微分流形

孙天阳

2023 年 7 月 2 日

It is both a blessing and a handicap.

目录

目录 . . . 2

1 流形范畴 **3**

1 拓扑流形 . . . 3

2 光滑流形 . . . 5

3 光滑映射 . . . 6

4 单位分解 . . . 7

2 线性近似 **8**

1 切空间 . . . 8

2 切映射 . . . 10

3 淹没和浸入 . . . 11

4 Sard 定理 . . . 12

3 子流形 **13**

1 嵌入子流形 . . . 13

2 水平集定理 . . . 14

3 浸入子流形 . . . 15

4 子流形上唯一的光滑结构 . . . 16

4 向量丛 **17**

1 向量丛 . . . 17

2 向量丛的构造 . . . 20

3 向量丛的截面 . . . 22

4 截面间的 $\mathscr{F}$-线性映射 . . . 24

5 向量场 **25**

1 向量场 . . . 25

2 向量场上的李代数结构 . . . 26

3 单参数变换群与完备向量场 . . . 27

4 Lie 导数 . . . 28

6 微分形式 **29**
1 余切空间 . . . 29
2 张量积 . . . 30
3 楔积 . . . 32
4 微分形式 . . . 33
5 外微分 . . . 34

7 定向 **35**
1 向量空间的定向 . . . 35
2 流形的定向 . . . 36
3 体积形式 . . . 37

8 流形上的积分 **38**
1 n-形式在光滑流形上的积分 . . . 39
2 Stokes 公式 . . . 40

9 deRham 上同调 **41**

10 李群 **42**
1 李群 . . . 42
2 同态 . . . 44
3 左不变向量场 . . . 45
3.1 单参数子群作为单参数变换群 . . . 45
3.2 指数映射 . . . 46
4 李子群 . . . 47
5 闭李子群 . . . 48
6 李群作用 . . . 49
6.1 覆叠映射 . . . 49
7 伴随表示 . . . 50
8 齐性空间 . . . 51

11 Maurer-Cartan 形式 **52**
1 Maurer-Cartan 形式 . . . 52

12 向量丛 **53**
1 向量丛上的联络 . . . 54
2 平行移动 . . . 55
3 向量丛上联络的和乐 . . . 56
4 联络的曲率 . . . 57
5 规范群 . . . 59

13 主丛 **60**
1 主丛 60
2 右作用的基本向量场 61
3 主丛上的联络 62
4 主丛上联络的和乐 63
5 规范群 64

14 分布和叶状结构 **65**
1 Frobenius 定理的类似定理 65
2 分布的可积与对合 66
3 Frobenius 定理 67

15 商流形 **68**

16 作业 **69**
1 21FPSet2Part1 70
2 21FPSet2Part2 72
3 21FPSet3Part1 73
4 21FPSet4Part2 74
5 21FPSet5Part1 76
6 21FPset7Part1 78
7 18FPSet5Part1 80

Chapter 1

流形范畴

1 拓扑流形

定义 1.1 (拓扑流形)**.**
- 局部欧几里得
- *Hausdorff*
- 第二可数

注记.
- *Hausdorff* 保证 *Cauchy* 列收敛到唯一点
- 局部欧几里得保证不了分离性
- 任意的一个拓扑空间不一定可以度量化, 因此要满足第二可数性
- 参见 *Spivak* 的第一册的 *459* 页附录 *A*, 拓扑空间满足前两条的话, 可度量化当且仅当第二可数当且仅当 *paracompact*
- *paracompact:* 每一个开覆盖都有一个局部有限的细化,*refinement* 的意思是取的新的开覆盖要么是原来的开集要么是原来的子集,
- *paracompactness* 告诉我们单位分解的存在性

命题 1.2. 设 X 是一个集合, $\{U_\alpha\}$ 是 X 的一个覆盖,

$$\varphi_\alpha\colon U_\alpha \longrightarrow Y_\alpha$$

是双射, 其中 Y_α 是拓扑空间. 若对 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ 有

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}\colon \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

是同胚, 则 X 上存在唯一的拓扑使得每个 φ_α 是同胚.

证明. 考虑映射族 $\left\{\psi_\alpha := \varphi_\alpha^{-1}\colon Y_\alpha \to U_\alpha \subset X\right\}$, 取 X 上的余诱导拓扑 $\mathscr{T}$, 即 X 上使得 φ_α^{-1} 都是连续映射的最强拓扑. 回忆

$$\mathscr{T} = \left\{W \subset X \mid \psi_\alpha^{-1}(W) = \varphi_\alpha(W \cap U_\alpha) =: \varphi_\alpha(W_\alpha) \in \mathscr{T}_\alpha, \forall \alpha\right\}.$$

下面验证在拓扑 $\mathscr{T}$ 下 φ_α 是同胚. 取开集 $V \subset Y_\alpha$, 我们要证明 $\varphi_\alpha^{-1}(V) \in \mathscr{T}$.

$$\begin{array}{ccccc} \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset Y_\alpha & \xrightarrow{\varphi_\alpha^{-1}} & U_\alpha \cap U_\beta & \xrightarrow{\varphi_\beta} & \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset Y_\beta \\ V \cap \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) & \longmapsto & \varphi_\alpha^{-1}(V) \cap U_\beta & \longmapsto & \varphi_\beta(\varphi_\alpha^{-1}(V) \cap U_\beta) \end{array}$$

因为 $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ 是同胚, 所以 $\varphi_\beta(\varphi_\alpha^{-1}(V) \cap U_\beta)$ 是开集, 从而按定义 $\varphi_\alpha^{-1}(V) \in \mathscr{T}$.

下面说明 $\mathscr{T}$ 是唯一满足要求的拓扑. 设 $W \in \mathscr{T}$, 按定义 $\varphi_\alpha(W_\alpha) \in \mathscr{T}_\alpha$. 按要求 φ_α 是同胚, 因此不管取 X 上什么拓扑, W_α 应该是开集, 但 $W = \cup W_\alpha$, 所以 W 也必须是开集. 因此 $\mathscr{T}$ 是满足要求的最弱拓扑. 前面又提到 $\mathscr{T}$ 是满足要求的最强拓扑, 所以 $\mathscr{T}$ 是满足要求的唯一拓扑. $\square$

2 光滑流形

定义 2.1. *An atlas* $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ *on a manifold is called* ***differentiable*** *if all chart transitions*

$$x_\beta \circ x_\alpha^{-1} : x_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to x_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

are differentiable of class C^∞ *in case of* $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$*.*

A ***maximal*** *differentiable atlas is called a* ***differentiable structure****.*

A ***differentiable manifold*** *of dim d is a manifold of dim d with a differentiable structure.*

注记. *dim*$\leqslant 3$ *differentiable structure is unique.*

Milnor 1956 exotic 7 *sphere.*

例 2.2. 设 V 是 n 维线性空间,

例 2.3. 可数个点

3 光滑映射

4 单位分解

引理 4.1. *Let M be a smooth manifold, $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ an open covering. Then $\exists$ a partition of unity subordinate to (U_α). That is $\exists$ a locally finite refinement $(V_\beta)_{\beta\in B}$ of $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ and C_0^∞ functions $\varphi_\beta : M \to \mathbb{R}$ such that*

(1) $\operatorname{supp}\varphi_\beta \subset V_\beta, \forall\ \beta \in B$

(2) $0 \leqslant \varphi_\beta(x) \leqslant 1, \forall\ x \in M, \forall\ \beta \in B$

(3) $\displaystyle\sum_{\beta\in B} \varphi_\beta(x) = 1, \forall\ x \in M$

Chapter 2

线性近似

1 切空间

作为光滑曲线的等价类

作为光滑函数芽的点导子

设 $C_u(M)$ 为所有形如 (p,γ) 的元素的集合, 其中 $p \in M$,$\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ 是过点 $\gamma(0) = p$ 的光滑曲线. 有自然投影 $\pi : C_u(M) \to M, \pi(p,\gamma) = p$.

在 $C_u(M)$ 上引进等价关系：在点 p 附近取坐标卡 (U,φ). 如果

$$p_1 = p_2 \quad 且 \quad \left.\frac{\mathrm{d}(\varphi \circ \gamma_1)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} - \left.\frac{\mathrm{d}(\varphi \circ \gamma_2)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = 0,$$

则 $(p_1, \gamma_1) \sim (p_2, \gamma_2)$.

验证该等价关系与坐标卡的选取无关. 在点 p 附近取另一个坐标卡 (V, ψ), 则

$$\frac{\mathrm{d}(\psi \circ \gamma_1)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\psi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \gamma_1)}{\mathrm{d}t} = D(\psi \circ \varphi^{-1})\Big|_{\varphi(p)} \cdot \left.\frac{\mathrm{d}(\varphi \circ \gamma_1)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}.$$

命题 1.1. $T_p(M_1 \times M_2) \cong T_{p_1}M_1 \times T_{p_2}M_2$

证明. 我们先来理解一下这件事情.

设 $(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)$ 分别是 p_1, p_2 附近的坐标卡, 那么 $(U_1 \times U_2, \varphi_1 \times \varphi_2)$ 便是 p 附近的坐标卡.

$T_{p_1}M_1$ 有一组基 $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x_1^1}, \cdots \dfrac{\partial}{\partial x_1^n}\right\}$,$T_{p_2}M_2$ 有一组基 $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x_2^1}, \cdots \dfrac{\partial}{\partial x_2^m}\right\}$.

$T_p(M_1 \times M_2)$ 有一组基 $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x_1^1}, \cdots \dfrac{\partial}{\partial x_1^n}, \dfrac{\partial}{\partial x_2^1}, \cdots \dfrac{\partial}{\partial x_2^m}\right\}$.

两处的 $\dfrac{\partial}{\partial x_1^1}$ 并不是同一个东西, 但我们仍用同一个记号, 因为它们基本上也就是同一个东西了！

有着上面的观察, 我们很容易写出两个方向的同构映射分别是什么. □

偏导数

设 f 是 $\mathbb{R}^2$ 上的光滑函数, 设 r^1 和 r^2 分别是关于第一和第二分量的投影映射. 考虑

$$\phi = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \tilde{\phi} = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ z, \end{pmatrix}$$

其中 $x = \tilde{x} = r^1$,$y = r^2$, 即 $\phi = \mathrm{Id}$.

假如 $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$, 问能否找到 z 使得 $\dfrac{\partial f}{\partial \tilde{x}} \neq 0$?

