连续介质力学

孙天阳

中国科学技术大学数学科学学院

tysun@mail.ustc.edu.cn

2025 年 3 月 2 日

目录

Part I

线弹性静力学

考虑静力学, 当然要建立研究对象的平衡方程, 对研究对象进行受力分析. 这就有了第一章应力分析, 也就是对弹性体内部的力的分析. 第二章研究了物体的变形, 是纯粹的几何学, 为后面的理论奠定基础. 第三章进行了一些假设, 一是应力由物体的变形唯一决定, 二是物体的初始状态没有应力, 三是应力与应变之间是线性关系. 我主要对第二条假设感到疑虑, 我不知道这是不是一条很本质的假设. 按他这样说的话静静摆在地上的桌子不能作为初始状态来进行分析, 但我觉得应该有一种等效的观点使得静静摆在地上的桌子能被视为初始的状态.

Chapter 1

应力分析

弹性力学中物体的受力分析与刚体力学中物体的受力分析是截然不同的. 首先, 弹性体受力后会变形, 从而产生内力, 这是与刚体的一个本质区别; 其次, 作用在弹性体上的外力, 一般不能简单地归结为作用在相应点上的一个合力和一对力偶, 而必须写成与外力分布相应的分布函数.

1 应力矢量

下面刻画某点 P 处的内力. 首先选取一个经过点 P 的定向光滑曲面 S, 其在点 P 处的单位外法向记为 $\vec{n}$. 在 P 周围取一个面元 ΔS, 该面元所受的力为 $\Delta\vec{\sigma}$. 欧拉-柯西应力定理指出

$$\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta\vec{\sigma}}{\Delta S}=\vec{\sigma}(P,\vec{n})$$

极限存在, 且只依赖于 S 在 P 处的单位外法向 $\vec{n}$ 而不依赖于 S. 一般我们略去 P 简记做 $\vec{\sigma}(\vec{n})$, 称作经过 P 点以 $\vec{n}$ 为单位外法向的平面上的应力矢量, 注意一般来说 $\vec{\sigma}(\vec{n})$ 不必与 $\vec{n}$ 是同一方向. 注意应力矢量并不是力, 而是单位面积上的力, 所以其量纲与压强相同. 可在直角坐标系下进行分解

$$\vec{\sigma}(\vec{n})=\sigma_1(\vec{n})\vec{e}_1+\sigma_2(\vec{n})\vec{e}_2+\sigma_3(\vec{n})\vec{e}_3.$$

也可沿 $\vec{n}$ 和与 $\vec{n}$ 垂直的方向 $\vec{t}$ 进行分解

$$\vec{\sigma}(\vec{n})=\vec{\sigma}_n+\vec{\tau}_t,$$

其中 $\vec{\sigma}_n$ 称为正应力, 而 $\vec{\sigma}(\vec{n})-(\vec{\sigma}(\vec{n})\cdot\vec{n})\vec{n}=\vec{\tau}_t$ 称为剪应力.

2 应力张量

本节我们证明,

$$\vec{\sigma}(\vec{n})=\vec{\sigma}(n_1\vec{e}_1+n_2\vec{e}_2+n_3\vec{e}_3)=n_1\vec{\sigma}(\vec{e}_1)+n_2\vec{\sigma}(\vec{e}_2)+n_3\vec{\sigma}(\vec{e}_3)$$

因此可将 $\vec{\sigma}(\vec{n})$ 视作关于 $\vec{n}$ 的线性映射. 记

$$\vec{\sigma}\begin{pmatrix}\vec{e}_1\\ \vec{e}_2\\ \vec{e}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sigma_{11}&\sigma_{12}&\sigma_{13}\\ \sigma_{21}&\sigma_{22}&\sigma_{23}\\ \sigma_{31}&\sigma_{32}&\sigma_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{e}_1\\ \vec{e}_2\\ \vec{e}_3\end{pmatrix}$$

考虑点 $P=(0,0,0),A=(a,0,0),B=(0,b,0),C=(0,0,c)$ 围成的四面体 $PABC$, 容易求出平面 ABC 的方程是

$$\frac{1}{a}x+\frac{1}{b}y+\frac{1}{c}z-1=0,\quad \vec{n}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}(\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c})$$

由等体积法可以求出 ABC 的面积是

$$\mathrm{d}S=\frac{1}{2}abc\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}$$

所以可以看到侧面的面积 $\mathrm{d}S_i$ 等于斜面 $\mathrm{d}S$ 的面积乘上 $\vec{n}$ 对应的分量 n_i. 在静力平衡下,

$$\vec{\sigma}(\vec{n})\mathrm{d}S-\vec{\sigma}(\vec{e}_i)\mathrm{d}S_i+\vec{f}\mathrm{d}V=\vec{\sigma}(\vec{n})\mathrm{d}S-n_i\vec{\sigma}(\vec{e}_i)\mathrm{d}S+\vec{f}\mathrm{d}V=0$$

$\mathrm{d}V$ 是 $\mathrm{d}S$ 的更高阶小量, 当令 $\mathrm{d}S$ 趋于零时得到

$$\vec{\sigma}(\vec{n})=n_i\vec{\sigma}(\vec{e}_i)$$

所以 $\vec{\sigma}$ 是一个线性映射.

3 动量守恒/平衡方程

考虑一个体积为 V 表面积为 S 的单元体, 其 $\vec{e}_i$ 方向的动量定理为

$$\oint_S \sigma_i(\vec{n})\mathrm{d}S+\int_V f_i\mathrm{d}V=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho v_i\mathrm{d}V$$

对左侧使用高斯定理得到

$$\oint_S \sigma_i(\vec{n})\mathrm{d}S=\oint_S \sigma_{ij}n_j\mathrm{d}S=\oint_S \vec{\sigma}(\vec{e}_i)\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\int_V(\nabla\cdot\vec{\sigma}(\vec{e}_i))\mathrm{d}V=\int_V\frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij}\mathrm{d}V$$

由单元体的任意性, 我们得到恒成立的微分方程

$$f_i+\frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho v_i)$$

静力平衡时得到

$$f_i+\frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij}=0,$$

即 e_i 方向的体力加上应力矢量的散度为零. 注意这是内部区域满足的方程, 表面有额外的边值条件.

