交换代数

孙天阳

2023 年 8 月 5 日

目录

1 概论

(1) What is CA?Basic object?

Study the category of commutative ring, and modules on them.

(2) What is necessary to attend the course?

(a) The theory ring,module,fields(category is not necessary, homological algebra is not needed.)

(b) It is better if you know manifold.(toplogical space)

(3) Why commutative algebra?

The application of the theory of commutative algebra is MORE important than the theory itself.

Motivation(I):Fermat's Last thm

$$x^p + y^p = z^p, x, y, z \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{Z}\text{prime} \Longrightarrow xyz = 0$$

- $p = 2$. Gauss introduce $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$. 需要用到 $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ 的 UFD 性质.

  注记. 自己试一下!

- $p = 3$ Euler $\mathbb{Z}[\zeta_3] = \{a + \zeta_3 b \mid a, b \in \mathbb{Z}\}, (\zeta_3)^3 = 1$. $\mathbb{Z}[\zeta_3]$ 也有 UFD 性质, 所以证明可以推广. 但接下来对一般的 p 不对.

- p regular prime. Kummer $\mathbb{Z}[\zeta_p]$. FLT holds for regular prime. 有更广泛的一个分解,Kummer 分解. 这是本门课的目的之一.

  注记. $(*_p) : x^p + y^p = z^p, LHS = \prod_{k=0}^{p-1}(x + \zeta_p^k y), \zeta_p = \mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{p}}$

- $p > 2$ Faltings:$(*_p)$ has only finite solutions in the sense of $(x, y, z) \sim (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$

  Algebraic Geometry, Grothendieck 将交换代数融入到代数几何中

- $p > 2$ A.Wiles (Algebraic Geometry and representation theory)

References:

- Introduction to commutative algebra by Atiyah and Macdonald
- Commutative algebra by H.Matsumura 不推荐上来就看
- Commutative Ring theory by H.Matsumura 不涉及代数几何
- 数论 I：Fermat 的梦想和类域论（加藤和也）与本门课 topic 相关, 起点低, 非常推荐
- 古今数学思想（克莱因）

Geometry

1. Line: $ax + by = c \subset \mathbb{R}^2$
2. circle: $x^2 + y^2 = r^2$

3. $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$

   思考：对称矩阵的合同标准型给出二次曲面的分类.

4. What about $Z(f) = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) = 0\right\}$ if $\deg(f) = 3$?

   Newton: there are 72 kinds of plane curves of $\deg = 3$.

   Q:What if $\deg(f) > 3$?

   What if $x \in \mathbb{R}^n$ or $\mathbb{C}^n$?

   What if $Z(f_1, \cdots, f_r)$?

Classical Algebraic Geometry
Let $f_1, \cdots, f_r \in \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$, How can we study

$$Z(f_1, \cdots, f_r) := \{x \in \mathbb{C}^n \mid f_1(x) = \cdots = f_r(x) = 0\}.$$

Arithmetic Algebraic Geometry(Grothendick)

$$Z(f_1, \cdots, f_r) := \{x \in \mathbb{Q}^n \mid f_1(x) = \cdots = f_r(x) = 0\}.$$

Cauculus differential and integration
Assume $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ open
differential: local
integration/cohomology: global
Key problem: $Z(f_1, \cdots, f_r)$ may NOT be a manifold, such as $xy = 0$

2 模论初步

定义 2.1. 设 A 是一个环, M 是一个 Abel 群. 如果存在映射 $R\times M\to M$ 满足

(1) $1x=x$

(2) $a(bx)=(ab)x$

(3) $a(x+y)=ax+ay$

(4) $(a+b)x=ax+bx$

则称 M 是一个 A-模, 记作 $M\in \mathrm{Mod}_A$.

例 2.2. $\mathrm{Mod}_k=\mathrm{Vect}_k$.

例 2.3. $\mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}}=\mathrm{Abel}$ 群.

例 2.4. $\mathrm{Mod}_{k[t]}=$ 一个 k-线性空间和一个 k-线性变换.

例 2.5. 设 (π,E,X) 是向量丛, 则 $\Gamma(E)$ 是 $C^\infty(X)$-模.

定义 2.6. 设 M,N 是 A-模, 称映射 $\varphi\colon M\to N$ 是 A-线性的, 如果

(1) $\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)$.

(2) $\varphi(\lambda x)=\lambda\varphi(x)$.

给定一个环 A, 我们能如何造 A-模?

定义 2.7. 设 M 是 A-模. 如果子集 $N\subset M$ 满足

(1) $N+N\subset N$

(2) $A\cdot N\subset N$

则 N 也是 A-模. 称 N 为 M 的子模.

例 2.8. 子模的子模是子模.

例 2.9. $I\subset A$ 是 A 的子模 $\iff I\lhd A$.

定义 2.10. 设 M 是 A-模, $S\subset M$, 定义

$$\langle S\rangle=\left\{\sum a_is_i \mid a_i\in A, s_i\in S\right\}.$$

则 $\langle S\rangle$ 是 M 的子模, 称为由 S 生成的子模.

定义 2.11. 称 M 是有限生成模, 如果存在有限集 $S\subset M$ 使得 $\langle S\rangle=M$.

生成元之间可能存在关系. 在线性空间的情形中, 我们总是可以把线性相关的向量中的一个表达为其他向量的线性组合, 从而在生成元中将其除去; 但是在一般的模的情形中, 即使生成元们是线性相关的, 我们可能也并不能去除其中的任何一个, 比如极端情况下, $\mathbb{Z}_2$ 作为 $\mathbb{Z}$-模的生成元 $\bar{1}$ 自身便是线性相关的.

在线性空间的情形中, 我们从生成元集中剔除掉冗余的生成元最后得到线性无关的生成元集, 并且可以证明不同的线性无关的生成元集中元素的个数是相等的. 在一般的模的情形中, 当然也有可能出现线性无关的生成元集这种情况, 并且也可以证明, 一旦存在线性无关的生成元集, 任何两个线性无关的生成元集的元素个数就是相等的（但也不是说从任何生成元集我们可以通过类似线性空间中的操作剔除掉冗余的生成元最后得到线性无关的生成元集, 比如 $\mathbb{Z}$ 中 $\{2,3\}$ 可以作为生成元集, 但是 $\{2\}$ 和 $\{3\}$ 都不是生成元）. 我们把线性无关的生成元集称作基, 把有线性无关的生成元集的模称为自由模（线性空间总是自由的）, 把基向量的个数称作自由模的维数.

