Implementation of primality test in polynomial time

(Implementation of primality test in polynomial time)(Implementacja algorytmu, sprawdzającego pierwszość liczby w czasie wielomianowym)

Martyna Siejba

Praca licencjacka

Promotor: prof. Krzysztof Loryś

Uniwersytet Wrocławski
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Informatyki

18 stycznia 2019

Streszczenie

. . .

. . . . . .

Spis treści

Rozdział 1.

Wstęp

1.1. Przesłanki

1.2. Uwagi odnośnie notacji

Rozdział 2.

Podstawy algebraiczne

Aby udowodnić poprawność algorytmu AKS potrzebne nam będą podstawowe pojęcia oraz twierdzenia algebry abstrakcyjnej, w szczególności własności pierścieni ilorazowych oraz wielomianów cyklotomicznych i pierwiastków z jedności nad ciałem. Poniższy rozdział poświęcony jest więc wprowadzeniu tych pojęć oraz udowodnieniu twierdzeń przydatnych później w dowodzie poprawności algorytmu AKS.

2.1. Pierścień, ciało, pierścień ilorazowy

Zdefiniujmy najpierw podstawowe struktury algebraiczne, których własności będziemy często wykorzystywać w dowodach lematów i twierdzeń, prowadzących do udowodnienia poprawności algorytmu.

Definicja 1. Zbiór R zamknięty na dwie operacje binarne $\oplus$ oraz $\odot$ nazywamy ***pierścieniem***, jeśli

- $\oplus$ jest przemienna ($\forall_{a,b \in R}\, a \oplus b = b \oplus a$) oraz łączna ($\forall_{a,b,c \in R}\, (a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$);
- zawiera element zerowy ($\exists_{0 \in R} \forall_{a \in R}\, a \oplus 0 = 0 \oplus a = 0$);
- dla każdego elementu zawiera element odwrotny ($\forall_{a \in R} \exists_{(-a) \in R}\, a \oplus (-a) = 0$);
- $\odot$ jest łączna ($\forall_{a,b,c \in R}\, (a \odot b) \odot c = a \odot (b \odot c)$);
- $\oplus$ jest rozdzielna względem $\odot$ ($\forall_{a,b,c \in R}\, a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c) \wedge (a \oplus b) \odot c = (a \odot c) \oplus (b \odot c)$).

Obserwacja 1. Każdy pierścień jest grupą.

Uwaga. W przypadku, gdy oczywistym jest, jaka operacja mnożenia jest rozważana, wyrażenie ab będzie skróconym zapisem operacji mnożenia argumentów a, b.

Definicja 2. Pierścień $\langle R, \oplus, \odot \rangle$ nazywamy ***przemiennym*** jeśli $\forall_{a,b \in R}\, ab = ba$.

Możemy teraz zauważyć, że pierścieniem jest na przykład zbiór liczb całkowitych z mnożeniem i dodawaniem lub zbiór wielomianów o współczynnikach całkowitych z dodawaniem i mnożeniem wielomianów.

Definicja 3. Pierścień $\langle F, \oplus, \odot \rangle$ nazywamy ***ciałem***, jeśli

- istnieje element neutralny mnożenia ($\exists_{1 \in F} \forall_{a \in F}\, a1 = 1a = a$) oraz
- $\langle F \setminus \{0\}, \odot, 1 \rangle$ jest grupą abelową.

Innymi słowy jest to pierścień z elementem neutralnym mnożenia, w którym dla każdego niezerowego elementu istnieje element odwrotny. Przykładem ciał są zbiory reszt z dzielenia przez liczbę pierwszą z operacjami dodawania i mnożenia modulo. Jeśli rozważymy natomiast wcześniej przywołane przykłady pierścieni, możemy zauważyć, że zarówno zbiór liczb całkowitych jak i zbiór wielomianów o całkowitych współczynnikach nie jest ciałem. W obu przykładach zbiory te nie spełniają warunku na istnienie elementów odwrotnych.

Definicja 4. ***Charakterystyką*** ciała F będziemy nazywać najmniejszą taką liczbę naturalną $char(F) = n$, że suma n jedynek równa się zeru w F.

Definicja 5. Niepusty zbiór $I \subseteq R$ nazywamy ideałem pierścienia $\langle R, \oplus, \odot \rangle$, jeśli

- $\langle I, \oplus \rangle$ jest podgrupą $\langle R, \oplus \rangle$ oraz
- $\forall_{i \in I, r \in R}\, ir \in I \wedge ri \in I$.

Możemy zauważyć, że ideał w teorii pierścieni odpowiada podgrupie normalnej w teorii grup. Co więcej, analogia ta aplikuje się także do konstrukcji pierścienia ilorazowego. Ideał pełni bowiem w konstrukcji pierścienia ilorazowego taką rolę, jaką w konstrukcji grupy ilorazowej pełni podgrupą normalna.

Twierdzenie 1. *Jeśli $\langle R, \oplus, \odot \rangle$ jest pierścieniem przemiennym oraz $1 \in R$, to dla $a \in R$ zbiór $\langle a \rangle = \{ar \,|\, r \in R\}$ jest jego ideałem. Taki ideał nazywamy **ideałem głównym** generowanym przez element a.*

Dowód. Aby pokazać, że $I = \langle a \rangle$ ($a \in R$) jest ideałem $\langle R, \oplus, \odot \rangle$, należy pokazać, że (1) $\langle I, \oplus \rangle$ jest podgrupą $\langle R, \oplus \rangle$ oraz (2) $\forall_{i \in I, r \in R}\, i \odot r \in I \wedge r \odot i \in I$.

Aby udowodnić (1), wystarczy pokazać, że (1.1) istnieje element neutralny $e \in I$, (1.2) I jest zamknięte na $\oplus$ oraz (1.3) dla każdego elementu istnieje w I element odwrotny.

(1.1) Wiemy, że $0 \in R$, więc $a0 = 0 \in I$.

(1.2) Weźmy dowolne $i_1, i_2 \in I$. Istnieją takie $r_1, r_2 \in R$, że $i_1 = ar_1$ oraz $i_2 = ar_2$. Stąd $i_1 \oplus i_2 = (ar_1) \oplus (ar_2)$. Z własności pierścienia $\langle R, \oplus, \odot \rangle$ mamy $(ar_1) \oplus (ar_2) = a(r_1 \oplus r_2)$, więc $i_1 \oplus i_2 \in I$, czyli I jest zamknięty na $\oplus$.
(1.3) Weźmy dowolne $i = ar \in I, r \in R$. Istnieje $-r \in R$, więc $a(-r) \in I$. Wiemy, że $i \oplus a(-r) = ar \oplus a(-r) = a(r \oplus -r) = a0 = 0$, więc $a(-r) \in I$ jest elementem odwrotnym i.

(2) Weźmy dowolne $i = ar_1 \in I$, $r \in R$. $ir = ar_1r = a(r_1r)$, więc $ir \in I$. Z przemienności pierścienia $\langle R, \oplus, \odot \rangle$ mamy $ri = ir$, więc $ri \in I$. □

Definicja 6. Ideał M w pierścieniu R nazywamy ***ideałem maksymalnym***, jeśli dla każdego ideału I nad R zachodzi $M \subseteq I \Rightarrow I = R$.

Przypomnienie. *Podgrupę $\langle N, \circ \rangle$ grupy $\langle G, \circ \rangle$ nazywamy* ***podgrupą normalną****, jeśli $\forall_{g \in G}\, gN = Ng$, gdzie $gN = \{gn \,|\, n \in N\}$ oraz $Ng = \{ng \,|\, n \in N\}$.*

Możemy też uzasadnić analogię między ideałem a podgrupą formalną w formalny sposób.

Lemat 1. *Ideał I pierścienia $\langle R, \oplus, \odot \rangle$ jest podgrupą normalną grupy $\langle R, \oplus \rangle$.*

Dowód. Z definicji ideału wiemy, że $\langle I, \oplus \rangle$ jest podgrupą $\langle R, \oplus \rangle$.
Należy pokazać, że dla dowolnego $r \in R$ zachodzi $r \oplus I = I \oplus r$. Wiemy, że $\oplus$ jest przemienna, więc mamy $\{r \oplus i \,|\, i \in I, r \in R\} = \{i \oplus r \,|\, i \in I, r \in R\}$, czyli $r \oplus I = I \oplus r$. □

Twierdzenie 2. *Jeśli $\langle G, \circ \rangle$ jest grupą, a $\langle N, \circ \rangle$ jej podgrupą normalną, to zbiór warstw grupy G względem N z działaniem $\otimes$ zdefiniowanym jako $(aN)(bN) = abN$ tworzy grupę G/N nazywaną* ***grupą ilorazową****.*

Dowód. Należy udowodnić, że
(1) działanie jest dobrze zdefiniowane, czyli $\forall_{a,b,c,d \in G/N}\, a = b \wedge c = d \Rightarrow ac = bd$;
(2) G/N z wyżej zdefiniowanym działaniem jest grupą.

(1) Weźmy $aN = bN \in G/N$ oraz $cN = dN \in G/N$. Chcemy pokazać, że $(aN)(cN) = (bN)(dN)$. Wiemy, że, skoro $\langle N, \circ \rangle$ jest grupą, istnieje element neutralny $e \in N$. Stąd wiemy, że $a = ae \in aN$ oraz $b = be \in bN$. Z $aN = bN$ mamy $b \in aN$. Istnieje więc $n_1 \in N$ takie, że $an_1 = b$. Analogicznie, istnieje $n_2 \in N$ takie, że $cn_2 = d$.

Można zauważyć, że dla dowolnego $n \in N$ $nN = N$. Własność ta wynika bezpośrednio z faktu, że N jest zamknięty na $\circ$.

Korzystając z powyższej obserwacji oraz faktu, że N jest podgrupą normalną mamy $(bN)(dN) = bdN = an_1cn_2N = an_1cN = an_1Nc = aNc = acN$.

