中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

拓扑优化预备知识——有限元方法

小七不戚戚

中国科学技术大学 计算与应用数学系

2025 年 8 月 23 日

有限元方法, 一言以蔽之, 先将微分方程转化为积分方程, 再将要求解的函数表示为基函数的线性组合, 从求解积分方程变为求解一个线性方程组.

USTC 的有限元课程, 将大量的时间花在收敛性的证明上. 而对大部分人来说, 有限元不过是一套好用的数值求解 PDE 的工具, 掌握这套工具其实是可以非常快速的.

本讲义用最简单的例子展示有限元方法的套路, 然后详细研究弹性力学的例子.

为什么要引入弱解？DeepSeek 的回答如下

1. 容纳现实世界中普遍存在的不光滑现象（如冲击波、裂纹、奇点）

2. 经典解框架下证明解的存在性困难，但弱解框架下有证明存在性的强大工具（Lax-Milgram 定理），且往往在此基础上可以进一步证明弱解的光滑性

3. 为有限元方法奠定了严格的理论基础

如果上过 USTC 的微分方程 2 或其他平行课程，应该对第 2 条有较深体会.

弱解就是给微分方程的两侧乘上光滑的测试函数并积分，然后通过分部积分将对解的求导转化到测试函数上，降低了对解的光滑程度的要求. 考虑如下例子

$$-u''(x) = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = u(1) = 0.$$

测试函数空间为 $\{v(0) = v(1) = 0 \mid v \in H^1(0,1)\}$. 任取测试函数 v, 左右同乘并积分

$$-\int_0^1 u''v\mathrm{d}x = \int_0^1 u'v'\mathrm{d}x - u'(1)v(1) + u'(0)v(0) = \int_0^1 u'v'\mathrm{d}x = \int_0^1 fv\mathrm{d}x, \quad \forall v$$

称为方程的积分形式或弱形式，好处在于该形式本身并无对 u 的二阶可微的要求.

空间 $V=\left\{v(0)=v(1)=0 \mid v \in H^1(0,1)\right\}$ 是一个无穷维空间，是没有办法利用计算机来编程求解的，所以我们用它的有限维子空间来逼近他，首先把区间 $[0,1]$ 分成

$$0=x_0<x_1<\cdots<x_N<x_{N+1}=1$$

一共 N 个中间分点，$N+1$ 个区间，记 $I_j=(x_{j-1},x_j)$，$h_j=x_j-x_{j-1}$，$h=\max h_i$.

$$V_h=\{v \in C[0,1] \mid v(0)=v(1)=0, v\,|_{I_j} \in \mathbb{P}_1(I_j), j=1,\cdots,N+1\}$$

记 $a(u,v)=\int_0^1 u'v'\mathrm{d}x$. 考虑如下子问题，寻找 $u_h \in V_h$ 使得

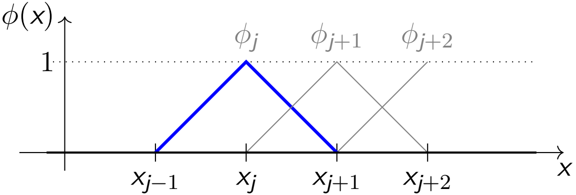
$$a(u_h,v_h)=(f,v_h), \quad \forall v_h \in V_h$$

如果我们能找到 V_h 的一组基 $\{\phi_i\}_{i=1}^N$，

$$V^T A U = u_i a(\phi_i, \phi_j) v_j = a(u_h, v_h) = (f, v_h) = V^T F, \quad \forall V \Longleftrightarrow AU = F$$

我们使用如下的基函数

$$\phi_j(x) = \frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}, x \in [x_{j-1}, x_j] \quad \frac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j}, x \in [x_j, x_{j+1}], \quad j = 1, \cdots, N.$$



在这组基函数下，

$$u_h = \sum_{i=1}^{n} u_h(x_i)\phi_i$$

一共有 N 个中间分点，对应于决定 u_h 所需的 N 个自由度. 此时

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} & -\frac{1}{h_2} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{h_2} & \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} & -\frac{1}{h_3} & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{h_3} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & -\frac{1}{h_N} \\ 0 & \cdots & & -\frac{1}{h_N} & \frac{1}{h_N} + \frac{1}{h_{N+1}} \end{pmatrix}$$

在前面的分析中，我们是从方程组 $(u_h,\phi_j)=(f,\phi_j)$ 出发，通过遍历基函数 ϕ_j 来依次得到 A 的第 j 行. 这种想法非常自然，但在推广到高维的时候会比较困难，因为比如三角网格上的基函数会比较复杂，为此我们接下来考虑另一种循环方式，用单元作循环，为此我们需要考虑某个单元对整体刚度矩阵 A 的贡献.

$$a(u_h,v_h)=u_i a(\phi_i,\phi_j)v_j=V^TAU=V^TF,\quad \forall V\Longleftrightarrow AU=F$$

$$a(u_h,v_h)=\int_0^1 u'v'\mathrm{d}x=\sum\int_{x_{j-1}}^{x_j}u'v'\mathrm{d}x=\sum V_j^TA_jU_j=V^TAU$$

为达成以上效果，要将基函数在每个 $[x_{j-1},x_j]$ 上的部分截断出来，称为局部基函数

$$\psi_j^0=\frac{x_j-x}{x_j-x_{j-1}}=\frac{1}{h_j}(x_j-x),\quad \psi_j^1=\frac{x-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}}=\frac{1}{h_j}(x-x_{j-1})$$