从上面的例子中我们可以看到, 一个有限生成模（即使是自由模）可以存在两组元素个数不同的生成元集, 它们可能各自都是线性相关的, 但是都是无可剔除的. 比如作为 $\mathbb{Z}$-模的 $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ 中 $\{\bar{1}\}$ 和 $\{\bar{2},\bar{3}\}$, 它们各自都是生成元集, 它们各自都是线性相关的, 它们都是剔除掉任何一个元素后都不再是生成元集.

命题 2.12.

3 Caylay-Hamilton 定理

定理 3.1. 设 M 是有限生成 A-模, $I \triangleleft A$. 设 $\varphi\colon M \to M$ 是 A-线性映射使得 $\varphi(M) \subset IM \subset M$. 则

$$\varphi^n + a_1\varphi^{n-1} + \cdots + a_n = 0, \quad \exists\ a_1, \cdots, a_n \in I$$

4 Nakayama 引理

引理 4.1. 设 A 是局部环, $\mathfrak{m}$ 是其极大理想. 设 M 是有限生成 A-模, 那么 $\mathfrak{m}M = M \Longrightarrow M = 0$.

定义 4.2. 称环 A 是局部环, 如果它只有一个极大理想.

引理 4.3. 设 $\mathfrak{m}$ 是环 A 的极大理想, 则 $\mathfrak{m}$ 是唯一的极大理想 $\Longleftrightarrow A\backslash\mathfrak{m} = A^*$.

证明.

$\Longrightarrow$ 设 $x \notin \mathfrak{m}$ 且 $x \notin A^*$, 则 $(x) \subset \mathfrak{m}' \subsetneq A^*$, 矛盾.

$\Longleftarrow$ 设 $\mathfrak{m}'$ 是 A 的极大理想, 则 $\mathfrak{m}' \subset A\backslash\{A^*\} = \mathfrak{m}$, 所以 $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}$.

$\square$

5 箭头

命题 5.1. 如下陈述等价

(1) $\varphi\colon M \longrightarrow N$ 是单射

(2) 任意 $K \xrightarrow{\psi} M, \varphi\circ\psi = 0 \Longrightarrow \psi = 0$

命题 5.2. 如下陈述等价

(1) $\varphi\colon M \longrightarrow N$ 是满射

(2) 任意 $N \xrightarrow{\psi} K, \psi\circ\varphi = 0 \Longrightarrow \psi = 0$

命题 5.3. 设 $\varphi\colon M \longrightarrow N$ 是箭头. 那么箭头 $\iota\colon \ker\varphi \hookrightarrow M$ 被如下性质唯一确定

(1) $\varphi\circ\iota = 0$

(2) $\forall\ \psi\colon K \longrightarrow M$ s.t. $\varphi\circ\psi = 0$, $\exists !\ f\colon K \longrightarrow \ker\varphi$ s.t. $\psi = \iota\circ f$

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, dashed, "f"'] & M \arrow[r, "\varphi"] & N \\ & \ker\varphi \arrow[u, hook, "\iota"] & \end{tikzcd}$$

注记.

- ι 具有性质 $\varphi\circ\iota = 0$.
- 设 $\psi\colon K \to M$ 具有性质 $\varphi\circ\psi = 0$, 那么对任意的 $f\colon K' \to K$,$\psi'\colon K' \xrightarrow{f} K \xrightarrow{\psi} M$ 也具有性质 $\varphi\circ\psi' = 0$. 我们认为 ψ' 是通过 ψ 得出来的, 认为 ψ 排队比 ψ' 更靠前.
- 考虑集合 $\mathscr{S} = \{\psi\colon K \to M \mid \varphi\circ\psi = 0\}$, 我们问有没有在上述意义下排队最靠前的元素, 即, 任何元素都可以表示为这个元素与某个映射的复合, 这正是命题 5.3 中 (2) 所说的事情.

命题 5.4. 设 $\varphi\colon M \longrightarrow N$ 是箭头. 那么箭头 $\pi\colon N \twoheadrightarrow \operatorname{coker}\varphi$ 被如下性质唯一确定

(1) $\pi\circ\varphi = 0$

(2) $\forall\ \psi\colon N \longrightarrow K$ s.t. $\psi\circ\varphi = 0$, $\exists !\ f\colon \operatorname{coker}\varphi \longrightarrow K$ s.t. $\psi = f\circ\pi$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi"] & N \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, two heads, "\pi"] & K \\ & \operatorname{coker}\varphi \arrow[ur, dashed, "f"'] & \end{tikzcd}$$

注记. 用箭头的语言才能看出 ker 与 coker 之间的对偶.

6 $\mathrm{Hom}(M,N)$

定义 6.1. 设 $M,N\in\mathrm{Mod}_R$. 定义 $\mathrm{Hom}_R(M,N)\in\mathrm{Mod}_R$ 如下

(1) 作为集合,$\mathrm{Hom}_R(M,N)=\{f\colon M\to N\mid f \text{ 是 } R\text{-线性的}\}$.

(2) 加法. $(f+g)(x):=f(x)+g(x),\forall\ x\in M$.

(3) 数乘. $(\lambda f)(x):=\lambda f(x),\forall\ x\in M$.

例 6.2. $M=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\in\mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}}$, 则 $M^*=\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\mathbb{Z})=\{0\}$.

定义 6.3. 设 $\varphi\colon M\to M'$, 则可以定义拉回映射

$$\begin{aligned}\varphi^*\colon \mathrm{Hom}(M',N)&\longrightarrow \mathrm{Hom}(M,N)\\ \psi\quad&\longmapsto\quad \psi\circ\varphi\end{aligned}$$

和推出映射

$$\begin{aligned}\varphi_*\colon \mathrm{Hom}(N,M)&\longrightarrow \mathrm{Hom}(N,M')\\ \psi\quad&\longmapsto\quad \varphi\circ\psi\end{aligned}$$

Hom 函子的正合性

命题 6.4. 如下两条等价

(1) 序列 $M_1\xrightarrow{\varphi}M_2\xrightarrow{\psi}M_3\longrightarrow 0$ 是正合的.

(2) 对任意 N, 序列 $0\longrightarrow\mathrm{Hom}_R(M_3,N)\xrightarrow{\psi^*}\mathrm{Hom}_R(M_2,N)\xrightarrow{\varphi^*}\mathrm{Hom}_R(M_1,N)$ 是正合的.

