中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

# 拓扑优化预备知识——线弹性力学

小七不戚戚

中国科学技术大学 计算与应用数学系

2025 年 8 月 20 日

从基本概念讲到线弹性力学的基本方程组.

假定听众熟练掌握微积分和线性代数.

参考黄建华老师主讲的《连续介质力学》的课程讲义.

我第一遍看的时候看前五章.

跳过了 2.5 到 2.9, 跳过了 3.4, 跳过了 4.3 和 4.4, 跳过了 4.7, 跳过了 5.2 到 5.6.

质点力学: 只关心研究对象的位置, 不关心大小、形状. 没有力矩的概念.

刚体力学: 关心研究对象的大小、形状, 有力矩的概念, 允许旋转, 假定不会形变.

弹性力学: 允许研究对象在外力作用下发生弹性形变, 即外力撤去后可恢复.

线弹性力学: 小形变假设.（假定应力与应变之间是线性关系）.

质点力学: 没有内力的概念, 且外力可以等效为一个合力.

刚体力学: 没有内力的概念, 且外力可以等效为一个合力和一对力偶.

弹性力学: 有内力的概念, 且外力要写成以位置为自变量的密度函数.

外力又可分为面力（如压力）和体力（如重力），注意二者的量纲不同.

我们要研究的第一个问题就是如何表示内力.

# 大纲

1 应力分析

2 应变分析

3 应力应变关系

4 基本方程

稍微想想就会意识到，某个点 $P$ 所受的内力并不只是一个力.

选取一个经过点 $P$ 的定向光滑曲面 $S$，其在点 $P$ 处的单位外法向记为 $\vec{n}$. 在 $P$ 周围取一个面元 $\Delta S$，该面元所受的力为 $\Delta\vec{\sigma}$. 欧拉和柯西假设

$$\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta\vec{\sigma}}{\Delta S}=\vec{\sigma}(P,\vec{n})$$

极限存在，且只依赖于 $S$ 在 $P$ 处的单位外法向 $\vec{n}$ 而不依赖于 $S$.

所以对内点 $P$ 的受力状态的完整描述是一个映射，$\vec{n}$ 到 $\vec{\sigma}(\vec{n})$

称 $\vec{\sigma}(\vec{n})$ 为经过 $P$ 点以 $\vec{n}$ 为单位外法向的平面上的应力矢量.

注意一般来说 $\vec{\sigma}(\vec{n})$ 不必与 $\vec{n}$ 是同一方向.

注意应力矢量并不是力, 而是单位面积上的力, 所以其量纲与压强相同.

$$\vec{\sigma}(\vec{n}) = \sigma_1(\vec{n})\vec{e}_1 + \sigma_2(\vec{n})\vec{e}_2 + \sigma_3(\vec{n})\vec{e}_3,$$

上述是在直角坐标系下进行分解, 也可沿 $\vec{n}$ 和与 $\vec{n}$ 垂直的方向 $\vec{t}$ 进行分解

$$\vec{\sigma}(\vec{n}) = \vec{\sigma}_n + \vec{\tau}_t,$$

其中 $\vec{\sigma}_n$ 称为正应力, 而 $\vec{\sigma}(\vec{n}) - (\vec{\sigma}(\vec{n}) \cdot \vec{n})\vec{n} = \vec{\tau}_t$ 称为剪应力.

接下来我们证明

$$\vec{\sigma}(\vec{n})=\vec{\sigma}(n_1\vec{e}_1+n_2\vec{e}_2+n_3\vec{e}_3)=n_1\vec{\sigma}(\vec{e}_1)+n_2\vec{\sigma}(\vec{e}_2)+n_3\vec{\sigma}(\vec{e}_3)$$

因此可将 $\vec{\sigma}(\vec{n})$ 视作关于 $\vec{n}$ 的线性映射. 记

$$\vec{\sigma}\begin{pmatrix}\vec{e}_1\\ \vec{e}_2\\ \vec{e}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23}\\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{e}_1\\ \vec{e}_2\\ \vec{e}_3\end{pmatrix}$$