4 角动量方程

回忆角动量定理为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{r}\times m\vec{v})_i = \sum(\vec{r}\times\vec{F})_i$$

再次考虑一个体积为 V 表面积为 S 的单元体, 其 $\vec{e_i}$ 方向的角动量定理为

$$\frac{\mathrm{d}L_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V(\vec{r}\times\rho\vec{v})_i\mathrm{d}V = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V\epsilon_{ijk}x_j\rho v_k\mathrm{d}V = \int_V\epsilon_{ijk}v_j\rho v_k+\epsilon_{ijk}x_j\frac{\mathrm{d}(\rho v_k)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}V = \int_V\epsilon_{ijk}x_j\frac{\mathrm{d}(\rho v_k)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}V$$

$$M_i = \oint_S(\vec{r}\times\vec{\sigma}(\vec{n}))_i\mathrm{d}S + \int_V(\vec{r}\times\vec{f})_i\mathrm{d}V = \oint_S\epsilon_{ijk}x_j\sigma_k(\vec{n})\mathrm{d}S + \int_V\epsilon_{ijk}x_jf_k\mathrm{d}V$$

$$\oint_S\epsilon_{ijk}x_j\sigma_k(\vec{n})\mathrm{d}S = \oint_S\epsilon_{ijk}x_j\sigma_{kl}n_l\mathrm{d}S = \int_V(\epsilon_{ijk}x_j\sigma_{kl})_l\mathrm{d}V = \int_V\epsilon_{ijk}\sigma_{kj}+\epsilon_{ijk}x_j\sigma_{kl,l}\mathrm{d}V$$

$$\int_V\epsilon_{ijk}x_j\frac{\mathrm{d}(\rho v_k)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}V = \int_V\epsilon_{ijk}\sigma_{kj}+\epsilon_{ijk}x_j\sigma_{kl,l}\mathrm{d}V + \int_V\epsilon_{ijk}x_jf_k\mathrm{d}V \Longrightarrow \int_V\epsilon_{ijk}\sigma_{kj}\mathrm{d}V = 0$$

5 主应力

一般来说, 物体中一点 P 沿某一方向为 $\vec{n}$ 的截面上的应力矢量 $\vec{\sigma}(\vec{n})$ 与 $\vec{n}$ 的方向不一致. 称二者方向一致的方向为主应力方向, 相应的应力矢量称为主应力矢量, 相应的缩放倍数称为主应力. 用线性代数的语言来说, 其实就是线性映射 $\vec{\sigma}(\vec{n})$ 的特征值和特征向量.

Chapter 2

应变分析

1 位移场

我们以物体变形前描述物体上每点位置的矢径 $\vec{r}$ 作为自变量, 以该点变形后距离初始位置的位移 $\vec{u}$ 作为因变量, 这样我们就得到了位移场 $\vec{u}(\vec{r})$, 物体变形后每点位置的矢径就是 $\vec{r}+\vec{u}(\vec{r})$.

假设 $\vec{r}$ 和 $\vec{r}+\vec{dr}$ 是相邻的两点, 反映物体变形的是两点之间相对位置的变化

$$d\vec{u}(\vec{r}) = \vec{u}(\vec{r}+\vec{dr}) - \vec{u}(\vec{r})$$

Chapter 3

应力应变关系

1 各向同性

拉梅系数 λ, μ, 其中 μ 后面会看到是剪切模量, λ 没有物理意义

$$\sigma = 2\mu\epsilon + \lambda \operatorname{tr}\epsilon I$$

$$\begin{pmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\\ \sigma_{23}\\ \sigma_{13}\\ \sigma_{12}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\mu+\lambda & \lambda & \lambda & & & \\ \lambda & 2\mu+\lambda & \lambda & & & \\ \lambda & \lambda & 2\mu+\lambda & & & \\ & & & 2\mu & & \\ & & & & 2\mu & \\ & & & & & 2\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\epsilon_{11}\\ \epsilon_{22}\\ \epsilon_{33}\\ \epsilon_{23}\\ \epsilon_{13}\\ \epsilon_{12}\end{pmatrix}$$

实践中一般对应力提要求, 想象一下也比较符合直觉：可以期待在只对表面施加轴向或一个平面内的外力时应力也是轴向或者在一个平面内, 其他分量为零, 但很难期待只在一个方向产生应变而其他方向不产生应变. 考虑单轴拉伸压缩实验, 则

$$\sigma_{11} = F/S, \quad \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{23} = \sigma_{13} = \sigma_{12} = 0$$

考虑方程组的前三行

$$\sigma_{11} = 2\mu\epsilon_{11} + \lambda \operatorname{tr}\epsilon, \quad 0 = 2\mu\epsilon_{22} + \lambda \operatorname{tr}\epsilon, \quad 0 = 2\mu\epsilon_{33} + \lambda \operatorname{tr}\epsilon$$

将这三个式子求和得到

$$\sigma_{11} = (2\mu + 3\lambda) \operatorname{tr}\epsilon$$

代回第一个式子消去 $\operatorname{tr}\epsilon$ 得到

$$\frac{\sigma_{11}}{\epsilon_{11}} = \frac{\mu(2\mu+3\lambda)}{\mu+\lambda} := E$$