注记. 即使条件 (1) 被加强为

$$0\longrightarrow M_1\longrightarrow M_2\longrightarrow M_3\longrightarrow 0$$

是正合的, 条件 (2) 也不能被相应加强为

$$0\longrightarrow\mathrm{Hom}_R(M_3,N)\longrightarrow\mathrm{Hom}_R(M_2,N)\longrightarrow\mathrm{Hom}_R(M_1,N)\longrightarrow 0$$

是正合的.

证明.

$$\begin{aligned}&(2)\text{ 中序列在 }\mathrm{Hom}_R(M_3,N)\text{ 处正合}\\ \Longleftrightarrow\ &\psi^*\colon\mathrm{Hom}_R(M_3,N)\longrightarrow\mathrm{Hom}_R(M_2,N), f\longmapsto f\circ\psi\text{ 是单射}\\ \Longleftrightarrow\ &f\circ\psi=0\Longrightarrow f=0\\ \Longleftrightarrow\ &\psi\text{ 是满射}\\ \Longleftrightarrow\ &(1)\text{ 中序列在 }M_3\text{ 处正合}\end{aligned}$$

$$(2)\text{ 中序列在 }\mathrm{Hom}_R(M_2,N)\text{ 处正合}$$

$$\begin{aligned}
&\iff \ker\varphi^* = \operatorname{Im}\psi^* \\
&\implies \forall f \text{ s.t. } f\circ\varphi = 0, \exists g \text{ s.t. } f = g\circ\psi \& \psi^* \text{ 是单射} \\
&\implies \forall f \text{ s.t. } f\circ\varphi = 0, \exists! g \text{ s.t. } f = g\circ\psi \\
&\iff M_3 \cong \operatorname{coker}\varphi \\
&\iff (1) \text{ 中序列在 } M_2 \text{ 处正合}
\end{aligned}$$

□

命题 6.5. 如下两条等价

(1) 序列 $0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\varphi} M_2 \xrightarrow{\psi} M_3$ 是正合的.

(2) 对任意 N, 序列 $0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(N, M_1) \xrightarrow{\varphi_*} \operatorname{Hom}_R(N, M_2) \xrightarrow{\psi_*} \operatorname{Hom}_R(N, M_3)$ 是正合的.

7 $M \otimes N$

问题：模中的元素不能做乘法.

例 7.1. 设 R 是环,$A, B, C \in R^{n\times n}$, 则

(1) $(A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$

$C\cdot (A+B) = C\cdot A + C\cdot B$

(2) $r(A\cdot B) = (rA)\cdot B = A\cdot (rB)$

将上述乘法的本质属性提炼出来, 我们得到

定义 7.2. 设 $M, N, L \in \mathrm{Mod}_R$, 称映射 $\varphi\colon M\times N \to L$ 是双线性的, 如果

(1) $\varphi(m_1+m_2, n) = \varphi(m_1, n) + \varphi(m_2, n)$

$\varphi(m, n_1+n_2) = \varphi(m, n_1) + \varphi(m, n_2)$

(2) $r\varphi(m, n) = \varphi(rm, n) = \varphi(m, rn)$

定义 7.3. 设映射 $\otimes\colon M\times N \to M\otimes N$ 满足, 对任意的双线性映射 $\varphi\colon M\times N\to L$, 存在唯一的线性映射 $\psi\colon M\otimes N \to L$ 使得如下图表交换

$$\begin{tikzcd}
M\times N \arrow[r, "\otimes"] \arrow[dr, "\varphi"'] & M\otimes N \arrow[d, dashed, "\psi"] \\
& L
\end{tikzcd}$$

称 $M\otimes N$ 是 M 和 N 的张量积, 记 (m,n) 的像为 $m\otimes n$.

张量积可显式构造为 $R^{\oplus M\times N}/\sim$, 其中 $\sim$ 是由

$$\begin{cases}
((m_1+m_2), n) - (m_1, n) - (m_2, n) \\
(m, (n_1+n_2)) - (m, n_1) - (m, n_2) \\
(rm, n) - r(m, n) \\
(rm, n) - (m, rn)
\end{cases}$$

生成的子模. 可验证 $R^{\oplus M\times N}/\sim$ 确实满足张量积的定义

$$\begin{tikzcd}
M\times N \arrow[r] \arrow[dr, "\varphi"'] & R^{\oplus M\times N} \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{\varphi}"] & R^{\oplus M\times N}/\sim \arrow[dl, dashed, "\psi"] \\
& L &
\end{tikzcd}$$

但该定义并不好用, 原因是生成元 $\{x\otimes y\}$ 之间的关系太复杂,$\alpha = \sum r_i x_i \otimes y_i$ 没有唯一的表达式.

命题 7.4. 设 $M, N, L \in \mathrm{Mod}_R$, 那么

(1) $M\otimes_R N \simeq N\otimes_R M$

(2) $(M\otimes_R N)\otimes_R L \simeq M\otimes_R (N\otimes_R L) \simeq M\otimes_R N\otimes_R L$

(3) $(M \oplus N) \otimes_R L \simeq (M \otimes_R L) \oplus (N \otimes_R L)$

(4) $R \otimes_R M \simeq M$

注记. $\oplus$ 和 $\otimes$ 分别看起来像 Mod_R 中的加法和乘法. 类比 $\mathbb{Z}$ 中乘法的深刻, 可知 $\otimes$ 的重要性.

命题 7.5. 设 $f\colon M_1 \to M_2, g\colon N_1 \to N_2$ 是 $\mathbb{R}$-线性的, 那么可定义 $\mathbb{R}$-线性映射

$$f \otimes g\colon M_1 \otimes N_1 \longrightarrow M_2 \otimes N_2, \quad x \otimes y \longmapsto f(x) \otimes g(y).$$

命题 7.6. 设 $M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_3$, 则如下图表交换

$$\begin{tikzcd} M_1 \otimes N \arrow[r, "f_1 \otimes \mathrm{Id}_N"] \arrow[dr, "(f_2 \circ f_1) \otimes \mathrm{Id}_N"'] & M_2 \otimes N \arrow[d, "f_2 \otimes \mathrm{Id}_N"] \\ & M_3 \otimes N \end{tikzcd}.$$

推论 7.7. 如果 $f\colon M_1 \to M_2$ 是同构, 那么 $f \otimes \mathrm{Id}_N\colon M_1 \otimes N \to M_2 \otimes N$ 也是同构.

