МИЭТ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Лабораторные работы для студентов 4 курса
ПМ-41
Преподаватель:
Лебедев С.А.

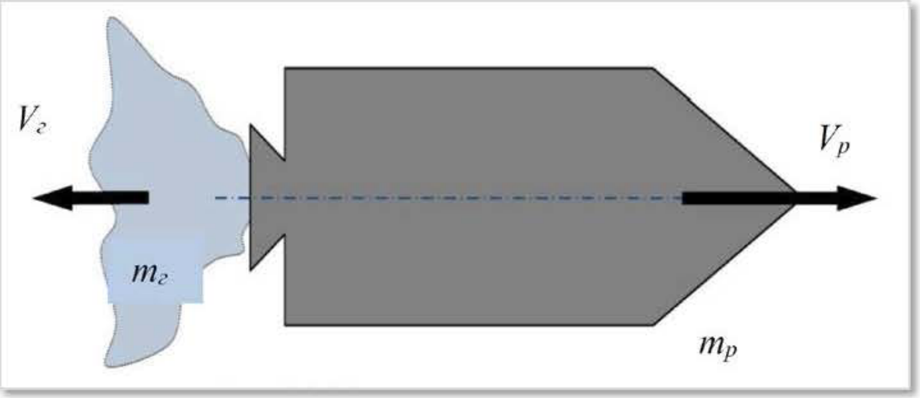
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ РАКЕТЫ

МИЭТ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
Лабораторные работы для студентов 4 курса

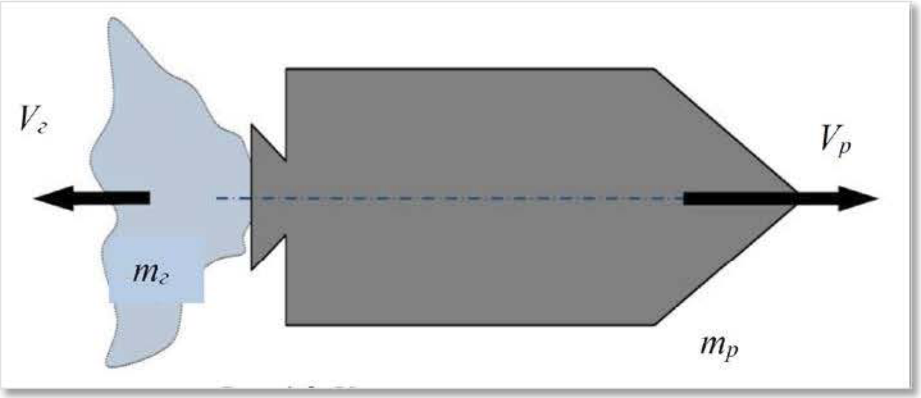
1. Содержательная постановка задачи



Представим ракету в виде упрощенной модели, как показано на рисунке. Масса ракеты при этом складывается из массы конструкции ракеты m_p и массы выбрасываемых газов $m_г$.

В определенный рассматриваемый момент времени ракета движется со скоростью V_p, отбрасываемые газы движутся со скоростью $V_г$.

2. Концептуальная постановка задачи

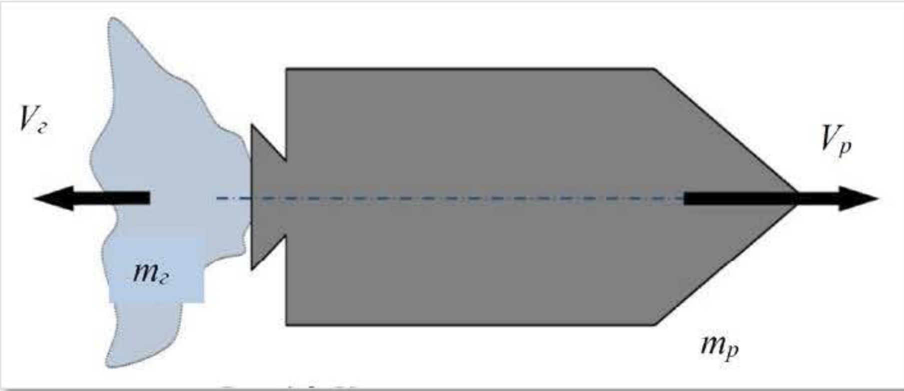


Будем рассматривать движение ракеты в безвоздушном пространстве.