代回第二个式子得到 ϵ_{11} 和 ϵ_{22} 之间的关系

$$-\frac{\epsilon_{22}}{\epsilon_{11}} = \frac{\lambda}{2(\mu+\lambda)} := \nu$$

通过 E 和 ν 反解出 λ 和 μ 得到

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\begin{pmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\\ \sigma_{23}\\ \sigma_{13}\\ \sigma_{12}\end{pmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{pmatrix}1-\nu & \nu & \nu & & & \\ \nu & 1-\nu & \nu & & & \\ \nu & \nu & 1-\nu & & & \\ & & & 1-2\nu & & \\ & & & & 1-2\nu & \\ & & & & & 1-2\nu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\epsilon_{11}\\ \epsilon_{22}\\ \epsilon_{33}\\ \epsilon_{23}\\ \epsilon_{13}\\ \epsilon_{12}\end{pmatrix}$$

考虑平面应力问题, 即 $\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$, 根据应力应变关系, 后两个为零蕴含着 $\epsilon_{13} = \epsilon_{23} = 0$, 第一个 $\sigma_{33} = 0$ 蕴含着

$$\nu(\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) + (1-\nu)\epsilon_{33} = 0 \Longrightarrow \epsilon_{33} = \frac{\nu}{\nu-1}(\epsilon_{11} + \epsilon_{22})$$

这样一来 ϵ_{33} 就用 ϵ_{11} 和 ϵ_{22} 表示出来了, 也就是说 σ_{11} 和 σ_{22} 也可以仅用 ϵ_{11} 和 ϵ_{22} 表示, 整理得到

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_{11} + \nu\epsilon_{22}), \quad \sigma_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}(\nu\epsilon_{11} + \epsilon_{22}), \quad \sigma_{12} = \frac{E}{1+\nu}\epsilon_{12}$$

写成矩阵形式就是

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{12} \end{pmatrix}$$

Chapter 4

有限元方法

1 变分形式

总结前三章, 我们建立了线弹性静力学的如下方程组

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j} + f_i = 0 \\ \sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl} \\ \epsilon_{ij} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \end{cases}$$

其中 f_i 是体力, 认为是已知量; 而 C_{ijkl} 是弹性张量, 也认为是已知量; 未知量是 u, ϵ, σ, 一共 15 个未知量; 第一组方程是平衡方程, 共 3 个; 第二组方程是应力应变关系, 是线性方程, 共 6 个; 第三组方程是应变张量 ϵ 的定义式, 共 6 个, 所以也一共 15 个方程, 与未知量个数刚好匹配.

常用的边界条件是 Dirichlet 边界条件, 即边界的某部分被固定, 位移场为零

$$u_i = 0, \quad x \in \Gamma_1$$

和 Neumann 边界条件, 即边界的某部分施加了面力 g_i

$$\sigma_{ij}n_j = g_i, \quad x \in \Gamma_2$$

下面我们导出这个问题的变分形式. 将 ϵ_{ij} 写作 $\epsilon_{ij}(u)$ 以示区分. 设 $u, \epsilon(u), \sigma$ 是满足以上偏微分方程组与边值条件的解, 设 v 是测试函数, 将 v 乘到平衡方程两端并在 Ω 上积分

$$-\int_\Omega \sigma_{ij,j} v_i \mathrm{d}x = \int_\Omega f_i v_i \mathrm{d}x$$

由分部积分得

$$-\int_\Omega \sigma_{ij,j} v_i \mathrm{d}x = \int_\Omega \sigma_{ij} v_{i,j} \mathrm{d}x - \int_\Gamma \sigma_{ij} v_i n_j \mathrm{d}S = \int_\Omega \sigma_{ij}\epsilon_{ij}(v) \mathrm{d}x - \int_\Gamma \sigma_{ij} v_i n_j \mathrm{d}S$$

用上边界条件得到

$$\int_\Omega C_{ijkl}\epsilon_{kl}(u)\epsilon_{ij}(v) \mathrm{d}x = \int_\Omega f_i v_i \mathrm{d}x + \int_{\Gamma_2} g_i v_i \mathrm{d}S.$$

2 二维问题

$$\int_\Omega \sigma_{ij}\epsilon_{ij}(v)\mathrm{d}x = \int_\Omega f_i v_i \mathrm{d}x + \int_{\Gamma_2} g_i v_i \mathrm{d}S$$

左侧是九项求和. 当考虑二维问题时, 变成四项求和

$$\sigma_{11}\epsilon_{11}(v) + \sigma_{22}\epsilon_{22}(v) + \sigma_{12}\epsilon_{12}(v) + \sigma_{21}\epsilon_{21}(v) = \sigma_{11}\epsilon_{11}(v) + \sigma_{22}\epsilon_{22}(v) + 2\sigma_{12}\epsilon_{12}(v)$$

将 $2\epsilon_{12}$ 写成 γ_{12}, 就变成三项求和

$$\sigma_{11}\epsilon_{11}(v) + \sigma_{22}\epsilon_{22}(v) + \sigma_{12}\gamma_{12}(v)$$

而 $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$ 与 $\epsilon_{11}(u), \epsilon_{22}(u), \gamma_{12}(u)$ 之间的关系是

$$\begin{pmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{12}\end{pmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{pmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1-\nu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\epsilon_{11}\\ \epsilon_{22}\\ \epsilon_{12}\end{pmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{pmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\epsilon_{11}\\ \epsilon_{22}\\ \gamma_{12}\end{pmatrix} =: D\begin{pmatrix}\epsilon_{11}\\ \epsilon_{22}\\ \gamma_{12}\end{pmatrix}$$