命题 7.8. 如果

$$M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$$

是正合的, 那么

$$M_1 \otimes N \longrightarrow M_2 \otimes N \longrightarrow M_3 \otimes N \longrightarrow 0$$

也是正合的.

推论 7.9. 如果 $M_1 \xrightarrow{f} M_2$ 是满射, 那么 $M_1 \otimes N \to M_2 \otimes N$ 也是满射.

证明. 序列

$$0 \longrightarrow \ker f \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow 0$$

是正合的, 由命题 7.8, 序列

$$\ker f \otimes N \longrightarrow M_1 \otimes N \longrightarrow M_2 \otimes N \longrightarrow 0$$

也是正合的. □

推论 7.10. 如果 M, N 是有限生成 R-模, 那么 $M \otimes_R N$ 也是有限生成 R-模.

证明. 存在满射

$$R^r \longrightarrow M, \quad R^s \longrightarrow N.$$

用两次推论 7.9, 得到

$$R^r \otimes R^s \longrightarrow R^r \otimes N \longrightarrow M \otimes N$$

也是满射. □

推论 7.11. 设 $N \subset M$ 是子模, 那么

$$(M/N) \otimes P \cong \mathrm{coker}(N \otimes P \longrightarrow M \otimes P).$$

证明. 序列

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow M/N \longrightarrow 0$$

是正合的, 由命题 7.8, 序列

$$N \otimes P \longrightarrow M \otimes P \longrightarrow (M/N) \otimes P \longrightarrow 0$$

也是正合的. □

例 7.12. 考虑正合序列

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

同时 $\otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 得到

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

由此我们看到张量积不保持单射. 由命题 *7.8* 我们还知道 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

注记. 在 $2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 中 $2 \otimes \bar{1} \neq 0$, 但在 $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 中 $2 \otimes \bar{1} = 0$.

下面我们来证明命题 7.8.

命题 7.13. 存在自然同构

$$\mathrm{Hom}_R(M \otimes_R N, P) \cong \mathrm{Bilinear}_R(M \times N, P) \cong \mathrm{Hom}(M, \mathrm{Hom}(N, P)).$$

命题 7.8 的证明.

$$M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(M_3, \mathrm{Hom}(N, P)) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M_2, \mathrm{Hom}(N, P)) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M_1, \mathrm{Hom}(N, P))$$

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(M_3 \otimes N, P) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M_2 \otimes N, P) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M_1 \otimes N, P)$$

$$M_1 \otimes N \longrightarrow M_2 \otimes N \longrightarrow M_3 \otimes N \longrightarrow 0$$

□

8 换环

设有环同态 $\sigma\colon S\to R$, 则任意 R-模 M 自然有 S-模结构

$$S\times M\xrightarrow{\sigma\times\mathrm{Id}}R\times M\overset{\cdot}{\longrightarrow}M.$$

特别地, R 也是 S-模. 一个简单的例子是 $\iota\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, 因此 $\mathbb{C}$-模总可以看成 $\mathbb{R}$-模.

下面考虑一个相反的问题, 如何将一个 S-模变为一个 R-模？拿具体的例子来说就是如何将一个 $\mathbb{R}$-模变为一个 $\mathbb{C}$-模？这是我们熟悉的复化的过程.

对于 $M\in\mathrm{Mod}_S$, 我们赋予 $M\otimes_S R$ 以 R-模结构

$$\begin{aligned}\mu\colon R\times M\otimes_S R&\longrightarrow M\otimes_S R\\ r\ \ ,\ \ x\otimes r'&\longmapsto x\otimes(rr')\end{aligned}$$

验证良定性：固定 $r\in R$, 则

$$\begin{aligned}M\times R&\longrightarrow M\otimes_S R\\ x\ \ ,\ r'&\longmapsto x\otimes(rr')\end{aligned}$$

是 S-双线性映射, 由张量积的泛性质, μ 是良定的. 也容易验证在数乘 μ 下 $M\otimes_S R$ 确实是 R-模.

例 8.1. 设 $M\in\mathrm{Mod}_R$, $I\lhd R$, 则 $M\otimes_R R/I\in\mathrm{Mod}_{R/I}$.

命题 8.2. $R^n\cong R^m\iff m=n$.

证明一. 设 $I\lhd R$ 是极大理想. 因为张量积保持同构, 所以我们有

$$(R/I)^n\cong(R/I\otimes_R R^n)\cong(R/I\otimes R^m)\cong(R/I)^m$$

但 R/I 是域, 由线性空间的相关结论知 $m=n$. □

证明二. 参见近世代数笔记有限生成 Abel 群. □

9 分式化

设 A 是环, $S\subset A$ 是子集. 我们希望找到一个环, 记作 $S^{-1}A$, 使得 A 映入到 $S^{-1}A$ 中时把所有 S 中元素都映为可逆元. 一个简单的观察是, 如果 a,b 各自的像是可逆元, 那么 ab 的像也是可逆元, 因此如果 $a,b\in S$, 不妨把 ab 添加进 S 中, 并不影响我们的讨论. 为了方便, 我们也要求 $1_A\in S$.

定义 9.1. 称 S 是乘法封闭的, 如果 $1_A\in S$ 且 $S\cdot S\subset S$.

例 9.2. 设 A 是整环, 那么 $A\setminus\{0\}$ 是乘法封闭的.

定义 9.3. 设 S 是乘法封闭的. 定义

$$S^{-1}A=\{(a,s)\mid a\in A, s\in S\}/\sim$$

其中 $(a,s)\sim(b,t)$ 当且仅当存在 $u\in S$ 使得 $(at-bs)u=0$. 记

$$\frac{a}{s}:=(a,s)\mod\sim.$$

如下定义加法和乘法

$$\frac{a}{s}+\frac{b}{t}:=\frac{at+bs}{st}$$
$$\frac{a}{s}\cdot\frac{b}{t}:=\frac{ab}{st}$$

于是 $S^{-1}A$ 成为环, 其零元为 $\frac{0}{1}$, 幺元为 $\frac{1}{1}$. 映射

$$\begin{aligned}\iota\colon A&\longrightarrow S^{-1}A\\ a&\longmapsto\frac{a}{1}\end{aligned}$$

是环同态.

验证. $\sim$ 是等价关系. 反身性与对称性显然, 只验证传递性. 从传递性的验证过程中可以看出, 为什么这里我们要求 $(at-bs)u=0$ 而不是 $at-bs=0$. 假设你要求 $at-bs=0$, 设 $(a,s)\sim(b,t),(b,t)\sim(c,r)$, 那么我们有 $at=bs, br=ct$, 有 $rat=rbs=sbr=sct$ 即 $(ar-cs)t=0$. 因为这里 A 不一定是整环, 所以我们从 $(ar-cs)t=0$ 得不到 $ar-cs=0$.