(2) Aby pokazać, że G/N jest grupą należy pokazać (2.1) zamkniętość na $\otimes$, (2.2) łączność $\otimes$, (2.3) istnienie elementu neutralnego oraz (2.4) istnienie elementów odwrotnych.
(2.1) G/N jest zamknięty na $\otimes$. Weźmy dowolne aN, $bN \in G/N$. Mamy $(aN)(bN) = abN$. $ab \in G$, więc $abN \in G/N$.
(2.2) $\otimes$ jest łączne. Weźmy dowolne aN, bN, $cN \in G/N$. Korzystając z łączności $\odot$ i faktu, że N jest normalna ($cN = Nc$), mamy

$$aN((bN)(cN)) = aN(bcN) = a(bc)N = (ab)cN \tag{2.1}$$
$$= (ab)Nc = (abN)cN = ((aN)(bN))cN. \tag{2.2}$$

(2.3) Istnieje w G/N element neutralny. Weźmy eN, gdzie e jest elementem neutralnym w G. Dla dowolnego $aN \in G/N$ mamy $(aN)(eN) = aeN = aN$.
(2.4) Dla każdego elementu istnieje element odwrotny. Weźmy dowolne $aN \in G/N$. Niech $-a$ będzie elementem odwrotnym a. Wiemy, że $-a \in G$. Mamy

$$(aN)(-aN) = a(-a)N = eN,$$

czyli element odwrotny w G/N. □

Twierdzenie 3. *Niech I będzie ideałem pierścienia przemiennego $\langle R, \oplus, \odot\rangle$. $\langle R/I, +, \times\rangle$, gdzie:*

- $(r \oplus I) \times (s \oplus I) = r \odot s \oplus I,$
- $(r \oplus I) + (s \oplus I) = r \oplus s \oplus I$

jest pierścieniem przemiennym.

Dowód. (1) $\langle I, \oplus\rangle$ jest podgrupą normalną $\langle R, \oplus\rangle$, więc z twierdzenia **??** $\langle R/I, +\rangle$ z jest grupą ilorazową.
Należy więc pokazać, że:
(2) $\times$ jest dobrze zdefiniowana, tzn. dla $a, b, c, d \in R/I$ jeśli $a = b$ oraz $c = d$, to $a \times c = b \times d$;
(3) $\langle R/I, +, \times\rangle$ jest pierścieniem przemiennym.

(2) Weźmy dowolne $a, b, c, d \in R$ takie, że $a \oplus I = b \oplus I$ oraz $c \oplus I = d \oplus I$. Wiemy, że $\langle I, \oplus\rangle$ jest grupą, więc zawiera element neutralny e. Stąd $a \oplus e = a \in a \oplus I = b \oplus I$. Istnieje więc $i_1 \in I$ taki, że $a = b \oplus i_1$. Analogicznie istnieje $i_2 \in I$ takie, że $c = d \oplus i_2$. $\langle I, \oplus\rangle$ jest grupą, więc dla dowolnego $i \in I$ $i \oplus I = I$.
Mamy więc $(a \oplus I) \times (c \oplus I) = a \odot c \oplus I = (b \oplus i_1) \odot (d \oplus i_2) \oplus I$. Jako że $b, d, i_1, i_2 \in R$ oraz $\langle R, \oplus, \odot\rangle$ jest pierścieniem mamy $(b \oplus i_1) \odot (d \oplus i_2) \oplus I = b \odot d \oplus b \odot i_2 \oplus i_2 \odot d \oplus i_1 \odot i_2 \oplus I$. I jest ideałem, więc $b \odot i_2, i_1 \odot d, i_1 \odot i_2 \in I$. Stąd $b \odot d \oplus b \odot i_2 \oplus i_2 \odot d \oplus i_1 \odot i_2 \oplus I = b \odot d \oplus I = (b \oplus I) \times (d \oplus I)$.
(3) Wystarczy pokazać, że:

(3.1) $+$ jest przemienna. Weźmy dowolne $a \oplus I, b \oplus I \in R/I$. Z przemienności $\oplus$ w pierścieniu $\langle R, \oplus, \odot \rangle$ mamy $(a \oplus I) + (b \oplus I) = a \oplus b \oplus I = b \oplus a \oplus I = (a \oplus I) + (b \oplus I)$.
(3.2) $+$ jest łączna. Weźmy dowolne $a \oplus I, b \oplus I, c \oplus I \in R/I$. Z łączności $\oplus$ w $\langle R, \oplus, \odot \rangle$ mamy $((a \oplus I) + (b \oplus I)) + (c \oplus I) = (a \oplus b \oplus I) + (c \oplus I) = (a \oplus b) \oplus c \oplus I = a \oplus (b \oplus c) \oplus I = (a \oplus I) + (b \oplus c \oplus I) = (a \oplus I) + ((b \oplus I) + (c \oplus I))$.
(3.3) Istnieje element zerowy. Niech $e = e' \oplus I$, gdzie e' jest elementem zerowym pierścienia $\langle R, \oplus \rangle$. Weźmy dowolne $a \oplus I \in R/I$. Wtedy $(a \oplus I) + e = a \oplus e' \oplus I = e' \oplus I = e = e' \oplus a \oplus I = e + (a \oplus I)$.
(3.4) Dla każdego elementu istnieje element odwrotny. Weźmy dowolne $a \oplus I \in R/I$. Istnieje $-a \in R$, będące elementem odwrotnym a. $(a \oplus I) + (-a \oplus I) = a \oplus -a \oplus I = e' \oplus I = e = -a \oplus a \oplus I = (-a \oplus I) + (a \oplus I)$.
(3.5) $\times$ jest łączna. Weźmy dowolne $a \oplus I, b \oplus I, c \oplus I \in R/I$. Z łączności $\odot$ w pierścieniu $\langle R, \oplus, \odot \rangle$ mamy $((a \oplus I) \times (b \oplus I)) \times (c \oplus I) = (a \odot b \oplus I) \times (c \oplus I) = (a \odot b) \odot c \oplus I = a \odot (b \odot c) \oplus I = (a \oplus I) \times (b \odot c \oplus I) = (a \oplus I) \times ((b \oplus I) \times (c \oplus I))$.
(3.6) $+$ jest rozdzielna względem $\times$. Weźmy dowolne $a \oplus I, b \oplus I, c \oplus I \in R/I$. Z rozdzielności $\oplus$ względem $\odot$ w pierścieniu $\langle R, \oplus, \odot \rangle$ mamy $(a \oplus I) \times ((b \oplus I) + (c \oplus I) = a \odot (b \oplus c) \oplus I = a \odot b \oplus a \odot c \oplus I = ((a \oplus I) \times (b \oplus I)) + ((a \oplus I) \times (c \oplus I)))$ oraz $((a \oplus I) + (b \oplus I)) \times (c \oplus I) = (a \oplus b) \odot c \oplus I = a \odot c \oplus b \odot c \oplus I = ((a \oplus I) \times (c \oplus I)) + ((b \oplus I) \times (c \oplus I))$.
(3.7) $\times$ jest przemienna. Weźmy dowolne $a \oplus I, b \oplus I \in R/I$. Z przemienności $\odot$ w pierścieniu $\langle R, \oplus, \odot \rangle$ mamy $(a \oplus I) \times (b \oplus I) = a \odot b \oplus I = b \odot a \oplus I = (b \oplus I) \times (a \oplus I)$. □

Twierdzenie 4. *Jeśli $\langle R, \oplus, \odot \rangle$ jest pierścieniem przemiennym z 1, a I ideałem maksymalnym nad R, to R/I z działaniami zdefiniowanymi jak w powyższych twierdzeniach jest ciałem.*

Dowód. Wiemy, że R/M jest pierścieniem przemiennym. Wystarczy pokazać, że (1) istnieje element neutralny mnożenia oraz (2) dla każdego niezerowego elementu istnieje element odwrotny.
(1) Istnieje 1 w R, więc dla dowolnego $a \oplus M \in R/M$ mamy $(a \oplus M) \times (1 \oplus M) = a \odot 1 \oplus M = a \oplus M = 1 \odot a \oplus M = (1 \oplus M) \times (a \oplus M)$.
(2) Weźmy dowolne $a \in R$ takie, że $a \oplus M$ jest niezerowe, czyli $a \notin M$. Weźmy zbiór $J = \{ra \oplus m \,|\, r \in R, m \in M\}$. Pokażemy, że J jest ideałem nad R. W tym celu wystarczt pokazać, że (2.1) $\langle J, \oplus \rangle$ jest podgrupą $\langle R, \oplus \rangle$ oraz (2.2)$\forall_{j \in J, r \in R}\, jr \in J \wedge rj \in J$.
(2.1.1) $J \subseteq R$. Wiemy, że R jest zamknięty na $\oplus$ i $\odot$, więc $\forall_{r,a',m \in R}\, ra' \oplus m \in R$.
(2.1.2) J zawiera element zerowy. M jest ideałem, czyli jest grupą, więc $0 \in M$. Stąd $0a \oplus 0 = 0 \in J$.
(2.1.3) Dla każdego elementu J istnieje element odwrotny. Weźmy dowolne $j = ra \oplus m \in J$. Wiemy, że $-r \in R$ oraz $-m \in M$. Stąd $-j = -ra \oplus -m \in J$. Wtedy $j \oplus -j = ra \oplus m \oplus -ra \oplus -m = ra \oplus -ra = 0a = 0$.
(2.1.4) J jest zamknięte na $\oplus$. Wexmy dowolne $j_1 = r_1a \oplus m_1, j_2 = r_2a \oplus m_2 \in J$. Wtedy $j_1 \oplus j_2 = r_1a \oplus m_1 \oplus r_2a \oplus m_2 = (r_1 \oplus r_2)a \oplus (m_1 \oplus m_2)$. Wiemy, że $r_1 \oplus r_2 \in R$

oraz $m_1 \oplus m_2 \in M$, więc $j_1 \oplus j_2 \in J$.
(2.1.5) $\oplus$ jest łączne. Własność wynika ta bezpośrednio z łączności $\oplus$ w R.
(2.2) Weźmy dowolne $ra \oplus m \in J, r' \in R$. Wtedy $jr' = (ra \oplus m) \odot r' = rar' \oplus mr'$. Z przemienności R $jr' = rr'a \oplus mr'$. $rr' \in R$ oraz, ponieważ M jest ideałem $mr' \in M$, więc $jr' \in J$. Analogicznie $r'j \in J$.
Wiemy, że J jest ideałem nad R. Możemy też pokazać, że $M \subset J$. $\forall_{m \in M}\, m = 0a \oplus m \in J$ oraz skoro $1 \in R, 0 \in M$, to $a \in J$. Wiemy, że $a \notin M$, więc $M \subset J$.
Mamy więc ideał J nad R, który zawiera M. Z założenia, że M jest maksymalny, mamy $J = R$, więc $1 \in J$, czyli $\exists_{m \in M, r \in R}\, ra \oplus m = 1$. Wtedy $(r \oplus M) \times (a \oplus M) = ra \oplus M = ra \oplus m \oplus M = 1 \oplus M$, czyli $(a \oplus M)^{-1} = r \oplus M$.