Продукты сгорания покидают кормовые сопла ракеты в системе координат, в которой ракета неподвижна.

Считаем ракету математической точкой.

3. Математическая постановка задачи



За время dt часть топлива выгорает, так что суммарная летящая масса изменяется на dm (при этом $dm < 0$).
Из закона сохранения импульса следует, что:

$$m(t)\cdot V_p(t) = m(t+dt)\cdot V_p(t+dt) - dm\left(V_p(t+\xi dt) - V_г\right), \quad 0<\xi<1.$$

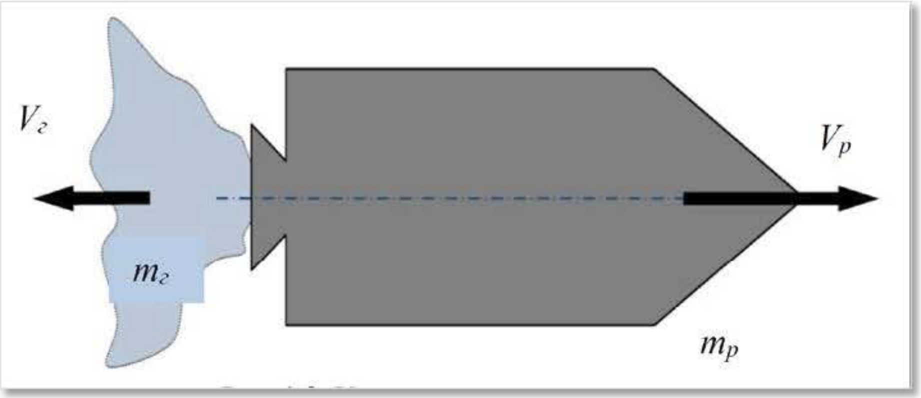
где $m = m_p + m_г$ –масса собственно ракеты и топлива, m_p –масса ракеты, $m_г$ – масса топлива, V_p – скорость ракеты, $V_г$ – скорость истекания газов, $V_p(t+\xi dt)-V_г$ – средняя за промежуток dt скорость истекающих газов.

Отсюда следует уравнение: $$m\frac{dV_p(t)}{dt} = -V_г\frac{dm(t)}{dt}$$

Данное уравнение необходимо решить при $t > 0$. Считаем, что

$$V = V_0,\ m = m_0 \quad \text{при } t = 0.$$

3. Математическая постановка задачи



Полученное уравнение перепишем в удобной для интегрирования форме:

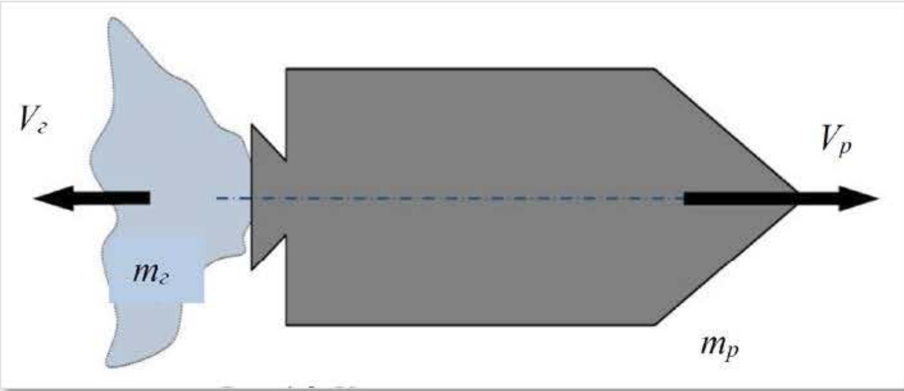
$$\frac{dV_p}{dt} = -\frac{V_г}{m}\frac{dm}{dt} = -V_г \frac{d\ln(m)}{dt},$$

откуда

$$V_p(t) = V_0 + V_г \ln\left(\frac{m_0}{m(t)}\right)$$

Пусть начальная масса $m_0 = m_p + m_г + m_н$, где $m_н$ – масса полезной нагрузки . В ходе полета масса топлива меняется и в конце концов становится равной нулю.