考虑点 $P=(0,0,0), A=(a,0,0), B=(0,b,0), C=(0,0,c)$ 围成的四面体 $PABC$,

$$\vec{\sigma}(\vec{n})\mathrm{d}S-\vec{\sigma}(\vec{e}_i)\mathrm{d}S_i+\vec{f}\mathrm{d}V=\vec{\sigma}(\vec{n})\mathrm{d}S-n_i\vec{\sigma}(\vec{e}_i)\mathrm{d}S+\vec{f}\mathrm{d}V=0$$

上式是力的平衡方程.$\mathrm{d}V$ 是 $\mathrm{d}S$ 的更高阶小量，当令 $\mathrm{d}S$ 趋于零时得到

$$\vec{\sigma}(\vec{n})=n_i\vec{\sigma}(\vec{e}_i)$$

所以 $\vec{\sigma}$ 是一个线性映射. 如果学过黎曼几何就知道线性映射和二阶张量是一回事.

考虑一个体积为 $V$ 表面积为 $S$ 的单元体，其 $\vec{e}_i$ 方向的动量定理为

$$\oint_S \sigma_i(\vec{n})\mathrm{d}S + \int_V f_i \mathrm{d}V = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho v_i \mathrm{d}V$$

对左侧使用高斯定理得到

$$\oint_S \sigma_i(\vec{n})\mathrm{d}S = \oint_S \sigma_{ij} n_j \mathrm{d}S = \oint_S \vec{\sigma}(\vec{e}_i)\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_V (\nabla\cdot\vec{\sigma}(\vec{e}_i))\mathrm{d}V = \int_V \frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij}\mathrm{d}V$$

由单元体的任意性，我们得到恒成立的微分方程

$$f_i + \frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho v_i) \xRightarrow{v_i\equiv 0} f_i + \frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij} = 0 \Longleftrightarrow \vec{f} + \mathrm{div}\,\vec{\sigma} = 0.$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{r}\times m\vec{v})_i=\sum(\vec{r}\times\vec{F})_i$$

上式为角动量定理. 再次考虑一个体积为 $V$ 表面积为 $S$ 的单元体,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V(\vec{r}\times\rho\vec{v})_i\mathrm{d}V=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V\epsilon_{ijk}x_j\rho v_k\mathrm{d}V=\int_V\epsilon_{ijk}v_j\rho v_k+\epsilon_{ijk}x_j\frac{\mathrm{d}(\rho v_k)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}V=\int_V\epsilon_{ijk}x_j\frac{\mathrm{d}(\rho v_k)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}V$$

$$\oint_S(\vec{r}\times\vec{\sigma}(\vec{n}))_i\mathrm{d}S+\int_V(\vec{r}\times\vec{f})_i\mathrm{d}V=\oint_S\epsilon_{ijk}x_j\sigma_k(\vec{n})\mathrm{d}S+\int_V\epsilon_{ijk}x_jf_k\mathrm{d}V$$

$$\oint_S\epsilon_{ijk}x_j\sigma_k(\vec{n})\mathrm{d}S=\oint_S\epsilon_{ijk}x_j\sigma_{kl}n_l\mathrm{d}S=\int_V(\epsilon_{ijk}x_j\sigma_{kl})_{,l}\mathrm{d}V=\int_V\epsilon_{ijk}\sigma_{kj}+\epsilon_{ijk}x_j\sigma_{kl,l}\mathrm{d}V$$

$$\int_V\epsilon_{ijk}x_j\frac{\mathrm{d}(\rho v_k)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}V=\int_V\epsilon_{ijk}\sigma_{kj}+\epsilon_{ijk}x_j\sigma_{kl,l}\mathrm{d}V+\int_V\epsilon_{ijk}x_jf_k\mathrm{d}V\Longrightarrow\int_V\epsilon_{ijk}\sigma_{kj}\mathrm{d}V=0$$

# 大纲

质点力学中我们只需要知道质点的位置，刚体力学中我们需要知道质心的位置和朝向，弹性力学中，在此基础上，我们还需要知道点与点之间相对位置的变化.