□

2.2. Pierścień wielomianów

Twierdzenie 5. *$\langle \mathbb{Z}_p, +_p, \times_p \rangle$, gdzie $p \in \mathbb{N}$ i $p \geq 2$, $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, \ldots, p-1\}$ oraz operacje są odpowiadającymi działaniami arytmetycznymi modulo p, jest ciałem, jeśli p jest pierwsze.*

Dowód. (1) $\langle \mathbb{Z}_p, +_p, \times_p \rangle$ z 1 jest pierścieniem. Dowód jest trywialny i korzysta z własności działań $+_p$ i $\times_p$.
(2) $\langle \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}, \times_p \rangle$ jest grupą abelową. Przemienność i łączność wynikają z własności $\times_p$. Elementem neutralnym jest 1. Jedyną nietrywialną własnością jest istnienie elementu przeciwnego, tzn. należy udowodnić, że $\forall_{a \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}} \exists_{a^{-1} \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}}\, a \times_p a^{-1} = 1$. Weźmy dowolne $a \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$. Załóżmy nie wprost, że nie istnieje $a^{-1} \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$ takie, że $a \times_p a{-}1 = 1$. To znaczy $\forall_{b \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}}\, a \times_p b \neq 1$. Ponieważ p jest pierwsze i wszystkie elementy $\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$ są mniejsze od p, wiemy, że $\forall_{b \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}}\, a \times_p b \neq 0$. Mamy więc $p-1$ czynników i $p-2$ możliwych wyników. Z zasady szufladkowej mamy $\exists b_1, b_2 \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}, b_1 \neq b_2\, a \times_p b_1 = a \times_p b_2$. Wiemy, że istnieje w $\mathbb{Z}_p$ niezerowy element $-b_2$, więc $-b_2 \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$. Korzystając z własności pierścienia $\langle \mathbb{Z}_p, +_p, \times_p \rangle$ możemy przekształcić powyższe równanie do $a \times_p (b_1 +_p -b_2) = 0$. Z $b_1 \neq b_2$ mamy $b_1 +_p -b_2 \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$, czyli doszliśmy do sprzeczności. □

Twierdzenie 6. *Jeśli $\langle R, \oplus, \odot \rangle$ jest pieścieniem przemiennym z 1, to $\langle R[X], \oplus^*, \odot^* \rangle$, gdzie $R[X]$ jest zbiorem wielomianów o współczynnikach w R, a $\oplus^*$ i $\odot^*$ są naturalnie zdefiniowanym dodawaniem i mnożeniem wielomianów z użyciem $\oplus$ i $\odot$ w operacjach na współczynnikach, jest pierścieniem przemiennym z 1.*

Uwaga. Dowód twierdzenia przebiega poprzez pokazanie kolejnych własności pierścienia. Elementem zerowym jest wielomian zerowy, a elementem neutralnym mnożenia jest 1.

Twierdzenie 7. *Jeśli $\langle F, \oplus, \odot, 0, 1 \rangle$ jest ciałem, to wszystkie ideały nad $F[X]$ są ideałami głównymi.*

Dowód. Weźmy dowolny ideał I nad $F[X]$. Jeśli $I = \{0\}$, to $I = \langle 0 \rangle$. Załóżmy więc, że I jest niezerowe i weźmy $p(x) \in I$ takie, że $p(x) \neq 0$ oraz $p(x)$ jest wielomianem najmniejszego stopnia w I. Weźmy dowolny wielomian $f(x) \in I$. Wiemy, że $\exists_{q(x),r(x) \in I}\, f(x) = q(x)p(x) \oplus r(x) \wedge deg(r(x)) < deg(p(x))$. Z założenia o minimalnym stopniu $p(x)$ mamy $r(x) = 0$. Oznacza to, że dowolny wielomian z I da się przedstawić w postaci $q(x)p(x)$, więc $I = \langle p(x) \rangle$. □

Twierdzenie 8. *Jeśli $\langle F, \oplus, \odot, 0, 1 \rangle$, to $\langle g(x) \rangle$ jest ciałem i wielomian $g(x)$ jest nierozkładalny w $F[X]$, to $\langle g(x) \rangle$ jest ideałem maksymalnym.*

Dowód. Weźmy dowolny ideał I nad $F[X]$. Wiemy, że jest to ideał główny, więc istnieje $f(x) \in F[X]$ takie, że $I = \langle f(x) \rangle$. Załóżmy, że $\langle g(x) \rangle \subset I$. Znaczy to, że istnieje $h(x) \in F[X]$ takie, że $g(x) = f(x)h(x)$. $g(x)$ jest nierozkładalny, więc $f(x)$ lub $h(x)$ jest wielomianem stopnia 0. Jeśli $f(x)$ jest stopnia 0, to $\langle f(x) \rangle = F$. Jeśli $h(x)$ jest stopnia 0, to $\langle g(x) \rangle = \langle h(x) \rangle$, co jest sprzeczne z założeniem. □

Twierdzenie 9. *Jeśli p jest pierwsze i $h(x)$ jest nierozkładalnym w $\mathbb{Z}_p[X]$ wielomianem stopnia d to pierścień ilorazowy $\langle \mathbb{Z}_p[X]/\langle h(x) \rangle, \oplus, \odot \rangle$ jest ciałem rzędu p^d.*

Dowód. (1) $\langle \mathbb{Z}_p, +_p, \times_p, 0, 1 \rangle$ jest ciałem, a $h(x)$ jest nierozkładalny w pierścieniu $\langle \mathbb{Z}_p[X], +^*, \times^* \rangle$, więc $\mathbb{Z}_p[X]/\langle h(x) \rangle$ jest ciałem.
(2) Niech $M = \langle h(x) \rangle$ Pokażemy, że jeśli wielomiany $f(x) = h(x)q_1(x) +^* r_1(x), g(x) = h(x)q_2(x) +^* r_2(x) \in \mathbb{Z}_p[X]$, gdzie $r_1(x) = r_2(x)$, to $f(x) +^* M = g(x) +^* M$. Mamy $f(x) +^* M = h(x)q_1(x) +^* r_1(x) +^* M = r_1(x) +^* h(x)q_1(x) +^* M = r_1(x) +^* M = r_2(x) +^* M = r_2(x) +^* h(x)q_2(x) + M = g(x) + M$. Ponadto, wiemy, że, ponieważ M jest ideałem głównym, dowolna para wielomianów $f(x), g(x) \in r(x) +^* M$ ma taką samą resztę z dzielenia przez $h(x)$. Mamy więc wniosek, że para wielomianów należy do tego samego elementu zbioru $\mathbb{Z}_p[X]/\langle h(x) \rangle$ wtw mają taką samą resztę z dzielenia przez $h(x)$.
Mamy więc tyle elementów zbioru $\mathbb{Z}_p[X]/\langle h(x) \rangle$, ile jest różnych reszt dzielenia wielomianu przez $h(x)$, czyli też tyle, ile jest wielomianów stopnia $d - 1$ w $\mathbb{Z}_p[X]$. Stąd $ord(\mathbb{Z}_p[X]/\langle h(x) \rangle) = p^d$.

Definicja 7. ***Podciałem*** ciała F nazywamy takie G, że $G \subseteq F$ z działaniami z F ograniczonymi do elementów G jest ciałem.

Definicja 8. ***Rozszerzeniem ciała*** F nazywamy takie ciało G, F jest podciałem G.

Uwaga. Jako $F(a_1, \ldots, a_n)$ będziemy oznaczać najmniejsze rozszerzenie ciała F zawierające $a_1, \ldots, a_n$.

Definicja 9. ***Ciałem rozkładu*** wielomianu $f(X) \in F[X]$ nad F nazywamy G, będące rozszerzeniem F takie, że $f(X)$ można rozłożyć na czynniki liniowe w pierścieniu $G[X]$.

Lemat 2. *Dla każdego ciała F i wielomianu $f(X) \in F[X], deg(f) \geq 2$ istnieje rozszerzenie G ciała F, w którym $f(X)$ ma pierwiastek.*

Dowód. Niech $h(X) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ będzie nierozkładalnym w $F[X]$ czynnikiem $f(X)$. Z wiemy, że $F[X]/\langle h(X)\rangle$ jest ciałem. Zauważmy, że F jest izomorficzny z $\{a + \langle h(X)\rangle \,|\, a \in F\} \subseteq F[X]/\langle h(X)\rangle$. Więc $F[X]/\langle h(X)\rangle$ jest rozszerzeniem F. Ponieważ $deg(f) \geq 2$, $\alpha = X + \langle h(X)\rangle \in F[X]/\langle h(X)\rangle$. Wtedy $h(\alpha) = a_0 + a_1(X + \langle h(X)\rangle) + \cdots + a_n(X + \langle h(X)\rangle)^n = h(X) + \langle h(X)\rangle = 0$ w $F[X]/\langle h(X)\rangle$. Czyli α jest pierwiastkiem $f(X)$. □

Twierdzenie 10. *Dla każdego ciała F i wielomianu $f(X) \in F[X]$, $deg(f) \geq 1$ istnieje ciało rozkładu $f(X)$ nad F.*

Dowód. Dowód przebiegać będzie przez indukcję względem $n = deg(f)$. Przypadek dla $n = 1$ jest trywialny, ponieważ F spełnia warunki. Załóżmy więc $deg(f) \geq 2$ oraz, że dla wszystkich wielomianów niższego stopnia teza zachodzi. Z **??** wiemy, że istnieje ciało G będące rozszerzeniem F takie, że istnieje $\alpha \in G$, $f(\alpha) = 0$. Mamy więc w $G[X]$ $f(X) = (X - \alpha)g(X)$. Z założenia indukcyjnego wiemy, że dla $g(X)$ istnieje ciało rozkładu H nad G więc H jest też ciałem rozkładu $f(X)$ nad F. □

2.3. Pierwiastki z jedynki, wielomiany cyklotomiczne

Definicja 10. Niech F będzie ciałem, a $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$. Ciało rozkładu $F^{(n)}$ dla $X^n - 1$ nad F będziemy nazywać ***n-tym ciałem cyklotomicznym***, a zbiór pierwiastków $X^n - 1$ w $F^{(n)}$ ***pierwiastkami n-tego stopnia z jedności*** i oznaczać $E^{(n)}$.