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \tilde{x}} &= \frac{\partial f \circ \tilde{\phi}^{-1}}{\partial r^1} \\
&= \frac{\partial f \circ \phi^{-1} \circ \tilde{\phi}^{-1}}{\partial r^1} \\
&= \frac{\partial f \circ \phi^{-1}}{\partial r^1} \frac{\partial (\tilde{\phi}^{-1})^1}{\partial r^1} + \frac{\partial f \circ \phi^{-1}}{\partial r^2} \frac{\partial (\tilde{\phi}^{-1})^2}{\partial r^1} \\
&= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial (\tilde{\phi}^{-1})^1}{\partial r^1} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial (\tilde{\phi}^{-1})^2}{\partial r^1}
\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial (\tilde{\phi}^{-1})^1}{\partial r^1} & \dfrac{\partial (\tilde{\phi}^{-1})^1}{\partial r^2} \\ \dfrac{\partial (\tilde{\phi}^{-1})^2}{\partial r^1} & \dfrac{\partial (\tilde{\phi}^{-1})^2}{\partial r^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \tilde{\phi}^1}{\partial r^1} & \dfrac{\partial \tilde{\phi}^1}{\partial r^2} \\ \dfrac{\partial \tilde{\phi}^2}{\partial r^1} & \dfrac{\partial \tilde{\phi}^2}{\partial r^2} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \tilde{x}}{\partial r^1} & \dfrac{\partial \tilde{x}}{\partial r^2} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r^1} & \dfrac{\partial z}{\partial r^2} \end{pmatrix}$$

2 切映射

3 淹没和浸入

上次我们提到了如果 $f : M \to N$ 是一个微分同胚, 那么 $\mathrm{d}f_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ 便是一个线性同构. 正如欧氏空间中的情形, 我们能够证明下面的局部逆命题：

定理 3.1 (逆映射定理)**.** *设 $f : M \to N$ 是一个光滑映射满足 $\mathrm{d}f_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ 是一个线性同构, 那么 f 在 p 附近是一个局部微分同胚, 即它把 p 的某个邻域 U_1 微分同胚地映到 $q = f(p)$ 地某个邻域 $f(U_1)$.*

即使 $\mathrm{d}f_p$ 处处是线性同构, 我们也不能得出 f 是整体微分同胚, 因为 f 可能不是可逆的. 事实上, 我们现在能构造一个更简单的例子：设 $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1, f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}$. 这就仅仅是一个局部微分同胚.

自然要问, 如果 $\mathrm{d}f_p$ 不是线性同构呢？当然最简单的情形是满秩的情形.

定义 3.2. *设 $f : M \to N$ 是一个光滑映射.*

(1) *称 f 在 p 处是一个淹没如果 $\mathrm{d}f_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ 是满射.*

(2) *称 f 在 p 处是一个浸入如果 $\mathrm{d}f_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ 是单射.*

我们称 f 是一个淹没/浸入如果它在每点处都是淹没/浸入.

显然

- 如果 f 是一个淹没, 那么 $\dim M \geqslant \dim N$
- 如果 f 是一个浸入, 那么 $\dim M \leqslant \dim N$
- 如果 f 在 p 处是一个淹没/浸入, 那么 f 在 p 附近是一个淹没/浸入.

4 Sard 定理

临界点和临界值

Chapter 3

子流形

1 嵌入子流形

定义 1.1. 设 M 是光滑流形. 称 $S \subset M$ 及其上的一个流形结构为 M 的嵌入子流形, 如果 S 的拓扑是子空间拓扑且包含映射 $\iota \colon S \to M$ 是光滑嵌入.

2 水平集定理

3 浸入子流形

定义 3.1. 设 M 是光滑流形. 称 $S \subset M$ 及其上的一个流形结构为 M 的浸入子流形, 如果包含映射 $\iota\colon S \to M$ 是光滑浸入. 注意浸入子流形不要求 S 上的拓扑为子空间拓扑.

4 子流形上唯一的光滑结构

定理 4.1. *设 M 是光滑流形,$S \subset M$ 是嵌入子流形. 那么定理 5.8 中描述的光滑结构是使得 S 成为嵌入子流形的唯一光滑结构.*

证明. 设 $S \subset M$ 是一个 k 维嵌入子流形.

假设存在 S 上的另一个拓扑和另一个光滑结构使得它是某个维数的浸入子流形. □

Chapter 4

向量丛

1 向量丛

定义 1.1. 设 M, E 是光滑流形, $\pi\colon E \to M$ 是光滑满射, $k \in \mathbb{N}^*$, 若三元组 (π, E, M) 满足

(1) 任意 $p \in M$, $E_p := \pi^{-1}(p)$ 是 k 维线性空间.

(2) 任意 $p \in M$, 存在 p 的邻域 U 及微分同胚 $\varphi_U\colon \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$ 使得下图交换

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(U) \arrow[rr, "\varphi_U"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U \times \mathbb{R}^k \arrow[dl, "\pi_1"] \\
& U &
\end{tikzcd}.$$

(3) 任意 $p \in U$, $\varphi_U\colon E_p \to \{p\} \times \mathbb{R}^k$ 是线性同构.

则称 (π, E, M) 是一个向量丛, 称 E 为全空间, 称 M 为底空间, 称 π 为丛投影, 称 E_p 为 p 处的纤维, 称 φ_U 为 E 的一个局部平凡化, 称正整数 k 为向量丛的秩.

说实话, 向量丛这个概念对我来说挺难理解的, 主要是不太容易体会到这个概念的非平凡之处在哪里. 我现在把它理解为, 我有一堆向量空间 E_p, 本来人家一个个都自己待得好好的, 两者之间没有任何关系, 也就是本来是无交并 $\sqcup E_p$. 但我现在要把它们摆到一起！局部上看, 我摆放的方式都是很平凡的. 准确地说, 对于一个比较小的局部 U 和 $p \in U$, 我选定 E_p 与 $\{p\} \times \mathbb{R}^k$ 的一种对应方式, 然后我就将 $\sqcup_{p\in U} E_p$ 像 $U \times \mathbb{R}^k$ 那样摆放. 有趣的是！局部上看摆放方式都很平凡, 但整体上的摆放方式可能多种多样.

这种大白话的把向量丛理解为摆放的解释对于我自己理解张量丛 $E \otimes F$ 的构造有帮助. 对于纤维 E_p 和 F_p, 我们有其张量积 $E_p \otimes F_p$, 现在我说从 E_p 们局部的摆放方式和 F_p 们局部的摆放方式就可以比较自然地定义 $E_p \otimes F_p$ 们局部的摆放方式. 上面我说我们选定了同构

$$\varphi^E_{U,p}\colon E_p \longrightarrow \{p\} \times \mathbb{R}^k, \quad \varphi^F_{U,p}\colon F_p \longrightarrow \{p\} \times \mathbb{R}^l.$$

由张量积的知识这就决定了同构

$$\varphi_{U,p}\colon E_p \otimes F_p \longrightarrow \{p\} \times \mathbb{R}^{kl}$$

由这个同构我们就把每个 $E_p \otimes F_p$ 放到了 $U \times \mathbb{R}^{kl}$ 的正确位置中, 也就是把它们按某种方式摆放到了一起. 因为我们总是局部看, 局部看, 局部看都是平凡的. 很难想象局部平凡的 E 和 F 有怎样的非平凡的整体结构, 这样的非平凡整体结构又怎样地决定了以一种局部上的平凡的方式定义出来的 $E \otimes F$ 非平凡整体结构. 我觉得有这些困惑可能是因为我没算过什么例子吧!

例 1.2. M 是光滑流形,$E = M \times \mathbb{R}^k$,$\pi\colon E = M \times \mathbb{R}^k \to M, (p, v) \mapsto p$. 称 (π, E, M) 是平凡丛.

定义 1.3. 设 $(\pi_E, E, M), (\pi_F, F, M)$ 是向量丛, 称光滑映射 $f\colon E \to F$ 是丛同态如果下图交换

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi_E"'] & & F \arrow[dl, "\pi_F"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

且对任意 $p \in M$ 有 $f\colon E_p \to F_p$ 是线性映射. 将 E 到 F 的丛同态全体记作 $\mathrm{BundleMap}(E, F)$.

容易看出恒等映射 $\mathrm{Id}_E\colon E \to E$ 是丛同态, 丛同态的复合还是丛同态. 因此光滑流形 M 上的有限维光滑向量丛在丛同态下构成范畴, 记作 $\mathcal{V}_M$.

定义 1.4. 如果 f 是双射且其逆映射也光滑, 则称 f 是丛同构.

命题 1.5. 设 $f\colon E \to F$ 是丛同态, 如果 f 是双射, 则 f 是丛同构.

定义 1.6. 设 (π, E, M) 为向量丛, $U \subset M$ 为开集. 若光滑映射 $s\colon U \to E$ 满足 $\pi \circ s = \mathrm{Id}_U$, 则称 s 是 E 在 U 上的一个截面. E 在 U 上的所有截面记为 $\Gamma(U; E)$.

设 $f\colon E \to F$ 是丛同态, 则 f 诱导了一个 $C^\infty(M)$-线性映射

$$f_*\colon \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(F), \quad s \longmapsto f \circ s.$$

容易看出 $(\mathrm{Id}_E)_* = \mathrm{Id}_{\Gamma(E)}$ 和 $(f \circ g)_* = \psi_* \circ \varphi_*$, 所以 Γ 是一个协变函子

$$\Gamma\colon \mathcal{V}_M \rightsquigarrow \mathrm{Mod}_{C^\infty(M)}.$$

转移函数族

设 (π, E, M) 是向量丛, 设有局部平凡化

$$\varphi_\alpha\colon \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^k, \quad \varphi_\beta\colon \pi^{-1}(U_\beta) \longrightarrow U_\beta \times \mathbb{R}^k.$$

设 $p \in U_\alpha \cap U_\beta$, 则有线性同构

$$\varphi_{\alpha,p}\colon E_p \longrightarrow \{p\} \times \mathbb{R}^k, \quad \varphi_{\beta,p}\colon E_p \longrightarrow \{p\} \times \mathbb{R}^k$$

将二者复合得到线性同构

$$\varphi_{\alpha,p} \circ \varphi_{\beta,p}^{-1}\colon \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k, \quad v \longmapsto g_{\alpha\beta}(p)v$$

其中 $g_{\alpha\beta}(p) \in \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^k) = \mathrm{GL}(k, \mathbb{R})$. 由此我们得到一个映射

$$g_{\alpha\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \mathrm{GL}(k, \mathbb{R}).$$

$g_{\alpha\beta}$ 是光滑的, 因为其第 k 列是如下光滑映射的复合

$$\begin{array}{ccccccc} U_\alpha \cap U_\beta & \xrightarrow{\iota_k} & U_\alpha \cap U_\beta \times \mathbb{R}^k & \xrightarrow{\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}} & U_\alpha \cap U_\beta \times \mathbb{R}^k & \xrightarrow{\pi_2} & \mathbb{R}^k \\ p & \longmapsto & (p, e_k) & \longmapsto & (p, g_{\alpha\beta}(p)e_k) & \longmapsto & g_{\alpha\beta}(p)e_k \end{array}$$

易知 $g_{\alpha\beta}$ 满足 cocycle 条件, 即 $g_{\alpha\beta}g_{\beta\alpha} = \mathrm{Id}$ 且 $g_{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}g_{\gamma\alpha} = \mathrm{Id}$. 事实上, 我们可以从 $g_{\alpha\beta}$ 还原出 E.