我们以物体变形前描述物体上每点位置的矢径 $\vec{r}$ 作为自变量，以该点变形后距离初始位置的位移 $\vec{u}$ 作为因变量，这样我们就得到了位移场 $\vec{u}(\vec{r})$.

假设 $\vec{r}$ 和 $\vec{r}+\vec{dr}$ 是相邻的两点，两点之间变形后的相对位置是

$$\vec{dr'} = (\vec{r}+\vec{dr}+\vec{u}(\vec{r}+\vec{dr})) - (\vec{r}+\vec{u}(\vec{r}))$$

$$\vec{dr'} = \vec{dr}+\vec{u}(\vec{r}+\vec{dr}) - \vec{u}(\vec{r}) = \vec{dr}+d\vec{u} = \vec{dr}+J\cdot\vec{dr} = \vec{dr}+\begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}\cdot\vec{dr}$$

$$\|\vec{dr'}\|^2 - \|\vec{dr}\|^2 = \vec{dr} \cdot (J + J^T + J^T J) \cdot \vec{dr}$$

$$E := \frac{1}{2}(J + J^T + J^T J), \quad E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right)$$

当发生刚体运动时，$\|\vec{dr}\|^2$ 的大小不变所以 $E = 0$. $E$ 能正确衡量大转动存在时的真实形变，但为此付出的代价是 $E$ 中含有非线性项. $E$ 被称为格林-拉格朗日应变张量.

在小变形的假设下，忽略二次项，定义柯西应变张量

$$\varepsilon := \frac{1}{2}(J + J^T), \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

$\varepsilon$ 可以视为对 $J$ 进行了对称与反对称分解

$$J = \frac{1}{2}(J + J^T) + \frac{1}{2}(J - J^T) =: \varepsilon + \omega$$

当发生纯转动 $R$ 时, $J = R - I$. 我们知道当 $R$ 是小转动时 $J$ 可近似视为反对称矩阵 所以 $\varepsilon = 0$, 这也符合理论的需求. 当 $R$ 是大转动时, 柯西应变张量会产生虚假应变.

接下来我们说明 $\varepsilon$ 的物理意义. 设 $\vec{dr} = \vec{e}_1$, 则 $\vec{dr'} = (1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1})\vec{e}_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\vec{e}_2 + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\vec{e}_3$

$$\Delta = \frac{\|\vec{dr'}\| - \|\vec{dr}\|}{\|\vec{dr}\|} \approx \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \varepsilon_{11}.$$

所以 $\varepsilon_{11}$ 的意义是 $\vec{dr}$ 在 $\vec{e}_1$ 方向的相对伸长.

设 $d\vec{r}'$ 在 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 平面内的投影与 $\vec{e}_1$ 轴的夹角为 $\beta_{12}$，则

$$\beta_{12} = \tan\beta_{12} = \frac{\frac{\partial u_2}{\partial x_1}}{1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}} \approx \frac{\partial u_2}{\partial x_1}.$$

则 $\varepsilon_{12}$ 是初始成直角的平行于 $\vec{e}_1$ 与 $\vec{e}_2$ 的两个线元在变形后夹角减小值的一半.

注意到根据定义，天然有 $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$.

我们认为某点的应力状态只由某点的应变状态所决定,

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\varepsilon_{kl}) = \sigma_{ij}(0) + \sum_{k,l} \frac{\partial \sigma_{ijij}}{\partial \varepsilon_{k,l}} \varepsilon_{kl} + O(\varepsilon^2)$$

我们假设物体中没有初应力, 即 $\sigma_{ij}(0) = 0$ ; 在小形变情况下略去高阶项,

$$\sigma_{ij} = \sum_{k,l} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{k,l}} \varepsilon_{kl} =: C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$$

称 $C$ 为弹性系数张量, 称上式为广义胡克定律, 称满足上式的物体为线性弹性体.

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \Longrightarrow C_{ijkl} = C_{jikl}, \quad \varepsilon_{kl} = \varepsilon_{lk} \Longrightarrow C_{ijkl} = C_{ijlk}.$$

证明有待补充.

