泛函分析

孙天阳

中国科学技术大学数学科学学院

tysun@mail.ustc.edu.cn

2025 年 8 月 19 日

目录

Chapter 1 赋范线性空间

1 赋范线性空间

2 有界线性算子

3 Banach 空间

4 压缩映射原理

压缩映射原理实际上是一个纯粹的度量空间下的定理, 不涉及线性结构.

定义 4.1. *设 (X,ρ) 是度量空间, 称 $T: X \to X$ 是压缩映射, 如果存在 $\alpha \in (0,1)$ 使得*

$$\rho(Tx,Ty) \leqslant \alpha\rho(x,y), \quad \forall\ x,y \in X.$$

只不过压缩映射原理的条件要求完备度量空间, 而 Banach 空间是完备度量空间最重要的例子, 所以你常常会在泛函分析的课本中看到它. 该定理也被称为 Banach 不动点定理.

定理 4.2. *设 (X,ρ) 是完备度量空间, T 是其上的压缩映射, 则 T 存在唯一的不动点.*

接下来这个例子我们希望向读者展示泛函分析的威力, 展示视角转换的威力, 通过将函数视作空间中的一个点, 我们将问题转换成映射的不动点问题, 并使用压缩映射原理进行解决.

定理 4.3 (Picard-Lindelöf 定理)**.** *考虑如下的微分方程的初值问题*

$$y'(t) = f(t,y(t)), \quad y(t_0) = y_0.$$

假设函数 $f(t,y)$ 在矩形区域 $R = \{(t,y) \mid |t-t_0| \le a, |y-y_0| \le b\}$ 上是连续的, 且 f 关于 y 在该区域上满足 Lipschitz 条件, 即存在一个常数 $L>0$, 使得对于任意 $(t,y_1) \in R$ 和 $(t,y_2) \in R$, 都有

$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \le L|y_1 - y_2|.$$

那么, 在某个包含 t_0 的更小的区间 $I = [t_0-\delta, t_0+\delta]$ 上, 该初值问题的解是唯一的.

证明. **第一步：转化为不动点问题.**
对微分方程两边从 t_0 到 t 积分, 可得到一个等价的积分方程

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,y(s))\,ds$$

一个连续函数 $y(t)$ 是原初值问题的解当且仅当它满足这个积分方程. 这启发我们定义一个积分算子 T, 使得寻找解的过程等价于寻找该算子的不动点, 即 $T(y) = y$.
第二步：定义空间和算子.
由于函数 f 在矩形区域 R 上连续, 它必然是有界的. 令 $M = \sup\limits_{(t,y)\in R} |f(t,y)|$. 我们选择一个时间区间 $I = [t_0-\delta, t_0+\delta]$, 其中 δ 是一个待定的正数. 考虑由该区间上所有连续函数构成的空间 $C(I)$, 其范数为最大模范数 $\|\phi\|_\infty = \sup\limits_{t\in I} |\phi(t)|$. 我们知道 $(C(I), \|\cdot\|_\infty)$ 是一个 Banach 空间.

我们在这个空间中定义一个闭子集（因此它自身也是一个完备度量空间）：

$$X = \{\phi \in C(I) \mid \|\phi - y_0\|_\infty \le b\}$$

其中 y_0 被看作是一个常数函数. 现在, 我们在这个空间 X 上定义 **Picard 算子** T:

$$(T\phi)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\phi(s))\,ds$$

第三步：验证 T 是 X 上的自映射.
我们需要证明, 如果 $\phi \in X$, 那么 $T\phi$ 也一定在 X 中. 首先,$T\phi$ 显然是连续的. 其次, 我们需要验证 $\|T\phi - y_0\|_\infty \le b$.

$$|(T\phi)(t) - y_0| = \left|\int_{t_0}^{t} f(s,\phi(s))\,ds\right| \le \int_{t_0}^{t} |f(s,\phi(s))|\,ds \le M|t-t_0| \le M\delta$$

为了保证 $M\delta \le b$, 我们选取 $\delta \le \dfrac{b}{M}$. 同时为了保证 $t \in [t_0 - a, t_0 + a]$, 我们要求 $\delta \le a$. 因此, 我们取 $\delta = \min\{a, \dfrac{b}{M}\}$, 这样就保证了只要 $\phi \in X$, 就有 $T\phi \in X$.

第四步：验证 T 是压缩映射.

取任意两个函数 $\phi_1, \phi_2 \in X$, 我们来计算它们像之间的距离：

$$\begin{aligned}
\|T\phi_1 - T\phi_2\|_\infty &= \sup_{t\in I} |(T\phi_1)(t) - (T\phi_2)(t)| \\
&= \sup_{t\in I} \left| \int_{t_0}^{t} [f(s,\phi_1(s)) - f(s,\phi_2(s))]\, ds \right| \\
&\le \sup_{t\in I} \int_{t_0}^{t} |f(s,\phi_1(s)) - f(s,\phi_2(s))|\, ds \\
&\le \sup_{t\in I} \int_{t_0}^{t} L|\phi_1(s) - \phi_2(s)|\, ds \quad (\text{利用 Lipschitz 条件}) \\
&\le \sup_{t\in I} \int_{t_0}^{t} L\|\phi_1 - \phi_2\|_\infty\, ds \quad (\text{利用最大模范数的定义}) \\
&= L\|\phi_1 - \phi_2\|_\infty \sup_{t\in I} |t - t_0| \\
&= (L\delta) \cdot \|\phi_1 - \phi_2\|_\infty
\end{aligned}$$

为了使 T 成为一个压缩映射, 我们需要压缩常数 $\alpha = L\delta < 1$, 即 $\delta < 1/L$. 我们可以通过取一个更小的 δ 来满足这个条件, 例如, 最终选取 $\delta = \min\{a, \dfrac{b}{M}, \dfrac{1}{2L}\}$.

第五步：应用 Banach 不动点定理.

根据以上步骤, 在区间 $I = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ 上, 我们已经证明了 X 是一个完备度量空间, 并且算子 $T : X \to X$ 是一个压缩映射. 根据 Banach 不动点定理, 算子 T 在 X 中存在唯一的不动点 $y^*(t)$. 这个不动点就是积分方程的唯一解, 从而也是原微分方程初值问题的唯一解. □

例 4.4. 考虑积分方程

$$x(t) - \lambda \int_0^1 \mathrm{e}^{t-s} x(s)\mathrm{d}s = y(t),$$

其中 $y(t) \in C[0,1]$ 为一给定函数,λ 为常数,$|\lambda| < 1$. 求证存在唯一解 $x(t) \in C[0,1]$.

5 有限维空间的刻画

定理 5.1. 设 X 是赋范线性空间,X_0 是 X 的一个真闭子空间, 那么对任意 $0 < \varepsilon < 1$, 存在 $y \in X$, 使得 $\|y\| = 1$, 并且

$$\|y - x\| \geqslant 1 - \varepsilon, \quad \forall\, x \in X_0.$$

运用 F.Riesz 引理的要素察觉：

- A 是紧算子
- 由条件（一般是反证时假设的条件）构造出一串严格单增或严格单减的闭子空间
- 每个闭子空间都是 A 的不变子空间
- 特别地, 当 A 作用上去, 得到的是元素本身（常数倍也可以, 但需要系数的模长是下有界的）与相邻的维数较小的闭子空间中的某个元素之和.
- 由 F.Riesz 引理, 可以在第 n 个空间中选出一个单位向量 x_n, 使得它与相邻的维数较小的闭子空间的距离大于 α, 其中 α 是任意介于 0 和 1 之间的常数.
- 考虑 $\{Ax_n\}$, 如果上上条是常数倍 λ_n, 那么需要考虑的是 $\{Ax_n'\}$, 其中 $x_n' = \dfrac{x_n}{\lambda_n}$. 系数模长下有界的要求正是为了保证 x_n' 是有界的.
- 因为 A 是紧算子, 所以 $\{Ax_n\}$ 有收敛子列.
- 但另一方面, 由我们的构造任意 Ax_n 与 Ax_{n+p} 的距离都大于 α, 矛盾.

6 最佳逼近问题

定理 6.1. 设 X 是赋范线性空间,$M \subset X$ 是闭子空间, 则下列命题等价:

(1) 存在有界线性算子 $P : X \to M$ 使得 $P\big|_M = Id_M$.

(2) 存在 $L \subset X$ 是闭子空间使得 $X = M \oplus L$.

(3) 对任意 x

设 X 是赋范线性空间,X_0 是 X 的子空间. 任给 $y \in X$, 量

$$d := \inf_{x \in X_0} \|y - x\|$$

总是有意义的. 并且, 我们总能找到一列点 $\{x_n\} \subset X_0$, 使得 $\{\|y - x_n\|\}$ 趋近于 d.

我们还知道,$\{x_n\}$ 是有界集. 假如存在某种列紧性, 我们就能取出一个收敛子列, 可猜测序列极限便是 y 在 X_0 中的最佳逼近元.

问题：给定赋范线性空间 X, 并给定 X 中的有限多个向量 $e_1, \cdots, e_n$. 对于给定的向量 $x \in X$, 求一组数 $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, 使得

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \right\| = \min \left\| x - \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \right\|.$$

引理 6.2. 设 X 是一个赋范线性空间,X_0 是 X 的真闭子空间, 那么对 $\forall\ \varepsilon \in (0,1)$, 存在 $\|y\| = 1$, 并且

$$\|y - x\| \geqslant 1 - \varepsilon.$$

7 商空间的构造

定义 7.1. 设 X 是赋范线性空间,Y 是它的闭子空间. 定义函数 $\|\cdot\|_0 : X/Y \to \mathbb{R}$ 为

$$\|[x]\| = d(x,Y) = \inf_{y\in Y}\|x-y\| = \inf_{z\in[x]}\|z\|,$$

其中 $d(x,Y)$ 是 x 到 Y 的距离. 那么

(a) $\|\cdot\|$ 是商空间 X/Y 上的范数.