Twierdzenie 11. *Niech F będzie ciałem, a $f(X) \in F[X]$. Jeśli $a \in F$ jest wielokrotnym pierwiastkiem $f(X)$, to jest też pierwiastkiem $f'(X)$.*

Dowód. Zauważmy, że, ponieważ $f(X)$ jest wielomianem, $f(X) \in F[X]$ implikuje $f'(X) \in F[X]$. Skoro $f(X)$ ma co najmniej podwójny pierwiastek w a, to istnieje $h(X) \in F[X]$ takie, że $f(X) = (X - a)(X - a)h(X)$. Wtedy $f'(X) = (X - a)((X - a)h'(X) + 2h(X))$, czyli $f'(X)$ ma pierwiastek w a. □

Lemat 3. *Jeśli ciało G jest rozszerzeniem ciała F, to $char(G) = char(F)$.*

Dowód. Ponieważ F i G są ciałami dla tych samych operacji $0_F = 0_G$ i $1_F = 1_G$, z definicji charakterystyki mamy $char(F) = char(G)$. □

Twierdzenie 12. *Dla każdego ciała $F, p = char(F)$ zbiór pierwiastków n-tego stopnia z jedności $E^{(n)}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$ oraz $p \nmid n$ z operacją mnożenia w $K^{(n)}$ jest grupą cykliczną rozmiaru n.*

Dowód. (1) Pokażemy, że $|\, E^{(n)}\,| = n$. Przypadek dla $n = 1$ jest trywialny, ponieważ zbiór $E^(n)$ jest wtedy zbiorem zawierającym tylko 1. Załóżmy więc, że $n \geq 2$. Z **??** wiemy, że jeśli $f(X) = X^n - 1$ i $f'(X) = nX^{n-1}$ nie mają wspólnych pierwiastków w F, to nie istnieją w F wielokrotne pierwiastki wielomianu $f(X)$. Z **??** mamy $char(K^{(n)}) = p$, więc istnieje n^{-1} w $K^{(n)}$. Możemy więc zauważyć, że jedynym pierwiastkiem $f'(X)$ w F jest 0. Dodatkowo 0 nie jest pierwiastkiem $f(X)$, więc $f(X)$ ma n różnych pierwiastków w F, skąd $|\, E^{(n)}\,| = n$.
(2) $E^{(n)}$ jest grupą operacją mnożenia w $K^{(n)}$. Weźmy dowolne $\zeta_1, \zeta_2 \in E^{(n)}$. Niech $\zeta = \zeta_1\zeta_2$. Wtedy $\zeta^n = (\zeta_1\zeta_2) = \zeta_1^n\zeta_2^n = 1$, czyli $\zeta_1\zeta_2 \in E^{(n)}$. Dla dowolnego $\zeta \in E^{(n)}$ istnieje element odwortny $\zeta^{n-1} \in E^{(n)}$. Element neutralny stanowi $1_{K^{(n)}}$.
(3) $E^{(n)}$ jest cykliczna.
Niech n będzie liczbą pierwszą. Weźmy dowolne $\zeta \in E^{(n)}$. Załóżmy nie wprost, że istnieje $q < n, q \in \mathbb{N}$ takie, że $\zeta^q = 1$. Wtedy $q \,|\, n$, co jest sprzeczne z założeniem o pierwszości n. Skoro takie q nie istnieje, to ζ generuje $E^{(n)}$, ponieważ dla każdego $i, j < n, i, j \in \mathbb{N}\, \zeta^i \neq \zeta^j$.
Niech $n = p_1^{e_1} \cdot \dots \cdot p_r^{e_r}$ będzie rozkładem n na czynniki pierwsze. Dla każdego $1 \geq i \geq r$ istnieje nie więcej niż $\frac{n}{p_i}$ pierwiastków wielomianu $x^{\frac{r}{p_i}} - 1$. n jest złożona, więc $\frac{n}{p_1} < n$ i istnieje ζ_i nie będąca pierwiastkiem $x^{\frac{r}{p_i}} - 1$. Niech $\alpha_i = \zeta_i^{\frac{n}{p_i^{e_i}}}$. Wiemy, że $o_n(\alpha_i) \,|\, p_i^{e_i}$, a ponieważ p_i jest pierwsza, $o_n(\alpha_i) = p_i^s$, gdzie $s \leq e_i$. Zauważmy, że jeśli dla $k < r_i$ $\alpha_i^{p_i^k} = 1$, to także $(\alpha_i^{p_i^k})^p = \alpha_i^{p_i^{k+1}} = 1$ i poprzez indukcję względem k $\alpha_i^{p_i^{e_i-1}} = 1$. Wybraliśmy α takie, że $\alpha_i^{p_i^{e_i-1}} = \zeta^{\frac{n}{p_i}} \neq 1$, więc $o_n(\alpha_i) = p_i^{e_i}$.
Weźmy $\alpha = \alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_r$. Pokażemy, że $o_n(\alpha) = n$. Wiemy, że $o_n(\alpha) \,|\, n$. Załóżmy nie wprost, że $o_n(\alpha) \neq n$. Wynika stąd, że istnieje takie p_i, że $o_n(\alpha) \,|\, \frac{n}{p_i}$. Wtedy $\alpha^{\frac{n}{p_i}} = 1 = \alpha_1^{\frac{n}{p_i}} \cdot \dots \cdot \alpha_r^{\frac{n}{p_r}}$. Dla każdego $j \neq i, 1 \leq j \leq r$ $p_j^{e_j} \,|\, \frac{n}{p_i}$, a ponieważ $o_n(\alpha_j) = p_i^{e_j}$, mamy $\alpha_j^{\frac{n}{p_i}} = 1$. Mamy więc $\alpha_i^{\frac{n}{p_i}} = 1$, czyli $o_n(\alpha_i) | \frac{n}{p_i}$. Mamy jednak $o_n(\alpha_i) = p_i^{e_i}$, które nie dzieli $\frac{n}{p_i}$, więc otrzymaliśmy sprzeczność. Pokazalśmy więc, że $o_n(\alpha) = n$. Na mocy argumentu jak w przypadku pierwszego n znaleźliśmy α będące generatorem $E^{(n)}$. □

Definicja 11. ***Funkcją Eulera*** nazywamy taką funkcję ϕ, że dla $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ $\phi(n)$ jest równa liczbie liczb naturalnych $q < n$ takich, że $NWD(n, q) = 1$.

Definicja 12. Pierwiastek n-tego stopnia z jedności nad ciałem F nazywamy ***pierwotnym***, jeśli jest generatorem grupy $E^{(n)}$.

Obserwacja 2. Dla każdego ciała F i $n \in \mathbb{N}$, $n \nmid char(F)$ istnieje co najmniej jeden pierwotny pierwiastek z jedności n-tego stopnia nad F.

Lemat 4. *Jeśli ζ jest pierwotnym pierwiastkiem n-tego stopnia nad ciałem $F, char(F) \nmid n$, to dowolne ζ^s, gdzie $s \in \mathbb{N}$, $NWD(s, n) = 1$ także jest pierwotnym pierwiastkiem n-tego stopnia nad F.*

Dowód. Weźmy s takie, że $NWD(s, n) = 1$. Niech $k = o_n(\zeta^s)$. Mamy więc $k \,|\, n$. Ponieważ $\zeta^n = 1$ mamy $(\zeta^s)^k = \zeta^n$. $(\zeta^s)^k \in E^{(n)}$, więc, jako że $E^{(n)}$ jest grupą,

$(\zeta^s)^-k \in E^{(n)}$. Otrzymujemy $\zeta^s = \zeta^{fracnk}$. Z $NWD(s,n) = 1$ mamy $n = k$ i ostatecznie $o_n(\zeta^s) = n$, czyli ζ^s jest generatorem grupy. □

Definicja 13. Niech F będzie ciałem, $n \in \mathbb{N}$, $n \nmid char(F)$ oraz ζ będzie pierwotnym pierwiastkiem z jedności n-tego stopnia nad F. Wtedy wielomian

$$Q_n(X) = \prod_{s=1, NWD(s,n)=1}^{n} (X - \zeta^s)$$

nazywamy ***n-tym wielomianem cyklotomicznym*** nad F.

Lemat 5. *Jeśli $Q_n(X)$ jest wielomianem cyklotomicznym n-tego stopnia nad ciałem F, gdzie $n \in \mathbb{N}$, to $Q_n(X) \mid X^n - 1$ w F.*

Dowód. Własność ta jest oczywista i wynika z zawierania się zbioru pierwiastków $Q_n(X)$ w zbiorze pierwiastków $X^n - 1$. □

Obserwacja 3. $Q_n(X)$ nie zależy od wyboru ζ oraz jest stopnia $\phi(n)$. Dodatkowo z definicji $K^{(n)}$ wiemy, że współczynniki $Q_n(X)$ należą do $K^{(n)}$.

Definicja 14. Jeśli G jest rozszerzeniem ciała F, to ***wielomianem minimalnym*** dla $g \in G$ nazywamy nierozkładalny moniczny wielomian $m(X) \in F[X]$ taki, że $m(g) = 0$.

Twierdzenie 13. *Jeśli G jest rozszerzeniem ciała F oraz istnieje, to dla każdego $g \in G$, jeśli istnieje niezerowy $f(X) \in F[X]$, $f(g) = 0$, to istnieje niezerowy wielomian minimalny w $F[X]$.*

Dowód. Niech $I = f \,|\, f \in F, f(g) = 0$. Zauważmy, że I jest ideałem nad $F[X]$. Co więcej ponieważ F jest ciałem, to I jest ideałem głównym. Istnieje wiec $m(X) \in F[X]$ takie, że $I = \langle m(X) \rangle$ oraz $m(X)$ ma minimalny stopień w I. Dodatkowo ponieważ z założenia I nie jest ideałem zerowym, $m(X)$ nie jest wielomianem zerowym. Jeśli $m(X)$ jest moniczny, to jest wielomianem minimalnym, w przeciwnym przypadku współczynnik a przy najwyższej potędze X nie jest jedynką. Ponieważ każdy element niezerowy ma odwrotność w F, to istnieje też moniczny wielomian będący wielomianem minimalnym. □

Lemat 6. *Jeśli G jest rozszerzeniem ciała F oraz $m(X) \in F[X]$ wielomianem minimalnym dla $g \in G$, to dla każdego $f(X) \in F[X]$ $f(g) = 0 \Rightarrow m(X) \mid f(X)$.*

Dowód. Własność ta wynika z poprzedniego dowodu. Jeśli $m(X)$ jest wielomianem minimalnym dla g nad F i $f(X) \in F[X], f(g) = 0$, to f należy do ideału głównego generowanego przez $m(X)$, czyli istnieje $h(X) \in F[X]$ takie, że $f(X) = h(X)m(X)$. □

Twierdzenie 14. *Dla $n, q \in \mathbb{N}, NWD(n,q) = 1$ wielomian cyklotomiczny $Q_n(X)$ nad $\mathbb{F}_q$ jest rozkładalny na nierozkładalne czynniki stopnia $o_n(q)$ w $\mathbb{F}_q[X]$.*

