подвеса;
- a – амплитуда вынужденных колебаний;
- $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ – собственная частота колебаний математического маятника;
- g – ускорение свободного падения;
- l – длина легкого стержня;
- m – масса грузика.

Маятник Капицы

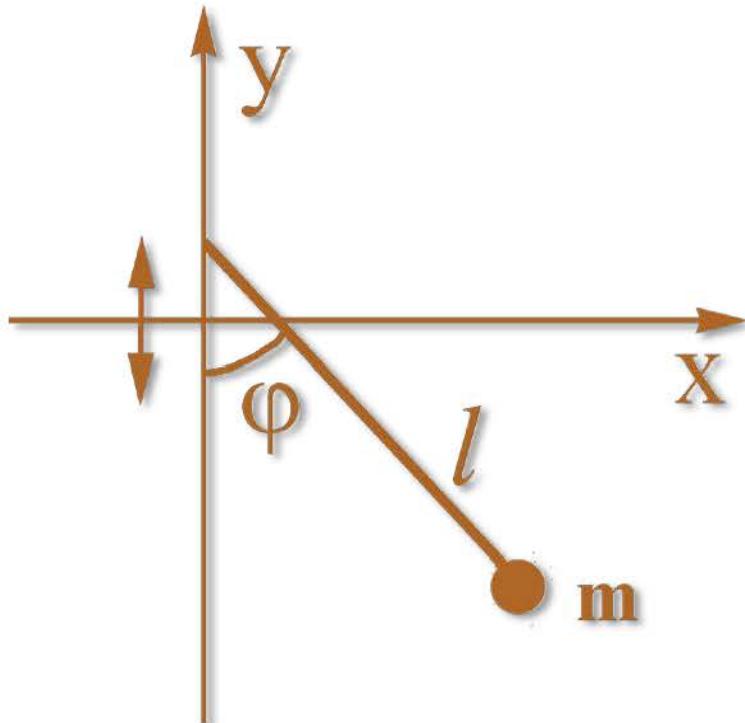


*Схематичное изображение
маятника*

Если угол между стержнем и осью у обозначить как φ , то зависимость координат грузика от времени запишется следующими формулами:

$$\begin{cases} x = l \sin \varphi \\ y = -l \cos \varphi \end{cases}$$

Энергия маятника Капицы



Схематичное изображение маятника

Потенциальная энергия маятника в поле тяжести задается положением грузика по вертикали y , как

$$E_{pot} = -mg(l \cos \varphi + a \cos(vt))$$

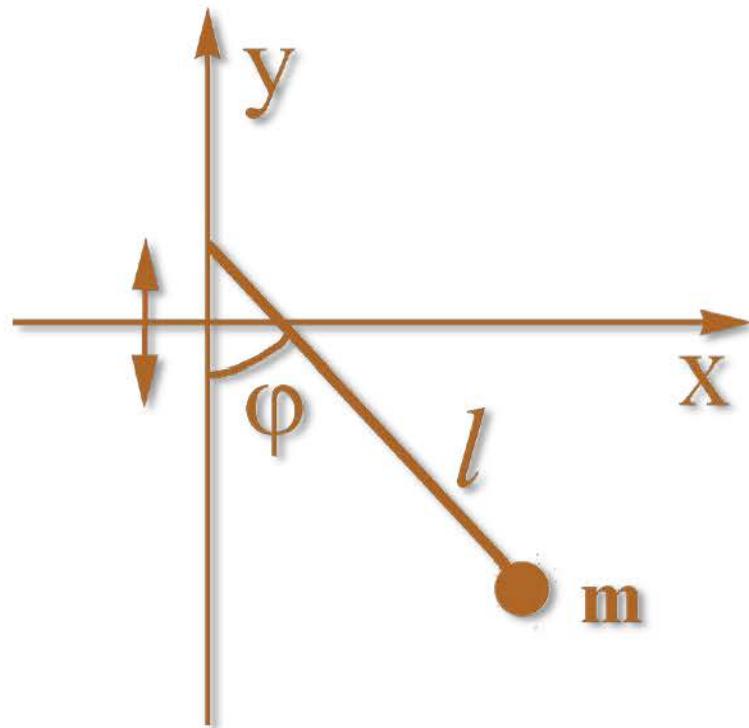
В кинетической энергии помимо обычного слагаемого, описывающего движение математического маятника, имеются дополнительные составляющие, вызванные вибрацией подвеса:

$$E_{kin} = \frac{m}{2} \left(\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right) =$$

$$= \frac{m}{2} \left(\left(l \cos(\varphi) \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \left(l \sin(\varphi) \frac{d\varphi}{dt} + av \sin(vt) \right)^2 \right) =$$

$$= \frac{ml^2}{2} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + malv \sin(vt) \sin(\varphi) \left(\frac{d\varphi}{dt} \right) + \frac{ma^2 v^2}{2} \sin^2(vt)$$