()

定理 7.2. 设 $T : X \to Y$ 是有界线性算子. 定义

$$\tilde{T} : \tilde{X} = X/N(T) \to Y, [x] \mapsto T(x).$$

则 $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.

证明. $\|\tilde{T}\| = \sup\limits_{\|[x]\|\leqslant 1}\|\tilde{T}([x])\| = \sup\limits_{\|[x]\|\leqslant 1}\|Tx\|$.

$\|Tx\| = \|Tz\| \leqslant \|T\|\|z\|, \forall z \in [x] \Longrightarrow \|Tx\| \leqslant \|T\| \inf\limits_{z\in[x]}\|z\| = \|T\|\|[x]\|$.

$\|\tilde{T}\| = \|T\|$. □

Chapter 2 线性算子的定理

设 X, Y 是线性空间, 我们关心的线性映射 T 与线性代数中不同的是, 它的定义域 $D(T)$ 可能只是 X 的一个子空间. 那为什么不干脆把 $D(T)$ 取成 X 呢？这是因为在泛函分析中我们不止关心线性结构, 还关心度量结构. 很多时候 X 是 Banach 空间, 但 $D(T)$ 不是 Banach 空间.

那问题又来了, X 是 Banach 空间又有什么用呢? 我们心中记住 $D(T)$ 是 X 的子空间又有什么帮助呢? 1. 原始的问题本身就是在 X 的范数结构下提出的, $D(T)$ 的范数结构也继承自 X; 2.$D(T)$ 不一定完备但 X 完备, 所以我们可以表述 $D(T)$ 中的柯西列 $\{x_n\}$ 收敛到了 X 中的点 x; 3. 从物理的角度看, X 代表了一个物理系统所有可能的状态, 无论其性质好坏, 而 $D(T)$ 仅代表了那些行为良好的、可以应用物理定律 T 的状态. 综上所述, 我们仍有必要在心中保留 X 的存在.

我们将总是假设 $D(T)$ 是 X 的稠密子空间. 这并不是通过取 $X = \overline{D(T)}$ 实现的, Gemini 回答说"对于任何一个被认为是完备且有意义的物理或数学模型, 其中描述基本相互作用的算子, 其定义域都必须是稠密的. 如果不是, 那说明这个模型本身就是有缺陷或不完备的." 所以一共有两种可能性, 要么 $D(T)$ 是闭的, 此时 $X = D(T)$, 要么 $D(T)$ 是不闭的.

算子需要与极限过程相容, 最直接也最强的相容性是有界性或者叫连续性, 但很遗憾的是有些重要的算子如微分算子并不是有界算子, 为此我们引入了一个更弱的相容性叫做闭性. 我们将总是假设研究的算子是闭算子. 闭图像定理告诉我们如果 $D(T) = X$ 那么 T 是有界算子. 如果 T 是有界算子, 那么我们可以说明 $D(T)$ 可以延拓到 $\overline{D(T)}$, 在我们稠定的假设下, 也就是有界算子的定义域永远是全空间, 有界算子永远是闭算子, 一个定义域不是全空间的闭算子一定是无界算子.

1 Baire 纲定理

定义 1.1. *设 X 是拓扑空间, 称 $A \subset X$ 是无处稠密集, 如果 $\overline{A}$ 无内点.*

- 另一个常用的概念是无内点闭集.
- 无处稠密集总是含在一个无内点闭集中, 即它的闭包.
- 无内点闭集是无处稠密集, 无处稠密集是无内点集.
- Baire 空间的一条等价刻画是：可列个无内点闭集/无处稠密集的并是无内点集.
- 有例子说明, 不能再将结果进一步强化为无处稠密集.

定义 1.2. *称拓扑空间 X 为 Baire 空间如果它满足下列等价叙述中的一条：*

(1) *X 的非空开子集是第二纲集；*

(2) *X 的剩余集稠密*

(3) *可数个无内点闭集的并无内点*

(4) *可数个稠密开集的交稠密*

(5)

(6)

直觉上,Baire 空间具有以下性质

(1)“大”集合的可数交还是“大”集合

(2)“小”集合的可数并还是“小”集合

(3)“大”集合不能够被写为“小”集合的可数并

(4) 全空间是“大”集合.

小集合有时指无内点闭集, 有时指无处稠密集, 我想这并没有很大的区别.

我们称无处稠密集的可数并为第一纲集.

定理 1.3 (Baire)**.** *完备度量空间是 Baire 空间.*

证明. 我们证明可数个稠密开集的交是稠密的.

设 $\{U_n\}$ 是一族稠密开集,$U = \cap U_n$.

任给 $x \in X$ 和 $\varepsilon > 0$, 我们要找 $y \in U$ 使得 $y \in B(x,\varepsilon) \cap U$.

因为 U_1 是稠密的, 所以存在 $y_1 \in U_1$ 使得 $y_1 \in B(x,\varepsilon) \cap U_1$.

因为 $B(x,\varepsilon) \cap U_1$ 是开集, 所以存在 $0 < \varepsilon_1 < \dfrac{1}{2}$ 使得 $\overline{B(y_1,\varepsilon_1)} \subset B(x,\varepsilon) \cap U_1$.

因为 U_2 是稠密的, 所以存在 $y_2 \in U_2$ 使得 $y_2 \in B(y_1,\varepsilon_1) \cap U_2$.

因为 $B(y_1,\varepsilon_1) \cap U_2$ 是开集, 所以存在 $0 < \varepsilon_2 < \dfrac{1}{2^2}$ 使得 $\overline{B(y_2,\varepsilon_2)} \subset B(y_1,\varepsilon_1) \cap U_2$.

如此做下去, 可取出一列 $\{y_n\}$ 和 $\{\varepsilon_n\}$ 满足

$$B(x,\varepsilon) \supset \overline{B(y_1,\varepsilon_1)} \supset \overline{B(y_2,\varepsilon_2)} \supset \cdots, \quad \overline{B(y_n,\varepsilon_n)} \subset U_n.$$

由完备度量空间的闭集套定理, 存在 $y \in \cap\overline{B(y_n,x_n)} \subset B(x,\varepsilon) \cap U$. □

例 1.4. $\mathbb{R}$ 不可数.

证明. 赋予 $\mathbb{R}$ 标准度量, 则 $\mathbb{R}$ 是完备度量空间.

假如 $\mathbb{R}$ 可数, 则 $\mathbb{R}$ 能被表示为可数个单点集的并, 这与 Baire 定理矛盾. $\square$

2 开映射定理

定理 2.1 (开映射定理)**.** 设 X, Y 是 Banach 空间, 若 $T \in L(X, Y)$ 是满射, 那么 T 是开映射.

证明.

(1) 要证明对任意开集 $W \subset X$ 有 $T(W) \subset Y$ 是开集, 即对任意 $y_0 \subset T(W)$ 存在 δ 使得 $U(y_0, \delta) \subset T(W)$. 因为 $y_0 \in T(W)$, 所以存在 $x_0 \in W$ 使得 $Tx_0 = y_0$. 因为 W 是开集所以存在 $B(x_0, r) \subset W$. 下面我们证明存在 δ 使得 $U(Tx_0, \delta) \subset T(B(x_0, r)) \subset T(W)$. 这段话其实没说什么, 只是把按定义对一个一般开集 W 的讨论约化到对开球 $B(x_0, r)$ 的讨论. 因为集合的包含关系在平移下不变, 所以等价于证明存在 δ 使得 $U(0, \delta) \subset T(B(0, r))$, 即证明 0 是 $T(B(0, r))$ 的内点.

(2) 因为 T 是满射, 所以 $Y = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} T(B(0, n))$. 因为 Y 是第二纲集, 不可能是可列个无处稠密集的并, 因此存在 N 使得 $\overline{T(B(0, N))}$ 有内点, 即存在 y_0 和 r 使得 $U(y_0, \delta) \subset \overline{T(B_X(0, N))}$.

(3) 注意到 $\overline{T(B(0, N))}$ 是一个对称凸集, 因此 $B_Y(-y_0, r) \subset \overline{T(B(0, N))}$, 从而

$$U(0, r) \subset \frac{1}{2} U(y_0, r) + \frac{1}{2} U(-y_0, r) \subset \overline{T(B(0, N))}.$$

(4) 由仿射性不妨可设 $U(0, r) \subset \overline{T(B(0, 1))}$, 我们想把闭包去掉. 现在的条件是说, 对任意 $y \in U(0, r)$, 我们能以任意精度找到 x 使得 Tx 逼近 y.

一个直接的思路是, 取 x_n 满足 $\|Tx_n - y\| \leqslant 1/n$, 但问题在于无法说明 x_n 是收敛的.

为此, 我们使用一个构造性的迭代方法, 将最终的解 x 视为由无穷个修正量叠加而成, 具体如下. 首先取 $x_1 \in B(0, 1)$ 使得 $\|y - Tx_1\| < r/2$, 令 $y_1 = y - Tx_1$, 那么 $y_1 \in U(0, r/2)$, 所以可以找到 $x_2 \in B(0, 1/2)$ 使得 $\|y_1 - Tx_2\| < r/4$. 这样一来, 我们找到 $x_n \in B(0, 1/2^{n-1})$, 使得 $\|y - \sum\limits_{i=1}^{n} T(x_i)\| < r/2^n$, 由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < 2$ 可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{k} x_n$ 收敛到某 $x \in X$, 且 $\sum\limits_{n=1}^{k} Tx_n$ 收敛到 y. 由于 T 是有界算子, 所以 $Tx = T(\lim \sum\limits_{n=1}^{k} x_n) = \lim \sum\limits_{n=1}^{k} T(x_n) = y$.

□

从第 3 步到第 4 步有一个陷阱, 我会觉得能直接找到一个更大的半径 M 使得 $\overline{T(B(0, N))} \subset T(B(0, M))$, 但这件事在 T 不是满射的时候是不对的, 我们举一个反例来说明可能 $\overline{T(B(0, N))} \not\subset T(X)$. 所以即使在 T 是满射的时候, 这件事也不是平凡的, 而且其证明用开映射定理最方便.