Dowód. Niech ζ będzie pierwotnym pierwiastkiem n-tego stopnia nad $\mathbb{F}_q$. Dowód przebiegał będzie w dwóch krokach: (1) pokażemy, że dla dowolnego $k > 1$ $\zeta^{q^k} = \zeta$ wtw, gdy $\zeta \in \mathbb{F}_{q^k}$ oraz, że (2) jeśli $\zeta \in \mathbb{F}_{q^d}$ jest pierwiastkiem wielomianu $f(X) \in \mathbb{F}_q$, to istnieje $h(X) \in \mathbb{F}_q$ takie, że $h(X) \mid f(X)$ oraz $deg(h(X)) = d$.
(1) Zauważmy, że jeśli dowolne $a \in \mathbb{F}_{q^k}$, to z twierdzenia Lagrange'a mamy $a^{q^k-1} = 1$, stąd $a^{q^k} = a$. Zauważmy, że równanie $a^{q^k} = a$ ma niewięcej niż q^k pierwiastków, a skoro wszystkie elementy $\mathbb{F}_{q^k}$ są jego pierwiastkami, to wszystkie pierwiastki są elementami $\mathbb{F}_{q^k}$.
Możemy zauważyć, że powyższą równoważność można zaaplikować do ζ otrzumując $\zeta \in \mathbb{F}_{q^k}$ wtw, gdy $\zeta^{q^k} = \zeta$ a więc i $q^k = 1\,(mod\, n)$.
Weźmy $d = o_n(q)$. Wtedy $\mathbb{F}_{q^d}$ będzie najmniejszym ciałem, zawierającym wszystkie pierwiastki n-tego stopnia nad $\mathbb{F}_{||}$.
(2) Niech $m(X) \in \mathbb{F}_q$ będzie minimalnym wielomianem dla ζ. Wiemy, że taki istnieje i jest niezerowy, ponieważ istnieje $f(X) = X^n - 1 \in \mathbb{F}_q[X]$ i $f(\zeta) = 0$. Ponieważ $\mathbb{F}_q/\langle m(X)\rangle$ jest izomorficzne z $\mathbb{F}_{p^d}$, to $deg(m) = d$. Z własności wielomianu minimalnego mamy $m(X)|Q_n(X)$ oraz $m(X)$ jest nierozkładalny w $\mathbb{F}_q$.
Ponieważ $m(X)$ dzieli dowolny wielomian, którego pierwiastkiem jest ζ oraz wszystkie pierwiastki $Q_n(X)$ są pierwiastkami pierwotnymi z jedynki n-tego stopnia, możemy wywnioskować, że $Q_n(X)$ można rozłożyć na nierozkładalne wielomiany stopnia $o_n(q)$ w $\mathbb{F}_q$. $\square$

Rozdział 3.

Algorytm

3.1. Schemat algorytmu

noend 1 Algorytm ASK

Dane wejściowe: liczba całkowita $n > 1$

Wynik: PIERWSZA - jeśli n jest pierwsza; **ZŁOŻONA** - jeśli n jest złożona

if istnieje takie $a \in \mathbb{N}, b > 1$, że $a^b = n$ **then** ▷ Krok 1.
  return ZŁOŻONA
$r \leftarrow$ najmniejsze takie q, że $o_q(n) > log^2 n$ ▷ Krok 2.
if istnieje $a \leq r$ takie, że $1 < NWD(a, n) < n$ **then** ▷ Krok 3.
  return ZŁOŻONA
if $n \leq r$ **then** ▷ Krok 4.
  return PIERWSZA
for $a \leftarrow 1$ **to** $\lfloor \sqrt{\phi(r)}\, log\, n \rfloor$ **do** ▷ Krok 5.
  if $(X + a)^n \neq X^n + a\,(mod\, X^r - 1,\, n)$ **then** ▷ Krok 6.
    return ZŁOŻONA
return PIERWSZA ▷ Krok 7.

3.2. Dowód poprawności

Lemat 7. *Dla $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ zachodzi $\binom{2n+1}{n} \geq 2^{n+1}$.*

Dowód. Dowód przebiegał będzie przez indukcję. Przypadek dla $n = 2$ jest trywialny. Mamy $\binom{5}{2} = 10 > 2^3 = 8$.

Przyjmijmy założenie indukcyjne $\binom{2n+1}{n} > 2^{n+1}$. Pokażemy, że $\binom{2n+3}{n+1} > 2^{n+2}$. Mamy

$$\begin{aligned}\binom{2n+3}{n+1} &= \binom{2n+2}{n} + \binom{2n+2}{n+1} \\ &= \binom{2n+2}{n} + \binom{2n+1}{n+1} + \binom{2n+1}{n} \\ &= \binom{2n+2}{n} + 2\binom{2n+1}{n} && \text{(Z założenia } \binom{2n+1}{n} > 2^{n+1}\text{)} \\ &> 2^{n+2},\end{aligned}$$

skąd teza. □

Lemat 8. *Jeśli $a, n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ i $NWD(a,n) = 1$, to n jest pierwsza wtw, gdy $(X+a)^n = X^n + a \,(mod\, n)$.*

Dowód. Rozpatrzmy współczynniki przy x^i w wielomianie $p(x) = (X+a)^n - (X^n+a)$. Wystarczy pokazać, że $p(x) = 0 \,(mod\, n)$ wtw, gdy n jest pierwsza.
(1) Załóżmy, że n jest pierwsza. Wtedy współczynnik przy x^i $(1 \leq i \leq n)$ w wielomianie $p(x)$ jest równy $\binom{n}{i}a^{n-i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \cdot a^{n-1}$. Z $\binom{n}{i} \in \mathbb{Z}$ oraz pierwszości n wiemy, że nie istnieje q takie, że $q \mid i! \cdot (n-i)! \wedge q \nmid (n-1)!$, więc $\frac{(n-1)!}{i! \cdot (n-i)!} \in \mathbb{Z}$ oraz $\binom{n}{i}$ jest podzielne przez n. Stąd $n \mid p(x)$.
(2) Załóżmy, że n jest złożona. Niech q będzie pewnym dzielnikiem pierwszym n oraz $q^k \parallel n$. Współczynnik przy x^q jest równy $\binom{n}{q}a^{n-q}$. Można zauważyć, że q^k nie dzieli $\binom{n}{q}$, ponieważ $\binom{n}{q} = \frac{n!}{q!(n-q)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-q+1)}{q!}$. Wiemy, że skoro q jest pierwsze i $q \mid n$, to $q \nmid (n-1) \cdot \dots \cdot (n-q+1)$, czyli $q^k \parallel n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-q+1)$. Mamy więc $q^k \nmid \binom{n}{q}$. Ponieważ a jest względnie pierwsze z n, to $q \nmid a^{n-q}$, więc $q^k \nmid \binom{n}{q}a^{n-q}$. Stąd mamy $p(x) \neq 0 \,(mod\, n)$. □

Lemat 9. *Niech $a, n, r \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $r \geq 1$ i $NWD(a,n) = 1$, wtedy jeśli n jest pierwsza, to $(X+a)^n = X^n + a \,(mod\, X^r - 1, n)$.*

Dowód. Dowód wynika bezpośrednio z lematu **??**. Wiemy, że $(X+a)^n - (X^n+a) = 0 \,(mod\, n)$, więc także $(X+a)^n - (X^n+a) = 0 \,(mod\, X^r - 1, n)$. □

Lemat 10. *Jeśli p jest liczbą pierwszą, to dla dowolnych $f(X), g(X) \in \mathbb{F}_p[X]$ zachodzi w $\mathbb{F}_p[X]$*

$$(f(X) + g(X))^p = (f(X))^p + (g(X))^p.$$

Dowód. Mamy

$$(f(X) + g(X))^p = (f(X))^p + (g(X))^p + \sum_{i=1}^{i<p} \binom{p}{i} (f(X))^i \cdot (g(X))^{p-i}.$$

Na mocy argumentu użytego w dowodzie lematu **??** otrzymujemy wniosek, że dla $1 \leq i \leq p-1$ zachodzi $p \mid \binom{p}{i}$, skąd wynika teza. □

Lemat 11. *Niech $\ell_n = NWW(1, \ldots, n)$. Wtedy dla $n \geq 9$ zachodzi $\ell_n \geq 2^n$.*

Dowód. Pokażemy, że (1) dla dowolnego $m \leq n$, $m \in \mathbb{N}$ zachodzi $m \cdot \binom{n}{m} \mid \ell_n$, a następnie (2) wywnioskujemy tezę.
(1) Weźmy dowolne $m \leq n$, $m \in \mathbb{N}$. Niech q będzie dowolną liczbą pierwszą taką, że $q \mid \ell_n$. Z własności ℓ_n i monotoniczności funkcji $log_q x$ możemy wywnioskować, że $q^{\lfloor log_q n \rfloor} \parallel \ell_n$. Niech $q^l \parallel m$. Zauważmy, że $q^{\sum_{i=1}^{i \leq \lfloor log_q n \rfloor} \lfloor \frac{n}{q^i} \rfloor} \parallel n!$. Analogicznie $q^{\sum_{i=1}^{i \leq \lfloor log_q m \rfloor} \lfloor \frac{m}{q^i} \rfloor} \parallel m!$ i $q^{\sum_{i=1}^{i \leq \lfloor log_q (n-m) \rfloor} \lfloor \frac{n-m}{q^i} \rfloor} \parallel (n-m)!$. Ponieważ $m, n-m \leq n$ zachodzi $q^{\sum_{i=1}^{i \leq \lfloor log_q n \rfloor} \lfloor \frac{m}{q^i} \rfloor} \parallel m!$ i $q^{\sum_{i=1}^{i \leq \lfloor log_q n \rfloor} \lfloor \frac{n-m}{q^i} \rfloor} \parallel (n-m)!$. Otrzymujemy

$$q^{\sum_{i=1}^{i \leq \lfloor log_q n \rfloor} \lfloor \frac{n}{q^i} \rfloor - (\lfloor \frac{m}{q^i} \rfloor + \lfloor \frac{n-m}{q^i} \rfloor)} \parallel \binom{n}{m}.$$

Zauważmy, że jeśli $q^i \mid m$, to $\lfloor \frac{n}{q^i} \rfloor - (\lfloor \frac{m}{q^i} \rfloor + \lfloor \frac{n-m}{q^i} \rfloor) = 0$, a w przeciwnym wypadku $\lfloor \frac{n}{q^i} \rfloor - (\lfloor \frac{m}{q^i} \rfloor + \lfloor \frac{n-m}{q^i} \rfloor) \leq 1$. Stąd mamy

$$\sum_{i=1}^{i \leq \lfloor log_q n \rfloor} \lfloor \frac{n}{q^i} \rfloor - (\lfloor \frac{m}{q^i} \rfloor + \lfloor \frac{n-m}{q^i} \rfloor) \leq \lfloor log_q n \rfloor - l,$$

a ponieważ $q^l \parallel m$, otrzymujemy wniosek, że jeśli $q^i \mid m \cdot \binom{n}{m}$, to $i \leq \lfloor log_q n \rfloor$. Ponieważ nierówność ta zachodzi dla każdego pierwszego dzielnika, możemy wywnioskować, że $m \cdot \binom{n}{m} \mid \ell_n$.
(2) W szczególności mamy $n \cdot \binom{2n}{n} \mid \ell_{2n}$ oraz $(n+1)\binom{2n+1}{n+1} = (2n+1)\binom{2n}{n} \mid \ell_{2n+1}$. Wiemy, że $NWD(n, 2n+1) = 1$ oraz $\ell_{2n} \mid \ell_{2n+1}$, więc $n(2n+1)\binom{2n}{n} \mid \ell_{2n+1}$. Możemy stąd przejść do nierówności

$$\ell_{2n+1} \geq n(2n+1)\binom{2n}{n} \geq n \sum_{i=0}^{i \leq 2n} \binom{2n}{n} \geq n \sum_{i=0}^{i \leq 2n} \binom{2n}{i} = n(1+1)^{2n} = n\, 4^n.$$

Mamy więc dla $n \geq 4$ nierówność $\ell_{2n+2} \geq \ell_{2n+1} \geq 2^{2n+2}$, skąd bezpośrednio możemy wywnioskować $\ell_n \geq 2^n$ dla $n \geq 9$.