上述所有对称性说明, 在极端各向异性的情况下, 弹性系数 $C_{ijkl}$ 只有 21 个是独立的.

$$3+\binom{3}{2}=6, \quad 6+\binom{6}{2}=21.$$

强调 $C_{ijkl}$ 是一个由材料决定的量, 是一个逐点的量.

进一步的对称性是指, 在某些坐标变换下, $C_{ijkl}=\tilde{C}_{ijkl}$.

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ * & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ * & * & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ * & * & * & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ * & * & * & * & C_{55} & C_{56} \\ * & * & * & * & * & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{12} \end{pmatrix}$$

正交各向异性是指，有三个两两垂直的对称面，即在 $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_2, -x_3)$ 等三个坐标变换下弹性系数张量不变. 在新基 $(\vec{e}_1' = \vec{e}_1, \vec{e}_2' = \vec{e}_2, \vec{e}_3' = -\vec{e}_3)$ 下,

$$\vec{\sigma}\begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ -\vec{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & -\sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & -\sigma_{23} \\ -\sigma_{31} & -\sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ -\vec{e}_3 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{11}' = \sigma_{11}, \sigma_{22}' = \sigma_{22}, \sigma_{33}' = \sigma_{33}, \sigma_{12}' = \sigma_{12}, \sigma_{13}' = -\sigma_{13}, \sigma_{23}' = -\sigma_{23}$$

$$\varepsilon_{11}' = \varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}' = \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}' = \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12}' = \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}' = -\varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}' = -\varepsilon_{23}$$

$$C_{14} = C_{15} = C_{24} = C_{25} = C_{34} = C_{35} = C_{46} = C_{56} = 0$$

$$
\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ * & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ * & * & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ * & * & * & C_{44} & C_{45} & 0 \\ * & * & * & * & C_{55} & 0 \\ * & * & * & * & * & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{12} \end{pmatrix}
$$

第二个对称面导致

$$
C_{16} = C_{26} = C_{36} = C_{45} = 0
$$

第三个对称面不会带来新的自由度，这也意味着一旦有两个垂直的对称面，与这两个面垂直的第三个面一定也是对称面.

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ * & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & C_{44} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & C_{55} & 0 \\ * & * & * & * & * & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{12} \end{pmatrix}$$

所以正交各向异性的材料的弹性系数张量有 9 个自由度.

假设材料是正交各向异性的，等价于有三个二次旋转对称轴. 绕 $\vec{e}_1$ 轴旋转 $180^\circ$ 即为

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, -x_2, -x_3)$$

这是两次镜面对称的复合.

如果三个二次旋转对称轴都是四次旋转对称轴，则称材料具有立方对称性.

立方对称性还有其他等价的定义方式，就好像正交各向异性可以等价定义为有三个两两垂直的对称面或有三个两两垂直的二次旋转对称轴.

不同定义方式其实是在同一个群里选择了不同的生成元.

在新基 $(\vec{e}_1' = \vec{e}_2, \vec{e}_2' = -\vec{e}_1, \vec{e}_3' = \vec{e}_3)$ 下,

$$\vec{\sigma}\begin{pmatrix}\vec{e}_2\\-\vec{e}_1\\\vec{e}_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sigma_{22} & -\sigma_{21} & \sigma_{23}\\-\sigma_{12} & \sigma_{11} & -\sigma_{13}\\\sigma_{32} & -\sigma_{31} & \sigma_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{e}_2\\-\vec{e}_1\\\vec{e}_3\end{pmatrix}$$

$$\sigma_{11}' = \sigma_{22}, \sigma_{22}' = \sigma_{11}, \sigma_{33}' = \sigma_{33}, \sigma_{12}' = -\sigma_{21}, \sigma_{13}' = \sigma_{23}, \sigma_{23}' = -\sigma_{13}$$

$$\varepsilon_{11}' = \varepsilon_{22}, \varepsilon_{22}' = \varepsilon_{11}, \varepsilon_{33}' = \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12}' = -\varepsilon_{21}, \varepsilon_{13}' = \varepsilon_{23}, \varepsilon_{23}' = -\varepsilon_{13}$$