命题 1.7. *设 M 是光滑流形, $\{U_\alpha\}$ 是 M 的一个开覆盖, 在 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ 时指定一个光滑映射 $g_{\alpha\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(r, \mathbb{R})$ 且适合 cocycle 条件, 那么存在 (π, E, M) 以 $\{g_{\alpha\beta}\}$ 为转移函数族.*

证明.

- 定义
$$q\colon \bigsqcup \alpha \times U_\alpha \times \mathbb{R}^k \longrightarrow V' \quad \pi\colon V' \longrightarrow M, \quad [\alpha, x, v] \longmapsto x$$
- 证明 q 是开映射
- 赋予光滑结构
- 投影映射在此光滑结构下光滑
- 纤维上的线性空间结构和线性同构
- 是向量丛

$\square$

2 向量丛的构造

上一节中我们提到了可以根据转移函数的信息还原出整个向量丛. 事实上, 给定向量丛 (π_E, E, M) 和 (π_F, F, M), 设它们的转移函数分别是 $\{g^E_{\alpha\beta}\}$ 和 $\{g^F_{\alpha\beta}\}$, 那么我们可以通过构造相应的转移函数来定义诸如对偶丛、张量丛等. 但这种手段有一个弊端, 即还需要花费力气说明张量丛的纤维典范同构于纤维的张量积. 我们采取的手段是, 把想要的纤维如 $E_p \otimes F_p$ 收集到一起, 指出它们局部上的摆放的方式, 并说明其构成向量丛. 因为转移函数蕴含向量丛的全部信息, 而这种构造方式得到的转移函数与通过指出转移函数来构造向量丛时的转移函数完全一样, 所以两种构造方式是相同的.

引理 2.1. *设 M 是光滑流形, $\pi\colon E \to M$ 是满射, $k \in \mathbb{N}^*$, 如果*

(1) *任意 $p \in M$, E_p 是 k 维线性空间.*

(2) *任意 $p \in M$, 存在 p 的邻域 U 及双射 $\varphi_U\colon \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$ 使得下图交换*

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(U) \arrow[rr, "\varphi_U"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U \times \mathbb{R}^k \arrow[dl, "\pi_1"] \\
& U &
\end{tikzcd}.$$

(3) *任意 $p \in U$, $\varphi_{U,p}\colon E_p \to \{p\} \times \mathbb{R}^k$ 是线性同构.*

(4) *$\varphi_U \circ \varphi_V^{-1}$ 是光滑映射.*

则我们可以赋予 E 一个拓扑结构和一个光滑结构使得 $\pi\colon E \to M$ 是向量丛.

下面我们在各个具体的构造中验证 $\varphi_U \circ \varphi_V^{-1}$ 的光滑性, 这可以约化到验证 g_{UV} 的光滑性.

对偶

$$\varphi_{U,p}\colon E_p \longrightarrow \{p\} \times \mathbb{R}^k \Longrightarrow \psi_{U,p} := (\varphi^*_{U,p})^{-1}\colon E^*_p \longrightarrow \{p\} \times \mathbb{R}^k$$
$$h_{UV}(p) = \psi_{U,p} \circ \psi^{-1}_{V,p} = (\varphi^*_{U,p})^{-1} \circ \varphi^{-1}_{V,p} = (\varphi_{V,p} \circ \varphi^{-1}_{U,p})^* = (g^{-1}_{UV}(p))^*$$

直和

$$\varphi^E_{U,p}\colon E_p \longrightarrow \{p\} \times \mathbb{R}^k, \quad \varphi^F_{U,p}\colon F_p \longrightarrow \{p\} \times \mathbb{R}^l$$
$$\varphi_{U,p} := E_p \oplus F_p \longrightarrow \{p\} \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l, \quad (v, w) \longmapsto (\varphi^E_{U,p}(v), \varphi^F_{U,p}(w))$$
$$g_{UV} = \varphi_{U,p} \circ \varphi^{-1}_{V,p} = \begin{pmatrix} g^E_{UV} & \\ & g^F_{UV} \end{pmatrix}$$

张量积

$$\varphi^E_{U,p}\colon E_p \longrightarrow \{p\}\times\mathbb{R}^k,\quad \varphi^F_{U,p}\colon F_p \longrightarrow \{p\}\times\mathbb{R}^l$$

$$\varphi_{U,p} := E_p\otimes F_p \longrightarrow \{p\}\times\mathbb{R}^k\otimes\mathbb{R}^l,\quad v\otimes w \longmapsto \varphi^E_{U,p}(v)\otimes\varphi^F_{U,p}(w)$$

$$g_{UV} = g^E_{UV}\otimes g^F_{UV}$$

光滑性的证明可以看 Lawrence Conlon 的 Differentiable manifolds 第二版的引理 7.4.1

定理 2.2. 张量积的截面同构于截面的张量积.

Hom

定理 2.3. 从 E 到 F 的丛同态与 $\mathrm{Hom}(E,F)$ 的截面之间有一个双射.

拉回

设 $\pi\colon E\to M$ 是向量丛, $f\colon N\to M$ 是光滑映射, 我们定义 N 上的向量丛 $\pi\colon f^*E\to N$, 称作 E 在 f 下的拉回丛. 作为集合,

$$f^*E := \bigsqcup_{p\in N}(p, E_{f(p)}).$$

设 $\{U_\alpha\}$ 是 M 的一族开覆盖且 E 在每个 U_α 上可局部平凡化

$$\varphi_\alpha\colon \pi^{-1}(U_\alpha)\longrightarrow U_\alpha\times\mathbb{R}^k.$$

则 $\left\{V_\alpha := f^{-1}(U_\alpha)\right\}$ 是 N 的一族开覆盖.

3 向量丛的截面

将局部截面延拓为整体截面

$\tan\colon(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\to\mathbb{R}$ 说明存在局部上的光滑函数无法延拓至整个流形. 但事情有挽救的余地.

命题 3.1. 设 $s\in\Gamma(U,E)$. 对任意 $p\in U$, 存在 W 满足 $p\in W\subset U$ 和 $\bar{s}\in\Gamma(E)$ 使得 $\bar{s}\big|_W=s\big|_W$.

局部算子

定义 3.2. 设 $\alpha\colon\Gamma(E)\to\Gamma(F)$ 是 $\mathbb{R}$-线性映射,

(1) 称 α 是一个局部算子, 如果 $s\big|_U\equiv 0\Longrightarrow\alpha(s)\big|_U\equiv 0$. 其中 $s\in\Gamma(E)$, $U\subset M$ 是开集.

(2) 称 α 是一个点算子, 如果 $s(p)=0\Longrightarrow\alpha(s)(p)=0$. 其中 $s\in\Gamma(E)$, $p\in M$.

命题 3.3. 设 $\alpha\colon\Gamma(E)\to\Gamma(F)$ 是 $\mathscr{F}$-线性的, 那么 α 是局部算子.

证明. 设 $s\big|_U\equiv 0$. 任取 $p\in U$, 取截断函数 $f\in\mathscr{F}$ 满足 $f(p)=1$ 且 $\operatorname{supp}f\subset U$.

$$fs\equiv 0\Longrightarrow 0=\alpha(fs)=f\alpha(s)\Longrightarrow\alpha(s)(p)=0\Longrightarrow\alpha(s)\big|_U\equiv 0.$$

□

将局部算子限制到开集上

本小节我们讨论如何将局部算子 α 限制到开集 U 上. 虽然 $\alpha(s)$ 在 U 上的值可由 s 在 U 上的值完全决定, 但事情没有这么简单, 因为 $\Gamma(U,E)$ 中存在着一些不能通过整体截面的限制来得到的局部截面, 我们必须说明 α 的限制在这些元素上如何作用.

定理 3.4. 设 $\alpha\colon\Gamma(E)\to\Gamma(F)$ 是一个局部算子, 那么对每个开集 $U\subset M$ 存在唯一的 $\mathbb{R}$-线性映射

$$\alpha_U\colon\Gamma(U,E)\to\Gamma(U,F)$$

满足

$$\alpha_U(t\big|_U)=\alpha(t)\big|_U,\quad\forall t\in\Gamma(E).$$

证明. □

$\mathscr{F}$-线性与丛映射

命题 3.5. 设 $\alpha\colon\Gamma(E)\to\Gamma(F)$ 是 $\mathscr{F}$-线性的, 那么 α 是点算子.

证明. 我们要证明如果 $s(p)=0$, 那么 $\alpha(s)(p)=0$. 设 E 在 $p\in U$ 上有局部标架 $\{e_1,\cdots,e_r\}$. 设

$$s\big|_U=\sum a^ie_i,\quad a^i\in C^\infty(U).$$

因为 $s(p)=0$ 所以有 $a^i(p)=0$, 那么

$$\alpha(s)(p)=\alpha_U(s\big|_U)(p)=\alpha_U(\sum a^ie_i)(p)=(\sum a^i\alpha_U(e_i))(p)=\sum a^i(p)\alpha_U(e_i)(p)=0$$

□

命题 3.6. 设 $\alpha\colon \Gamma(E)\to\Gamma(F)$ 是 $\mathscr{F}$-线性的. 则对 $\forall p\in M$ 存在唯一线性映射 $\varphi_p\colon E_p\to F_p$ 满足

$$\varphi_p(s(p))=\alpha(s)(p),\quad \forall s\in\Gamma(E).$$

证明. □

定理 3.7. 存在一一对应

$$\begin{array}{ccc}\left\{\text{丛映射 } \varphi\colon E\to F\right\} & \longleftrightarrow & \left\{\mathscr{F}\text{-线性映射 } \alpha\colon \Gamma(E)\to\Gamma(F)\right\}\\ \varphi & \longmapsto & \varphi_{\#}\end{array}$$

改记号, 更进一步, 证明是模同构.

4 截面间的 $\mathscr{F}$-线性映射

定理 4.1. $\operatorname{Hom}_{\mathscr{F}}(\Gamma(E), \Gamma(F)) \cong \Gamma(E^* \otimes F)$.