例 2.2. 令 $X = C^1[0, 1]$ 为在闭区间 $[0, 1]$ 上所有连续可微的函数构成的空间. 为其赋予范数

$$\|f\|_X = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty = \max_{t \in [0,1]} |f(t)| + \max_{t \in [0,1]} |f'(t)|$$

在这个范数下 X 是一个 Banach 空间. 令 $Y = C[0, 1]$ 为在闭区间 $[0, 1]$ 上所有连续函数构成的空间. 为其赋予通常的无穷范数

$$\|g\|_Y = \|g\|_\infty = \max_{t \in [0,1]} |g(t)|$$

在这个范数下 Y 也是一个 Banach 空间. 定义线性映射 $T : X \to Y$ 为自然的包含映射

$$\|T(f)\|_Y = \|f\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty = \|f\|_X$$

因此 $\|T\| \leqslant 1$, 算子是有界的. T 的像集 $T(X)$ 就是 $C^1[0,1]$ 本身, 但被看作是 $C[0,1]$ 的一个子空间. 根据经典的分析学结论, $C^1[0,1]$ 在 $C[0,1]$ 中不是闭的. 我们可以找到一个连续可微函数的序列, 它们在无穷范数下收敛到一个连续但不可微的函数.

考虑函数 $g(t) = |t - \frac{1}{2}|$. 显然 $g \in C[0,1]$, 但由于在 $t = \frac{1}{2}$ 处不可导, 所以 $g \notin C^1[0,1]$. 因此,$g \notin T(X)$. 我们的目标是构造一个函数序列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, 使得:

- $T(f_n) \to g$ 在 Y 中（即 f_n 在无穷范数下一致收敛到 g）.
- 序列 $\{f_n\}$ 在 X 中是有界的, 即存在一个半径 r, 使得所有 f_n 都在球 $B(0,r)$ 中.

让我们构造这样的序列. 考虑:

$$f_n(t) = \sqrt{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{n^2}}$$

这个构造是通过平滑处理绝对值函数来实现的. 对于任意 $n \geq 1$,$f_n(t)$ 在 $[0,1]$ 上都是无穷次可微的, 所以它肯定是连续可微的, 即 $f_n \in C^1[0,1] = X$.

$$\|T(f_n) - g\|_Y = \max_{t\in[0,1]} \left| \sqrt{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{n^2}} - \left|t - \frac{1}{2}\right| \right|$$

当 $x \geqslant 0$ 时,$\sqrt{x^2+\epsilon^2} - x = \dfrac{\epsilon^2}{\sqrt{x^2+\epsilon^2}+x} \leq \dfrac{\epsilon^2}{\epsilon} = \epsilon$. 令 $x = |t - \frac{1}{2}|$ 和 $\epsilon = \frac{1}{n}$, 我们得到：

$$\|f_n - g\|_\infty \leq \frac{1}{n}$$

因此, 当 $n \to \infty$ 时,$\|f_n - g\|_\infty \to 0$. 这意味着 $T(f_n)$ 在 Y 空间中收敛到 g.

接下来我们需要计算 $\|f_n\|_X = \|f_n\|_\infty + \|f_n'\|_\infty$ 并证明它有界. $\|f_n\|_\infty = f_n(0) = f_n(1) = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{n^2}}$. 这个序列显然是有界的, 例如总小于 $\sqrt{1/4+1} < 2$. $f_n'(t) = \dfrac{t - \frac{1}{2}}{\sqrt{(t-\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{n^2}}}$. 对于所有的 $t \in [0,1]$ 和 $n \geq 1$, 我们有 $|t - \frac{1}{2}| < \sqrt{(t-\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{n^2}}$. 因此,

$$\|f_n'\|_\infty = \max_{t\in[0,1]} |f_n'(t)| < 1$$

综上,$\|f_n\|_X = \|f_n\|_\infty + \|f_n'\|_\infty < \sqrt{\frac{1}{4}+1} + 1 < 3$. 这证明了原命题是错误的.

开映射定理的条件可以削弱至 T 是闭算子, 只需将证明的最后一句修改为由于 T 是闭算子所以 $x \in D(T)$ 且 $Tx = y$, 但结论也要相应修改成 T 是从 $D(T)$ 搭配子空间拓扑到 Y 的开映射.

开映射定理的条件也可以削弱至像集是第二纲集, 证明可以原封不动, 并且此时实际上证明了像集就是 Y. 所以我们得到了一个结论, 有界线性算子的像要么是全空间, 要么是第一纲集.

推论 2.3. 令 X, Y 为 Banach 空间, $T \in L(X,Y)$. 若 T 是一个双射, 则 $T^{-1} \in L(Y,X)$.

如果你见过不少范畴, 你应该知道这种命题是很少见的, 它说明 Banach 空间的代数结构与分析结构是强绑定的. 然后说一下怎么理解这个命题, 考虑方程 $Tx = y$, 解的存在性是说 T 是不是满射, 解的唯一性是说 T 是不是单射, 这个命题告诉我们只要有解的存在唯一性, 就有解的稳定性.

3 闭图像定理

我们在本章的开头解释了为什么我们只考虑闭稠定线性算子, 下一个命题说明如果它是有界的, 那定义域可以延拓到全空间.

命题 3.1. 设 X 是一个赋范线性空间, Y 是一个 Banach 空间, $T\colon D(T) \to Y$ 是有界线性算子. 那么, 存在一个唯一的有界线性算子 $\bar{T}\colon \overline{D(T)} \to Y$ 满足 $\bar{T}\big|_{D(T)} = T$ 且 $\|\bar{T}\| = \|T\|$.

证明.

(1) 取任意一个点 $x \in \overline{D(T)}$. 根据闭包的定义, 存在一个序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(T)$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. 我们来证明像序列 $\{T(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个在 Y 空间中的柯西序列

$$\|T(x_n) - T(x_m)\|_Y = \|T(x_n - x_m)\|_Y \leqslant \|T\| \cdot \|x_n - x_m\|_X.$$

因为 Y 是完备的, 所以存在唯一的 $y \in Y$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} T(x_n) = y$. 定义 $\bar{T}(x) := \lim\limits_{n\to\infty} T(x_n) = y$.

(2) 我们需要证明上述定义不依赖于我们选择的具体序列. 假设我们有另一个序列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(T)$, 它也收敛到同一个点 x. 我们需要证明 $\lim\limits_{n\to\infty} T(z_n)$ 等于 $\lim\limits_{n\to\infty} T(x_n)$. 考虑序列 $\{x_n - z_n\}$. 显然 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - z_n) = x - x = 0$. 由于 T 是有界线性算子, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} T(x_n - z_n) = T(0) = 0$.

(3) 若 $x \in D(T)$, 我们可以取一个常数序列 $x_n = x$. 那么 $\bar{T}(x) = \lim\limits_{n\to\infty} T(x) = T(x)$.

取 $x, z \in \overline{D(T)}$ 和标量 α, β. 设 $x_n \to x$ 和 $z_n \to z$. 那么 $(\alpha x_n + \beta z_n) \to (\alpha x + \beta z)$.

取 $x \in \overline{D(T)}$ 并设 $x_n \to x$,

$$\|\bar{T}(x)\|_Y = \|\lim T(x_n)\|_Y = \lim \|T(x_n)\|_Y \leqslant \lim(\|T\| \cdot \|x_n\|_X) = \|T\| \cdot \lim \|x_n\|_X = \|T\| \cdot \|x\|_X$$

这证明了 $\bar{T}$ 是有界的, 并且其范数 $\|\bar{T}\| \leqslant \|T\|$. 另一方面, 由于 $\bar{T}$ 是 T 的延拓,$\|\bar{T}\| \geqslant \|T\|$.

(4) 假设存在另一个有界线性算子 $S\colon \overline{D(T)} \to Y$ 也是 T 的延拓. 取任意 $x \in \overline{D(T)}$,

$$S(x) = S(\lim x_n) = \lim S(x_n) = \lim T(x_n) = \bar{T}(x)$$

□

命题 3.2. $T\colon D(T) \to Y$ 是闭算子当且仅当 $G(T) = \{(x, Tx) \mid x \in D(T)\}$ 是 $X \times Y$ 的闭子空间.

证明.

$\Longleftarrow$ 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $D(T)$ 中的一个序列, 并且它满足 $x_n \to x \in X$ 和 $T(x_n) \to y$. 根据积空间的收敛定义, 序列 $\{z_n = (x_n, T(x_n))\}$ 收敛到点 $z = (x, y)$. 因为 $G(T)$ 是闭集所以 $(x, y) \in G(T)$.

$\Longrightarrow$ 任取一个 $G(T)$ 的极限点 $z = (x, y) \in X \times Y$, 存在序列 $\{z_n = (x_n, T(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$, 使得 $z_n \to z$. 在积空间中的收敛意味着其分量也收敛, 即 $x_n \to x$,$T(x_n) \to y$. 根据闭算子的定义 $x \in D(T)$ 并且 $Tx = y$. 所以 $z = (x, y) = (x, Tx) \in G(T)$, 所以 $G(T)$ 是闭集.

□

命题 3.3. 设 X,Y 是 Banach 空间, $T\colon D(T)\to Y$ 是闭算子, 则 $D(T)$ 搭配范数

$$\|x\|_G = \|x\|_X + \|Tx\|_Y$$

是完备的, 称该范数为图范数.

定理 3.4. 设 X,Y 是 Banach 空间, 闭算子 T 的定义域 $D(T)=X$, 则 T 是有界算子.

证明. 为 X 赋予图范数 $\|x\|_G$, 因为 T 是闭算子, 所以 $(X,\|x\|_G)$ 完备, 而 $(X,\|x\|_G)$ 显然强于 $(X,\|x\|_X)$, 由等价范数定理 $(X,\|x\|_X)$ 也强于 $(X,\|x\|_G)$, 所以 T 是有界映射. □

4 一致有界定理

定理 4.1. 设 X 是一个 Banach 空间, Y 是一个赋范线性空间. 设 $\mathcal{F}$ 是一族从 X 到 Y 的有界线性算子. 如果对任意 $x \in X$, $\sup\limits_{T\in\mathcal{F}} \|Tx\| < \infty$, 那么 $\mathcal{F}$ 是一致有界的, 即 $\sup\limits_{T\in\mathcal{F}} \|T\| < \infty$.