要注意上面两个函数其实并不落在 V_h 中，但因为我们不是用他们来做理论的分析，只是为了给计算与编程带来方便，所以没关系. 在 $[x_{j-1}, x_j]$ 上，$u_h = u_{j-1}\psi_j^0 + u_j\psi_j^1$，

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} u'v' \mathrm{d}x = \begin{pmatrix} v_{j-1} & v_j \end{pmatrix} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \begin{pmatrix} (\psi_j^0)'(\psi_j^0)' & (\psi_j^0)'(\psi_j^1)' \\ (\psi_j^0)'(\psi_j^1)' & (\psi_j^1)'(\psi_j^1)' \end{pmatrix} \mathrm{d}x \begin{pmatrix} u_{j-1} \\ u_j \end{pmatrix} = V_j^T A_j U_j$$

然后要把局部矩阵 A_j 按照局部自由度 U_j 在总体自由度 U 中的编号装配到 A 中.

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} fv \mathrm{d}x = \begin{pmatrix} v_{j-1} & v_j \end{pmatrix} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \begin{pmatrix} f\psi_j^0 \\ f\psi_j^1 \end{pmatrix} \mathrm{d}x = V_j^T F_j$$

$$\sigma_{ij,j}+f_i=0,\quad \sigma_{ij}=C_{ijkl}\epsilon_{kl},\quad \epsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right),\quad u_i=0,x\in\Gamma_1,\quad \sigma_{ij}n_j=g_i,x\in\Gamma_2$$

设 v 是测试函数，将 v 乘到平衡方程两端并在 Ω 上积分

$$-\int_\Omega \sigma_{ij,j}v_i\mathrm{d}x=\int_\Omega f_iv_i\mathrm{d}x$$

由分部积分得

$$-\int_\Omega \sigma_{ij,j}v_i\mathrm{d}x=\int_\Omega \sigma_{ij}v_{i,j}\mathrm{d}x-\int_\Gamma \sigma_{ij}v_in_j\mathrm{d}S=\int_\Omega \sigma_{ij}\epsilon_{ij}(v)\mathrm{d}x-\int_\Gamma \sigma_{ij}v_in_j\mathrm{d}S$$

用上边界条件得到

$$\int_\Omega C_{ijkl}\epsilon_{kl}(u)\epsilon_{ij}(v)\mathrm{d}x=\int_\Omega f_iv_i\mathrm{d}x+\int_{\Gamma_2} g_iv_i\mathrm{d}S.$$

$\int_\Omega \sigma_{ij}\epsilon_{ij}(v)\mathrm{d}x$ 是九项求和. 当考虑二维问题时, 变成四项求和

$$\sigma_{11}\epsilon_{11}(v)+\sigma_{22}\epsilon_{22}(v)+\sigma_{12}\epsilon_{12}(v)+\sigma_{21}\epsilon_{21}(v)=\sigma_{11}\epsilon_{11}(v)+\sigma_{22}\epsilon_{22}(v)+\sigma_{12}\gamma_{12}(v)$$

而 $\sigma_{11},\sigma_{22},\sigma_{12}$ 与 $\epsilon_{11}(u),\epsilon_{22}(u),\gamma_{12}(u)$ 之间的关系是（平面应力问题）

$$\begin{pmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{12}\end{pmatrix}=\frac{E}{1-\nu^2}\begin{pmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1-\nu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\epsilon_{11}\\ \epsilon_{22}\\ \epsilon_{12}\end{pmatrix}=\frac{E}{1-\nu^2}\begin{pmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\epsilon_{11}\\ \epsilon_{22}\\ \gamma_{12}\end{pmatrix}=:D\begin{pmatrix}\epsilon_{11}\\ \epsilon_{22}\\ \gamma_{12}\end{pmatrix}$$

$$\int_\Omega \sigma_{ij}\epsilon_{ij}(v)\mathrm{d}x=\int_\Omega \begin{pmatrix}\epsilon_{11}(u) & \epsilon_{22}(u) & \gamma_{12}(u)\end{pmatrix} D\begin{pmatrix}\epsilon_{11}(v)\\ \epsilon_{22}(v)\\ \gamma_{12}(v)\end{pmatrix}\mathrm{d}x$$

使用双线性单元，在 $[-a,a]\times[-b,b]$ 上，$u^x = u_1^x N_1 + u_2^x N_2 + u_3^x N_3 + u_4^x N_4$，其中

$$N_1 = \frac{1}{4}(1+\frac{x}{a})(1+\frac{y}{b}),\ N_2 = \frac{1}{4}(1-\frac{x}{a})(1+\frac{y}{b}),\ N_3 = \frac{1}{4}(1-\frac{x}{a})(1-\frac{y}{b}),\ N_4 = \frac{1}{4}(1+\frac{x}{a})(1-\frac{y}{b})$$

$$\begin{pmatrix} u^x \\ u^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^x & u_1^y & u_2^x & u_2^y & u_3^x & u_3^y & u_4^x & u_4^y \end{pmatrix}^T$$

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x & 0 \\ 0 & \partial_y \\ \partial_y & \partial_x \end{pmatrix} N_{2\times 8} U_{8\times 1} = B_{3\times 8} U_{8\times 1} \Longrightarrow \int_\Omega \sigma_{ij}\epsilon_{ij}(v)\mathrm{d}x = V^T \int B^T D B \,\mathrm{d}x U$$