

第一周书面作业

孙天阳 SA23001051

2024 年 9 月 14 日

1. 假设

$$V = \{w \mid w \in C[0, 1], w' \text{ 是 } [0, 1] \text{ 中分片连续有界函数}, w(0) = w(1) = 0\},$$

假设 $w \in C[0, 1]$ 并且满足

$$\int_0^1 wv \, dx = 0, \quad \forall v \in V.$$

证明:

$$w(x) = 0, \quad \forall x \in [0, 1].$$

证明. 假设 $w(x_0) \neq 0$, 不妨设 $w(x_0) > 0$. 由 w 连续性知, $\exists \delta > 0$, 使得在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 上

$$w(x) > \frac{1}{2}w(x_0)$$

取 $v \in V$ 满足 v 在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 上大于 0, 且在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 外恒等于 0. 则

$$\int_0^1 wv \, dx > 0.$$

□