证明.

(1) 我们无法直接处理“逐点有界”这个条件, 所以我们先把它物化成一系列具体的集合. 对于每个正整数 $n = 1, 2, 3, \ldots$, 我们定义 X 的一个子集 A_n:

$$A_n = \{x \in X \mid \forall T \in \mathcal{F}, \|Tx\|_Y \le n\}$$

即被算子族 $\mathcal{F}$ 中任何一个算子作用后, 像的范数都不会超过 n 的那些点.

(2) 证明每个 A_n 都是闭集. 假设有一个序列 $\{x_k\} \subset A_n$, 并且 $x_k \to x$. 因为 $x_k \in A_n$, 所以对所有 $T \in \mathcal{F}$, 都有 $\|T(x_k)\| \leqslant n$. 由于每个 T 都是有界的, 所以 $\|T(x_k)\| \to \|T(x)\| \leqslant n$.

(3) 根据逐点有界假设, 对于 X 中的任何一个点 x, 总存在一个足够大的整数 N_x, 使得对所有 $T \in \mathcal{F}$ 都有 $\|Tx\| \leqslant N_x$, 这意味着 $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. 由 Baire 纲定理, 存在某个 A_N 和 $x_0 \in A_N$ 和一个半径 $r > 0$, 使得整个开球 $B(x_0, r)$ 都被包含在 A_N 中, 即 $B(x_0, r) \subset A_N$

(4) 我们的目标是得到关于算子范数 $\|T\|$ 的界, 而算子范数是定义在单位球 $B(0, 1)$ 上的. 我们需要把信息从 $B(x_0, r)$ 这个球“搬运”到 $B(0, 1)$ 上. 取任意一个单位向量 $\|x\| = 1$, 可以通过缩放和平移, 利用 x_0 和 x 来构造一个落在球 $B(x_0, r)$ 里的点. 令 $z = x_0 + \varepsilon r x$ 即可, $\varepsilon \in (0, 1)$.

$$\|T(\varepsilon r x)\| = \|T(z) - T(x_0)\| \leqslant \|T(z)\| + \|T(x_0\| \leqslant 2N \Longrightarrow \|T(x)\| \leqslant 2N/\varepsilon r$$

□

一致有界定理的一个推论告诉我们一个算子序列的逐点极限何时也是一个有界算子.

推论 4.2. 设 X 是 Banach 空间, Y 是赋范线性空间. 设 $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是从 X 到 Y 的有界线性算子. 如果对任意 $x \in X$, 序列 $\{T_n(x)\}$ 在 Y 中都是收敛的, 那么 $T(x) := \lim\limits_{n\to\infty} T_n(x)$ 也是有界线性算子.

证明.

(1) 取任意两个向量 $x, z \in X$ 和任意两个标量 α, β, 我们来计算 $T(\alpha x + \beta z)$

$$T(\alpha x+\beta z) = \lim_{n\to\infty} T_n(\alpha x+\beta z) = \lim_{n\to\infty} (\alpha T_n(x)+\beta T_n(z)) = \alpha \left(\lim_{n\to\infty} T_n(x)\right)+\beta \left(\lim_{n\to\infty} T_n(z)\right) = \alpha T(x)+\beta T(z)$$

(2) 根据假设, 序列 $\{T_n(x)\}$ 在 Y 中收敛, 从而有界. 由一致有界原理, 算子序列 $\{T_n\}$ 一致有界.

$$\|T(x)\| = \left\|\lim_{n\to\infty} T_n(x)\right\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n(x)\| \leqslant M \cdot \|x\|.$$

□

Chapter 3 对偶与弱拓扑

通过研究空间上的函数或泛函, 来反过来理解空间本身的结构, 是现代数学中最深刻、最富有成效的思想之一. 比如想研究一个紧 Hausdorff 空间 X, 可以通过研究其上的复值连续函数全体 $C(X)$. 如果你见过一些其他的范畴及其上的对偶理论, 你是不难写出如下定义的

定义 0.1. *设 X 是赋范线性空间, X 上的连续线性泛函全体按算子范数*

$$\|f\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} |f(x)|$$

构成一个 Banach 空间, 称为 X 的对偶空间, 记作 X^*.

定义 0.2. *设 X, Y 是赋范线性空间, $T \in \mathscr{L}(X, Y)$. 定义 T 的对偶算子 $T^*\colon Y^* \to X^*, f \mapsto f \circ T$.*

那么引入对偶的概念有什么用呢？在这里举两个例子, 首先对偶空间让我们定义了一类性质良好的空间叫做自反空间, 即 X 与 X^{**} 典范同构的空间, Eberlein-Šmulian 定理指出, 自反空间的单位闭球是弱自列紧的. 其次, 有时直接分析 T 比较困难, 但分析 T^* 比较简单.

在讲对偶空间和对偶算子之前我们首先介绍了 Hahn-Banach 定理, 该定理有一个重要的推论告诉我们 X^* 是足够丰富的, 它能区分 X 中的点, 即如果 $x \neq y$, 那么存在 $f \in X^*$ 使得 $f(x) \neq f(y)$. 这个命题看上去很平凡, 但却是构成整个对偶理论的基石.

随后在对偶空间和对偶算子相关的小节中, 我们给出了大量的例子, 以及基本的性质.

最后我们引入弱拓扑和弱 * 拓扑, 前者是利用 X^* 在 X 上定义的拓扑, 后者是 X^* 上的拓扑. 引入这两个拓扑的动机是, 第一章的 Riesz 引理告诉我们, 在范数诱导的拓扑下, 只要空间的维数是无穷的, 那么单位闭球永远不是紧集. 这意味着在无穷维空间中一个有界的序列（例如一个试图最小化某个能量泛函的函数序列）不再保证有任何收敛的子序列, 这使得大量在有限维中行之有效的证明方法失效了. 为此我们引入开集更少从而更容易成为紧集的拓扑, 弱拓扑和弱 * 拓扑. 通过引入这两个拓扑, 我们得到 Banach-Alaoglu 定理和 Eberlein-Šmulian 定理, 前者指出对偶空间 X^* 中的闭单位球在弱 * 拓扑下总是紧的, 后者刚刚已经提到.

1 Minkowski 泛函

- 对于 $\mathbb{K}$-线性空间 X 及其包含原点的凸子集 C, 我们可以定义 Minkowski 泛函.
  - 注意即是针对 $\mathbb{C}$-线性空间, 考虑的也是实一维的直线.
  - $P(x)$ 取值于 $[0,+\infty]$
  - $P(x)$ 具有正齐次性
  - $P(x)$ 具有次可加性
- C 是吸收集 $\Longleftrightarrow P$ 取值于 $[0,+\infty)$
- C 对称或均衡 $\Longleftrightarrow P$ 具有齐次性
- 若 X 是 B^* 空间, 可以讨论 C 的闭性,0 是否为内点,C 的有界性.
  -
  - 0 为内点 $\Longrightarrow C$ 为吸收的 $\Longrightarrow P$ 取值于 $[0,+\infty)$
  - 0 为内点 $\Longrightarrow P$ 一致连续.
  - C 有界 $\Longrightarrow P$ 正定.

定义 1.1. 设 X 是线性空间,C 是 X 上含有 0 的凸子集, 在 X 上规定一个取值于 $[0,+\infty]$ 的函数

$$P(x) = \inf\left\{\lambda > 0 \middle| \frac{x}{\lambda} \in C\right\},$$

称为 C 的 *Minkowski* 泛函.

2 Hahn-Banach 定理

3 对偶空间与对偶算子

例 3.1. 设 $1 \leqslant p < \infty$, 则 $(l^p)^* = l^q$, 其中 q 是 p 的共轭指数.

证明. 对于任意一个给定的序列 $y = (y_i)_{i=1}^{\infty} \in l^q$, 我们可以定义一个泛函 $f_y : l^p \to \mathbb{C}$ 如下:

$$f_y(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i, \quad \forall\ x = (x_i)_{i=1}^{\infty} \in l^p$$

我们现在将映射 Φ 定义为 $\Phi(y) = f_y$. f_y 显然是线性的, 其良定性与有界性来自于

$$|f_y(x)| = \left|\sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |x_i y_i| \leqslant \|x\|_p \|y\|_q \Longrightarrow \|f_y\|_{(l^p)^*} \leqslant \|y\|_{l^q}$$

事实上 $\|f_y\|_{(l^p)^*} = \|y\|_{l^q}$, 为此我们需要构造一个特定的 $x \in l^p$ 使得上述不等号取等.

$1 < p < \infty$ 为了使第一个不等号取等, 需要 $x_i y_i$ 作为复数有相同的相位, 最容易实现的就是让它们都是非负实数, 为此在 x_i 的构造里安排 $\operatorname{sgn} \overline{y_i}$. 为了使第二个不等号取等, 需要存在常数 $c > 0$ 使得 $|x_i|^p = c|y_i|^q$, 利用恒等式 $(q-1)p = q$ 我们知道需要有 $|y_i|^{q-1}$ 的部分. $x_i = (\operatorname{sgn} \overline{y_i}) \cdot |y_i|^{q-1}$.

$$\|x\|_p^p = \sum |x_i|^p = \sum \left||y_i|^{q-1}\right|^p = \sum |y_i|^{(q-1)p} = \sum |y_i|^q = \|y\|_q^q < \infty \Longrightarrow x \in l^p$$

$$\|f_y\| = \sup_{z \neq 0} \frac{|f_y(z)|}{\|z\|_p} \geq \frac{|f_y(x)|}{\|x\|_p} = \frac{\|y\|_q^q}{\|y\|_q^{q/p}} = \|y\|_q^{q-q/p} = \|y\|_q^{q(1-1/p)} = \|y\|_q^{q(1/q)} = \|y\|_q$$

$p = 1$ 因为 Hölder 不等式取等的条件在 $p = 1$ 时与 $p > 1$ 时不同, 且 $|y_i|^{q-1}$ 对于 $q = \infty$ 无意义, 所以上述构造不可迁移至 $p = 1$. 对于任意 $\epsilon > 0$, 根据上确界的定义, 存在一个下标 k 使得 $|y_k| > \|y\|_\infty - \epsilon$. 我们构造 $x = e_k$. 显然 $\|x\|_1 = 1$. $\|f_y\| = \sup_{\|z\|=1} |f_y(z)| \geq |f_y(x)| > \|y\|_\infty - \epsilon$.