□

Lemat 12. *Niech $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, wtedy istnieje takie $r \leq \max\{3, \lceil \log^5 n \rceil\}$, $r \in \mathbb{N}$, że $o_r(n) > log^2 n$.*

Dowód. (1) Przypadek, gdy $n = 2$ jest trywialny, ponieważ teza zachodzi dla $r = 3$. Podobnie dla $n = 3$, warunki spełnia $r = 4$.
(2) Załóżmy więc, że $n \geq 4$. Niech $B = \lceil log^5 n \rceil$. Wtedy $B > 10$.
Spójrzmy na najmniejsze takie r, że

$$r \nmid n^{\lfloor log B \rfloor} \prod_{i=1}^{i \leq \lfloor log^2 n \rfloor} (n^i - 1).$$

Niech $P = n^{\lfloor logB \rfloor} \prod_{i=1}^{i \leq \lfloor log^2 n \rfloor}(n^i - 1)$. Istnieje więc pewne q takie, że $q \,|\, r$ i $q \nmid P$. $\lfloor logB \rfloor \geq 1$, więc możemy wywnioskować, że $q \nmid n$. Wynika stąd, że $q \nmid NWD(r,\, n)$, więc $\frac{r}{NWD(r,n)} \nmid P$. Znaleźliśmy więc liczbę $\frac{r}{NWD(r,n)} \leq r$, która nie dzieli P. Z założenia, że r jest najmniejsze takie, że $r \nmid P$ mamy $NWD(r,\, n) = 1$.
Dodatkowo wiemy, że $\forall_{1 \leq i \leq \lfloor log^2 n \rfloor}\, r \nmid (n^i - 1)$, więc nie istnieje takie $1 \leq i \leq \lfloor log^2 n \rfloor$, że $n^i = 1 \,(mod\, r)$. Oznacza to, że $o_r(n) > log^2 n$. Możemy też ograniczyć P z góry:

$$n^{\lfloor logB \rfloor} \prod_{i=1}^{i \leq \lfloor log^2 n \rfloor} (n^i - 1) < n^{\lfloor logB \rfloor} \prod_{i=1}^{i \leq \lfloor log^2 n \rfloor} n^i < n^{\lfloor logB \rfloor} n^{\frac{log^2 n (log^2 n + 1)}{2}} \leq n^{\lfloor logB \rfloor + \frac{log^4 n + log^2 n}{2}}.$$

Dla $n \geq 4$ mamy

$$n^{\lfloor logB \rfloor + \frac{log^4 n + log^2 n}{2}} \leq n^{log^4 n} \leq 2^{log^5 n} \leq 2^B.$$

Wiemy, że $B > 10$, więc z lematu **??** mamy $\ell_B \geq 2^B > P$. Oznacza to, że istnieje $l \in \{1, \ldots, B\}$ takie, że $l \nmid P$. Z założenia o r mamy, że $r \leq l \leq B$. □

Definicja 15. Dla ustalonych $r,\, p \in \mathbb{N}$, gdzie p jest pierwsza, liczbę $m \in \mathbb{N}$ nazywamy ***introspektywną*** modulo $X^r - 1,\, p$ dla wielomianu $f(X)$, jeśli zachodzi

$$(f(X))^m = f(X^m) \,(mod\, X^r - 1,\, p).$$

Lemat 13. *Niech $r,\, p \in \mathbb{N}$ oraz p jest pierwsza. Jeśli m i m' są introspektywne modulo $X^r - 1,\, p$ dla $f(X)$, to mm' także jest introspektywna modulo $X^r - 1,\, p$ dla $f(X)$.*

Dowód. Z introspektywności m mamy $(f(X))^{mm'} = (f(X^m))^{m'} \,(mod\, X^r - 1,\, p)$. Z introspektywności m' wiemy, że istnieje $g(X) \in \mathbb{F}_p[X]$ takie, że

$$f(X^{m'}) - f(X)^{m'} = g(X)(X^r - 1)$$
$$f(X^{mm'}) - f(X^m)^{m'} = g(X)(X^{mr} - 1).$$

Mamy więc $(f(X^m))^{m'} = f(X^{mm'}) \,(mod\, (X^m)^r - 1,\, p)$, a ponieważ $X^r - 1$ dzieli $X^{mr} - 1$ także $(f(X^m))^{m'} = f(X^{mm'}) \,(mod\, X^r - 1,\, p)$. Otrzymujemy więc $(f(X))^{mm'} = f(X^{mm'}) \,(mod\, X^r - 1,\, p)$. □

Lemat 14. *Niech $r,\, p \in \mathbb{N}$ oraz p jest pierwsza. Jeśli m jest introspektywna modulo $X^r - 1,\, p$ dla $f(X)$ i $g(X)$, to jest także introspektywna modulo $X^r - 1,\, p$ dla $f(X)g(X)$.*

Dowód. Mamy $(f(X))^m = f(X^m) \,(mod\, X^r - 1,\, p)$ oraz $(g(X))^m = g(X^m) \,(mod\, X^r - 1,\, p)$. Mnożąc stronami otrzymujemy $(f(X)g(X))^m = f(X^m)g(X^m) \,(mod\, X^r - 1,\, p)$. □

Lemat 15. *Jeśli $a, r \in N$, $NWD(a,r) = 1$, to istnieje a^{-1} takie, że $aa^{-1} = 1 \,(mod\, r)$.*

Dowód. Spójrzmy na ciąg $a, a^2, \ldots, a^{r+1}$. Istnieją w nim $1 \le i < j \le r+1$ takie, że $a^i = a^j\,(mod\,r)$, Ponieważ $NWD(a,r) = 1$, to także $NWD(a^i, r) = NWD(a^j, r) = 1$. Mamy $a^i a^{j-i} = a^j\,(mod\,r)$, a ponieważ a^i i a^j są niezerowe, to $a^{j-i} = 1\,(mod\,r)$ i ostatecznie $a \cdot a^{j-i-1} = 1\,(mod\,r)$, więc znaleźliśmy a^{-1}. □

Definicja 16. Na potrzeby kolejnych lematów ustalmy n, r, $p \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$, $r < \lceil log^5\,n \rceil$ oraz $\ell = \lfloor \sqrt{\phi(r)}\,log\,n \rfloor$ takie, że p jest pierwszym dzielnikiem n, $o_r(n) > log^2 n$, $NWD(r, n) = 1$, więc i $NWD(r, p) = 1$. Ponadto dla każdego $0 \le a \le \ell$ zachodzi

$$(X+a)^n = X^n + a\,(mod\,X^r - 1,\, n).$$

Możemy teraz zdefiniować, $I = \{n^i \cdot p^j \mid i, j \ge 0\}$, $P = \{\prod_{a=0}^{\ell} (X+a)^{e_a} \mid e_a \ge 0\}$ oraz G będące zbiorem reszt z dzielenia elementów I przez r. Niech $Q_r(X)$ będzie r-tym wielomianem cyklotomicznym nad $\mathbb{F}_p$ ($r \nmid p = char(\mathbb{F}_p)$). Weźmy $h(X) \in \mathbb{F}_p[X]$. Z twierdzenia **??** wiemy, że taki wielomian istnieje, jest nierozkładalny w $\mathbb{F}_p[X]$ oraz $deg(h) = o_r(p)$. Zdefiniujmy $F = \mathbb{F}_p / \langle h(X) \rangle$ oraz $\mathcal{G}$ będący zbiorem elementów P w F.

Lemat 16. *Dowolny element $i \in I$ jest introspektywny modulo $X^r - 1$, p dla dowolnego wielomianu $p(X) \in P$.*

Dowód. Pokażemy, że (1) dla dowolnego $0 \le a \le \ell$ n oraz p są introspektywne dla $X + a$, a następnie (2) wywnioskujemy tezę.
(1) Niech $0 \le a \le \ell$. p jest pierwsze, więc z lematu **??** otrzymujemy

$$(X+a)^p = X^p + a\,(mod\,X^r - 1,\, p),$$

więc p jest introspektywne dla $(X + a)$. Z założenia mamy też

$$(X+a)^n = X^n + a\,(mod\,X^r - 1,\, n).$$

Weźmy $f_1(X) = (X+a)^{\frac{n}{p}}$, $f_2(X) = X^{\frac{n}{p}} + a \in \mathbb{F}_p[X]$. Zauważmy, że

$$(f_1(X))^p = X^n + a = (f_2(X))^p\,(mod\,X^r - 1,\, p)$$
$$(f_1(X))^p - (f_2(X))^p = 0\,(mod\,X^r - 1,\, p).$$

Z lematu **??** mamy

$$(f_1(X) - f_2(X))^p = 0\,(mod\,X^r - 1,\, p)$$
$$f_1(X) = f_2(X)\,(mod\,X^r - 1,\, p).$$

Więc $\frac{n}{p}$ także jest introspektywne modulo $X^r - 1$, p dla $X + a, 0 \le a \le \ell$.
(2) Ponieważ elementy zbioru I są iloczynami liczb n i p, a elementy zbioru P są iloczynami wielomianów $X+a$, $0 \le a \le \ell$, z lematów **??** i **??** możemy wywnioskować tezę. □

Lemat 17. *$\langle G, \cdot \rangle$ jest podgrupą $\mathbb{Z}_r^*$ oraz $|\,G\,| > log^2 n$.*