证明. □

Chapter 5

向量场

1　向量场

2 向量场上的李代数结构

李括号还出现在挠率张量和 dω

https://math.stackexchange.com/questions/2760371/why-do-i-care-that-smooth-vector-fields-over-a-smooth-manifold-have-a-lie-algebr

3 单参数变换群与完备向量场

4 Lie 导数

称光滑流形 M 连同其上的流 Φ 为动力系统. 下面我们研究由向量场的流生成的动力系统.

为了简便我们假定 X 是完备的, 所以我们有一族微分同胚 $\phi_t : M \to M$. 现在假定 $f \in C^\infty(M)$ 是任意的光滑函数. 我们希望计算 f 沿着流的变化率.

命题 4.1. 设 $X \in \Gamma^\infty(TM)$ 是完备的. 那么

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \phi_t^* f = Xf, \quad \forall f \in C^\infty(M).$$

证明. 首先我们理解一下式子的左侧,

$$\phi_t^*(f)(p) \xlongequal{\text{拉回映射的定义}} f(\phi_t(p)) \xlongequal{\phi_t\text{的定义}} f(\gamma_p(t)),$$

所以对于固定的 p,$f(\gamma_p(t))$ 是关于 t 的从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的函数, 从而我们可以谈论对该函数关于 t 在 $t=0$ 处求导数.

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \phi_t^* f(p) &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f(\gamma_p(t)) \\
&= \pi((f \circ \gamma_p)_{*,0}(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0})) && \text{Tu An introduction to manifolds Page 92} \\
&= \pi(f_{*,p}((\gamma_p)_{*,0}(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}))) && \text{链式法则} \\
&= \pi(f_{*,p}(X_p)) && \text{积分曲线的定义} \\
&= df_p(X_p) && \text{Tu An introduction to manifolds Page 191} \\
&= Xf(p) && \text{外微分的定义}
\end{aligned}$$

□

Chapter 6

微分形式

1 余切空间

当然可以直接把余切空间定义为切空间的对偶空间. 这里我们采用另一种定义.

设 $p \in M$, 回忆,$\mathscr{E}_p$ 是 p 点处光滑函数芽的全体,Γ_p 是经过 p 点的光滑曲线全体.

定义配对

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathscr{E}_p \times \Gamma_p &\to \mathbb{R} \\ [f] \ , \ \gamma &\mapsto \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f \circ \gamma. \end{aligned}$$

取坐标邻域 (U, x), 则有 $\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f \circ \gamma = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \left.\frac{\mathrm{d}x^i \circ \gamma}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}$. 容易看出

- 以上定义并不依赖 $[f]$ 的代表元的选取.
- $\langle [f], \gamma \rangle = 0, \forall \gamma \in \Gamma_p \Longleftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = 0, \forall i = 1, \cdots, n.$

$\{[f] \mid \langle [f], \gamma \rangle = 0, \forall \gamma \in \Gamma_p\}$ 构成 $\mathscr{E}_p$ 的子空间, 我们将商空间记作 T_p^*M, 称作 p 点处的余切空间.

设 $f \in C^\infty(M)$, 将 f 在 p 点处做泰勒展开得

$$f(x) - f(p) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(x^i - x_0^i) + g(x)$$

两边作商得

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x^i} \mathrm{d}x^i$$

2 张量积

关于张量积的比较一般的讨论可以在交换代数笔记中找到. 感觉模论中好像不怎么谈论对偶模.

定义 2.1. 设 V, W, Z 都是 $\mathbb{R}$-向量空间. 如果 $f\colon V\times W\to Z$ 满足

$$
\begin{aligned}
f(\lambda v_1+v_2,w)&=\lambda f(v_1,w)+f(v_2,w)\\
f(v,\lambda w_1+w_2)&=\lambda f(v,w_1)+f(v,w_2)
\end{aligned}
$$

则称 f 为 $\mathbb{R}$-双线性映射. 将这样的双线性映射全体记作 $\mathscr{L}(V,W;Z)$.

定义 2.2. 设 U, V, W 都是 $\mathbb{R}$-向量空间, $f\colon V\times W\to U$ 是 $\mathbb{R}$-双线性映射. 如果对任意的 $\mathbb{R}$-向量空间 Z 和 $\mathbb{R}$-双线性映射 $g\colon V\times W\to Z$, 都存在唯一的 $\mathbb{R}$-线性映射 $h\colon U\to Z$ 使得 $h\circ f=g$

$$
\begin{tikzcd}
V\times W \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & U \arrow[d, dashed, "\exists! h"] \\
& Z
\end{tikzcd}
$$

则称 f 为 V 与 W 在 $\mathbb{R}$ 上的张量积.

仅仅从张量积的定义出发, 我们便能知道很多信息:

- 张量积的泛性质蕴含了若存在则在同构意义下唯一, 因此我们可将 U 记作 $V\otimes W$, 将 $f(v,w)$ 记作 $v\otimes w$. 但此时还不清楚存在性, $V\otimes W$ 和 $v\otimes w$ 都还十分抽象.
- $\mathscr{L}(V,W;Z)\cong \mathrm{Hom}(V\otimes W,Z)$, 特别地, 当 Z 取为 $\mathbb{R}$ 时, 我们得到 $\mathscr{L}(V,W;\mathbb{R})\cong (V\otimes W)^*$.
- $(V\otimes W)^*\cong V^*\otimes W^*$, 从而 $\mathscr{L}(V,W;\mathbb{R})\cong V^*\otimes W^*$, 从而 $V\otimes W\cong \mathscr{L}(V^*,W^*;\mathbb{R})$.

容易验证 $\mathscr{L}(V^*,W^*;\mathbb{R})$ 确实满足张量积的定义, 因此我们在 V 和 W 都是有限维线性空间的情形下将 $V\otimes W$ 具体实现为 $\mathscr{L}(V^*,W^*;\mathbb{R})$.

因此一些书（或许为了简化理解的难度）也会这样定义张量积

定义 2.3. 设 $f\in V^*, g\in W^*$, 定义

$$f\otimes g\colon V\times W\to\mathbb{R},\ (v,w)\mapsto f(v)g(w).$$

容易看出 $f\otimes g$ 是 $V\times W$ 上的双线性函数, 称作 f 与 g 的张量积.

在把 $v\otimes w$ 诠释为双线性函数这种观点下, 容易看出 $V^*\otimes W\cong \mathrm{Hom}(V,W)$.

张量代数

3 楔积

作为张量代数的商代数

泛性质定义

定义 3.1.

实现为函数

与楔积有关的是所谓的交错线性映射.

作为函数的楔积

4 微分形式

记号 4.1. $\Omega(M) = \Omega^0(M) \oplus \Omega^1(M) \oplus \cdots \oplus \Omega^n(M)$.

定义 4.2.

$$\begin{aligned} \wedge\colon \Omega^p(M) \times \Omega^q(M) &\longrightarrow \Omega^{p+q}(M) \\ \omega \quad , \quad \eta \quad &\longmapsto \omega \wedge \eta \end{aligned}$$

$\Omega(M)$ 在 $\wedge$ 下成为分次 $\mathbb{R}$-代数.

5 外微分

公理化定义

定理 5.1. 设 M 是光滑流形, 存在唯一的 $\mathbb{R}$-线性映射满足

(0) $\mathrm{d}(\Omega^k(M)) \subset \Omega^{k+1}(M)$

(1) $\mathrm{d}f(X) = Xf$.

(2) $\mathrm{d}(\mathrm{d}f) = 0$.

(3) $\mathrm{d}(\alpha \wedge \beta) = \mathrm{d}\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge \mathrm{d}\beta$

证明.

- 先证明若存在, 则是局部算子.
- 再证明局部上的唯一性, 必须形如什么什么
- 再局部定义为这样, 验证这样定义的满足所有的条件
- 最后说明定义并不依赖于局部坐标的选取

□

局部定义

整体定义

$\mathrm{d}^2 = 0$

Chapter 7

定向

1 向量空间的定向

设 V 是有限维线性空间. 考虑 V 的两组有序基 $(e_1,\cdots,e_n)^T$ 和 $(\tilde{e}_1,\cdots,\tilde{e}_n)^T$, 二者之间有

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \tilde{e}_1 \\ \vdots \\ \tilde{e}_n \end{pmatrix}.$$

我们称 $(e_1,\cdots,e_n)^T \sim (\tilde{e}_1,\cdots,\tilde{e}_n)^T$, 如果 $\det A > 0$. 容易验证这是等价关系, 且只有两个等价类. 称一个这样的等价类为 V 上的一个定向.

设 $\omega \neq 0 \in \bigwedge^n(V^*)$, 注意到

$$\begin{aligned}
\omega(e_1,\cdots,e_n) &= \omega(A_1^i\tilde{e}_i,\cdots,A_n^i\tilde{e}_i) \\
&= \sum_{\sigma\in S_n} \omega(A_1^{\sigma(1)}\tilde{e}_{\sigma(1)},\cdots,A_n^{\sigma(n)}\tilde{e}_{\sigma(n)}) \\
&= \sum_{\sigma\in S_n} A_1^{\sigma(1)}\cdots A_n^{\sigma(n)}\omega(\tilde{e}_{\sigma(1)},\cdots,\tilde{e}_{\sigma(n)}) \\
&= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma A_1^{\sigma(1)}\cdots A_n^{\sigma(n)}\omega(\tilde{e}_1,\cdots,\tilde{e}_n) \\
&= (\det A)\omega(\tilde{e}_1,\cdots,\tilde{e}_n).
\end{aligned}$$

所以那些满足 $\omega(e_1,\cdots,e_n) > 0$ 的有序基决定同一个定向.

2 流形的定向

直觉上, 可定向流形讲了这样一件事. 考虑流形 M 及其切丛 TM, 我们可以找到 M 的一个开覆盖使得 TM 在每个开集上平凡. 在这样的一个开集 U 上,$TM\big|_U$ 同构于 $U\times\mathbb{R}^n$, 因此, 选取 $\mathbb{R}^n$ 的一个定向之后, 我们可以对 U 中每个点处的切空间赋予一个一致的定向. 在不同的 U 相交的地方, 定向或者一致或者相反. 问题是, 我们能否通过调整每一片 U 上的定向（不妨理解为给硬币翻个面）, 使得任意重叠区域的定向都是一致的? 我们把可以做到这种事情的流形 M 称作是可定向的. 上述直观解释立即让我们意识到单连通的流形一定是可定向的.