至此我们证明了映射 $\Phi : l^q \to (l^p)^*$ 是一个等距映射, 因此是单射. 接下来证明它是满射.

对任意 $f \in (l^p)^*$, 定义 $y_k = f(e_k)$, 我们要证明 $y \in l^q$ 且 $f = f_y$. 对 $y \in l^q$ 再次分情况讨论

$1 < p < \infty$ 考虑 y 的前 N 项截断 $y_N = (y_1, \ldots, y_N, 0, \ldots)$, 我们构造一个 $x_N = \sum_{k=1}^{N} (\operatorname{sgn} \overline{y_k}) |y_k|^{q-1} e_k \in l^p$

$$|f(x_N)| \leq \|f\| \|x_N\|_p, \quad f(x_N) = \sum_{k=1}^{N} f(e_k)(\operatorname{sgn} \overline{y_k}) |y_k|^{q-1} = \sum_{k=1}^{N} |y_k|^q, \quad \|x_N\|_p = \left(\sum_{k=1}^{N} |y_k|^q\right)^{1/p}$$

整理后得到 $\sum_{k=1}^{N} |y_k|^q \leq \|f\|^q$. 让 $N \to \infty$ 得到 $\|y\|_q = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q\right)^{1/q} \leq \|f\|$.

$p = 1$ $|y_k| = |f(e_k)| \leq \|f\| \|e_k\|_1 = \|f\| \cdot 1$, 所以 $\|y\|_\infty = \sup_k |y_k| \leq \|f\|$.

最后证明 $f = f_y$. 对于任意 $x = (x_i) \in l^p$, 令 $x_N = \sum_{i=1}^{N} x_i e_i$.

$$f(x) = f(\lim_{N\to\infty} x_N) = \lim_{N\to\infty} f(x_N) = \lim_{N\to\infty} f\left(\sum_{i=1}^{N} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i = f_y(x)$$

□

例 3.2. l^1 是 $(l^\infty)^*$ 的真子空间.

证明. 同样可定义 $\Phi\colon l^1 \to (l^\infty)^*$, 可验证良定性, 可利用 $x_i = \operatorname{sgn} \overline{y_i}$ 证明是等距映射.

对于 $f \in (l^\infty)^*$, 同样定义 $y_k = f(e_k)$, 同样可以证明 $y \in l^1$. 但不能用相同的论证证明 $f = f_y$. 问题出在 l^∞ 的拓扑结构与 $l^p, p < \infty$ 有着本质的不同, x_N 不再收敛于 x, 标准基向量 $\{e_k\}$ 的线性组合无法逼近空间中的所有向量. 仅仅知道泛函在所有 $\{e_k\}$ 上的取值不足以确定它在所有向量上的取值, 这就为那些无法被 l^1 序列表示的、更复杂的泛函留出了存在的空间.

再次总结失败的原因, $x \in l^\infty$ 在无穷远处可以有非零行为, 这启发我们构造如下反例. 定义极限泛函 $L(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, 它是有界线性泛函, 但问题在于它不是对所有 l^∞ 中的序列有定义. 好在我们有 Hahn-Banach 定理, 我们可以在那些 L 有定义的元素上先定义 L, 再延拓至整个 l^∞. 假设这样定义的泛函 L 可以由 $y \in l^1$ 得到, 那么 $y_k = L(e_k) = 0$ 所以 $L = 0$, 矛盾! □

例 3.3. $L^p[0,1]$ 的共轭空间, 其中 $1 \leqslant p < \infty$.

解. 设 q 是 p 的共轭指数, 即

$$\begin{cases} \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1, & p > 1, \\ q = \infty, & p = 1. \end{cases}$$

我们将证：

$$L^p[0,1]^* = L^q[0,1].$$

□

定义 3.4. 设 X 是赋范线性空间, 定义赋值映射

$$\begin{aligned} J : X &\longrightarrow X^{**} \\ x &\longmapsto J(x) : f \mapsto f(x). \end{aligned}$$

- $J(x) \in X^{**}$.
  - $J(x)(f_1 + f_2) = (f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) = J(x)(f_1) + J(x)(f_2)$.
  - $|J(x)(f)| = |f(x)| \leqslant \|f\|\|x\| \Longrightarrow \|J(x)\| \leqslant \|x\|$.
- J 是线性的.
  - $J(x_1 + x_2)(f) = f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) = J(x_1)(f) + J(x_2)(f)$.
  - $J(\lambda x)(f) = f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda J(x)(f)$.
- J 是有界的.$\|J(x)\| \leqslant \|x\| \Longrightarrow \|J\| \leqslant 1$.
- J 是等距嵌入. 要证 $\|J(x)\| = \|x\|$, 即对任意 $x \neq 0$, 要找到一 $f \in X^*$, 使得

  $$\frac{|J(x)(f)|}{\|f\|} = \frac{|f(x)|}{\|f\|} = \|x\|,$$

  而这是由 Hahn-Banach 定理保证的.

定义 3.5. 如果 J 是满射, 则称 X 是自反的.

例 3.6.

- 显然,X 是自反空间的必要条件是 X 是 *Banach* 空间.
- *Hilbert* 空间是自反空间.
- $\forall\ p \in (1, +\infty)$,$L^p(\Omega, B, \mu)$ 是自反空间.

- $T^*f \in X^*$.
  - T^*f 是线性的, 这是由 T 的线性和 f 的线性保证的.
  - T^*f 是连续的, 这是由 T 的连续性和 f 的连续性保证的.
- T^* 是线性的, 这是由 Y^* 的线性结构的定义保证的.
- T^* 是有界的, 不仅如此,

$$\begin{aligned}\|T^*\| &= \sup_{\|f\|\leqslant 1} \|T^*f\| \\ &= \sup_{\|f\|\leqslant 1} \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|T^*f(x)\| \\ &= \sup_{\|f\|\leqslant 1} \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|f(Tx)\| \\ &= \sup_{\|x\|\leqslant 1} \sup_{\|f\|\leqslant 1} \|f(Tx)\| \\ &= \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|Tx\| = \|T\|\end{aligned}$$

- $* : \mathscr{L}(X,Y) \to \mathscr{L}(Y^*,X^*), T \mapsto T^*$ 是线性的, 这是由 f 的线性保证的.

  从而 $*$ 是 $\mathscr{L}(X,Y)$ 到 $\mathscr{L}(Y^*,X^*)$ 的线性等距嵌入.

命题 3.7. *设 X 是 Banach 空间,$T \in L(X)$. 如果 T^* 是可逆的, 那么 T 也是可逆的.*

证明.

- $R(T)$ 是闭集. 设 S 是 T^* 的逆. 设 $\{Tx_n\}$ 是 Cauchy 列, 那么

$$\begin{aligned}\|x_n - x_m\| &= \sup\{|f(x_n - x_m)| : f \in X^*, \|f\| = 1\} \\ &= \sup\{|T^*Sf(x_n - x_m)| : f \in X^*, \|f\| = 1\} \\ &= \sup\{|(Sf)(Tx_n - Tx_m)| : f \in X^*, \|f\| = 1\} \\ &\leqslant \|Tx_n - Tx_m\| \sup\{\|Sf\| : f \in X^*, \|f\| = 1\} \\ &= \|S\|\|Tx_n - Tx_m\|.\end{aligned}$$

  所以 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列, 存在极限 $x \in X$. 由 T 连续,$Tx = \lim\limits_{n\to\infty} Tx_n$, 所以 $R(T)$ 是闭的.

- T 是单射. 事实上, 如果 $Tx = 0$, 那么对任意 $f \in X^*$, 存在 $g \in Y^*$ 使得 $f = T^*g$. 那么

$$f(x) = T^*g(x) = g(Tx) = g(0) = 0.$$

  所以对任意 $f \in X^*$ 有 $f(x) = 0$. 由 Hahn-Banach 定理,$x = 0$.

- T 是满射. 事实上, 如果存在 $y \in X \backslash R(T)$, 由 Hahn-Banach 定理, 存在 $g \in X^*$ 满足 $g(y) = 1$ 且 $g(Tx) = 0$ 对任意 $x \in X$ 成立. 但这意味着 $T^*g(x) = g(Tx) = 0$ 对任意 $x \in X$ 成立, 即 $T^*g = 0$. 因为 T^* 是单射, 所以 $g = 0$, 矛盾.