这样一来第一项就变成

$$\int_\Omega \begin{pmatrix}\epsilon_{11}(u) & \epsilon_{22}(u) & \gamma_{12}(u)\end{pmatrix} D \begin{pmatrix}\epsilon_{11}(v)\\ \epsilon_{22}(v)\\ \gamma_{12}(v)\end{pmatrix}\mathrm{d}x$$

u 是 Ω 上的向量值函数, 而二维问题只有两个分量 u_x, u_y 且在 z 方向上没有变换因此可视为自变量是二元的函数. 在四边形单元上, 使用节点的值进行线性插值

$$u = u_1 N_1 + u_2 N_2 + u_3 N_3 + u_4 N_4$$

考虑四边形单元 $[-a, a] \times [-b, b]$, 从右上角开始逆时针编号, 从而

$$N_1(x,y) = \frac{1}{4}(1+\frac{x}{a})(1+\frac{y}{b}), N_2(x,y) = \frac{1}{4}(1-\frac{x}{a})(1+\frac{y}{b}), N_3(x,y) = \frac{1}{4}(1-\frac{x}{a})(1-\frac{y}{b}), N_4(x,y) = \frac{1}{4}(1+\frac{x}{a})(1-\frac{y}{b})$$

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix}(1+k\frac{y}{b})\frac{l}{a} & 0 & (1+l\frac{x}{a})\frac{k}{b}\\ 0 & (1+l\frac{x}{a})\frac{k}{b} & (1+k\frac{y}{b})\frac{l}{a}\end{pmatrix}\frac{E}{1-\nu^2}\begin{pmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}\end{pmatrix}\frac{1}{4}\begin{pmatrix}(1+m\frac{y}{b})\frac{n}{a} & 0\\ 0 & (1+n\frac{x}{a})\frac{m}{b}\\ (1+n\frac{x}{a})\frac{m}{b} & (1+m\frac{y}{b})\frac{n}{a}\end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{16}\frac{E}{1-\nu^2}\begin{pmatrix}\frac{ln}{a^2}(1+\frac{ky}{b})(1+\frac{my}{b}) + \frac{1-\nu}{2}\frac{km}{b^2}(1+\frac{lx}{a})(1+\frac{nx}{a}) & \nu\frac{lm}{ab}(1+\frac{ky}{b})(1+\frac{nx}{a}) + \frac{1-\nu}{2}\frac{kn}{ab}(1+\frac{my}{b})(1+\frac{lx}{a})\\ \frac{1-\nu}{2}\frac{lm}{ab}(1+\frac{ky}{b})(1+\frac{nx}{a}) + \nu\frac{kn}{ab}(1+\frac{my}{b})(1+\frac{lx}{a}) & \frac{km}{b^2}(1+\frac{lx}{a})(1+\frac{nx}{a}) + \frac{1-\nu}{2}\frac{ln}{a^2}(1+\frac{ky}{b})(1+\frac{my}{b})\end{pmatrix}$$

在 $[-a, a] \times [-b, b]$ 上进行积分, 我们只需要仔细算两个, 其他的都只是换换字母

$$\int_{-b}^{b}(1+\frac{ky}{b})(1+\frac{my}{b})\mathrm{d}y = (2+\frac{2km}{3})b$$

$$\frac{1}{16}\frac{E}{1-\nu^2}\begin{pmatrix}\frac{4b}{a}ln(1+\frac{km}{3}) + \frac{1-\nu}{2}\frac{4a}{b}km(1+\frac{nl}{3}) & 4\nu lm + 2(1-\nu)kn\\ 2(1-\nu)lm + 4\nu kn & \frac{1-\nu}{2}\frac{4b}{a}ln(1+\frac{km}{3}) + \frac{4a}{b}km(1+\frac{nl}{3})\end{pmatrix}$$

lk 和 nm 各有四组取值, N_1 对应 $l = n = 1, k = m = 1$, N_2 对应 $l = n = -1, k = m = 1$, N_3 对应 $l = n = -1, k = m = -1$, N_4 对应 $l = n = 1, k = m = -1$. 小块的主对角线元最终取值只与 $l \times n$ 和 $k \times m$ 的值有关

1. $ln = 1$ 且 $km = 1$, 这就是对角线的四小块,

$$k_{11} = k_{33} = k_{55} = k_{77} = \frac{16}{3}(\frac{b}{a} + \frac{1-\nu}{2}\frac{a}{b})$$

$$k_{22} = k_{44} = k_{66} = k_{88} = \frac{16}{3}(\frac{a}{b} + \frac{1-\nu}{2}\frac{b}{a})$$

2. $ln = 1$ 且 $km = -1$, 这就是 $N_1N_4, N_4N_1, N_2N_3, N_3N_2$

$$k_{17} = k_{35} = k_{53} = k_{71} = \frac{8}{3}(\frac{b}{a} - (1-\nu)\frac{a}{b})$$

$$k_{28} = k_{46} = k_{64} = k_{82} = \frac{4}{3}((1-\nu)\frac{b}{a} - \frac{4a}{b})$$

3. $ln = -1$ 且 $km = 1$, 这就是 $N_1N_2, N_2N_1, N_3N_4, N_4N_3$

$$k_{13} = k_{57} = k_{31} = k_{75} = \frac{4}{3}((1-\nu)\frac{a}{b} - \frac{4b}{a})$$

$$k_{24} = k_{68} = k_{42} = k_{86} = \frac{8}{3}(\frac{a}{b} - (1-\nu)\frac{b}{a})$$

4. $ln = -1$ 且 $km = -1$, 这就是 $N_1N_3, N_3N_1, N_2N_4, N_4N_2$

$$k_{15} = k_{37} = k_{51} = k_{73} = -\frac{8}{3}(\frac{b}{a} + \frac{1-\nu}{2}\frac{a}{b})$$

$$k_{26} = k_{48} = k_{62} = k_{84} = -\frac{8}{3}(\frac{a}{b} + \frac{1-\nu}{2}\frac{b}{a})$$