3 体积形式

Chapter 8

流形上的积分

1 n-形式在光滑流形上的积分

2 Stokes 公式

Chapter 9

deRham 上同调

n 维球面上的李群结构

Chapter 10

李群

1 李群

定义 1.1. *称集合 G 是李群, 如果其上既有光滑结构又有群结构, 并且*

$$\mu : G \times G \to G, \quad (g_1, g_2) \mapsto g_1 \cdot g_2$$

是光滑映射.

注记.

- 与拓扑群的情形不同, 群乘法的光滑性可以蕴含逆的光滑性.
- 希尔伯特第五问题,*[Gleason and Montgomery-Zippin,1950's]*: 设 G 是任意拓扑群, 其底空间是一个拓扑流形, 那么 G 上有一个光滑结构使得它是一个李群.
- 事实上每个李群都是实解析的. 也就是说, 任意李群 G 上的一个光滑结构包含了唯一一个实解析结构.

例 1.2. 有一些基本的例子:

- 回忆离散群是指赋予了离散拓扑的拓扑群.

  如果该群还是至多可数的, 那么它是零维李群, 称作离散李群.
- $\mathbb{R}^n$, 加法群.
- $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$, 乘法群.
- $\mathbb{S}^1$, 乘法群.
- 线性李群, 矩阵乘法.

$$\begin{aligned} GL(n,\mathbb{R}) &= \left\{X \in M(n,\mathbb{R}) \middle| \det X \neq 0\right\}, \quad \text{一般线性群} \\ SL(n,\mathbb{R}) &= \left\{X \in M(n,\mathbb{R}) \middle| \det X = 1\right\}, \quad \text{特殊线性群} \\ O(n) &= \left\{X \in M(n,\mathbb{R}) \middle| XX^T = I_n\right\}, \quad \text{正交群.} \end{aligned}$$

- 如果 G_1 和 G_2 是李群, 那么它们的直积 $G_1 \times G_2$ 也是李群.

注记.

(2) 不是每个光滑流形都有李群结构. 例如, 有李群结构的球只有 $\mathbb{S}^0, \mathbb{S}^1$ 和 $\mathbb{S}^3$; 在所有的紧二维曲面中有李群结构的只有 $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. 李群结构存在的一个简单的拓扑阻碍是 $\pi_1(G)$ 必须是 *Abel* 的.

现在假设 G 是一个李群. 对任意元素 $a, b \in G$, 有两个自然映射, 左乘

$$L_a : G \to G, \quad g \mapsto a \cdot g$$

和右乘

$$R_b : G \to G, \quad g \mapsto g \cdot b.$$

L_a 是光滑的因为它可以被视作光滑映射的复合

$$\begin{aligned} L_a : & G \xhookrightarrow{j_a} G \times G \xrightarrow{\mu} G \\ & g \longmapsto (a, g) \longmapsto a \cdot g. \end{aligned}$$

类似地 $R_b = \mu \circ i_b$ 也是光滑的. 显然有 $L_a^{-1} = L_{a^{-1}}$ 和 $R_b^{-1} = R_{b^{-1}}$. 所以 L_a 和 R_b 都是微分同胚. 此外,L_a 和 R_b 彼此交换, 即 $L_a R_b = R_b L_a$.

引理 1.3. 乘法映射 $\mu : G \times G \to G$ 的微分是

$$d\mu_{a,b}(X_a, Y_b) = (dR_b)_a(X_a) + (dL_a)_b(Y_b).$$

我们已经利用了 *PSet2* 中的同构 $\theta : T_a G \times T_b G \simeq T_{(a,b)}(G \times G)$.

证明.

$$\begin{aligned} (d\mu_{a,b}(X_a, Y_b))f &= (X_a, Y_b)(f \circ \mu) \\ &= X_a(f \circ \mu \circ i_b) + Y_b(f \circ \mu \circ j_a) \\ &= X_a(f \circ R_b) + Y_b(f \circ L_a) \\ &= (dR_b)_a(X_a)f + (dL_a)_b(Y_b)f. \end{aligned}$$

□

2 同态

回忆群 G 到群 H 的群同态 $\phi : G \to H$ 是指一个映射满足

$$\phi(g_1 \cdot g_2) = \phi(g_1) \cdot \phi(g_2), \quad \forall g_1, g_2 \in G.$$

对于李群, 很自然地要求映射 ϕ 的光滑性.

定义 2.1. *设 G, H 是李群. 如果映射 $\phi : G \to H$ 是光滑的群同态, 则称 ϕ 是一个李群同态.*

类似地我们可以定义李代数同态

定义 2.2. *设 $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ 是李代数. 如果映射 $L : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ 满足*

(1) *L 是线性映射*

(2) *$L([X_1, X_2]) = [L(X_1), L(X_2)], \quad \forall X_1, X_2 \in \mathfrak{g}$.*

则称 L 是李代数同态.

现在假设 $\phi : G \to H$ 是一个李群同态, 那么它在 e 处诱导了切映射 $\phi_{*,e} : T_eG \to T_eH$

3 左不变向量场

我们从抽象的定义开始.

定义 3.1. 设 V 是实向量空间, 若其上有一个二元运算

$$[\cdot,\cdot] : V \times V \to V$$

满足

(1)（线性）$[aX_1 + bX_2, Y] = a[X_1, Y] + b[X_2, Y]$

(2)（反对称）$[X, Y] = -[Y, X]$.

(3)（*Jacobi* 恒等式）$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$.

则称 V 是一个李代数, 称 $[\cdot,\cdot]$ 是 V 上的李括号运算.

例 3.2. 任何向量空间上都有一个平凡的李代数结构：$[X, Y] \equiv 0$.

例 3.3. 光滑流形 M 上的全体光滑向量场 $\Gamma^\infty(TM)$ 构成一个李代数.

例 3.4.

3.1 单参数子群作为单参数变换群

$$\begin{tikzcd}
v \in T_eG & X\text{左不变矢量场} \arrow[d] \\
\phi : \mathbb{R} \to G & \varphi : \mathbb{R} \times G \to G \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

命题 3.5. 设 G 是李群, X 是 G 上的左不变矢量场, 则

(1) X 是完备的.

(2) 设 $\varphi : \mathbb{R} \times G \to G$ 是由 X 决定的单参数变换群,$\phi(t) = \varphi(t, e)$, 那么 $\varphi(t, g) = g \cdot \phi(t)$

特别地,$\phi : \mathbb{R} \to G$ 是唯一满足 $\phi'(0) = X_e$ 的李群同态.

证明. 我们知道积分曲线局部的存在性总是成立的, 而李群的好处和左不变矢量场的特殊之处在于我们可以利用左乘来将某处的积分曲线搬到另一处仍是积分曲线。如果我们搬的不太远, 即两个积分曲线相交, 那么我们可以利用唯一性断定这两个积分曲线可以拼到一起, 从而极大积分曲线的定义域必须是 $\mathbb{R}$。还是利用左乘和左不变矢量场的特殊性, 我们发现经过任意两点的极大积分曲线不会相差太多, 只差一个左乘, 如果我们以经过 e 的极大积分曲线 $\phi(t)$ 为基准, 那么经过 g 的极大积分曲线就是 $g \cdot \phi(t)$, 而只要你稍微会想起单参数变换群是如何由积分曲线决定的, 你便会发现 t 对应的微分同胚即是右乘 $\phi(t)$. □

3.2 指数映射

- 指数映射让我们可以从李代数得到群的局部结构
- 指数映射的存在性是李代数能成为研究李群的有力工具的一个基本原因
- 数学分析中的指数映射是 G 为正实数的乘法群的特殊情形.

计算指数映射的套路

- 明确李群 G, 明确李代数 $\mathfrak{g}$, 任取元素 $X \in \mathfrak{g}$
- 构造 $\phi : \mathbb{R} \to G$, 满足
  - $\phi(0) = e$
  - $\phi'(0) = X$
  - ϕ 是李代数同态, 即 $\phi(t+s) = \phi(t)\phi(s)$
- $\exp(X) = \phi(1)$.

4 李子群

5 闭李子群

6 李群作用

设 M 是光滑流形,G 是李群. 设 $\mathfrak{g}$ 是 G 的李代数.

从本章开始,$\mathfrak{g}$ 的元素会被记作 $A, B, \cdots$. 根据语境, 它们会被视作 G 上的左不变矢量场或 $\mathscr{T}_e G$ 中的元素.

6.1 覆叠映射

7 伴随表示

命题 7.1. $\mathrm{Ad}\colon G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ 是李群同态.

命题 7.2. $\mathrm{Aut}_{\mathrm{Lie}}\,\mathfrak{g}$ 是李群.

8 齐性空间

定义 8.1. 设 M 是光滑流形, G 是李群. 称 M 及其上的一个可迁 G 作用为一个齐性 G-空间.

定理 8.2. 设 G 是李群, H 是 G 的闭子群. 那么

(1) 左陪集空间 G/H 是 $\dim G - \dim H$ 维拓扑流形.

(2) G/H 上有唯一的光滑结构使得 $\pi\colon G \to G/H$ 是光滑淹没.

(3) 定义 G 在 G/H 上的左作用 $g_1 \cdot (g_2 H) := (g_1 g_2)H$, 则 G/H 成为齐性 G-空间.

证明. □

定理 8.3. 设 G 是李群, M 是齐性 G-空间, $p \in M$. 那么

(1) p 处的稳定化子 G_p 是 G 的闭子群.

(2) 映射 $F\colon G/G_p \to M$, $gG_p \mapsto g \cdot p$ 是等变的微分同胚.

证明. □

Chapter 11

Maurer-Cartan 形式

1 Maurer-Cartan 形式

- 欧式空间中向量的平行移动
  - 首先, 向量指的是某点处切空间中的元素
  - 平行移动让我们得到任意两点处切空间的一个同构？甚至得到切丛是平凡的？
    - 我想有两个意义下的平行移动。一个意义下的平行移动是给定了一个联络后的平行移动, 切丛当然不必是平凡的。
      另一个意义就是这里李群意义下的平行移动, 切丛是平凡的。
    - 还需要好好理解平行移动到底带给了我们什么, 应该不仅仅是任意两点处切空间的一个同构。
    - 我本以为这里这件事是靠李群结构保证的, 但他又说这依赖于光滑地、可迁地作用于 $\mathbb{R}^n$ 的一个 translation group。但确实对任意李群都可以找到这样的一个 translation group。

Chapter 12

向量丛

1 向量丛上的联络

定义 1.1. 设 (π, E, M) 是向量丛, 若 $\nabla\colon \Gamma(E) \to \Gamma(T^*M \otimes E)$ 满足

(1) $\nabla(s_1 + s_2) = \nabla s_1 + \nabla s_2$.

(2) $\nabla(fs) = \mathrm{d}f \otimes s + f\nabla s$.