□

例 3.8. *设 X 是 Hilbert 空间,$T \in B(X)$.*

- 一方面, 对于固定的 $y \in X$,$x \mapsto (Tx, y)$ 是有界线性函数, 由 *Riesz* 表示定理, 存在 $z_y \in X$ 使得 $(Tx, y) = (x, z_y)$ 对任意 $x \in X$ 成立. 因此可定义 $\tilde{T} : y \mapsto z_y$.
- 另一方面, 考虑 T 的共轭算子 T^*, 对任意 $f \in X^*$,$T^*(f)(x) = f(T(x))$.

$$(x, T^* y_f) = (Tx, y_f)$$

例 3.9. 设 $(\Omega, \mathscr{B}, \mu)$ 是一个测度空间,$K(x, y)$ 是 $\Omega \times \Omega$ 上的平方可积函数. 定义算子

$$\begin{aligned} T_K : L^2(\Omega, \mu) &\longrightarrow L^2(\Omega, \mu) \\ u &\longmapsto (T_K u)(x) = \int_\Omega K(x, y) u(y) \mathrm{d}\mu(y) \end{aligned}$$

- $(T_K u)(x) \in L^2(\Omega, \mu)$
- $T_K \in \mathscr{L}(L^2(\Omega, \mu))$

$$\begin{aligned} \|T_k u\|_{L^2}^2 &= \int_\Omega \left| \int_\Omega K(x, y) u(y) \mathrm{d}\mu(y) \right|^2 \mathrm{d}\mu(x) \\ &\overset{Cauchy-Schwarz}{\leqslant} \int_\Omega \left(\int_\Omega |K(x, y)|^2 \mathrm{d}\mu(y) \right) \left(\int_\Omega |u(y)|^2 \mathrm{d}\mu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) \\ &= \|u\|_{L^2}^2 \int_\Omega \left(\int_\Omega |K(x, y)|^2 \mathrm{d}\mu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) \\ &\overset{Fubini?}{=\!=\!=\!=} \|u\|_{L^2}^2 \int_{\Omega \times \Omega} |K(x, y)|^2 \mathrm{d}\mu(x) \mathrm{d}\mu(y) \\ &= \|u\|_{L^2}^2 \|K\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

4 弱收敛及 $*$ 弱收敛

定义 4.1. 设 X 是一个赋范线性空间, $x_n, x \in X$, 如果

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x) \quad \forall f \in X^*,$$

则称 $\{x_n\}$ 弱收敛到 $x \in X$, 记作 $x_n \rightharpoonup x$, 称 x 为 $\{x_n\}$ 的弱极限.

命题 4.2. 如果 $\{x_n\}$ 的弱极限存在, 则是唯一的.

证明.

$$f(x) = f(x'), \quad \forall f \in X^* \xRightarrow{\text{Hahn}-\text{Banach}} x = x'.$$

□

命题 4.3. 如果 $\{x_n\}$ 的强极限存在, 则该强极限也是弱极限.

证明.

$$|f(x_n) - f(x)| \leqslant \|f\|\|x_n - x\| \to 0.$$

□

弱收敛与按范数收敛的关系

例 4.4.

因为 X^* 也是一个赋范线性空间, 自然也可以讨论 X^* 上的弱收敛, 但这要涉及到 X^{**}, 为了避免这一点

定义 4.5. $*$ 弱收敛

定理 4.6 (Eberlein-Smulian)**.** 自反空间中的单位（闭）球为弱（自）列紧的.

例 4.7. $X = L^2[0,1]$,$D = \left\{f \in L^2[0,1] : \|f\|_{L^2} \leqslant 1\right\}$, 则 D 是弱自列紧的.

证明. □

定理 4.8 (Banach)**.** 设 X 是赋范线性空间. 若 X^* 是可分的, 那么 X 也是可分的.

证明.

- 考察

□

定理 4.9 (Pettis)**.** 自反空间的闭子空间仍为自反空间.

证明. 设 X_0 是 X 的闭子空间,$\iota : X_0 \hookrightarrow X$ 是嵌入映射.

我们有 $\iota^{**} : X_0^{**} \hookrightarrow X^{**}$. 任取 x^{**} □

Chapter 4 内积空间

1 内积空间

回去看第八次课

内积 $\longrightarrow$ 范数

设 X 为内积空间, 定义

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)}.$$

下验证 $\|\cdot\|$ 是 X 上范数:

范数 $\longrightarrow$ 内积

命题 1.1. 设 X 为赋范线性空间, 则其范数由内积诱导当且仅当

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right), \quad \forall\, x, y \in X.$$

证明. $\square$

2 Riesz 表示定理

为什么线性函数可以用与某元素的内积表示？因为线性函数是由被作用的元素在某一方向上的分量来决定的, 而分量是可以通过求内积取出来的.

3 Lax-Milgram 定理

定理 3.1. 设 H 是一个 Hilbert 空间, 设

$$B\colon H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$$

是一个双线性映射满足存在常数 $\alpha, \beta > 0$ 使得

$$|B[u,v]| \leqslant \alpha \|u\| \|v\|, \quad \beta \|u\|^2 \leqslant B[u,u].$$

设 $f\colon H \to \mathbb{R}$ 是 H 上的有界线性泛函, 那么存在唯一的 $u \in H$ 使得

$$B[u,v] = \langle f, v \rangle.$$

证明. 在 B 就是 H 上的内积的时候, Lax-Milgram 定理其实就是 Riesz 表示定理, 即使 B 不是内积, 在条件 $|B[u,v]| \leqslant \alpha \|u\| \|v\|$ 的保证下, 取定 $u \in H$, 映射

$$v \longmapsto B[u,v]$$

也确定了 H 上的一个有界线性泛函. Lax-Milgram 定理就是要保证 H 上的有界线性泛函都可以通过这种方式得到. 由 Riesz 表示定理我们知道对于取定的这个 $u \in H$ 存在唯一的 $w \in H$ 使得

$$B[u,v] = (w,v), \quad \forall v \in H$$

这样就定义了一个映射 $Au = w$, Lax-Milgram 定理就是要证明 $A\colon H \to H$ 是满射.

A 的线性性显然, 下证 A 是有界线性算子

$$\|Au\|^2 = (Au, Au) = B[u, Au] \leqslant \alpha \|u\| \|Au\| \Longrightarrow \|Au\| \leqslant \alpha \|u\|$$

下证 A 是单射且 $R(A)$ 是 H 中的闭集,

$$\beta \|u\|^2 \leqslant B[u,u] = (Au, u) \leqslant \|Au\| \|u\| \Longrightarrow \beta \|u\| \leqslant \|Au\|.$$

□

Chapter 5 算子谱理论

1 线性算子的谱

本章开头已经指出了只研究闭稠定线性算子, 本节研究谱理论, 为了理论的完美, 我们只研究复 Banach 空间, 原因我们已经在线性代数中熟知了, 复数域的代数闭性保证了谱集非空, 其次之后将定义的预解算子函数是解析函数, 这样一来我们就可以运用复分析强大的工具.

定义 1.1. 设 X 是 $\mathbb{C}$-Banach 空间, $T : D(T) \to X$ 是闭稠定线性算子. 对任意 $\lambda \in \mathbb{C}$, 令

$$T_\lambda = T - \lambda I.$$

- 称 λ 为正则值如果 T_λ 是单射, 并且 $R(T_\lambda)$ 稠密, 并且 $R(T_\lambda)$ 是全空间, 即 T_λ 是双射.
- 称 λ 为连续谱如果 T_λ 是单射, 并且 $R(T_\lambda)$ 稠密, 但 $R(T_\lambda)$ 不是全空间.
- 称 λ 为剩余谱如果 T_λ 是单射但 $R(T_\lambda)$ 不稠密. 称 λ 为点谱如果 T_λ 不是单射.
- 定义正则值的全体为预解集 $\rho(T)$, 定义谱集为 $\sigma(T) = \mathbb{C}\backslash\rho(T) = \sigma_p(T) \sqcup \sigma_r(T) \sqcup \sigma_c(T)$.

可以看到只有点谱时 T_λ 存在非平凡的核, 对应于有限维的特征值. 特征值这个概念有多么重要我们是知道的, 所以可以想象点谱这个概念也很重要.

考察方程 $(T - \lambda I)x = y$, 当 λ 是正则值的时候我们有一个对任意的 y 有定义的逆算子 $(T - \lambda I)^{-1}$, 于是可以唯一解出 $x = (T - \lambda I)^{-1}y$, 这个算子被称为预解算子, 所以 $\rho(T)$ 被称为预解集.

接下来, 我们要证明 $\sigma(T) \subset \mathbb{C}$ 是紧集, 也就是有界闭集. 为此我们需要如下引理

引理 1.2. 设 X 是 Banach 空间, $T \in L(X)$. 若 Neumann 级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} T^k$ 按算子范数收敛, 那么

$$(I - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k.$$

由上述引理立得以下两个命题

命题 1.3. 设 X 是 $\mathbb{C}$-*Banach* 空间,$T \in L(X)$, 则 $\sigma(T)$ 是有界集.

证明. 设 $|\lambda| > \|T\|$, 即 $\|\lambda^{-1}T\| < 1$.

$\lambda I - T = \lambda(I - \lambda^{-1}T)$, 由引理 $I - \lambda^{-1}T$ 可逆, 则 $\lambda I - T$ 也可逆, 即 $\lambda \in \rho(T)$.

从而 $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > \|T\|\} \subset \rho(T)$, 即 $\sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leqslant \|T\|\}$. □

推论 1.4. $r_\sigma(A) \leqslant \|A\|$.

命题 1.5. 设 X 是 $\mathbb{C}$-*Banach* 空间,$T \in L(X)$, 则 $\rho(T)$ 是开集.

证明. 任取 $\lambda_0 \in \rho(T)$, 要找 $\delta > 0$ 使得 $B(\lambda_0, \delta) \subset \rho(T)$.

$\lambda I - T = (\lambda - \lambda_0)I + \lambda_0 I - T = (\lambda_0 I - T)(I + (\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 I - T)^{-1})$.

则 $\lambda I - T$ 是双射等价于 $I + (\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 I - T)^{-1}$ 是双射, 由引理这只需 $|\lambda - \lambda_0|$ 足够小. □

知道了 $\rho(T)$ 是 $\mathbb{C}$ 的非空开子集后, 我们定义预解式

定义 1.6.

$$R : \rho(T) \longrightarrow L(X), \quad \lambda \longmapsto (\lambda I - T)^{-1}.$$

定义 1.7. 可微与解析.

命题 1.8. R 在 $\rho(T)$ 上解析.

证明. $\lambda I - T = (\lambda_0 I - T)(I + (\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 I - T)^{-1}) = (\lambda_0 I - T)(I + (\lambda - \lambda_0)R(\lambda_0))$.

$R(\lambda) = (I + (\lambda - \lambda_0)R(\lambda_0))^{-1}R(\lambda_0)$.