验证加法良定. 设 $(a_1s_2-a_2s_1)u=0$, 需要找一个元素 v, 使得

$$((a_1t+bs_1)s_2t-s_1t(a_2t+bs_2))v=(a_1s_2-a_2s_1)t^2v=0.$$

取 $v=u$ 即可. 验证乘法良定. 假设同上, 需要找一个元素 w, 使得

$$(a_1bs_2-s_1ta_2b)w=(a_1s_2-a_2s_1)btw=0.$$

取 $w=u$ 即可. 容易看出 $\frac{0}{1}$ 和 $\frac{1}{1}$ 确实是零元和幺元,ι 确实是环同态. □

注记. $\ker\iota=\{a\in A\mid\exists\ s\in S \text{ s.t. } as=0\}$. 因此 ι 不一定是单射.

注记. 假设 $0\in S$, 则 $S^{-1}A$ 是零环. 由 S 的乘法封闭性, 我们也不希望一对零因子出现在 S 中.

例 9.4. 设 A 是整环, $S=A\setminus\{0\}$, 则 $S^{-1}A=\mathrm{Frac}(A)$.

例 9.5. 设 $a \in A$, 记 $S_a = \{a^n\}_{n\geqslant 0}$, 记 $A_a := S_a^{-1}A$.

例 9.6. 记 $S_{\mathfrak{p}} = A \backslash \mathfrak{p}$. 容易看出 $S_{\mathfrak{p}}$ 是乘法封闭的当且仅当 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$. 记 $A_{\mathfrak{p}} := S_{\mathfrak{p}}^{-1}A$.

命题 9.7. 给定任意的 $f\colon A \to B$ 满足 $f(S) \subset B^*$, 存在唯一的环同态 $g\colon S^{-1}A \to B$, 使得

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "f"'] & S^{-1}A \arrow[d, dashed, "g"] \\ & B \end{tikzcd}$$

交换. 满足以上性质的 $\iota\colon A \to S^{-1}A$ 是唯一的.

证明. 由图表的交换性, $g(\frac{a}{s}) = f(a)f(s)^{-1}$, 只需验证 g 是良定的. 设 $u \in S$ 使得 $(a_1s_2 - a_2s_1)u = 0$, 用 f 作用得 $(f(a_1)f(s_2) - f(a_2)f(s_1))f(u) = 0 \xRightarrow{f(u)\in B^*} f(a_1)f(s_1)^{-1} = f(a_2)f(s_2)^{-1}$. □

定义 9.8. 设 M 是 A-模, 设 $S \subset A$ 是乘法封闭的. 定义

$$S^{-1}M = \{(m,s) \mid m \in M, s \in S\} / \sim$$

其中 $(m,s) \sim (n,t)$ 当且仅当存在 $u \in S$ 使得 $(mt - ns)u = 0$. 记

$$\frac{m}{s} := (m,s) \mod \sim.$$

如下定义加法和数乘

$$\frac{m}{s} + \frac{n}{t} := \frac{mt+ns}{st}$$
$$\frac{a}{s} \cdot \frac{n}{t} := \frac{an}{st}$$

于是 $S^{-1}M$ 成为 $S^{-1}A$-模. 设 $f\colon M \to N$ 是 A-线性映射, 定义

$$S^{-1}f\colon S^{-1}M \longrightarrow S^{-1}N, \quad \frac{m}{s} \longmapsto \frac{f(m)}{s}$$

则 $S^{-1}f$ 是 $S^{-1}A$-线性映射.

命题 9.9. 设 $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$ 是正合的, 那么

$$S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}f} S^{-1}N \xrightarrow{S^{-1}g} S^{-1}P$$

也是正合的.

证明.

- $g \circ f = 0 \Longrightarrow S^{-1}g \circ S^{-1}f = 0 \Longrightarrow \operatorname{Im} S^{-1}f \subset \ker S^{-1}g$.
- 设 $\frac{n}{s} \in \ker S^{-1}g$, 则 $\frac{g(n)}{s} = \frac{0}{1}$, 按定义即存在 $t \in S$ 使得 $tg(n) = 0 \in P$. 因为 g 是 A-线性的所以 $tn \in \ker g = \operatorname{Im} f$, 即存在 $m \in M$ 使得 $tn = f(m)$. 所以

$$S^{-1}f\left(\frac{m}{ts}\right) = \frac{f(m)}{ts} = \frac{tn}{ts} = \frac{n}{s}.$$

□

命题 9.10. 存在自然的 $S^{-1}A$-模同构

$$\varphi\colon S^{-1}A\otimes_A M\longrightarrow S^{-1}M,\quad \frac{a}{s}\otimes m\longmapsto\frac{am}{s}.$$

证明. 容易验证

$$\tilde{\varphi}\colon S^{-1}A\times M\longrightarrow S^{-1}M,\quad (\frac{a}{s},m)\longmapsto\frac{am}{s}$$

是双 A-线性映射, 从而诱导了 A-线性映射 φ. 容易看出 φ 也是 $S^{-1}A$-线性的.

- $\varphi(\frac{1}{s}\otimes m)=\frac{m}{s}$, 所以 φ 是满射.
- 由引理 9.11 任取 $\frac{1}{s}\otimes m\in\ker\varphi$, 存在 $t\in S$ 使得 $tm=0$, 所以 $\frac{1}{s}\otimes m=\frac{1}{ts}\otimes tm=0$.

□

引理 9.11. $S^{-1}A\otimes_A M$ 中的每个元素都形如 $\frac{1}{s}\otimes m$.

证明.

$$\sum\frac{a_i}{s_i}\otimes m_i\overset{\text{通分}}{=\!=\!=}\sum\frac{a_it_i}{s}\otimes m_i=\sum\frac{1}{s}\otimes a_it_im_i=\frac{1}{s}\otimes\sum a_it_im_i.$$

□

推论 9.12. $S^{-1}A$ 是平坦 A-模. 特别地, 对于 A 是整环, $\operatorname{Frac}A$ 是平坦 A-模.