则称 ∇ 是 E 上的一个联络. E 上所有联络构成的集合记为 $\mathcal{A}(E)$.

例 1.2. 设 $E = M \times \mathbb{R}$ 是平凡 $\mathbb{R}$-丛, 则 $\mathrm{d}\colon C^\infty(M) \to \Omega^1(M)$ 是其上的联络.

例 1.3.

例 1.4.

例 1.5.

引理 1.6. 设 (π, E, M) 是向量丛, $\nabla^i \in \mathcal{A}(E)$, $f_i \in C^\infty(M)$, $\sum_{i=1}^{n} f_i = 1$, 则 $\nabla := \sum_{i=1}^{n} f_i \nabla^i \in \mathcal{A}(E)$.

命题 1.7. 设 (π, E, M) 是向量丛, 则 $\mathcal{A}(E)$ 非空.

证明. 设 $\{U_\alpha\}$ 是 M 的一个开覆盖使得在 U_α 上 E 有局部平凡化

$$\varphi_\alpha\colon \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^k.$$

设 $\{f_\alpha\}$ 是从属于 $\{U_\alpha\}$ 的单位分解. 在 $\pi^{-1}(U_\alpha)$ 上定义

$$\nabla^\alpha s := \varphi_\alpha^{-1} \mathrm{d} \varphi_\alpha s, \quad \forall s \in \Gamma(U_\alpha; \pi^{-1}(U_\alpha))$$

则 ∇^α 是 $\pi^{-1}(U_\alpha)$ 上的一个联络. 由引理 1.6 有 $\nabla = \sum f_\alpha \nabla^\alpha \in \mathcal{A}(E)$. □

命题 1.8. 设 (π, E, M) 是向量丛, 设 $\nabla \in \mathcal{A}(E)$, 则

(2) 设 $\nabla \in \mathcal{A}(E), a \in \Omega^1(\mathrm{Hom}(E, E))$, 则 $\nabla + a \in \mathcal{A}(E)$

(3) 设 $\nabla, \tilde{\nabla} \in \mathcal{A}(E)$, 则存在 $a \in \Omega^1(\mathrm{Hom}(E, E))$ 使得 $\nabla - \tilde{\nabla} = a$.

联络的局部表示

设 $\{e_i\}$ 是向量丛 $\pi\colon E \to M$ 的一个局部标架. 则 ∇e_i 仍可以用 $\{e_i\}$ 表达

$$\nabla e_i = \omega_i^j \otimes e_j.$$

利用矩阵可表示为

$$\nabla \begin{pmatrix} e_1 & \cdots & e_n \end{pmatrix}$$

2 平行移动

3 向量丛上联络的和乐

4 联络的曲率

记号 4.1. $\Omega^p(E) := \Gamma(\wedge^p T^*M \otimes E)$.

定义 4.2.

定义 4.3.

$$\begin{aligned}\wedge\colon \Omega^k(M) \times \Omega^l(E) &\longrightarrow \Omega^{k+l}(E)\\ \omega \quad , \quad \alpha &\longmapsto \omega \wedge \alpha\end{aligned}$$

定义 4.4. 设 ∇ 是 $\pi\colon E \to M$ 上的一个联络, 定义

$$\begin{aligned}\mathrm{d}_\nabla\colon \Omega^p(E) = \Gamma(\bigwedge^p T^*M) \otimes \Gamma(E) &\longrightarrow \Omega^{p+1}(E) = \Gamma(\bigwedge^{p+1} T^*M) \otimes \Gamma(E)\\ \omega \otimes s &\longmapsto \mathrm{d}\omega \otimes s + (-1)^p \omega \wedge \nabla s\end{aligned}$$

良定性. d_∇ 的良定性无法从张量积的万有性质得到, 因为 d_∇ 本身就不是 $\mathscr{F}$-线性映射. □

命题 4.5. 设 $\omega \in \Omega^p(M), \alpha \in \Omega^q(E)$, 则

$$\mathrm{d}_\nabla(\omega \wedge \alpha) = \mathrm{d}\omega \wedge \alpha + (-1)^p \omega \wedge \mathrm{d}_\nabla \alpha.$$

证明. 只对 $\alpha = \eta \otimes s$ 的情形证明, 一般情形由线性显然.

$$\begin{aligned}\mathrm{d}_\nabla(\omega \wedge \alpha) = \mathrm{d}_\nabla(\omega \wedge \eta \otimes s) &\stackrel{\Delta}{=} (d(\omega \wedge \eta)) \otimes s + (-1)^{p+q}(\omega \wedge \eta) \wedge \nabla s\\ &= \mathrm{d}\omega \wedge \eta \otimes s + (-1)^p \omega \wedge \mathrm{d}\eta \otimes s + (-1)^{p+q}(\omega \wedge \eta) \wedge \nabla s\\ &= \mathrm{d}\omega \wedge \eta \otimes s + (-1)^p \omega \wedge (\mathrm{d}\eta \otimes s + (-1)^q \eta \wedge \nabla s)\\ &= \mathrm{d}\omega \wedge \eta \otimes s + (-1)^p \omega \wedge \mathrm{d}_\nabla(\eta \otimes s)\\ &= \mathrm{d}\omega \wedge \alpha + (-1)^p \omega \wedge \mathrm{d}_\nabla \alpha.\end{aligned}$$

□

命题 4.6. 设 $\alpha \in \Omega^p(E), \eta \in \Omega^q(M)$, 则

$$\mathrm{d}_\nabla(\alpha \wedge \eta) =$$

命题 4.7. 设 ∇ 是 $\pi\colon E \to M$ 上的一个联络, 存在 $F_\nabla \in \Omega^2(E^* \otimes E)$, 使得

$$\mathrm{d}_\nabla^2 s = \langle F_\nabla, s \rangle, \quad \forall s \in \Omega^0(E) = \Gamma(E).$$

证明.

$$\mathrm{d}_\nabla^2(fs) = \mathrm{d}_\nabla(\mathrm{d}f \otimes s + f\nabla s) = \mathrm{d}^2 f \otimes s - \mathrm{d}f \wedge \nabla s + \mathrm{d}f \wedge \nabla s + f\mathrm{d}_\nabla \nabla s = f\mathrm{d}_\nabla^2 s$$

□

定义 4.8. 称 $F_\nabla \in \Omega^2(E^* \otimes E)$ 为联络 ∇ 的曲率形式.

命题 4.9. 对于 $\alpha = \omega \otimes s \in \Omega^p(E)$, 有

$$d_\nabla^2 \alpha = \omega \wedge \langle F_\nabla, s \rangle .$$

证明.

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_\nabla^2(\omega \otimes s) &= \mathrm{d}_\nabla(\mathrm{d}\omega \otimes s + (-1)^p \omega \wedge \nabla s) \\ &= (-1)^{p+1} \mathrm{d}\omega \wedge \nabla s + (-1)^p \mathrm{d}\omega \wedge \nabla s + \omega \wedge \mathrm{d}_\nabla \nabla s \\ &= \omega \wedge \langle F_\nabla, s \rangle \end{aligned}$$

□

5 规范群

定义 5.1. 设 (π, E, M) 是向量丛, 定义

$$\mathcal{G} := \Gamma(\mathrm{Aut}(E)).$$

称 $\mathcal{G}$ 是 (π, E, M) 的规范群, $\mathcal{G}$ 中元素称为规范变换.

命题 5.2. 设 $g \in \mathcal{G}, \nabla \in \mathcal{A}(E)$. 定义

$$\nabla^g s := g^{-1}\nabla(gs).$$

则 $\nabla^g \in \mathcal{A}(E)$.

Chapter 13

主丛

1 主丛

定义 1.1. 称光滑满射 $\pi\colon E\to M$ 是以 F 为纤维的纤维丛, 如果存在

$$\varphi_\alpha\colon \pi^{-1}(U_\alpha)\longrightarrow U_\alpha\times F$$

是保纤维的微分同胚, 且 $\{U_\alpha\}$ 构成 M 的开覆盖. 称 E 为全空间, 称 M 为底空间.

定义 1.2. 设 G 是李群, $\pi\colon P\to M$ 是以 G 为纤维的纤维丛. 设 G 右作用在 P 上, 如果

(1) 该作用是自由的, 即 P 中每个点的稳定化子都是平凡的.

(2) 映射

$$\varphi_\alpha\colon \pi^{-1}(U_\alpha)\longrightarrow U_\alpha\times G$$

是等变的, 即如果 $\varphi_\alpha(p)=(x,h)$ 则 $\varphi_\alpha(p\cdot g)=(x,h\cdot g)$.

则称 $\pi\colon P\to M$ 及该右作用为主 G-丛.

例 1.3. 设 M 是流形, G 是李群, 则 $\pi\colon M\times G\to M$ 是主 G-丛.

例 1.4. $\pi\colon \mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}\longrightarrow \mathbb{S}^{2n+1}$ 是主 $\mathbb{R}^+$-丛.

例 1.5. $\pi\colon \mathbb{S}^{2n+1}\longrightarrow \mathbb{CP}^n$ 是主 $\mathbb{S}^1$-丛.

证明.

$$\varphi_i\colon \pi^{-1}(U_i)\longrightarrow U_i\times\mathbb{S}^1,\quad (z_0,\cdots,z_n)\longmapsto([z_0,\cdots,z_n],\frac{z_i}{|z_i|})$$

$$\varphi_i^{-1}\colon U_i\times\mathbb{S}^1\longrightarrow \pi^{-1}(U_i),\quad ([z_0,\cdots,z_n],\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\longmapsto \frac{(z_0,\cdots,z_n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|z_i|}{z_i|z|}$$

□

例 1.6. $\pi\colon \mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}\longrightarrow \mathbb{CP}^n$ 是主 $\mathbb{C}^*$-丛.

例 1.7. 主丛的复合是主丛.

例 1.8. 设 G 是李群, H 是 G 的闭子群, 则 $\pi\colon G\to G/H$ 是主 H-丛.

证明. □

定理 1.9. 主丛上没有整体截面，除非它是平凡丛.

2 右作用的基本向量场

3 主丛上的联络

4 主丛上联络的和乐

5 规范群

Chapter 14

分布和叶状结构

1 Frobenius 定理的类似定理

定理 1.1. 设 M 是光滑流形, X 是 M 上的光滑向量场. 如果 $X_p \neq 0$, 那么存在 p 处的坐标卡 (U, φ) 使得 $X|_U = \dfrac{\partial}{\partial x^1}$.