Dowód. (1) Pokażemy, że $\langle G, \cdot \rangle$ jest podgrupą $\mathbb{Z}_r^*$. Oczywistym jest, że $G \subseteq \mathbb{Z}_r$. Wiemy, że $NWD(n,\, r) = 1$ oraz $p \,|\, n$, więc $NWD(p,\, r) = 1$. Wynika stąd, że nie istnieje w I element podzielny przez r, więc $0 \notin G$. Mamy więc $G \subseteq \mathbb{Z}_r^*$. Mamy też $(\frac{n}{p})^0 \cdot p^0 = 1 \in G$, czyli istnienie elementu neutralnego w G. Mnożenie spełnia własności działania w grupie, więc wystarczy jeszcze tylko pokazać, że G jest (1.1) zamknięta na $\cdot$ i (1.2) dla każdego elementu istnieje element odwrotny.
(1.1) Weźmy dowolne $g_1 = (\frac{n}{p})^{i_1} \cdot p^{j_1}\,(mod\, r)$, $g_2 = (\frac{n}{p})^{i_2} \cdot p^{j_2}\,(mod\, r) \in G$, $i_1,\, i_2,\, j_1,\, j_2 \geq 0$. Wtedy $g_1 g_2 = (\frac{n}{p})^{i_1+i_2} \cdot p^{j_1+j_2}\,(mod\, r)$. $(\frac{n}{p})^{i_1+i_2} \cdot p^{j_1+j_2} \in I$, więc $g_1 g_2 \in G$.
(1.2) Weźmy dowolne $g \in G$. Wiemy, że istnieją $1 \leq i < j \leq |\,G\,|+1$ takie, że $g^i = g^j$. Ponieważ $g \neq 0$ mamy $g^{j-i} = 1$, więc mamy $g^{j-i-1} \in G$, będące odwrotnością g.
(2) Pokażemy, że $|\,G\,| > log^2 n$. Załóżmy nie wprost, że $|\,G\,| \leq log^2 n$. Spójrzmy na ciąg $1,\, n,\, \ldots\,, n^{|G|}$ modulo r. Jest to ciąg $|G| + 1$ liczb, należących do G. Wynika stąd, że istnieją $k, l \in \mathbb{N}, 0 \leq k < l \leq |\,G\,|$ takie, że $n^k = n^l\,(mod\, r)$. Mamy więc $n^{l-k} = 1\,(mod\, r)$. $l - k \leq |\,G\,| \leq log^2 n$, co jest sprzeczne z założeniem, że $o_r(n) > log^2 n$. □

Lemat 18. $|\,G\,| \geq \phi(r)$.

Dowód. Weźmy zbiór A różnych a_i takich, że $a_i < r$ oraz $NWD(a_i, r) = 1$ dla $1 \leq i \leq k$. Z definicji funkcji Eulera mamy $|\,A\,| = \phi(r)$. Niech zbiór $B = \{b \,|\, b = p \cdot a_i\,(mod\, r),\, b < r,\, a_i \in A\}$. Zauważmy, że dla wszystkich $b \in B$ zachodzi $NWD(b, r) = 1$, więc $B \subseteq A$. Pokażemy, że $A = B$. Załóżmy nie wprost $p \cdot a_i = p \cdot a_j\,(mod\, r), 1 \leq i < j \leq \phi(r)$. Z lematu **??** wiemy, że istnieje $p^{-1} \in \mathbb{F}_p$. Więc mnożąc stronami przez p^{-1} otrzymujemy sprzeczność.
Mamy $A = B$, możemy więc wywnioskować równanie

$$\begin{aligned} p^{\phi(r)} \cdot a_1 \cdot \cdots \cdot a_{\phi(r)} &= a_1 \cdot \cdots \cdot a_{\phi(r)}\,(mod\, r) \\ p^{\phi(r)} &= 1\,(mod\, r) \qquad \text{(Dla każdego } a_i \text{ istnieje } a_i^{-1}.) \end{aligned}$$

Z twierdzenia Lagrange'a mamy wniosek, że $\phi(r)$ dzieli moc grupy, generowanej przez p modulo r, czyli zawartej w G, skąd wynika teza.

□

Lemat 19. *$\mathcal{G}$ jest grupą z mnożeniem, generowaną przez zbiór $\mathcal{G}_{gen} = \{X,\, X + 1, \ldots, X + \ell\}$ w ciele F.*

Obserwacja 4. $\mathcal{G} \subset F$.

Dowód. (1) $\mathcal{G}$ jest grupą. Łatwo można zauważyć, że $\mathcal{G}$ zawiera element neutralny i jest zamknięty na mnożenie. Wystarczy więc pokazać, że dla każdego $g \in \mathcal{G}$ istnieje element odwrotny. Wykorzystamy argument z dowodu lematu **??**, tzn. ponieważ $\mathcal{G}$ jest skończonego rozmiaru, dla dowolnego $g \in \mathcal{G}$ także $g^2, \ldots, g^{|\,\mathcal{G}\,|+1} \in \mathcal{G}$. Istnieje $g^i \in \mathcal{G}$, $0 \leq i$, będące odwrotnością g.
(2) Zbiór $\mathcal{G}_{gen}$ generuje $\mathcal{G}$. Dla $g \in \mathcal{G}$, $g \neq 1$ oczywistym jest, że g można przedstawić jako iloczyn elementów $\mathcal{G}_{gen}$. Wiemy, że $h(X)$ dzieli $Q_r(X)$, czyli też, na mocy

lematu **??**, $X^r - 1$. Mamy więc $X^r = 1$ w $\mathcal{G}$, czyli 1 także jest generowana przez $\mathcal{G}_{gen}$. Odwrotny wniosek, że każdy element generowany przez $\mathcal{G}_{gen}$ należy do $\mathcal{G}$ jest oczywisty. □

Lemat 20. *X jest pierwotnym pierwiastkiem r-tego stopnia z jedności w F.*

Dowód. Z lematu **??** oraz ponieważ $h(X)\,|Q_r(X)$, mamy $h(X) \mid X^r - 1$, więc $X^r = 1$ w F, czyli X jest pierwiastkiem r-tego stopnia z jedności w F. Załóżmy nie wprost, że X nie jest pierwotnym pierwiastkiem. Oznacza to, że istnieje $k < r$ takie, że $X^k = 1$ w F. Implikuje to, że $h(X)|X^k - 1$ w $\mathbb{F}_p[X]$. Rozważmy $h(X)$ i $X^k - 1$ w r-tym ciele cyklotomicznym nad $\mathbb{F}_p$. Istnieje w nim pierwiastek pierwotny r-tego stopnia ζ, który jest pierwiastkiem $h(X)$. Ponieważ $h(X)|X^k - 1$ także w rozszerzeniu ciała $\mathbb{F}_p$, to $\zeta^k - 1 = 0$ w $\mathbb{F}_p^{(r)}$. Otrzymaliśmy sprzeczność z założeniem, że ζ jest pierwiastkiem pierwotnym, ponieważ $k < r$.

□

Lemat 21. *Jeśli w grupie G istnieje co najmniej $k+1$ różnych wielomianów $f_1(X), \ldots, f_{k+1}(X)$ pierwszego stopnia, to istnieje co najmniej $\binom{k+d}{k+1}$ różnych wielomianów stopnia mniejszego niż d.*

Dowód. Uzasadnimy, że jesteśmy w stanie skonstruować bijekcję między $\binom{k+d}{d-1}$ elementami a różnymi wielomianami stopnia mniejszego niż d w F. Spójrzmy na ciąg $k + d$ elementów z $k + 1$ elementami wyróżnionymi. Jeśli spojrzymy na liczbę elementów między elementami wyróżnionymi otrzymamy ciąg $a_1, \ldots, a_{k+2}$ taki, że $\sum_{i=1}^{k+2} a_i = d - 1$. Powiemy, że takiemu ciągowi odpowiada wielomian $f(X) \in G$, jeśli $f(X) = \prod_{i=1}^{k+1}(f_i(X))^{a_i}$. Łatwo zauważyć, że jednemu takiemu wyróżnieniu elementów ciągu odpowiada dokładnie jeden wielomian oraz dla różnych wyróżnień elementów, odpowiadające wielomiany są różne. Stąd otrzymujemy tezę, że różnych wielomianów stopnia mniejszego niż d w F jest co najmniej $\binom{k+d}{k+1}$. □

Lemat 22. $|\,\mathcal{G}\,| \geq \binom{t+\ell}{t-1}$.

Dowód. Pokażemy, że (1) dowolne dwa różne wielomiany stopnia mniejszego niż t w P są różne także w $\mathcal{G}$ oraz, że w (2) P jest co najmniej $\binom{t+\ell}{t-1}$ różnych wielomianów stopnia mniejszego niż t.

(1) Niech $f(X) \neq g(X) \in P$, $deg(f), deg(g) < t$. Załóżmy nie wprost, że $f(X) = g(X)$ w F. Niech $Q(Y) = f(Y) - g(Y)$. Wiemy, że $f(X) \neq g(X)$, więc $Q(Y)$ nie jest wielomianem zerowym. Weźmy dowolne $i \in I$. Z lematu **??** wiemy, że i jest introspektywne dla dowolnego wielomianu z P, więc też dla dowolnego wielomianu w $\mathcal{G}$. Mamy więc $(f(X))^i = (g(X))^i$ i $f(X^i) = g(X^i)$ w F. Oznacza to, że dla każdego $i \in I$ X^i jest pierwiastkiem $Q(Y)$ w F, czyli też dla każdego $i' \in G$ $X^{i'}$ jest pierwiastkiem $Q(Y)$ w F. Załóżmy nie wprost, że istnieją $i < i' \in G$ takie, że $X^i = X^{i'}$ w F. Mamy więc $h(X)|X^i$ w $\mathbb{F}_p$ lub $X^{i-i'} = 1$. Pierwszy argument tej dysjunkcji jest w oczywisty sposób nieprawdziwy, a drugi jest sprzeczny z lematem

??. Znaleźliśmy więc $|\,G\,| = t$ pierwiastków $Q(Y)$ w F więc $Q(Y)$ jest wielomianem zerowym w F lub $deg(Q) > t$, zatem doszliśmy do sprzeczności z założeniem.
(2) Z założeń mamy $\ell = \lfloor \sqrt{\phi(r)}\, log\, n \rfloor < \sqrt{r}\, log\, n$ oraz $o_r(n) > log^2\, n$. Ponieważ $r > o_r(n)$, otrzymujemy

$$\ell < \sqrt{r}\, log\, n < r < p.$$

W połączeniu z $deg(h) > 1$ mamy wniosek że dla dowolnych $0 \leq i < j \leq \ell$ $X + i \neq X + j$ w F oraz $X + i$ i $X + j$ są niezerowe.
Z lematu **??** otrzymujemy wniosek, że w P, a co za tym idzie także w $\mathcal{G}$, jest co najmniej $\binom{t+\ell}{\ell+1} = \binom{t+\ell}{t-1}$ różnych wielomianów stopnia mniejszego niż t. Stąd $|\,\mathcal{G}\,| \geq \binom{t+\ell}{t-1}$. □