记 $S_\lambda = (\lambda_0 - \lambda)R(\lambda_0)$, 当 $|\lambda - \lambda_0|$ 足够小时,

$$R(\lambda) = (I + S_\lambda + S_\lambda^2 + \cdots)R(\lambda_0) = R(\lambda_0) + S_\lambda R(\lambda_0) + S_\lambda^2 R(\lambda_0) + \cdots.$$

$$R(\lambda) - R(\lambda_0) = S_\lambda R(\lambda_0) + S_\lambda^2 R(\lambda_0) + \cdots.$$

$$\frac{R(\lambda) - R(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} = -R(\lambda_0)^2 + (\lambda - \lambda_0)(\cdots)$$

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{R(\lambda) - R(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} = -R(\lambda_0)^2.$$

□

命题 1.9. 设 X 是 $\mathbb{C}$-*Banach* 空间,$T \in L(X)$, 则 $\sigma(T)$ 非空.

证明. 设 $\sigma(T) = \varnothing$, 则 $\rho(T) = \mathbb{C}$.

任取 $f \in L(X)^*$ 满足 $f(I) = 1$, 有 $F := f \circ R : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 是解析函数.

当 $|\lambda| > \|T\|$ 时,

$$R(\lambda) = (\lambda I - T)^{-1} = \lambda^{-1}(I + \frac{T}{\lambda} + \frac{T^2}{\lambda^2} + \cdots)$$

$$f \circ R(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\left(1 + \frac{f(T)}{\lambda} + \frac{f(T^2)}{\lambda^2} + \cdots\right)$$

由 Liouville 定理, 恒为常数, 矛盾! □

命题 1.10. 设 p 是多项式. 那么

- $\sigma(p(T)) = p(\sigma(T))$
- 如果 T 可逆, 那么 $\sigma(T^{-1}) = (\sigma(T))^{-1}$
-

引理 1.11. 设 $a_n \in [-\infty, +\infty)$, 且 $a_{n+m} \leqslant a_n + a_m$, 则

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{n} = \inf_{n \geqslant 1} \frac{a_n}{n}.$$

证明. 显然有

$$\liminf_{n\to+\infty}\frac{a_n}{n}\geqslant\inf_{n\geqslant 1}\frac{a_n}{n},$$

只需证

$$\limsup_{n\to+\infty}\frac{a_n}{n}\leqslant\inf_{n\geqslant 1}\frac{a_n}{n},$$

这等价于

$$\limsup_{n\to+\infty}\frac{a_n}{n}\leqslant\frac{a_m}{m},\quad \forall m\geqslant 1.$$

固定 $m\in\mathbb{N}$, 对任意 $n\in\mathbb{N}$, 存在 l_n 和 r_n 使得 $n=l_nm+r_n$, 其中 $l_n\in\mathbb{N},r_n\in\{0,1,\cdots,m-1\}$.

$$a_n=a_{l_nm+r_n}\leqslant l_na_m+a_{r_n}$$

$$\frac{a_n}{n}\leqslant\frac{l_nm}{n}\frac{a_m}{m}+\frac{a_{r_n}}{n}$$

左右两边取上极限得证. □

定理 1.12. 设 X 是 *Banach* 空间,$T\in L(X)$, 则 $\sigma(T)=\sigma(T^*)$.

证明. 显然. □

定理 1.13. $r_\sigma(T)=\lim\limits_{n\to+\infty}\|T^n\|^{\frac{1}{n}}$.

证明. □

例 1.14. 设 $X = C([0,1])$,

$$T\colon X \longrightarrow X, \quad u(y) \longmapsto yu(y).$$

解.

- 点谱.$(\lambda I - T)u = 0 \Longleftrightarrow (\lambda - x)u(x) \equiv 0 \Longleftrightarrow u(x) \equiv 0$

  $\sigma_p(T) = \varnothing$.

$\square$

2 紧算子

定义 2.1. 称 $T \in L(X,Y)$ 为紧算子, 如果 T 将有界集映为列紧集. 将紧算子全体记作 $\mathfrak{C}(X,Y)$.

2.1 基本性质

命题 2.2.

(1) $\mathfrak{C}(X,Y) \subset B(X,Y)$.

证明. 紧算子将有界集映为列紧集, 而度量空间中列紧集一定是有界集, 从而紧算子有界. □

(2) $\mathfrak{C}(X,Y)$ 是线性子空间.

证明. 设 $A \subset X$ 为有界集.

- 易见 $(\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2)(A) \subset \lambda_1 T_1(A) + \lambda_2 T_2(A)$.
- 后者是列紧的, 因为任何序列 $\{z_n\}$ 都可以被分解为 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 满足 $z_n = x_n + y_n$, 先找到 $\{x_n\}$ 的收敛子列, 再找 $\{y_n\}$ 对应子列的收敛子列, 就找到了 $\{z_n\}$ 的收敛子列.
- 而列紧集的子集是列紧的.

□

(3) $\mathfrak{C}(X,Y)$ 是闭的.

证明. □

(4)

命题 2.3. $T \in L(X,Y)$ 是紧算子当且仅当 T^* 是紧算子.

命题 2.4. $T \in \mathfrak{C}(X,Y)$, 其中 Y *Banach* 空间. 那么 $R(T)$ 闭当且仅当 $R(T)$ 有限维.

证明. 假设 $R(T)$ 闭, 考虑限制下来. 则 T 成为满射. 由开映像定理, 这玩意是开映射. 然后 Y 的原点有个邻域是紧集. 取有界集, 映成预紧集, 由开映象是邻域. □

2.2 全连续

与紧性概念密切相关的是全连续概念.

定义 2.5. 设 X, Y 是 Banach 空间, 称 $T \in B(X, Y)$ 是全连续的, 如果

$$x_n \rightharpoonup x \Longrightarrow Tx_n \to Tx.$$

命题 2.6. 设 $T \in B(X, Y)$, 则

(1) 若 $T \in \mathfrak{C}(X, Y)$, 则 T 是全连续的;

(2) 若 X 是自反的,T 是全连续的, 则 $T \in \mathfrak{C}(X, Y)$.

证明.

(1)
- $x_n \rightharpoonup x \Longrightarrow Tx_n \rightharpoonup Tx$.
- 由共鸣定理,x_n 有界. 由 T 是紧算子,Tx_n 列紧.
- $\{Tx_n\}$ 的每一个强收敛的子列, 它们也都是弱收敛的, 由弱收敛极限的唯一性,$\{Tx_n\}$ 的每一个强收敛的子列的极限都是 Tx.
- 假如 $\{Tx_n\}$ 不强收敛到 Tx, 那么可以取出一个子列与 Tx 的距离保持在 ε 外, 但由列紧性这个子列必有强收敛子列, 由上一条, 这个强收敛子列必须强收敛到 Tx, 矛盾.

(2)
- 因为 X 是自反的, 由 Eberlin-Smulian 定理, 有界列 $\{x_n\}$ 有弱收敛子列.
- 因为 T 是全连续的, 它将该弱收敛子列映为强收敛子列.

□

2.3 例子

积分算子

有限秩算子

定义 2.7. 有限秩算子

命题 2.8. $T \in Fd(X,Y) \iff \exists y_1, \cdots, y_k \in Y, f_1, \cdots, f_k \in X^*$ 使得 $T = \sum y_i \otimes f_i$

证明. □

命题 2.9. $\overline{Fd(X,Y)} \subset \mathfrak{C}(X,Y)$.

证明. 设 $T \in L(X,Y)$ 且存在 $\{T_n\} \subset Fd(X,Y)$ 使得 $\|T_n - T\| \to 0$.

要证 $T \in \mathfrak{C}(X,Y)$, 等价于证 $T(B_X(0,1))$ 为列紧集, 由 Y 的完备性, 这又等价于证 $T(B_X(0,1))$ 完全有界, 等价于证对任意 $\varepsilon > 0$,$T(B_X(0,1))$ 存在有限的 ε 网. □

例 2.10.

2.4 Schauder 基

命题 2.11. 设 Y 为 *Hilbert* 空间,X 为 *Banach* 空间, 此时 $\overline{Fd(X,Y)} = \mathfrak{C}(X,Y)$.

证明. □

定义 2.12. 设 X 是 *Banach* 空间, 称序列 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 X 的一组 *Shauder* 基, 如果对任意 $x \in X$, 存在唯一的一个序列 $\{c_n(x)\}$, 使得

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x) e_n.$$

一个简单的观察是,$X = \overline{\operatorname{span}\{e_n\}_{n=1}^{\infty}}$, 因此如果 X 有 Schauder 基, 则 X 是可分的.

于是自然会问是否每个可分的 Banach 空间都具有 Schauder 基? 1973 年,Enflo 作出了否定的回答, 参看：https://sci-hub.se/10.1007/bf02392270. 不久,A.M.Davie 给出了一个较简单的证明, 参看https://sci-hub.se/10.1112/blms/5.3.261.

由于 $x \mapsto c_n(x)$ 的唯一性,c_n 是 X 上的线性函数. 事实上,

引理 2.13. c_n 是 X 上的有界线性泛函.

证明. 对于希尔伯特空间, 这是显然的. 因为此时我们有 Parsaval 恒等式,

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (c_n(x))^2 \|e_n\|^2.$$

对于 Banach 空间, 我们必须另谋出路.

令 $S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n(x) e_n$, 在 X 上引入另一个模 $\|x\|_1 := \sup_{N \in \mathbb{N}} \|S_N(x)\|$.

- 正定性

- 齐次性
- 三角不等式

易知有 $\Box x\Box \geqslant \|x\|$, 一旦 $\Box\cdot\Box$ 完备, 由于 $\Box\cdot\Box$ 比 $\|\cdot\|$ 强, 所以两范数等价.

从而存在 $C>0$ 使得 $\Box x\Box \leqslant C\|x\|, \forall\, x\in X$.

所以 $\|c_N(x)e_N\| = \|S_N(x) - S_{N-1}(x)\| \leqslant 2C\|x\|$, 即

以下验证 $\Box\cdot\Box$ 完备.