证明. $\square$

定理 1.2. 设 M 是 n 维光滑流形, $X_1, \cdots, X_l$ 是 M 上处处线性无关的光滑向量场. 如果

$$[X_i, X_j] = 0, \quad \forall 1 \leqslant i, j \leqslant l$$

那么对任意 $p \in M$, 存在 p 处的坐标卡 (U, φ) 使得 $X_i = \dfrac{\partial}{\partial x^i}$.

证明. $\square$

2 分布的可积与对合

定义 2.1. 分布

定义 2.2. 设 D 是 M 上的光滑分布. 称非空浸入子流形 $N \subset M$ 是 D 的积分流形, 如果

$$T_pN = D_p, \quad \forall p \in N.$$

定义 2.3. 设 D 是 M 上的光滑分布. 称 D 是可积的, 如果 M 中每点都含在 D 的某个积分流形中.

定义 2.4. 设 D 是光滑分布. 称 D 是对合的如果 $\Gamma(D)$ 对李括号封闭.

命题 2.5. D 是对合当且仅当任意 U 有 $\Gamma(U, D)$ 对李括号封闭.

证明. □

命题 2.6. 可积蕴含对合.

证明. □

命题 2.7.

定义 2.8. 设 D 是光滑分布. 称 $\omega \in \Omega^p(U)$ 零化 D 如果

$$\omega(X_1, \cdots, X_p) = 0, \quad \forall X_1, \cdots, X_p \in \Gamma(U, D).$$

命题 2.9. 设 D 是 n 维光滑流形 M 上的 k 维光滑分布. $\omega \in \Omega^p(M)$ 零化 D 当且仅当在局部上有

$$\omega = \sum_{i=1}^{n-k} \omega^i \wedge \beta^i$$

其中 ω^i 是 D 在 U 上的局部定义形式, $\beta^i \in \Omega^{p-1}(U)$.

证明. □

命题 2.10. 设 D 是光滑分布. D 是对合的当且仅当每个零化 D 的 1-形式 η 的外微分 $\mathrm{d}\eta$ 也零化 D.

证明.

$\Longrightarrow$ $\mathrm{d}\eta(X, Y) = X(\eta(Y)) - Y(\eta(X)) - \eta([X, Y]) = 0.$

$\Longleftarrow$

□

3 Frobenius 定理

$\pitchfork$

Chapter 15

商流形

Chapter 16

作业

1 21FPSet2Part1

(2)[**Extending polynomials to $\mathbb{S}^2$**]

Let $p_n(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ be a complex polynomial with $a_n \neq 0$ and $n > 0$. By identifying $\mathbb{C}$ as $\mathbb{S}^2 - \{N\}$ via stereographic projection, the map p gives us a map $\tilde{p}\colon \mathbb{S}^2 - \{N\} \to \mathbb{S}^2 - \{N\}$. Define $\tilde{p}_n(N) = N$ and thus we get $\tilde{p}_n\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$.

(a) Prove: $\tilde{p}_n$ is smooth.

(b) For which points x, do we have $(\mathrm{d}\tilde{p}_n)_x = 0$? In particular, prove that there are only finitely many x with $(\mathrm{d}\tilde{p}_n)_x = 0$.

证明.

(a) 只需证明 $\tilde{p}_n$ 在 N 点处光滑.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{S}^2\backslash\{S,N\} & \mathbb{S}^2\backslash\{S,N\} \\
\mathbb{C}^*, z \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{C}^*, p_n(z) \arrow[d] \\
\mathbb{C}^*, w = \dfrac{1}{z} \arrow[r] & \mathbb{C}^*, \dfrac{w^n}{a_0 w^n + \cdots + a_n}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{S}^2\backslash\{S\}, N \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{S}^2\backslash\{S\}, N \arrow[d] \\
\mathbb{C}, 0 \arrow[r] & \mathbb{C}, 0
\end{tikzcd}$$

稍微解释几句

- $\mathbb{S}^2\backslash\{S\}$ 是点 N 的一个邻域, 通过变换 $z \mapsto \dfrac{1}{z}$ 将它同胚到 0 的一个邻域.
- $w \mapsto \dfrac{w^n}{a_0 w^n + \cdots + a_n}$ 在点 0 附近显然是光滑的.

(b)

$\square$

(5)Let M, N be smooth manifolds with atlases $\mathcal{A} = \{(\phi_\alpha, U_\alpha)\}$ and $\mathcal{B} = \{(\phi_\beta, U_\beta)\}$ respectively. Define an atlas $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ on the product space $M \times N$ to be

$$\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{(\phi_\alpha \times \phi_\beta, U_\alpha \times U_\beta)\}.$$

Prove:

(a) $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ is an atlas on $M \times N$, thus define a smooth structure.

(b) The nature projections $\pi_1 : M \times N \to M$ and $\pi_2 : M \times N \to N$ are smooth.

(c) If P is any smooth manifold, then a map $f : P \to M \times N$ is smooth if and only if both $\pi_1 \circ f$ and $\pi_2 \circ f$ are smooth.

(d) $T_{(p,q)}(M \times N) \simeq T_p M \times T_q N$.

证明.

(a)
- $\{(U_\alpha \times U_\beta)\}$ 显然是 $M \times N$ 的开覆盖.
- 若 $(U_\alpha \times U_\beta) \cap (U'_\alpha \times U'_\beta) \neq \varnothing$, 则

$$(\phi'_\alpha \times \phi'_\beta) \circ (\phi_\alpha \times \phi_\beta)^{-1} = (\phi'_\alpha \times \phi') \circ (\phi_\alpha^{-1} \times \phi_\beta^{-1}) = (\phi'_\alpha \circ \phi_\alpha^{-1}) \times (\phi'_\beta \circ \phi_\beta^{-1})$$

(b)

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\phi_\alpha \times \phi_\beta"] & M \arrow[d, "\phi_\alpha"] \\
\phi_\alpha(U_\alpha) \times \phi_\beta(U_\beta) \arrow[r, "\tilde{\pi}"] & \phi_\alpha(U_\alpha)
\end{tikzcd}$$

(c)
- $\Longrightarrow$ 容易.
- $\Longleftarrow$

$$\begin{array}{cc}
P & M \times N \\
 & \\
\phi_\gamma(U_\gamma) & \phi_\alpha \times \phi_\beta(U\beta)
\end{array}$$

(d) 两边维数相同, 显然同构（笑）

不过我们可以给出一个稍微有点意义的同构映射,

$$\begin{aligned}
\theta : T_pM \times T_qN &\longrightarrow T_(p,q)(M \times N) \\
(u, v) &\longmapsto w
\end{aligned}$$

其中 $wf = uf(\cdot, q) + vf(p, \cdot)$, 容易验证该映射良好定义.

- 容易验证 θ 是线性映射.
- $\ker \theta = \{(0,0)\}$. 假设 $u \neq 0$, 则可以找到 $f_1 : M \to R$ 满足 $uf_1 \neq 0$, 可设 $uf_1 > 0, f_1(p) > 0$, 否则, 考虑 $-f_1 + C$, 其中 C 是充分大的某正数. 对 $v \neq 0$ 也同样找到这样的一个函数 f_2, 若 $v = 0$ 则取 $f_2 \equiv 1$. 定义

$$\begin{aligned}
f : M \times N &\longrightarrow \mathbb{R} \\
(p, q) &\longmapsto f_1(p) f_2(q)
\end{aligned}$$

则 $wf = f_2(q) uf_1 + f_1(p) vf_2 > 0$.

$\square$

2 21FPSet2Part2

(1)[**Submersions are open maps**]

(a) Let $f\colon M \to N$ be a submersion. Prove: f is an open map.

(b) Prove: If M is compact and N is connected, then any submersion $f\colon M \to N$ is surjective. Conclude that there exists no submersion from any compact smooth manifold M to any connected noncompact smooth manifold.

证明.

(a) 任取 $W \subset M$ 是开集, 我们要证明 $f(W)$ 是开集. 任取 $q \in f(W)$, 可以找到 $p \in W$ 使得 $f(p) = q$. 因为 f 是淹没, 所以我们可以找到 p 和 q 的坐标卡 (φ, U, V) 和 (ψ, X, Y) 使得 $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ 是投影. 因为投影映射是开映射, 所以对于开集 $p \in \widetilde{U} \subset U \cap W$ 足够小有 $q \in f(\widetilde{U}) \subset f(W)$ 中的 $f(\widetilde{U})$ 是开集. 所以 $f(W)$ 是开集.

(b)
- 由 (a),f 是开映射, 所以 $f(M)$ 是开集.
- $f(M)$ 是紧集, 因为 N 是 Hausdorff 的, 所以 $f(M)$ 是闭集.
- 连通集的既开又闭子集只有空集和全集, 所以 $f(M) = N$.

$\square$

(2)[**Compositions of submersions/immersions/constant rank maps**] We assume all maps are smooth.

(a) Is it true that the composition of two submersions is still submersion? What about the composition of immersions? What about constant rank maps?

(b)

(3)[**The fundamental theorem of algebra**] Let $p_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$

3 21FPSet3Part1

(2)[**Morse functions**] Let $U \subset \mathbb{R}^n$ be an open set, and $f \in C^\infty(U)$. We say a critical point $p \in U$ of f is non-degenerate if the Hessian matrix

$$\mathrm{Hess}_f(p) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\right)(p)$$

is non-degenerate. A function is called a Morse function if every critical point is non-degenerate. Prove: Given any $f \in C^\infty(U)$, for almost every $a \in \mathbb{R}^n$, the "linear perturbation" of f,

$$f_a \colon U \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) + a_1 x^1 + \cdots + a_n x^n$$

is a Morse function on U.

4 21FPSet4Part2

(2)[**The commutator of two vector fields**]

Given two smooth vector fields $X, Y \in \Gamma^\infty(TM)$, we consider the commutator

$$[X, Y] := XY - YX.$$

Note that neither XY nor YX are vector fields. In this problem, you are supposed to use three different methods to prove that the commutator $[X, Y]$ is a smooth vector field on M.

(a) Show that in a local chart (φ, U, V), if $X = X^i \partial_i$ and $Y = Y^j \partial_j$ then we have $[X, Y] = (X^i \partial_i Y^j - Y^i \partial_i X^j)\partial_j$, which is a vector field.

(b) Check that $X_p \circ Y - Y_p \circ X$ is a tangent vector at p which depends smoothly on p.

(c) Show that $[X, Y]$ is a derivation on $X^\infty(M)$.

(4)[**Examples of smooth vector fields**]

Construct smooth vector fiedls satisfying the given constraints:

(a) A smooth vector field X on $\mathbb{S}^{2n+1}$ such that $X_p \neq 0$ for all p.

(b) A smooth vector field X on $\mathbb{T}^n$ such that $X_p \neq 0$ for all p.