$$\sigma_{11}' = C_{11}\varepsilon_{11}' + C_{12}\varepsilon_{22}' + C_{13}\varepsilon_{33}' = C_{11}\varepsilon_{22} + C_{12}\varepsilon_{11} + C_{13}\varepsilon_{33}$$

$$\sigma_{22} = C_{12}\varepsilon_{11} + C_{22}\varepsilon_{22} + C_{23}\varepsilon_{33} \Longrightarrow C_{11} = C_{22}, \quad C_{13} = C_{23}$$

$$\sigma_{13}' = C_{55}\varepsilon_{13}' = C_{55}\varepsilon_{23} = \sigma_{23} = C_{44}\varepsilon_{23} \Longrightarrow C_{44} = C_{55}$$

由轮转可得到其他对称性，最终简化为

$$
\begin{pmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\\ \sigma_{23}\\ \sigma_{13}\\ \sigma_{12}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_1 & C_2 & C_2 & 0 & 0 & 0\\ * & C_1 & C_2 & 0 & 0 & 0\\ * & * & C_1 & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & C_3 & 0 & 0\\ * & * & * & * & C_3 & 0\\ * & * & * & * & * & C_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\epsilon_{11}\\ \epsilon_{22}\\ \epsilon_{33}\\ \epsilon_{23}\\ \epsilon_{13}\\ \epsilon_{12}\end{pmatrix}
$$

所以立方对称的材料的弹性系数张量有 3 个自由度.

在新基

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_1' \\ \vec{e}_2' \\ \vec{e}_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix}$$

下，矩阵有变换

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11}' & \sigma_{12}' & \sigma_{13}' \\ \sigma_{21}' & \sigma_{22}' & \sigma_{23}' \\ \sigma_{31}' & \sigma_{32}' & \sigma_{33}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{12}' = \frac{1}{2}(\sigma_{22} - \sigma_{11})\sin 2\varphi + \sigma_{12}\cos 2\varphi, \quad \varepsilon_{12}' = \frac{1}{2}(\varepsilon_{22} - \varepsilon_{11})\sin 2\varphi + \varepsilon_{12}\cos 2\varphi$$

$$\sigma'_{12} = C_3\varepsilon'_{12} \Longrightarrow \frac{1}{2}(\sigma_{22}-\sigma_{11})\sin 2\varphi + \sigma_{12}\cos 2\varphi = \frac{C_3}{2}(\varepsilon_{22}-\varepsilon_{11})\sin 2\varphi + C_3\varepsilon_{12}\cos 2\varphi$$

$$\sigma_{12} = C_3\varepsilon_{12}, \quad \sigma_{11} = (C_1 - C_2)\varepsilon_{11} + C_2\theta, \quad \sigma_{22} = (C_1 - C_2)\varepsilon_{22} + C_2\theta$$

**其中** $\theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$. **比较等式得到** $C_3 = C_1 - C_2$.

**令** $C_2 = \lambda, C_3 = 2\mu$, **则** $C_1 = \lambda + 2\mu$. **称** $\lambda, \mu$ **为拉梅系数,**

$$
\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mu+\lambda & \lambda & \lambda & & & \\ \lambda & 2\mu+\lambda & \lambda & & & \\ \lambda & \lambda & 2\mu+\lambda & & & \\ & & & 2\mu & & \\ & & & & 2\mu & \\ & & & & & 2\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{12} \end{pmatrix}
$$

注意之前强调过弹性系数张量是逐点的性质，各向同性描述的是在该点处沿各个方向看弹性性质均相同. 理论上，即使一个物体每个点处的弹性系数张量都是各向同性的，它在每个点处的拉梅系数也可以是不同的.