小块的副对角线元最终取值只与 $l \times m$ 和 $k \times n$ 的值有关

1. $lm = 1$ 且 $kn = 1$ 的右上角与左下角, 这就是 $N_1N_1, N_3N_3, N_2N_4, N_4N_2$,

$$k_{12} = k_{56} = k_{38} = k_{74} = 2 + 2\nu$$

$$k_{21} = k_{65} = k_{47} = k_{83} = 2 + 2\nu$$

2. $lm = -1$ 且 $kn = -1$ 的右上角与左下角, 这就是 $N_1N_3, N_3N_1, N_2N_2, N_4N_4$

$$k_{16} = k_{52} = k_{34} = k_{78} = -2 - 2\nu$$

$$k_{25} = k_{61} = k_{43} = k_{87} = -2 - 2\nu$$

3. $lm = 1$ 且 $kn = -1$ 的右上角, 这就是 $N_1N_2, N_2N_3, N_3N_4, N_4N_1$ 的右上角

$$k_{14} = k_{36} = k_{58} = k_{72} = 6\nu - 2$$

$lm = -1$ 且 $kn = 1$ 的左下角, 这就是 $N_1N_4, N_2N_1, N_3N_2, N_4N_3$ 的左下角

$$k_{27} = k_{41} = k_{63} = k_{85} = 6\nu - 2$$

4. $lm = -1$ 且 $kn = 1$ 的右上角, 这就是 $N_1N_4, N_2N_1, N_3N_2, N_4N_3$ 的右上角

$$k_{18} = k_{32} = k_{54} = k_{76} = 2 - 6\nu$$

$lm = 1$ 且 $kn = -1$ 的左下角, 这就是 $N_1N_2, N_2N_3, N_3N_4, N_4N_1$ 的左下角

$$k_{23} = k_{45} = k_{67} = k_{81} = 2 - 6\nu$$

Chapter 5

固体中的弹性波

$$\nabla \cdot \vec{\vec{\sigma}} = -\omega^2 \rho \vec{u}$$

式子的左右两侧都是二维向量. 任取虚位移 $\vec{v}$, 两侧做点积并积分, 右侧得到

$$-\omega^2 \int_\Omega \rho u_i v_i = -\omega^2 \sum_e \rho_e \int_{\Omega_e} \begin{pmatrix} v_x & v_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$$

$$\int_{\Omega_e} \begin{pmatrix} v_{x3} & v_{y3} & v_{x4} & v_{y4} & v_{x1} & v_{y1} & v_{x2} & v_{y2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_3 & 0 \\ 0 & N_3 \\ N_4 & 0 \\ 0 & N_4 \\ N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_1 & 0 & N_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{x3} \\ u_{y3} \\ u_{x4} \\ u_{y4} \\ u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{36} \begin{pmatrix} v_{x3} & v_{y3} & v_{x4} & v_{y4} & v_{x1} & v_{y1} & v_{x2} & v_{y2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{x3} \\ u_{y3} \\ u_{x4} \\ u_{y4} \\ u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \end{pmatrix}$$

Part II

流体力学

我们称静止时处处的应力张量都不具有剪切分量的连续体为流体. 而我们允许流体在运动时有剪切分量, 这也反映了流体的粘性. 如果假设运动时也没有剪切分量, 也就是假设流体无粘, 那么称之为理想流体.

Chapter 6

流体力学的基本概念

1 应力张量

理想流体的应力张量

理想流体忽略粘性, 即忽略剪切应力. 这样一来理想流体中任何一点沿任何方向都是应力张量的特征矢量, 所以应力张量作为线性变换只能是标量变换,

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{pmatrix}$$

取负号的原因是强调力是压力（因为流体不能承受拉力）. 由此可见, 在理想流体中, 只要用一个标量函数 P 便可完全刻画任一点的应力状态.

Chapter 7

流体力学的基本方程

1　连续性方程

采用欧拉描述, 考虑密度场 $\rho(\vec{r},t)$ 和速度场 $\vec{v}(\vec{r},t)$, 选择某个区域 V, 则 t 时区域 V 的质量为

$$m=\int_V \rho(\vec{r},t)\mathrm{d}\vec{r}$$

质量关于时间的变化率为

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}(\vec{r},t)\mathrm{d}\vec{r}$$

根据物理直觉, 质量关于时间的变化率同样可以表示为

$$\int_{\partial V}\rho\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\int_V \nabla\cdot(\rho\vec{v})\mathrm{d}\vec{r}$$

当 $\vec{v}$ 朝外时, 表示质量减少, 比较正负号可得

$$\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}\mathrm{d}\vec{r}+\int_V \nabla\cdot(\rho\vec{v})\mathrm{d}\vec{r}=0\Longrightarrow\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\vec{v})=0$$

或者将后一项展开

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\rho\cdot\vec{v}+\rho(\nabla\cdot\vec{v})=\frac{D\rho}{Dt}+\rho(\nabla\cdot\vec{v})=0$$

但按照另一种观点似乎说不通, 转换回拉格朗日描述, 一直考虑这堆质点

$$m=\int_V \rho(\vec{r},t)\mathrm{d}\vec{r}=\int_{V_0}\rho(\vec{r}(x_0,t),t)\cdot J\mathrm{d}x$$

2 哔哩哔哩

考虑静止均匀理想流体,（其实在我们研究的范围内，是两种材料的耦合，porous 和 rigid，首先并不均匀，其次感觉也并不是流体）

连续性方程

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho\Delta V) = \rho\frac{\mathrm{d}\Delta V}{\mathrm{d}t} + \Delta V\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = 0 \\
\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\Delta V}\frac{\mathrm{d}\Delta V}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}t} = -\nabla\cdot\vec{v} \\
\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho\nabla\cdot\vec{v} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{v}) = 0
\end{aligned}
$$

运动方程

$$
\begin{gathered}
(\rho\Delta V)\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -\int_{\Delta S} P\mathrm{d}S = -\int_{\Delta V}\nabla\cdot P\mathrm{d}V \\
\rho\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + \nabla\cdot P = 0
\end{gathered}
$$

物态方程

$$
PV^{\gamma} \equiv const, \quad P\rho^{-\gamma} \equiv const
$$

$$
\begin{gathered}
\rho^{-\gamma}\mathrm{d}P - \gamma\rho^{-\gamma-1}P\mathrm{d}\rho = 0 \\
\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\rho} = \frac{\gamma P}{\rho}
\end{gathered}
$$

上述都只是理想流体满足的方程, 其中 P 和 ρ 都是绝对量, 并没有跟声波建立联系. 声波是理想流体的小扰动.