Lemat 23. *Jeśli $n \neq p^e$, $e \in \mathbb{N}$, to $|\,\mathcal{G}\,| \leq n^{\sqrt{t}}$.*

Dowód. Weźmy $I' = \{(\frac{n}{p})^i \cdot p^j \,|\, 0 \leq i,\, j \leq \lfloor\sqrt{t}\rfloor\} \subset I$. Ponieważ n nie jest potęgą p, $i \neq i'$, $j \neq j' \Rightarrow (\frac{n}{p})^i \cdot p^j \neq (\frac{n}{p})^{i'} \cdot p^{j'}$. Mamy więc $|\,I'\,| = (\lfloor\sqrt{t}\rfloor + 1)^2 > t$. Ponieważ $|\,G\,| = t$, istnieją takie $i_1 < i_2 \in I'$, że $i_1 = i_2\, (mod\, r)$. W połączeniu z $X^r = 1\, (mod\, X^r - 1)$ otrzymujemy $X^{i_1} = X^{i_2}\, (mod\, X^r - 1)$, a więc i $X^{i_1} = X^{i_2}\, (mod\, X^r - 1,\, p)$. Weźmy dowolny wielomian $f(X) \in P$. Z lematu **??** mamy $(f(X))^{i_1} = f(X^{i_1}) = f(X^{i_2}) = f(X)^{i_2}\, (mod\, X^r - 1,\, p)$. Czyli dowolny $f(X) \in \mathcal{G}$ jest pierwiastkiem wielomianu $Q(X) = Y^{i_1} - Y^{i_2}$ w F. Skoro $\mathcal{G} \subset F$, to $Q(X)$ ma co najmniej $|\,\mathcal{G}\,|$ różnych pierwiastków w F oraz $deg(Q) = i_2 \leq (\frac{n}{p} \cdot p)^{\lfloor\sqrt{t}\rfloor} \leq n^{\sqrt{t}}$. Otrzymujemy więc $|\,\mathcal{G}\,| \leq n^{\sqrt{t}}$. □

Twierdzenie 15. *Niech $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ będzie liczbą podaną na wejściu algorytmu. Jeśli n jest liczbą pierwszą algorytm zwróci PIERWSZA.*

Dowód. Ponieważ n jest liczbą pierwszą, algorytm nie zwróci *ZŁOŻONA* w kroku I i III. Z lematu **??** wiemy, że dla każdego $1 \leq a < n$ zachodzi $(X + a)^n = X^n + a\, (mod\, X^r - 1,\, n)$, więc algorytm się nie zakończy w kroku V. Ostatecznie algorytm zwróci *PIERWSZA* w kroku IV lub VII. □

Twierdzenie 16. *Niech $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ będzie liczbą podaną na wejściu algorytmu. Jeśli algorytm zwróci PIERWSZA, to n jest pierwsza.*

Dowód. Algorytm może zwrócić *PIERWSZA* tylko w kroku IV i VII.
(1) Jeśli algorytm zakończył wykonanie w kroku IV, to $r \geq n$, oraz

$$\forall_{2 \leq a < r}\, NWD(a,\, n) = n \vee NWD(a,\, n) = 1.$$

Oznacza to, że nie istnieje $2 \leq a < n$ będące właściwym dzielnikiem n, więc n jest pierwsze.
(2) Załóżmy nie wprost, że algorytm zakończył wykonanie w kroku VII, zwracając *PIERWSZA* i n jest złożona. Ponieważ algorytm nie zakończył się w kroku I, wiemy, że n nie jest potęgą żadnej liczby naturalnej, w szczególności nie istnieją takie $p <$

$n, k \in \mathbb{N}$, gdzie p jest pierwsze, że $n = p^k$. W kroku II zostaje wybrane najmniejsze takie r, że $o_r(n) > log^2 n$. Ponadto z niespełnionego warunku w kroku III wiemy, że dla $1 \leq a \leq r$ zachodzi $NWD(a,\, n) = 1$, w szczególności $NWD(r,\, n) = 1$. Z warunku w kroku IV i V mamy $n > r$ oraz $\forall_{1 \leq a \leq \lfloor \sqrt{\phi(r)}\, log\, n \rfloor}\, (X + a)^n = X^n + a\, (mod\, X^r - 1,\, n)$. Z założenia, że n jest liczbą złożoną wiemy, że istnieje p, będące pierwszym dzielnikiem n. Mamy więc $n, r, p \in \mathbb{N}$, spełniające założenia w definicji **??**. Weźmy zdefiniowany w niej zbiór $\mathcal{G}$. Na mocy lematu **??** mamy nierówność $|\,\mathcal{G}\,| \geq \binom{t+\ell}{t-1}$ oraz z lematu **??** oraz definicji **??** zachodzi $t > log^2 n$, $\ell = \lfloor \sqrt{\phi(r)} log\, n \rfloor$. Możemy więc wywnioskować nierówność

$$\begin{aligned}
|\,\mathcal{G}\,| &\geq \binom{t+\ell}{t-1} \\
&\geq \binom{\lfloor \sqrt{t}\, log\, n \rfloor + 1 + \ell}{\ell + 1} && \text{Z } t > log^2 n \text{ mamy } t \geq \lfloor \sqrt{t}\, log\, n \rfloor + 1. \\
&= \binom{\lfloor \sqrt{t}\, log\, n \rfloor + 1 + \ell}{\lfloor \sqrt{t}\, log\, n \rfloor} \\
&\geq \binom{2\lfloor \sqrt{t}\, log\, n \rfloor + 1}{\lfloor \sqrt{t}\, log\, n \rfloor} && \text{Z } \ell = \lfloor \sqrt{\phi(r)} log\, n \rfloor \text{ oraz lematu \textbf{??} otrzymujemy } \ell \geq \lfloor \sqrt{t}\, log\, n \rfloor. \\
&> 2^{\lfloor \sqrt{t}\, log\, n \rfloor + 1} && \text{Z lematu \textbf{??}.} \\
&\geq 2^{\sqrt{t}\, log\, n} \\
&= n^{\sqrt{t}}.
\end{aligned}$$

Mamy więc $|\,\mathcal{G}\,| > n^{\sqrt{t}}$ oraz, ponieważ n nie jest potęgą liczby pierwszej, z lematu **??** $|\,\mathcal{G}\,| \leq n^{\sqrt{t}}$. Otrzymaliśmy sprzeczność, więc n nie jest liczbą złożoną. □

Twierdzenie 17. *Algorytm zwróci PIERWSZA wtw, gdy n jest liczbą pierwszą.*

Dowód. W twierdzeniach **??** i **??** udowodniliśmy implikacje w dwie strony, skąd wynika teza. □

3.3. Złożoność obliczeniowa

Twierdzenie 18. *Złożoność obliczeniową algorytmu można ograniczyć asymptotycznie poprzez $O(log^{\frac{21}{2}} n \cdot log\, log\, n)$.*

Dowód. Przeanalizujmy kolejne kroki algorytmu pod kątem złożoności obliczeniowej.

(krok 1.) W kroku 1. algorytm sprawdzi dla wszystkich możliwych wartości b, których jest nie więcej niż $log\, n$, czy dla pewnego a zachodzi $a^b = n$. Do znalezienia możliwego wykładnika a użyć można wyszukiwania binarnego dla wartości od 2 do n. Sprawdzenie możliwego a wykonane w wyszukiwaniu binarnym będzie wymagało $log\, b$ operacji na liczbach długości nie większej niż $log\, n$. Mamy więc ograniczenie złożoności kroku pierwszego $O(log\, n \cdot (log\, n \cdot (log\, b \cdot log\, n))) = O(log^n \cdot log\, log\, n)$.

(krok 2.) Z lematu **??** wiemy, że istnieje $r \leq max\{3, \lceil log^5 n \rceil\}$. Dla potencjalnych $O(log^5 n)$ wartości r, algorytm sprawdzi $O(log^2 n)$ kolejnych potęg n i przyrówna je do 1 modulo r. Dla kroku 2. otrzymujemy więc ograniczenie złożoności $O(log^5 n \cdot (log^2 n \cdot log\, r)) = O(log^7 n \cdot log\, log\, n)$.
(krok 3.) Dla możliwych $O(r)$ wartości a wystarczy obliczyć $NWD(a, n)$. Algorytm Euklidesa pozwala znaleźć $NWD(a, n)$ w czasie $O(log\, n + log^2\, r)$, gdzie pierwszy składnik sumy odpowiada pierwszej operacji policzenia a modulo n, po czym algorytm będzie wykonywał się na liczbach nie większych niż r. Mamy więc złożoność kroku 3. ograniczoną przez $O(r \cdot (log\, n + log^2 r)) = O(log^2 n + log\, n \cdot log^2 log\, n))$.
(krok 4.) W kroku 4. zostaje wykonane tylko jedno porównanie na liczbach długości nie większej niż n, więc ogólnym ograniczeniem złożoności kroku jest $O(log\, n)$.
(krok 6.) Dla danego a algorytm obliczy wartość $(X+a)^n - X^n + a$ modulo $X^r - 1$, p. Obliczenie $(X + a)^n$ modulo $X^r - 1$, p wykonane być może za pomocą wykorzystania szybkiej transformaty Fouriera w czasie $O(r \cdot log\, n \cdot log\, n)$, gdzie ostatni czynnik $log\, n$ odpowiada za złożoność wykonania operacji na współczynnikach długości $log\, n$. Mamy więc ograniczenie kroku 6. jako $O(log^7 n)$ **(krok 5.)** W kroku 5. wykonany zostanie krok 6. $\lfloor \sqrt{\phi(n)}\, log\, n \rfloor$. Mamy więc złożoność obliczeniową kroku 5. $O(\sqrt{\phi(r)}\, log\, n \cdot log^7 n) \subseteq O(\sqrt{r}\, log\, n \cdot log^7 n) \subseteq O(log^{\frac{5}{2}} n \cdot log^8 n) \subseteq O(log^{\frac{21}{2}} n)$.

Suma złożoności wszystkich kroków jest zdominowana przez złożoność kroku 5., więc złożoność całego algorytmu można ograniczyć przez $O(log^{\frac{21}{2}} n)$.

$\square$

Rozdział 4.

Implementacja

$\square$