考虑单轴拉伸压缩实验，则

$$\sigma_{11} = F/S, \quad \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{23} = \sigma_{13} = \sigma_{12} = 0$$

考虑方程组的前三行

$$\sigma_{11} = 2\mu\epsilon_{11} + \lambda \operatorname{tr} \epsilon, \quad 0 = 2\mu\epsilon_{22} + \lambda \operatorname{tr} \epsilon, \quad 0 = 2\mu\epsilon_{33} + \lambda \operatorname{tr} \epsilon$$

将这三个式子求和得到

$$\sigma_{11} = (2\mu + 3\lambda) \operatorname{tr} \epsilon$$

代回第一个式子消去 $\operatorname{tr} \epsilon$ 得到

$$\frac{\sigma_{11}}{\epsilon_{11}} = \frac{\mu(2\mu + 3\lambda)}{\mu + \lambda} := E$$

代回第二个式子得到 $\epsilon_{11}$ 和 $\epsilon_{22}$ 之间的关系

$$-\frac{\epsilon_{22}}{\epsilon_{11}} = \frac{\lambda}{2(\mu + \lambda)} := \nu$$

## 通过 $E$ 和 $\nu$ 反解出 $\lambda$ 和 $\mu$ 得到

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & & & \\ \nu & 1-\nu & \nu & & & \\ \nu & \nu & 1-\nu & & & \\ & & & 1-2\nu & & \\ & & & & 1-2\nu & \\ & & & & & 1-2\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{12} \end{pmatrix}$$

考虑平面应力问题，即 $\sigma_{33}=\sigma_{13}=\sigma_{23}=0$。根据应力应变关系，后两个为零蕴含着 $\epsilon_{13}=\epsilon_{23}=0$，第一个 $\sigma_{33}=0$ 蕴含着

$$\nu(\epsilon_{11}+\epsilon_{22})+(1-\nu)\epsilon_{33}=0 \Longrightarrow \epsilon_{33}=-\frac{\nu}{1-\nu}(\epsilon_{11}+\epsilon_{22})$$

这样一来 $\epsilon_{33}$ 就用 $\epsilon_{11}$ 和 $\epsilon_{22}$ 表示出来了，也就是说 $\sigma_{11}$ 和 $\sigma_{22}$ 也可以仅用 $\epsilon_{11}$ 和 $\epsilon_{22}$ 表示，整理得到

$$\sigma_{11}=\frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_{11}+\nu\epsilon_{22}),\quad \sigma_{22}=\frac{E}{1-\nu^2}(\nu\epsilon_{11}+\epsilon_{22}),\quad \sigma_{12}=\frac{E}{1+\nu}\epsilon_{12}$$

写成矩阵形式就是

$$\begin{pmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{12}\end{pmatrix}=\frac{E}{1-\nu^2}\begin{pmatrix}1&\nu&0\\ \nu&1&0\\ 0&0&\frac{1-\nu}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\epsilon_{11}\\ \epsilon_{22}\\ 2\epsilon_{12}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{12}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\mu+\lambda & \lambda & 0\\ \lambda & 2\mu+\lambda & 0\\ 0 & 0 & 2\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\epsilon_{11}\\ \epsilon_{22}\\ \epsilon_{12}\end{pmatrix}$$

## 类似有平面应变问题

$$\begin{pmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{12}\end{pmatrix}=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{pmatrix}1-\nu & \nu & 0\\ \nu & 1-\nu & 0\\ 0 & 0 & 1-2\nu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\epsilon_{11}\\ \epsilon_{22}\\ \epsilon_{12}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{12}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\mu+\lambda^* & \lambda^* & 0\\ \lambda^* & 2\mu+\lambda^* & 0\\ 0 & 0 & 2\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\epsilon_{11}\\ \epsilon_{22}\\ \epsilon_{12}\end{pmatrix},\quad \lambda^*=\frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu}$$

## 三维线弹性静力学满足的方程组

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j} + f_i = 0 \\ \sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl} \\ \epsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \end{cases}$$

Dirichlet 边界条件，即边界的某部分被固定，位移场为零：

$$u_i = 0, \quad x \in \Gamma_1$$

Neumann 边界条件，即边界的某部分施加了面力 $g_i$：

$$\sigma_{ij} n_j = g_i, \quad x \in \Gamma_2$$