最后我们得到声压的波动方程

$$\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \nabla^2 p$$

然后看维基百科讲声速的, 声速平方是模量跟密度之比, 对流体来说模量取体积模量, 对固体来说是杨氏模量, 流体是特殊的弹性体, 看看对于流体来说体积模量和杨氏模量是不是相等的。然后假设 p 是时谐的，丢掉时间部分只取空间部分仍记作 p 就得到论文中的方程了. 但这方程肯定哪有问题, 因为为了有限元是需要密度在散度算符的里面的. 并且我对于它的论文直接用体积模量也挺表示怀疑的.

Part III

声学

Chapter 8

理想流体

稳态且时谐的声压 p 服从标量 Helmholtz 方程

$$\nabla \cdot (\rho^{-1}\nabla p) + \omega^2\kappa^{-1}p = 0, \quad x \in \Omega$$

其中 ρ 和 κ 代表物质的密度和体积模量. 设 $\tilde{p}$ 是测试函数, 在方程两端同乘 $\tilde{p}$ 并在 Ω 上积分得到

$$\int_\Omega \tilde{p}\nabla \cdot (\rho^{-1}\nabla p) + \int_\Omega \rho^{-1}\nabla\tilde{p}\cdot\nabla p = \int_\Omega \nabla\cdot(\tilde{p}\rho^{-1}\nabla p) = \int_{\partial\Omega}\tilde{p}\rho^{-1}\nabla p\cdot\vec{n}$$

$$\int_\Omega \rho^{-1}\nabla\tilde{p}\cdot\nabla p - \int_\Omega \omega^2\kappa^{-1}p\tilde{p} - \int_{\partial\Omega}\tilde{p}\rho^{-1}\nabla p\cdot\vec{n} = 0$$

考虑四边形单元,

$$p = p_1N_1 + p_2N_2 + p_3N_3 + p_4N_4 = \begin{pmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix}$$

其中

$$N_1(x,y) = \frac{1}{4}(1+2x)(1+2y), N_2 = \frac{1}{4}(1-2x)(1+2y), N_3 = \frac{1}{4}(1-2x)(1-2y), N_4 = \frac{1}{4}(1+2x)(1-2y)$$

那么梯度 ∇p 可以计算如下（可类比根据位移计算应变, 但梯度的关系更加直接简单）

$$\nabla p = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix} p = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+2y & -1-2y & -1+2y & 1-2y \\ 1+2x & 1-2x & -1+2x & -1-2x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix}$$

这样一来在一个单元 $[-0.5, 0.5]\times[-0.5, 0.5]$ 上 $\int_\Omega \nabla\tilde{p}\cdot\nabla p$ 可以计算如下

$$\frac{1}{4}\int_{[-0.5,0.5]}\int_{[-0.5,0.5]}\begin{pmatrix} \tilde{p}_1 & \tilde{p}_2 & \tilde{p}_3 & \tilde{p}_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+2y & 1+2x \\ -1-2y & 1-2x \\ -1+2y & -1+2x \\ 1-2y & -1-2x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+2y & -1-2y & -1+2y & 1-2y \\ 1+2x & 1-2x & -1+2x & -1-2x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix}$$

完成积分的计算, 最终得到的结果是

$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix}\tilde{p}_1 & \tilde{p}_2 & \tilde{p}_3 & \tilde{p}_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -1 & -2 & -1\\ -1 & 4 & -1 & -2\\ -2 & -1 & 4 & -1\\ -1 & -2 & -1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_1\\ p_2\\ p_3\\ p_4\end{pmatrix}$$

同样的在一个单元上 $\int_\Omega \tilde{p}p$ 可以类似计算

$$\frac{1}{36}\begin{pmatrix}\tilde{p}_1 & \tilde{p}_2 & \tilde{p}_3 & \tilde{p}_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 2 & 1 & 2\\ 2 & 4 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 4 & 2\\ 2 & 1 & 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_1\\ p_2\\ p_3\\ p_4\end{pmatrix}$$

接下来我们讨论声压 p 应该满足的边界条件, 以处理 $\int_{\partial\Omega} \tilde{p}\rho^{-1}\nabla p\cdot\vec{n}$ 这一项. 根据 Gil Ho Yoon 的 2007 年的 IJNME 论文, 一共 4 类边界条件

$$\begin{aligned}\text{Pressure boundary condition: } & p = p_0\\ \text{Hard wall condition: } & \mathbf{n}\cdot\nabla p = 0\\ \text{Acceleration boundary condition: } & \mathbf{n}\cdot\nabla p = a_n\\ \text{Sommerfeld boundary condition: } & \mathbf{n}\cdot\nabla p + i\cdot\mathbf{k}\cdot p = 2i\cdot\mathbf{k}\cdot p_{\text{in}}\end{aligned}$$