Энергия маятника Капицы



Схематичное изображение маятника

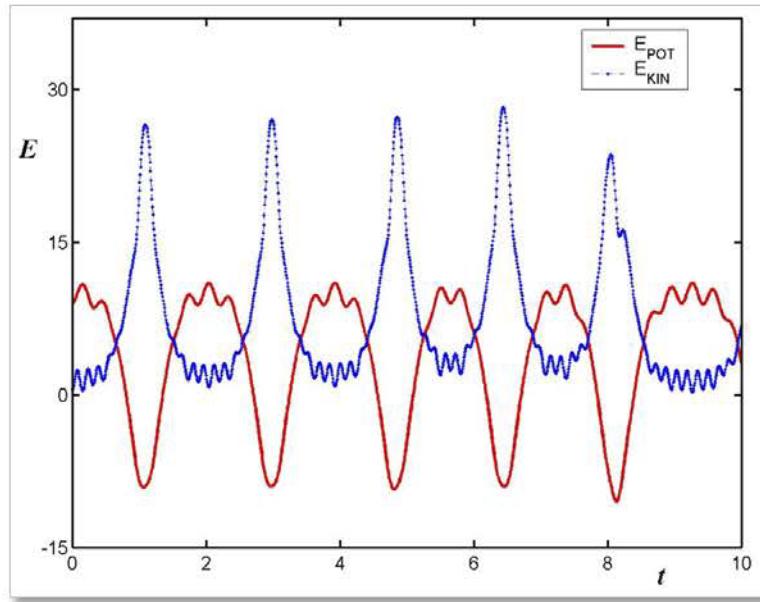
Полная энергия системы определяется суммой кинетической и потенциальной энергий:

$$E = E_{pot} + E_{kin},$$

а лагранжиан системы их разностью

$$\begin{aligned} L &= E_{kin} - E_{pot} = \\ &= \frac{ml^2}{2} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + malv \sin(vt) \sin(\varphi) \left(\frac{d\varphi}{dt} \right) + \\ &\quad + \frac{ma^2 v^2}{2} \sin^2(vt) + \\ &\quad + mg(l \cos \varphi + a \cos(vt)) \end{aligned}$$

Уравнение движения маятника Капицы



Характерные зависимости
потенциальной и кинетической
энергий от времени для маятника
Капицы

Движение маятника удовлетворяет
уравнениям Эйлера – Лагранжа.
Зависимость фазы маятника φ от
времени определяет положение грузика

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial L}{\partial \varphi},$$

где $\dot{\varphi} = d\varphi/dt$.

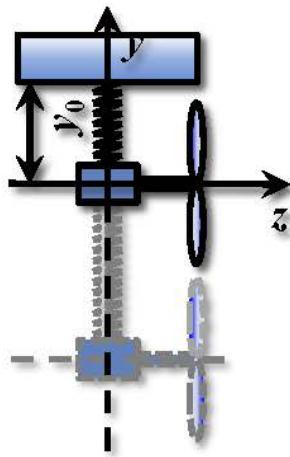
Дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\left(av^2 \cos(vt) + g\right) \frac{\sin\varphi}{l},$$

описывающие эволюцию фазы
маятника нелинейно из-за имеющегося
в нём множителя $\sin\varphi$. Наличие
нелинейного слагаемого может
приводить к хаотическому поведению и
появлению странных аттракторов.

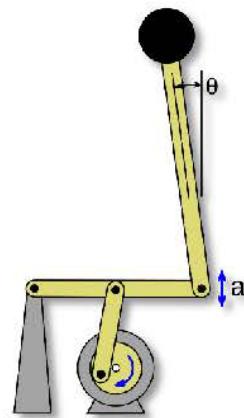
Задачи для самостоятельно решения

- *Вентилятор, подвешенный на пружине*



1. Построить модель траектории концов лопастей вентилятора.
2. Найти при каких соотношениях периода вращения лопастей и периода колебаний пружинного маятника траектория концов лопастей соответствует фигуре Лиссажу.

- *Маятник Капицы*



1. Построить модель траектории Маятника.
2. Исследовать случай, когда частота вынуждающих колебаний v много больше частоты собственных колебаний ω_0 .