3. Математическая постановка задачи



Рассмотрим предельное значение скорости ракеты, если ее начальная скорость равна нулю, т.е. на старте $V_г = 0$.

Пусть все топливо уже израсходовано: $m(t) = m_p + m_н$.

Тогда

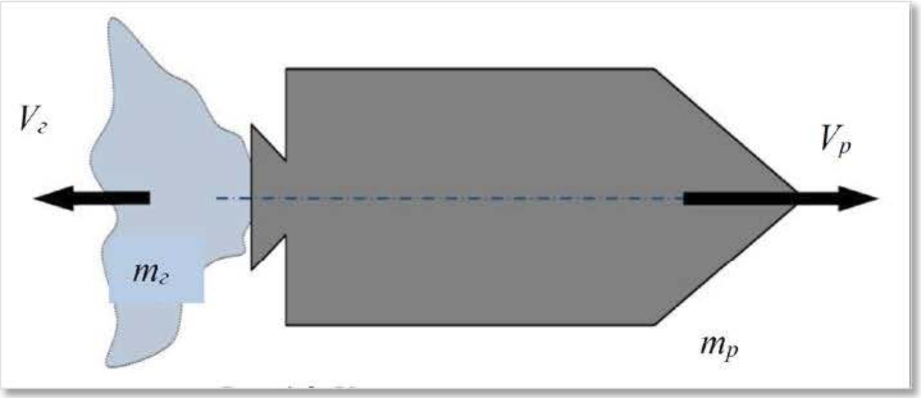
$$V_p(t) = V_г \ln\left(1 + \frac{m_0}{m_p + m_н}\right)$$

Введем коэффициент

$$\lambda = \frac{m_н}{m_0 - m_p}$$

Характеризующий отношение структурной массы ракеты и массы топлива.

3. Математическая постановка задачи



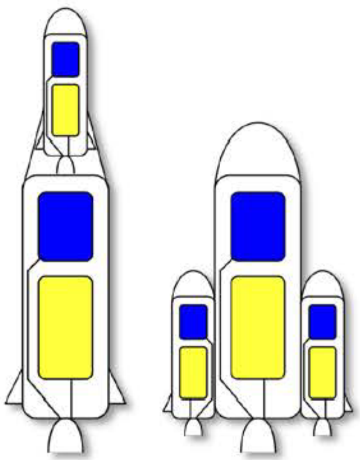
Легко видно, что при фиксированных других параметрах конечная скорость тем выше, чем меньше полезная нагрузка.

После сгорания всего топлива итоговая скорость есть

$$V_p = V_г \ln\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

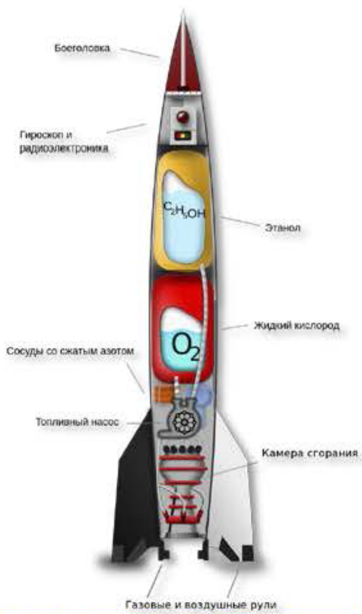
Для реальных значений параметров современных ракет $V_г$ = 3 км/с, λ = 0,1 имеем V_p = 7 км/с. Чтобы достичь больших скоростей необходимо использовать многоступенчатые ракеты.

Задачи для самостоятельно решения



- ***Двух- и трехступенчатая ракета***

  1. Исследовать зависимость скорости двухступенчатой ракеты от соотношения масс топлива в каждой ступени
  2. Исследовать зависимость скорости движения трехступенчатой ракеты от времени для разных масс топлива в каждой ступени



- ***Баллистическая ракета***

  1. Исследовать дальности полета двухступенчатой баллистической ракеты от начальной высоты полета и угла полета.
  2. Исследовать дальности полета двухступенчатой баллистической ракеты от начальной высоты полета, угла полета и соотношения масс топлива в каждой ступени