假设采取 Acceleration boundary condition,

1 声振耦合

声振耦合是说, 定义域 Ω 分为 Ω_a 和 Ω_s 两部分, Ω_a 由空气占据, Ω_s 由固体占据. 单独看 Ω_a, 这是一个纯声波问题, 需要求解的是处处的声压 p. 单独看 Ω_s, 这是一个纯弹性波问题, 需要求解的是处处的位移 $\vec{u}$. 声振耦合是多物理场耦合的问题, 特别是两个物理场服从的方程并不相同. 二者发生耦合的位置在交界面处, 互相成为边界条件. 研究 Ω_a, 那么弹性体的振动激发声波, 准确来说

$$\vec{n}\cdot\nabla p=\omega^2\rho_a\vec{n}\cdot\vec{u}$$

(这里 $\vec{n}$ 是从 Ω_a 往外指的外法向, 虽然这个不影响, 但下面积分项中 $\vec{n}$ 是 Ω_a 往外指的外法向) 应该将这个式子理解为牛顿第二定律, 给整个式子同乘上时间因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$, 则

$$-\vec{n}\cdot\rho_a\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\vec{n}\cdot\nabla(p\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t})=\omega^2\rho_a\vec{n}\cdot\vec{u}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}=-\rho_a\vec{n}\cdot\frac{\mathrm{d}^2\vec{u}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\mathrm{d}t^2}$$

从而可以看到这个式子是说边界处空气微元与弹性体微元有相同的加速度. 从有限元编程的角度来看, 这个边界条件属于前面提过的 Acceleration boundary condition. 考虑 Ω_a 中交界处的一个单元

$$\int_{\partial\Omega}\tilde{p}\rho_a^{-1}\nabla p\cdot\vec{n}\mathrm{d}\Gamma=\int_{\partial\Omega}\tilde{p}\omega^2\vec{n}\cdot\vec{u}\mathrm{d}\Gamma=\omega^2\int_{\partial\Omega}N_a\tilde{\mathbf{p}}\vec{n}^TN_s\mathbf{u}\mathrm{d}\Gamma=\omega^2\tilde{\mathbf{p}}^T\int_{\partial\Omega}N_a^T\vec{n}^TN_s\mathrm{d}\Gamma\mathbf{u}$$

这里我默认 N_a,N_s 是行向量, 而 $\tilde{\mathbf{p}},\mathbf{u},\vec{n}$ 是列向量. 记

$$S_e=\int_{\partial\Omega}N_s^T\vec{n}N_a,\quad S_u=\sum S_e^T,\quad \mathbf{f}_a^u=\omega^2S_u\mathbf{u}.$$

接下来研究 Ω_s, 那么声压成为弹性体的面压力, 准确来说,

$$\vec{g}=-p\vec{n}$$

(这里 $\vec{n}$ 是从 Ω_s 往外指的外法向, 所以上面要加一个负号, 之所以这样要求是为了跟上面的情形保持一致,$\vec{n}$ 永远是当前单元往外指的外法向) 这是 Neumann 边界条件. 考虑 Ω_s 中交界处的单元,

$$\int_{\partial\Omega}\vec{g}\tilde{\vec{u}}\mathrm{d}\Gamma=-\int_{\partial\Omega}p\vec{n}\tilde{\vec{u}}\mathrm{d}\Gamma=-\mathbf{p}^T\int_{\partial\Omega}N_a^T\vec{n}^TN_s\mathrm{d}\Gamma\tilde{\mathbf{u}}=-\mathbf{p}^TS_e^T\tilde{\mathbf{u}}=-\tilde{\mathbf{u}}^TS_e\mathbf{p}$$

记 $S_p=\sum S_e$,$\mathbf{f}_s^p=S_p\mathbf{p}$, 于是我们有以下线性方程组

$$\begin{aligned}(K_s-\omega^2M_s)\mathbf{u}&=\mathbf{f}_s+\mathbf{f}_s^p=\mathbf{f}_s-S_p\mathbf{p}\\(K_a-\omega^2M_a)\mathbf{p}&=\mathbf{f}_a+\mathbf{f}_a^u=\mathbf{f}_a+\omega^2S_u\mathbf{u}\end{aligned}$$

或者可以写成

$$\left(\begin{bmatrix}K_s&-S^T\\0&K_a\end{bmatrix}-\omega^2\begin{bmatrix}M_s&0\\S&M_a\end{bmatrix}\right)\begin{pmatrix}\mathbf{u}\\\mathbf{p}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{f}_s\\\mathbf{f}_a\end{pmatrix}.$$

以上求解方式, 显然需要我们明确知道 Ω_a 与 Ω_s 的几何边界, 因此并不适用于使用连续值作为设计变量的拓扑优化. 文献中提出了许多解决方式, 下面介绍一二

使用一个方程统一声波和弹性波方程

回忆流体是静止时应力张量没有剪切分量的弹性体, 也就是流体静止时的应力张量是标量矩阵. 为了让弹性波满足的方程可以在应力张量是标量矩阵时退化为声波方程, 我们将 σ 和 ϵ 进行分解

$$\sigma=\frac{\operatorname{tr}\sigma}{3}I+\left(\sigma-\frac{\operatorname{tr}\sigma}{3}I\right)=\sigma_{\text{球}}+\sigma_{\text{斜}},\quad \epsilon=\frac{\operatorname{tr}\epsilon}{3}I+\left(\epsilon-\frac{\operatorname{tr}\epsilon}{3}I\right)=\epsilon_{\text{球}}+\epsilon_{\text{斜}}$$

回忆使用拉梅系数 λ, μ 表达的应力应变关系是 $\sigma = 2\mu\epsilon + \lambda \operatorname{tr} \epsilon I$, 改成用体积模量 K 和剪切模量 μ,

$$\sigma = K \operatorname{tr} \epsilon I + 2\mu \left(\epsilon - \frac{\operatorname{tr} \epsilon}{3} I \right)$$

比较得到

$$\frac{\operatorname{tr} \sigma}{3} = K \operatorname{tr} \epsilon, \quad \sigma - \frac{\operatorname{tr} \sigma}{3} I = 2\mu \left(\epsilon - \frac{\operatorname{tr} \epsilon}{3} I \right)$$

