第一周书面作业

孙天阳 SA23001051

2024 年 9 月 14 日

1. 假设

$$V=\left\{w \mid w \in C[0,1],\ w'\text{是}[0,1]\text{中分片连续有界函数},\ w(0)=w(1)=0\right\},$$

假设 $w \in C[0,1]$ 并且满足

$$\int_0^1 wv\,dx=0, \quad \forall v \in V.$$

证明：

$$w(x)=0, \quad \forall x \in [0,1].$$

证明. 假设 $w(x_0) \neq 0$, 不妨设 $w(x_0)>0$. 由 w 连续性知，$\exists \delta>0$，使得在 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 上

$$w(x)>\frac{1}{2} w(x_0)$$

取 $v \in V$ 满足 v 在 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 上大于 0，且在 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 外恒等于 0. 则

$$\int_0^1 wv\,dx>0.$$

□

考虑微分方程

$$-u''=f, \quad x \in [0,1]$$

乘上测试函数 v 后在 $[0,1]$ 上积分并做分部积分得到

$$\int_0^1 u'v'\mathrm{d}x-u'(1)v(1)+u'(0)v(0)=\int_0^1 fv\mathrm{d}x$$

我们要根据边值条件来确定测试函数到底落在哪个空间里, 私以为有三条要求

- 对 v 的要求结合 u 的边值条件要使得边界项消失
- 解 u 也要落在测试函数空间中
- 如无必要, 不要增加额外的限制

有两种情形是我们目前能够处理的. 比如 $u(0)=0$, 那么我们就要求 $v(0)=0$, 这样一方面因为 $u'(0)$ 的存在我们必须让 $v(0)=0$, 另一方面测试函数空间满足这个限制的话我们从测试函数空间中找到的解 u 就必然满足边值条件 $u(0)=0$. 但其他情形比如 $u(0)=1$, 我们暂时就没招了, 因为 $u'(0)$ 的存在我们还是要让 $v(0)=0$, 但是这样从测试函数空间中找解的话解就满足错误的边值

条件 $u(0)=0$ 而不是 $u(0)=1$. 另一个我们能处理的情形是 $u'(0)=0$, 这样与 $u'(0)$ 有关的边界项自然消失了, 所以我们不需要对 $v(0)$ 提要求. 但我们会想此时需要要求 $v'(0)=0$ 吗？不然从测试函数空间中找到的解 u 怎么满足边值条件 $u'(0)=0$ 呢？后面我们会看到不需要要求 $v'(0)=0$, 解 u 自动就会满足 $u'(0)=0$, 因此我们将 $u'(0)=0$ 这个边值条件称为自然边值条件.

2. 假设 $f(x)$ 是光滑函数, 给出两点边值问题

$$\begin{cases} -u''+u=f, \quad 0<x<1 \\ u(0)=u(1)=0 \end{cases}$$

对应的变分问题.

解. 取测试函数空间

$$V=\left\{v\in C[0,1] \mid v'\text{是}[0,1]\text{中分片连续函数, } v(0)=v(1)=0\right\}.$$

则变分问题为: 找 $u\in V$ 满足

$$\int_0^1 u'v'\mathrm{d}x+\int_0^1 uv\mathrm{d}x=\int_0^1 fv\mathrm{d}x, \quad \forall v\in V.$$

假设 $u\in V$ 是变分问题的解且 $u\in C^2[0,1]$, 由 1 相同论证可知 u 也是原两点边值问题的解. □

3. 假设 $a(x), f(x)$ 是光滑函数, 给出两点边值问题

$$\begin{cases} -(a(x)u'(x))'+u(x)=f(x), \quad 0<x<1 \\ u(0)=u'(1)=0, \end{cases}$$

对应的变分问题.

解. 取测试函数空间

$$V=\left\{v\in C[0,1] \mid v'\text{是}[0,1]\text{中分片连续函数, } v(0)=0\right\}.$$

则变分问题为: 找 $u\in V$ 满足

$$\int_0^1 au'v'\mathrm{d}x+\int_0^1 uv\mathrm{d}x=\int_0^1 fv\mathrm{d}x, \quad \forall v\in V.$$

假设 $u\in V$ 是变分问题的解且 $u\in C^2[0,1]$, 分部积分得

$$a(1)u'(1)v(1)-a(1)u'(0)v(0)-\int_0^1(au')'v\mathrm{d}x+\int_0^1 uv\mathrm{d}x=\int_0^1 fv\mathrm{d}x, \quad \forall v\in V$$

因为 $v\in V$ 所以自然有

$$a(1)u'(1)v(1)-\int_0^1(au')'v\mathrm{d}x+\int_0^1 uv\mathrm{d}x=\int_0^1 fv\mathrm{d}x, \quad \forall v\in V.$$

考虑 $v\in V\cap\{v\mid v(1)=0\}$ 则

$$-\int_0^1(au')'v\mathrm{d}x+\int_0^1 uv\mathrm{d}x=\int_0^1 fv\mathrm{d}x, \quad \forall v\in V\cap\{v\mid v(1)=0\}.$$

由 1 相同论证可知

$$-(a(x)u'(x))' + u(x) = f(x), \quad 0 < x < 1.$$

接下来还需要证明 $u'(1) = 0$. 这是因为

$$a(1)u'(1)v(1) = 0, \quad \forall v \in V \Longrightarrow u'(1) = 0.$$

□

4. 假设函数 $f(x)$ 是分片线性的, $f(x) = \sum_{j=1}^{N} f_j\phi_j(x)$, 证明: 求解边值问题的有限元方法可以写成如下形式

$$AU = MF$$

其中 M 是质量矩阵.

证明.

$$a(u_h, v_h) = (f, v_h), \quad \forall v_h \in V_h \Longleftrightarrow a(u, \phi_j) = (f, \phi_j), \quad \forall 1 \leqslant j \leqslant N$$

代入 $u = \sum_{j=1}^{N} u_j\phi_j(x), f = \sum_{j=1}^{N} f_j\phi_j(x)$, 得

$$u_i a(\phi_i, \phi_j) = f_i(\phi_i, \phi_j), \quad \forall 1 \leqslant j \leqslant N.$$

这等价于线性方程组

$$AU = MF,$$

其中 $U = (u_1, \cdots, u_N)^T, F = (f_1, \cdots, f_N)^T, A = (a(\phi_i, \phi_j))_{N\times N}, M = ((\phi_i, \phi_j))_{N\times N}$ □