(c) A smooth vector field X on $\mathbb{S}^2$ such that $X_p = 0$ for exactly two points.

(d) A smooth vector field X on $\mathbb{S}^2$ such that $X_p = 0$ for exactly one point.

(e) Three smooth vector fields on $\mathbb{S}^3$ that are everywhere linearly independent.

(6)[**The Hessian**]

(a) Given any $X_p \in T_pM$. Prove: there exists $X \in \Gamma^\infty(TM)$ so that $X(p) = X_p$.

(b) Let $f \in C^\infty(M)$, and suppose p is a critical point of f. Define

$$\mathrm{Hess}_f : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}, \quad (X_p, Y_p) \mapsto Y_p(Xf),$$

where $X \in \Gamma^\infty(TM)$ is any vector field so that $X(p) = X_p$. Prove: Hess_f is well-defined, bilinear and symmetric.

(c) For $M = \mathbb{R}^n$, what is Hess_f?

(d) A critical point p is called non-degenerate if Hess_f is non-degenerate at p. f is called a Morse function if every critical point is non-degenerate. Prove: On any smooth manifold, one can find Morse functions.

证明.

(a) 局部上总是能造出来, 然后用截断函数延拓出去.

(b)
- 良定性. 只需证若 $X(p)=0$, 则 $Y_p(Xf)=0$.

$$Y_p(Xf) = (Y_pX^i)\frac{\partial f}{\partial x^i}\bigg|_p + X_p^i\left(Y_p\frac{\partial f}{\partial x^i}\right) = 0.$$

- 双线性. 显然.
- 对称性.

$$Y_p(Xf) - X_p(Yf) = [Y,X]_pf = 0.$$

(c) $\mathrm{Hess}_f(X_p,Y_p) = X^iY^j\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}$.

(d)

$\square$

5 21FPSet5Part1

(1)[Plenty of diffeomorphisms]

Let M be a connected smooth manifold of dimension $m \geqslant 2$, and let $\{p_1, \cdots, p_n\}$ and $\{q_1, \cdots, q_n\}$ be two sets of points in M.

(a) Prove: there exists a diffeomorphism Φ such that $\Phi(p_i) = q_i$ holds for all i.

(b) Let $X_i \in T_{p_i}M$ and $Y_i \in T_{q_i}N$ be nonzero vectors. Prove: the diffeomorphism Φ above can be chosen so that $\mathrm{d}\phi_{p_i}(X_i) = Y_i$ holds for all i.

证明.

(1) 设 X 为连通的拓扑空间,$\sim$ 为 X 上的等价关系. 若任意 $x \in X$, 存在邻域 U 使得任意 $p, q \in U$ 有 $p \sim q$, 那么任意 $p, q \in X$ 有 $p \sim q$.

(2)

(3) 取

$$\sim = \left\{ p \sim q \mid \exists \text{微分同胚} \varphi \text{ s.t. } \varphi(p) = q \right\}.$$

由 (1), 要证对任意 $p, q \in M$ 有 $p \sim q$, 只需要证对任意 $p \in M$, 存在邻域 U, 对任意的 $q \in U$ 有 $\varphi \in Diff(M)$ 使得 $\varphi(p) = q$. 取 U 是 p 附近的坐标邻域使得 U 微分同胚于 $\mathbb{B}^m$. 下面将 U 等同于 $\mathbb{B}^m$. 取过 p, q 的线段, 它显然是一个闭集, 在其上定义向量场 $\sum (p_i - q_i) \dfrac{\partial}{\partial x^i}$

(4)

(5)

(6)

(7)

□

(3)[φ-related vector fields]

(a) Let $\varphi\colon M \to N$ be a smooth map. We say two vector fields $X \in \Gamma^\infty(TM)$ and $Y \in \Gamma^\infty(TN)$ are φ-related, if for any $p \in M$,

$$\mathrm{d}\varphi_p(X_p) = Y_{\varphi(p)}.$$

Prove:

(i) If X and Y are φ-related, then $X(\varphi^* g) = \varphi^*(Yg)$ holds for any $g \in C^\infty(N)$.

(ii) If X_i are φ-related to Y_i for $i = 1, 2$, then $[X_1, X_2]$ is φ-related to $[Y_1, Y_2]$.

(iii) If X and Y are φ-related, $\gamma\colon I \to M$ is an integral curve of X, then $\varphi \circ \gamma\colon I \to N$ is an integral curve of Y.

(b) Now let $\varphi\colon M \to N$ be a diffeomorphism, one can define a "push-forward" operator $\varphi_*\colon \Gamma^\infty(TM) \to \Gamma^\infty(TN)$ by

$$(\varphi_* X)_{\varphi(p)} = \mathrm{d}\varphi_p(X_p).$$

Prove:

(d) $(\varphi_* X)g = (\varphi^{-1})^* X \varphi^* g$ for any $g \in C^\infty(N)$.

(e) If $X, Y \in \Gamma^\infty(TM)$, then $\varphi_*([X,Y]) = [\varphi_* X, \varphi_* Y]$.

(6)[Commuting vector fields]

(a) Let (φ, U, V) be a chart on M. Prove: $[\partial_i, \partial_j] = 0$ for all $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

(b) Let $X_1, \cdots, X_k$ be a smooth vector fields on M that arelinearly independent on a region W of M, so that $[X_i, X_j] = 0$ for all $1 \leqslant i, j \leqslant k$. Prove: For any point $p \in W$, one can find a local chart (φ, U, V) near p so that $X_i = \partial_i$ on U for all $1 \leqslant i \leqslant k$.

6 21FPset7Part1

(2)[**The canonical symplectic form on** $\mathbb{R}^{2n}$]

Denote by $(x^1,\cdots,x^n,y^1,\cdots,y^n)$ the coordinate functions on $\mathbb{R}^{2n}$. Let $\omega=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}y^i$.

(a) What is $\mathrm{d}\omega$?

(b) What is $\omega^n=\omega\wedge\cdots\wedge\omega$?

(c) Find $\iota^*\omega$ for the following three cases:

(i) $\iota\colon\mathbb{R}^{2n-2}\hookrightarrow\mathbb{R}^{2n}$ be the embedded submanifold of $\mathbb{R}^{2n}$ defined by $x^n=y^n=0$.

(ii) $\iota\colon\mathbb{R}^{n}\hookrightarrow\mathbb{R}^{2n}$ be the submanifold of $\mathbb{R}^{2n}$ defined by $y^1=\cdots=y^n=0$.

(iii) $\iota\colon\mathbb{T}^{n}\hookrightarrow\mathbb{R}^{2n}$ be the submanifold of $\mathbb{R}^{2n}$ defined by $(x^i)^2+(y^i)^2=1, 1\leqslant i\leqslant n$.

(d) For any $f\in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, find a vector field X_f so that $\iota_{X_f}\omega=\mathrm{d}f$.

(e) Let X_f be as above. Prove: $\mathcal{L}_{X_f}f=0$ and $\mathcal{L}_{X_f}\omega=0$.

证明.

(a) $\mathrm{d}\omega=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{d}\left(\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}y^i\right)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{d}^2x^i\wedge\mathrm{d}y^i-\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}^2y^i=0$

(b) $\omega^n=\sum_{\sigma}\mathrm{d}x^{\sigma(1)}\wedge\mathrm{d}y^{\sigma(1)}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{\sigma(n)}\wedge\mathrm{d}y^{\sigma(n)}=n!\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}y^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n\wedge\mathrm{d}y^n$.

(c) (i) $\iota^*\omega=\sum_{i=1}^{n-1}\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}y^i$.

(ii) $\iota^*\omega=0$.

(iii) $\iota^*\left(x^i\mathrm{d}x^i+y^i\mathrm{d}y^i\right)=0, 1\leqslant i\leqslant n$. 所以 $\mathrm{d}x^i$ 与 $\mathrm{d}y^i$ 处处线性相关, 所以 $\iota^*\omega=0$.

(d)

(e)

□

(3)[**Cartan's lemma**]

Let $\omega_1,\cdots,\omega_k$ be 1-forms on $U\subset M$ that are linearly independent point-wise. Let $\eta_1,\cdots,\eta_k$ be 1-forms on U so that $\sum_i\omega_i\wedge\eta_i=0$. Prove: there exists smooth functions A_{ij} on U, satisfying $A_{ij}=A_{ji}$, so that $\eta_i=\sum A_{ij}\omega_j$.

证明. □

(5)[Orientable manifolds]

(a) Prove: For any smooth manifold M, the tangent bundle TM is orientable.

(b) Prove: Any Lie group G is orientable.

(c) Suppose M is orientable, $f\colon M \to N$ is smooth, and $q \in N$ is a regular value of f. Prove: $f^{-1}(q)$ is orientable.

(d) Let $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ be the map $f(x) = -x$. Is f orientation-preserving?

(e) Let $f\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ be the antipodal map $f(x) = -x$. Is f orientation-preserving?

(f) Prove: For any k, $\mathbb{RP}^{2k}$ is not orientable.

证明.

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

(f)

□

7 18FPSet5Part1

(5)

(a)

(b) Let G be a Lie group. Prove: G is abelian if and only if $\mathfrak{g}$ is abelian.

(c)

证明.

(a)

(b)
- $\Longrightarrow$
  - 当 G 是李群时, 断言 $i_*X = -X$.
    令 $m : G \times G \to G$ 是群乘法, 那么容易验证
    $$\begin{aligned} \mathrm{d}m_{(e,e)} : T_{(e,e)}(G \times G) \cong T_eG \oplus T_eG &\longrightarrow T_eG \\ (X, Y) &\longmapsto X + Y \end{aligned}$$
    考虑复合映射
    $$\begin{aligned} \varphi : G \longrightarrow \ & G \times G \longrightarrow G \\ g \longmapsto & (g, g^{-1}) \longmapsto e. \end{aligned}$$
    在 e 处计算 φ 的微分, 由链式法则有
    $$0 = dm_{(e,e)}(id_*X, i_*X) = X + i_*X,$$
    从而 $i_*X = -X$.
  - 当 G 是 Abel 群时, 容易验证取逆映射是群同态, 可参见近世代数第十周作业 Ex2.4.
  - 由条件 G 是 Abel 李群, 此时取逆映射 i 是光滑的群同态, 即李群同态, 从而 i_* 是李代数同态, 那么
    $$[X, Y] = [-X, -Y] = [i_*X, i_*Y] = i_*([X, Y]) = -[X, Y],$$
    当域特征不为 2 时, 便有 $[X, Y] = 0$.

(c)

$\square$

参考文献

[1] 高等线性代数学黎景辉白正简周国晖