将 σ 和 ϵ 写成列向量得到 $\sigma = C\epsilon$, 相应的分量之间也满足 $\sigma_{\text{球}} = C\epsilon_{\text{球}}, \sigma_{\text{斜}} = C\epsilon_{\text{斜}}$. 回忆弹性波满足

$$-\nabla \cdot \sigma = \omega^2 \rho_s \vec{u}$$

其弱形式的推导完全类似之前,

$$-\int_\Omega \sigma_{ij,j} v_i \mathrm{d}x = \int_\Omega \sigma_{ij} v_{i,j} \mathrm{d}x - \int_\Gamma \sigma_{ij} v_i n_j \mathrm{d}S = \int_\Omega \sigma_{ij} \epsilon_{ij}(v) \mathrm{d}x - \int_\Gamma \sigma_{ij} v_i n_j \mathrm{d}S$$

$$\int_\Omega \sigma_{ij} \epsilon_{ij}(v) \mathrm{d}x = \int_\Omega \epsilon(v) C \epsilon(u) \mathrm{d}x = \int_\Omega \epsilon(v)_{\text{球}} C \epsilon(u)_{\text{球}} + \epsilon(v)_{\text{斜}} C \epsilon(u)_{\text{斜}} \mathrm{d}x$$

考虑到流体情形中 $\sigma_{\text{斜}} = 0$ 而 $\sigma = \sigma_{\text{球}} = -pI$, 所以令 $\sigma_{\text{球}} = K \operatorname{tr} \epsilon = -pI$, 积分方程变为

$$\int_\Omega -p\epsilon(v)_{\text{球}} + \epsilon(v)_{\text{斜}} C \epsilon(u)_{\text{斜}} \mathrm{d}x - \int_\Gamma \sigma_{ij} v_i n_j \mathrm{d}S = \omega^2 \int_\Omega \rho u_i v_i \mathrm{d}x$$

将 p 视为额外的变量, 所以需要额外的方程,

$$\int_\Omega (\frac{p}{K} + \operatorname{tr} \epsilon) \tilde{p} \mathrm{d}x = 0.$$

使用连续变量计算边界的有限元编程项

$$\begin{tikzcd}
 & \text{周期边界条件} \arrow[dr] & & & \text{约束条件} \arrow[dr] & \\
 & & \text{有限元方程} \arrow[r] & \text{物理场} \arrow[r] & \text{目标函数} \arrow[r] & \text{更新设计变量} \\
\text{设计变量} \arrow[r] & E, \rho, \kappa \arrow[ur] & & & &
\end{tikzcd}$$

2 编程复现

固体的参数杨氏模量 $E = 0.38$ Gpa, 密度 $\rho_s = 1190$ kg/m³, 泊松比 $\nu = 0.35$. 虚构的固体的参数杨氏模量 $E_v = 10^{-6}E$, 密度 $\rho_v = 10^{-7}\rho_s$. 用到的插值模型是

$$E_e = E_v + \frac{\xi_e}{1 + q(1-\xi_e)}(E - E_v), \quad \rho_e = \rho_v + \xi_e(\rho_s - \rho_v).$$

当 $\xi_e \equiv 0$, 即没有固体材料时, $E_e = E_v, \rho_e = \rho_v$. 当 $\xi_e \equiv 1$, 即全是固体材料时, $E_e = E, \rho_e = \rho_s$.

空气的参数密度 $\rho_a = 1.225$ kg/m³, 声速 $c_a = 340$m/s, 体积模量 $\kappa = 141834.999$. 虚构的气体的参数密度 $\rho_v = 10^6\rho_a$, 体积模量 $\kappa_v = 10^7\kappa$. 用到的插值模型是

$$\frac{1}{\kappa_e} = \frac{1}{\kappa} + \xi_e(\frac{1}{\kappa_v} - \frac{1}{\kappa}), \quad \frac{1}{\rho_e} = \frac{1}{\rho_a} + \frac{\xi_e}{1 + q(1-\xi_e)}(\frac{1}{\rho_v} - \frac{1}{\rho_a}).$$

当 $\xi_e \equiv 0$, 即全是气体材料时, $\kappa_e = \kappa, \rho_e = \rho_a$. 当 $\xi_e \equiv 1$, 即全是固体材料时, $\kappa_e = \kappa_v, \rho_e = \rho_v$.

3 周期边界条件

我们尊重论文, 保留中间、左边、下边和左下角. 但是跟他组装矩阵的思路不同, 我打算左右各按标准的顺序排开, 这样就有大部分的 1 出现在对角元的位置, 然后只需要记录少部分需要用其他元素来表示的就可以了. 少部分需要用其他元素来表示的是最上面一条边和最右一条边

$$1,\underbrace{(nely+1)+1,\cdots,(nely+1)(nelx-1)+1}_{\text{代表上边中间的}nelx-1\text{个}},(nely+1)nelx+1,\underbrace{(nely+1)nelx+2,\cdots,(nely+1)nelx+nely}_{\text{代表右边中间的}nely-1\text{个}},(nely+1)nelx+(nely+1)$$

把这些节点的编号记录一下, 剩下那些不动的节点的编号就很容易得到了. 然后再组装一个稀疏矩阵, 行的位置就是上面这些, 列的位置是

$$nely+1,\underbrace{2(nely+1),\cdots,nelx(nely+1)}_{\text{代表下边中间的}nelx-1\text{个}},nely+1,\underbrace{2,\cdots,nely}_{\text{代表左边中间的}nely-1\text{个}},nely+1$$

在转移矩阵相应的位置的值为

$$\underbrace{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu_y},\cdots,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu_y}}_{nelx\text{个}},\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu_x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu_y},\underbrace{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu_x},\cdots,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu_x}}_{nely\text{个}}$$