命题 9.13.

$$S^{-1}M\otimes_{S^{-1}A}S^{-1}N\cong S^{-1}(M\otimes_A N).$$

证明.

$$\begin{aligned}
S^{-1}M\otimes_{S^{-1}A}S^{-1}N&\cong(S^{-1}A\otimes_A M)\otimes_{S^{-1}A}(S^{-1}A\otimes_A N)\\
&\cong M\otimes_A(S^{-1}A\otimes_{S^1A}S^{-1}A)\otimes_A N\\
&\cong M\otimes_A S^{-1}A\otimes_A N\\
&\cong S^{-1}A\otimes_A(M\otimes_A)N\\
&\cong S^{-1}(M\otimes_A N)
\end{aligned}$$

□

注记. 这个命题不应该放这, 应该放张量积那. 这就是张量积的复化同构于复化的张量积.

命题 9.14. 设 $N_1,N_2\subset M$ 是子模, 则

(1) $S^{-1}(N_1+N_2)=S^{-1}N_1+S^{-1}N_2$.

(2) $S^{-1}(N_1\cap N_2)=S^{-1}N_1\cap S^{-1}N_2$.

(3) $S^{-1}(M/N)\cong S^{-1}M/S^{-1}N$.

10 局部化

引理 10.1. 设 $\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec}A$, 则

$$S_{\mathfrak{p}}^{-1}(A/\mathfrak{p})\cong\operatorname{Frac}A/\mathfrak{p},\quad \frac{\bar{a}}{s}\longmapsto\frac{\bar{a}}{\bar{s}}.$$

证明.

- 首先验证良定性.
  - 因为 $s\in S_{\mathfrak{p}}$, 即 $s\notin\mathfrak{p}$, 所以 $\bar{s}\neq 0\in A/\mathfrak{p}$, 所以 $\dfrac{\bar{a}}{\bar{s}}\in\operatorname{Frac}A/\mathfrak{p}$.
  - 设 $\dfrac{\bar{a}}{\bar{s}}=\dfrac{\bar{b}}{\bar{t}}$. 按定义存在 $u\in S_{\mathfrak{p}}$ 使得 $(t\bar{a}-s\bar{b})u=(\bar{t}\bar{a}-\bar{s}\bar{b})\bar{u}=0\in A/\mathfrak{p}$. 因为 $u\in S_{\mathfrak{p}}$, 即 $u\notin\mathfrak{p}$, 所以 $\bar{u}\neq 0\in A/\mathfrak{p}$. 因为 $A/\mathfrak{p}$ 是整环, 所以 $\bar{t}\bar{a}-\bar{s}\bar{b}=0$ 即 $\dfrac{\bar{a}}{\bar{s}}=\dfrac{\bar{b}}{\bar{t}}$.
- 单射与满射都是显然的.

□

命题 10.2. $\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}}$ 是 $A_{\mathfrak{p}}$ 唯一的极大理想, 从而 $A_{\mathfrak{p}}$ 是局部环.

证明. 考虑短正合列

$$0\longrightarrow\mathfrak{p}\longrightarrow A\longrightarrow A/\mathfrak{p}\longrightarrow 0,$$

对它在 $\mathfrak{p}$ 处作分式化得到短正合列

$$0\longrightarrow\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}}\longrightarrow A_{\mathfrak{p}}\longrightarrow S_{\mathfrak{p}}^{-1}(A/\mathfrak{p})\cong\operatorname{Frac}(A/\mathfrak{p})\longrightarrow 0.$$

所以 $\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}}$ 是 $A_{\mathfrak{p}}$ 的极大理想. 由引理 4.3, 要证 $A_{\mathfrak{p}}$ 是局部环只需证 $A_{\mathfrak{p}}\backslash\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}}=A_{\mathfrak{p}}^{\times}$, 而这是显然的. □

命题 10.3. 设 $M\in\operatorname{Mod}_A$, $x\in M$, 那么下列命题等价

(1) $x=0$

(2) $\dfrac{x}{1}=0\in M_{\mathfrak{p}},\forall\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec}A$

(3) $\dfrac{x}{1}=0\in M_{\mathfrak{m}},\forall\mathfrak{m}\in\operatorname{Max}A$

证明. (1) $\Longrightarrow$ (2) $\Longrightarrow$ (3) 显然, 只证 (3) $\Longrightarrow$ (1). 回忆 $\iota\colon A\to S^{-1}A$ 的

$$\ker\iota=\{a\in A\mid\exists s\in S\text{ s.t. }sa=0\}.$$

因此 $\dfrac{x}{1}=0\in M_{\mathfrak{m}}$ 当且仅当存在 $s\in M\backslash\mathfrak{m}$ 使得 $sx=0$. 这就启发我们把 M 中所有能使得 $sx=0$ 的 x 放到一起, 并由它得到一个极大理想, 那么在该极大理想处的局部化中 $\dfrac{x}{1}$ 就不可能为零. 记

$$\operatorname{Ann}(x)=\{a\in A\mid ax=0\}.$$

容易看出 $\operatorname{Ann}(x)\lhd A$ 且当 $x\neq 0$ 时 $1\notin\operatorname{Ann}(x)$, 因此可以找到包含 $\operatorname{Ann}(x)$ 的极大理想 $\mathfrak{m}$. 在 $M_{\mathfrak{m}}$ 中 $\dfrac{x}{1}\neq 0$, 矛盾. 因此 $x=0$. □

推论 10.4. 设 $M \in \mathrm{Mod}_A$, 那么下列命题等价

(1) $M = 0$

(2) $M_\mathfrak{p} = 0, \forall\, \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$

(3) $M_\mathfrak{m} = 0, \forall\, \mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A$

推论 10.5. 设 $\varphi\colon M \to N$ 是 A-线性的, 那么下列命题等价

(1) φ 是单射/满射

(2) $\varphi_\mathfrak{p}\colon M_\mathfrak{p} \to N_\mathfrak{p}$ 是单射/满射, $\forall\, \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$

(3) $\varphi_\mathfrak{m}\colon M_\mathfrak{m} \to N_\mathfrak{m}$ 是单射/满射, $\forall\, \mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A$

证明. 只证单射情形.φ 是单射 $\Longleftrightarrow \ker\varphi = 0 \Longleftrightarrow (\ker\varphi)_\mathfrak{p} = 0 \Longleftrightarrow (\ker\varphi)_\mathfrak{m} = 0$.