- 取 $\{x_n\}$ 为 Cauchy 列.

  你想想它还能收敛到谁呢？肯定是收敛到各个分量的那个极限啊.

- 验证对任意 N,$\{C_N(x_n)\}$ 为 Cauchy 列, 令 $c_N = \lim\limits_{m\to\infty} c_N(y_m)$.

$\Box$

3 Fredholm 理论

定理 3.1 (Fredholm 第一定理)**.** 设 X 是 *Banach* 空间,$A \in \mathfrak{C}(X)$, 那么

$$T = I - A \text{ 是单射} \iff T \text{ 是满射}.$$

特别地, 由 *Banach* 定理, 成立时有 $T^{-1} \in L(X)$.

证明. □

定理 3.2 (Fredholm 第二定理)**.** $\dim N(T) = \dim N(T^*) < \infty$.

证明. □

4 Riesz-Schauder 定理

4.1 紧算子的谱

定理 4.1. 设 $A \in \mathfrak{C}(X)$, 则

(1) 当 $\dim X = +\infty$ 时,$0 \in \sigma(A)$.

(2) $\sigma(A) \setminus \{0\} \subset \sigma_p(A)$.

(3) $\sigma(A)$ 至多以 0 为聚点.

(4) $\sigma(A)$ 至多可数.

证明.

(1) 因为 A 是紧算子是有界算子进而是闭算子, 所以 $\lambda \in \rho(A)$ 当且仅当 $A - \lambda I$ 可逆.

假设 $0 \in \rho(A)$, 则 A 可逆, 则 $I = A \circ A^{-1}$ 作为紧算子与有界算子的复合是紧算子.

但这在 $\dim X = +\infty$ 时是不可能的.

(2) 首先解读一下这个式子, 它传达了：除了 0 可能是例外,A 的谱集中只有点谱, 而没有连续谱和剩余谱. 所以我们需要证明的是：除 0 以外, 要么是点谱要么是正则值.

下面开始证明：设 $\lambda \neq 0$, 此时 $\lambda I - A$ 的行为和 $I - \dfrac{A}{\lambda}$ 差不多, 因为 A 是紧算子, 所以我们可以用 Riesz-Fredholm 理论.

- 若 $I - \dfrac{A}{\lambda}$ 不是单射, 则 $\lambda \in \sigma_p(A)$.
- 若 $I - \dfrac{A}{\lambda}$ 是单射, 则是满射, 则 $\lambda \in \rho(A)$.

(3) 假设存在一列两两不同的 $\{\lambda_i\} \subset \sigma_p(A) \setminus \{0\}$ 使得 $\lambda_i \to \lambda \neq 0$.

由于 $\lambda_i \in \sigma_p(A)$, 存在 $x_i \in X$ 且 $\|x_i\| = 1$ 使得 $Ax_i = \lambda_i x_i$.

由于 λ_i 互不相同, 所以 $\{x_1, \cdots, x_k\}$ 线性无关.

令 $E_k = \operatorname{span}\{x_1, \cdots, x_k\}$.

(4) $\sigma(A) \setminus \{0\} \subset \bigcup\limits_n \left\{ \lambda \in \sigma(A) : |\lambda| > \dfrac{1}{n} \right\} =: \bigcup\limits_n S_n$.

因为 $\sigma(A)$ 是有界的, 且 $\sigma(A)$ 不可能有除 0 以外的聚点, 所以对任意 n 集合 S_n 是有限集.

从而 $\sigma(A)$ 是至多可数的.

□

注记. $\sigma(A) = 0$ 推不出 $A = 0$, 这件事在有限维时我们就已经知道了.

4.2 不变子空间

定理 4.2. 设 X 是 $\mathbb{C}$-*Banach* 空间,$A \in \mathfrak{C}(X)$, 则存在 A 的非平凡闭不变子空间.

证明.

- 为什么强调 X 是复的, 实的不行吗？哪里用到了复？
- 不妨设 $\dim X = +\infty$, 有限维的时候非平凡闭不变子空间是什么？
- $\sigma(A) \backslash \{0\} = \sigma_p(A) \backslash \{0\}$.
  - 如果 $\sigma_p(A) \neq \varnothing$, 取 $\lambda \in \sigma_p(A)$, 存在 $x_\lambda \neq 0$ 满足 $Ax_\lambda = \lambda x_\lambda$. 令 $M = \operatorname{span} x_\lambda$.
- 如果 $\sigma_p(A) = \varnothing$, 则 $\sigma(A) = \{0\}$.

  下证 A 有非平凡的闭不变子空间.

  用反证法, 否则对任意 $y \in X$,$I_y = \overline{\{P(A)y\}} = X$.

□

5 对称紧算子的谱理论

命题 5.1. 设 X 是 Hilbert 空间,A 是 X 上的对称算子, 则

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)|.$$

证明.

- 对 $\|x\| = 1$,$|(Ax, x)| \leqslant \|Ax\|\|x\| \leqslant \|A\|\|x\|^2 = \|A\|$.
- 记 $c = \sup\limits_{\|x\|=1} |(Ax, x)|$.
  - $(A(x+y), x+y) = (Ax, x) + (Ax, y) + (Ay, x) + (Ay, y)$
  - $(A(x-y), x-y) = (Ax, x) - (Ax, y) - (Ay, x) + (Ay, y)$
  - $|(A(x+y), x+y)| = \|x+y\|^2 |(A(\frac{x+y}{\|x+y\|}), \frac{x+y}{\|x+y\|})| \leqslant c\|x+y\|^2$
  - $|(A(x-y), x-y)| = \|x-y\|^2 |(A(\frac{x-y}{\|x-y\|}), \frac{x-y}{\|x-y\|})| \leqslant c\|x-y\|^2$
  - 对于 $\forall\, x, y \in X$ 满足 $\|x\| = \|y\| = 1$,

$$\begin{aligned}
|(A(x+y), x+y) - (A(x-y), x-y)| &\leqslant |(A(x+y), x+y)| + |(A(x-y), x-y)| \\
&\leqslant c(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) \\
&= 2c(\|x\|^2 + \|y\|^2) = 4c \\
|(A(x+y), x+y) - (A(x-y), x-y)| &= 2(Ax, y) + 2(Ay, x) \\
&= 2(Ax, y) + 2(y, Ax) \\
&= 2(Ax, y) + 2\overline{(Ax, y)} \\
&= 4\Re(Ax, y)
\end{aligned}$$

□

问：上述命题中的 sup 是否为 max?

一般地, 我们总可以找到一列 $\{x_n\}$ 满足 $\|x_n\| = 1$ 使得 $|(Ax_n, x_n)| \to \|A\|$. 可按 (Ax_n, x_n) 的正负将 $\{x_n\}$ 分为两部分, 至少有一部分是包含无穷多项的子列, 将这串子列仍记为 $\{x_n\}$, 不妨设 $(Ax_n, x_n) \to \|A\|$, 否则以 $-A$ 替换 A 来讨论.

定理 5.2. 设 X 是 Hilbert 空间,A 是 X 上的对称紧算子, 则有至多可数个 λ_i（可以重复）, 它们是算子 A 的本征值, 并对应一组 e_i, 使得

$$x = \sum (x, e_i)e_i, \quad Ax = \sum \lambda_i (x, e_i) e_i.$$

证明.

- 因为 A 是紧算子, 由 Riesz-Schauder 定理,$\sigma(A)$ 是至多以 0 为聚点的至多可数集.
- 任取 $\lambda \in \sigma_p(A) \setminus \{0\}$, 由 Fredholm 第二定理,$m(\lambda) := \dim N(\lambda I - A) < +\infty$, 称为 λ 的重数. 设 $\{e_i^\lambda\}_{i=1}^{m(\lambda)}$ 是 $N(\lambda I - A)$ 的一组标准正交基.
- 此外, 如果 $0 \in \sigma_p(A)$, 则设 $N(A)$ 的标准正交基为 $\{e_i^0\}$, 它不一定是可数的.

□

定理 5.3. 设 X 是 *Hilbert* 空间,A 是 X 上的对称紧算子, 则

$$\lambda_n^+ = \inf_{E_{n-1}} \sup_{x \in E_{n-1}^\perp \setminus \{0\}} \frac{(Ax, x)}{(x, x)},$$

$$\lambda_n^- = \sup_{E_{n-1}} \inf_{x \in E_{n-1}^\perp \setminus \{0\}} \frac{(Ax, x)}{(x, x)},$$

其中 E_n 为 X 的 n 维子空间.

证明. 记 $\mu_n^+ = \inf_{E_{n-1}} \sup_{x \in E_{n-1}^\perp \setminus \{0\}} \frac{(Ax, x)}{(x, x)}$.

- 对任意的 E_{n-1}, 可找到 $x \in \operatorname{span}\{e_1^+, \cdots, e_n^+\}$ 使得 $x \in E_{n-1}^\perp \setminus \{0\}$. 那么
$$\frac{(Ax, x)}{(x, x)} = \frac{\sum_{i=1}^n |a_i^+|^2 \lambda_i^+}{\sum_{i=1}^n |a_i^+|^2} \geqslant \lambda_n^+ \Longrightarrow \mu_n^+ \geqslant \lambda_n^+.$$
- 取 $E_{n-1} = \operatorname{span}\{e_1^+, \cdots, e_{n-1}^+\}$.
$$\mu_n \leqslant \sup_{x \in E_{n-1}^\perp \setminus \{0\}} \frac{(Ax, x)}{(x, x)} \leqslant \sup \frac{\sum_{i \geqslant n} \lambda_i^+ |a_i^+|^2}{\sum_{i \geqslant n} |a_i^+|^2 + \sum_{i \geqslant 1} |a_i^-|^2 + \sum_\alpha |a_\alpha^0|^2} \leqslant \lambda_n^+.$$

□

定义 5.4. 正算子

命题 5.5. A 为正算子当且仅当 $\sigma_p(A) \subset [0, +\infty)$.

证明. □