考虑正合列

$$0 \longrightarrow \ker\varphi \longrightarrow M \xrightarrow{\varphi} N.$$

在 $\mathfrak{p}$ 处作分式化得到正合列

$$0 \longrightarrow (\ker\varphi)_\mathfrak{p} \longrightarrow M_\mathfrak{p} \xrightarrow{\varphi_\mathfrak{p}} N_\mathfrak{p}.$$

由正合性得到 $(\ker\varphi)_\mathfrak{p} = \ker\varphi_\mathfrak{p}$. 同理有 $(\ker\varphi)_\mathfrak{m} = \ker\varphi_\mathfrak{m}$. 命题得证. □

命题 10.6. 设 $M \in \mathrm{Mod}_A$, 那么下列命题等价

(1) M 是平坦 A-模

(2) $M_\mathfrak{p}$ 是平坦 $A_\mathfrak{p}$-模, $\forall\, \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$

(3) $M_\mathfrak{m}$ 是平坦 $A_\mathfrak{m}$-模, $\forall\, \mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A$

引理 10.7. 设短正合列

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow F \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

中 M 是平坦 A-模, 那么对任意 $N \in \mathrm{Mod}_A$ 有短正合列

$$0 \longrightarrow E \otimes N \longrightarrow F \otimes N \longrightarrow M \otimes N \longrightarrow 0.$$

命题 10.8. $\varphi\colon A^n \to A^n$ 是满射 $\Longrightarrow \varphi$ 是单射.

证明. 考虑正合列

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow A^n \longrightarrow A^n \longrightarrow 0$$

证明 φ 是单射即证 $K = 0$. 对任意的 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$, $\otimes_A A_\mathfrak{p}$ 得到

$$0 \longrightarrow K_\mathfrak{p} \longrightarrow A_\mathfrak{p}^n \longrightarrow A_p^n \longrightarrow 0$$

$\otimes_{A_\mathfrak{p}} F$ 得到, 其中 $F = A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}_\mathfrak{p}$,

$$0 \longrightarrow K_\mathfrak{p} \otimes F \longrightarrow F^n \longrightarrow F^n \longrightarrow 0$$

由线性代数知 $K_\mathfrak{p} \otimes F = 0$. 从而 $0 = K_\mathfrak{p} = K_\mathfrak{p} \otimes A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}_\mathfrak{p} \cong K_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}_\mathfrak{p} K_\mathfrak{p} = 0$.

由 □

11 挑选素理想

12 Noether 环

定义 12.1. 设 M 是 R-模. 称 M 是诺特的, 如果 M 的任意子模是有限生成的.

引理 12.2. $M \in \mathrm{Mod}_R$ 是诺特的当且仅当 M 的任意子模链

$$0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \cdots \subset M_n \subset \cdots$$

是稳定的, 即存在 N 使得 $M_N = M_{N+1} = \cdots$.

命题 12.3. 设

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

是短正合列. 那么 M 是诺特的当且仅当 M' 和 M'' 都是诺特的.

证明. □

推论 12.4. 设 M_1, M_2 是诺特的, 则 $M_1 \oplus M_2$ 也是诺特的.

证明.

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_1 \oplus M_2 \longrightarrow M_2 \longrightarrow 0.$$

□

推论 12.5. 设 $M \in \mathrm{Mod}_R$ 是有限生成 R-模, 则 M 是诺特的.

证明. 结合命题 2.12 、推论 12.4 和命题 12.3. □

命题 12.6. 设 R 是诺特的, 则 $S^{-1}R$ 也是诺特的.

13 Hilbert 基定理

定义 13.1. 一个 R-代数是指一个 R-模 A 及其上的一个双线性二元运算.

例 13.2. 设 R, A 是环, $f\colon R \to A$ 是环同态, 则 A 上有一个 R-代数结构, 且是结合、交换、含幺的.

验证.

- 环同态 $f\colon R \to A$ 使得所有 A-模自动成为 R-模. 特别地, A 也是 R-模.
- 取 A 上的二元运算为 A 作为环的乘法, 容易看出该运算是双线性的.
- 结合、交换、含幺均来自环的乘法的性质.

□

例 13.3. 设 A 是结合、交换、含幺的 R-代数, 则 A 上有环结构且有一个环同态 $f\colon R \to A$.

验证.

- 取环的加法为 A 作为模的加法, 取环的乘法为 A 作为 R-代数的二元运算.
- 由条件该乘法是结合、交换、含幺的. 分配律来自双线性性.
- 定义
$$f\colon R \longrightarrow A, \quad r \longmapsto r \cdot 1_A.$$
其中 $r \cdot 1_A$ 是模中的数乘. 容易验证 f 是一个环同态.

□

命题 13.4. 以上两过程互逆.

记号. 从现在开始, 一个 R-代数是指一个环同态 $f\colon R \to A$. 就好像我们通篇用环表示含幺交换环.

命题 13.5. 设 $f\colon R \to A$ 是 R-代数, 则以下命题等价

(1) $B \subset A$ 是 A 的子代数. 按定义是说 B 是 A 的子模且 B 对二元运算封闭.

(2) B 是 A 的子环

定义 13.6. 设 A 是 R-代数, 称 $B \subset A$ 是子代数, 如果

(1) B 是子环且 $f(R) \subset B$, 或等价地

(2) B 是子模且对二元运算封闭.

注记.

- 子环 $\iff$ 对二元运算封闭
- $R \cdot B \subset B + 1_A \in B \Longrightarrow f(R) \subset B$
- $f(R) \subset B + BB \subset B \Longrightarrow R \cdot B \subset B$

命题 13.7. 设 A 是有限生成 R-代数, 则 $A \cong R[x_1, \cdots, x_n]/I$.

定理 13.8 (Hilbert 基定理)**.** 设 R 是诺特的, A 是有限生成 R-代数, 则 A 也是诺特的.

14 代数的 Hilbert 零点定理

定理 14.1. *设 K/k 是域扩张. 如果 K 作为 k-代数是有限生成的, 那么 K 作为 k-模也是有限生成.*

证明. 容易找出有限生成 k-代数不是有限生成 k-模, 如一元多项式环 $k[x]$. 我们这里能从有限生成 k-代数推出有限生成 k-模是因为 K 是域, 所以每个非零元都可逆, 于是就排除掉了 $k[x]$ 这种情形. 如果强行添加 x 的逆元, 即考虑一元有理函数域 $K = k(x)$, 此时 K 确实是域, x 也确实超越, 但 K 不再是有限生成 k-代数. 遵循着类似的感觉, 我们要利用 K 是域证明 K 中无超越元.

由条件, K 是有限生成 k-代数, 设 $K = k[\alpha_1, \cdots, \alpha_n]$, 我们要证明 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 都不是超越元. 从 α_1 开始, 将遇到的第一个 k 上超越元 α_i 记作 β_1, 此时 $k(\beta_1)$ 同构于一元有理函数域 $k(x_1)$. 之后再从 α_{i+1} 开始, 将遇到的第一个 $k(\beta_1)$ 上超越元 α_j 记作 β_2, 此时 $k(\beta_1)(\beta_2) = k(\beta_1, \beta_2)$ 同构于二元有理函数域 $k(x_1, x_2)$. 以此类推, 我们得到 $E = k(\beta_1, \cdots, \beta_r)$. 由构造, K/E 是代数扩张且 $K = E(\gamma_1, \cdots, \gamma_{n-r})$. 从而 K 是有限生成 E-模. 从而由命题 14.2 知 E 是有限生成 k-代数. 但这与 E 同构于 r 元有理函数域矛盾, 除非 $r = 0$. 所以 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 在 k 上代数, 所以 K 是有限生成 k-模. □

命题 14.2. *设 $A \subset B \subset C$ 是环, 满足*

(1) *A 是诺特的.*

(2) *C 是有限生成 A-代数.*

(3) *C 是有限生成 B-模.*

那么 B 是有限生成 A-代数.

15 Ax-Grothendieck 定理

16 几何的 Hilbert 零点定理

命题 16.1. 设 $I \triangleleft R$, 则

$$\sqrt{I} = \bigcap_{\mathfrak{p} \supset I} \mathfrak{p}.$$

特别地, 一个理想是根理想当且仅当它是素理想的交.

证明.

- 首先对零理想证明. 设 $x \in \sqrt{(0)}$, 按定义存在 n 使得 $x^n = 0 \in \mathfrak{p} \Longrightarrow x \in \mathfrak{p}$.

  设 $x \notin \sqrt{(0)}$, 我们说能找到一个素理想 $\mathfrak{p}$ 使得 $x \notin \mathfrak{p}$. 考虑

  $$\mathscr{J} = \{J \triangleleft R \mid x \notin J\}$$

  则 $\mathscr{J}$ 是一个偏序集且 $(0) \in \mathscr{J}$, 由 Zorn 引理知 $\mathscr{J}$ 中有一个极大元 $\mathfrak{p}$, 我们证明 $\mathfrak{p}$ 是素理想. 设 $a, b \notin \mathfrak{p}$, 因为 $\mathfrak{p} \subset (a) + \mathfrak{p}$, 则 $x \in (a) + \mathfrak{p}$, 则存在 n 使得 $x^n \in (a) + \mathfrak{p}$. 同理存在 m 使得 $x^m \in (b) + \mathfrak{p}$. 所以 $x^{n+m} \in (ab) + \mathfrak{p}$. 所以 $ab \notin \mathfrak{p}$, 即 $\mathfrak{p}$ 是素理想.

- 对一般的理想 I, 考虑 $\varphi\colon R \to R/I$. 则

  $$\varphi^{-1}((0)) = I, \quad \varphi^{-1}(\sqrt{(0)}) = \sqrt{I},$$

  且存在 R 中包含 I 的素理想与 R/I 中素理想之间的一一对应. 由命题对 (0) 成立知对 I 成立.

- 设 I 是根理想, 则

  $$I = \sqrt{I} = \bigcap_{\mathfrak{p} \supset I} \mathfrak{p},$$

  从而 I 是素理想的交. 另一方面, 设

  $$I = \bigcap \mathfrak{p}_\alpha.$$

  设 $x^n \in I$, 则 $x^n \in \mathfrak{p}_\alpha$. 因为 $\mathfrak{p}_\alpha$ 是素理想, 所以 $x \in \mathfrak{p}_\alpha$, 所以 $x \in I$, 所以 I 是根理想.

□

命题 16.2. 设 R 是有限生成 k-代数, $I \triangleleft R$, 则

$$\sqrt{I} = \bigcap_{\mathfrak{m} \supset I} \mathfrak{m}.$$

证明.

- 由命题 16.1,

  $$\sqrt{I} = \bigcap_{\mathfrak{p} \supset I} \mathfrak{p} \subset \bigcap_{\mathfrak{m} \supset I} \mathfrak{m}.$$

- 设

□

命题 16.3. 设 $\varphi\colon R \to S$ 是环同态, S 是有限生成 k-代数, $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} S$, 则 $\varphi^{-1}(\mathfrak{m}) \in \operatorname{Max} R$.

证明. $(S/\mathfrak{m})/k$ 是域扩张且 $S/\mathfrak{m}$ 是有限生成 k-代数, 由定理 14.1, $S/\mathfrak{m}$ 是有限生成 k-模, 从而 $(S/\mathfrak{m})/k$ 是代数扩张, 从而 $R/\varphi^{-1}(\mathfrak{m})$ 是域, 从而 $\varphi^{-1}(\mathfrak{m})$ 是极大理想. □

17 Atiyah 第一章习题

1. 设 $x \in A$ 是幂零元. 证明 $1_A + x$ 是单位. 进而证明任何幂零元与单位的和都是单位.
2. 设 $f = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in A[x]$. 证明

(1) f 是单位当且仅当 a_0 是单位且 $a_1, \cdots, a_n$ 幂零.

(2) f 幂零当且仅当 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 幂零.

(3) f 是零因子当且仅当存在 $a \neq 0 \in A$ 使得 $af = 0$.

(4) f 称作本原多项式如果 $(a_0, a_1, \cdots, a_n) = (1)$. 证明 fg 本原当且仅当 f 和 g 都本原.

4. 证明在 $A[x]$ 中, Jacobson 根等于幂零根.
15. 设 A 是环. 对于 $E \subset A$, 记 $V(E)$ 为 $\operatorname{Spec} A$ 中所有包含 E 的元素. 证明

(1) 如果 $\mathfrak{a}$ 是由 E 生成的理想, 那么 $V(E) = V(\mathfrak{a})$.

(2) $V(0) = \operatorname{Spec} A$, $V(1) = \varnothing$.

(3) $V(\cup_{i \in I} E_i) = \cap_{i \in I} V(E_i)$.

(4) $V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$.

证明.

(1)

(2) 显然.

(3)

(4)

□

16.
17. For each
21. 设 $\phi\colon A \to B$ 是环同态, 它诱导了 $\phi^*\colon \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$.
26. 设 X 是一个紧 Hausdorff 空间, $C(X)$ 表示 X 上的实值连续函数环.