常微分方程

孙天阳

中国科学技术大学数学科学学院

tysun@mail.ustc.edu.cn

2021 年 8 月 5 日

目录

本科水平的微分方程, 不管是常微分方程还是偏微分方程, 不管是理论研究还是数值求解, 大部分内容涉及的是线性微分方程. 线性意味着如果 u_1 和 u_2 是方程的解, 那么二者的线性组合也是方程的解. 反过来说, 我们有机会把复杂的解分解为若干简单的解. 这个论断本身非常好理解, 但却是我们后面许多做法的立足点, 值得反复体会. 下一个问题是什么样的解是简单的解? 我现阶段给出的答案是形如 $\mathrm{e}^{\lambda t}$ 的解, 也就是简谐的解. 为什么? 可能是因为它是微分算子的特征函数.

考虑单质量弹簧系统 $m\ddot{x}=-kx$, 假设解 $x(t)$ 形如 $v\mathrm{e}^{\lambda t}$, 其中 v 是与 t 无关的常数, 代入方程得到 $(k+m\lambda^2)v=0$, 有非平凡解当且仅当 $\lambda^2=-k/m$. 可以看到 λ 是一个纯虚数, 设 $\lambda=\mathrm{i}\omega$, 则得到 $(k-m\omega^2)v=0$, 可以将它看作一个广义特征值问题, 称 ω 为特征频率, $v=1$ 为特征向量. 也就是 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{k/m}t}$ 和 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{k/m}t}$ 都是解, 转化成实数形式就是说 $\cos(\sqrt{k/m}t)$ 和 $\sin(\sqrt{k/m}t)$ 都是解.

考虑带阻尼的系统 $m\ddot{x}=-kx-c\dot{x}$, 依旧假设解形如 $v\mathrm{e}^{\lambda t}$, 代入得到 $(m\lambda^2+c\lambda+k)v=0$, 这是一个二次特征值问题. 另一种处理方法是, 设 $z=(x,\dot{x})$, 得到

$$\dot{z}=\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \ddot{x}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dot{x}\\ -\dfrac{k}{m}x-\dfrac{c}{m}\dot{x}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{c}{m}\end{pmatrix}z=Az$$

这样我们就把一个二阶微分方程转化成了一个一阶微分方程组. 假设解 $z(t)$ 形如 $w\mathrm{e}^{\lambda t}$, 则 $Aw=\lambda w$, 即 λ 是 A 的特征值, 计算 A 的特征多项式得到 $m\lambda^2+c\lambda+k=0$, 与前面的二次特征值问题相同.

$$\lambda_1=\frac{-c+\sqrt{c^2-4mk}}{2m},\quad \lambda_2=\frac{-c-\sqrt{c^2-4mk}}{2m}$$

从 $Aw=\lambda w$ 我们可以得到 w 的第二分量等于 λ 倍第一分量, 所以 λ_i 对应的特征向量可以取为 $(1,\lambda_i)$. 这种方法被称为状态空间法, 实际上是更为系统、标准、严格的方法. 如果仍考虑之前的 $(m\lambda^2+c\lambda+k)v=0$, 会发现不论是 λ_1 还是 λ_2 得到的特征向量 v 都是 1, 这从特征向量的语言来说显然是有问题的, 这个问题出在我们隐去了或者说丢掉了不那么发挥作用的 $\dot{x}$ 的分量, 两个 1 实际上来自于 $(1,\lambda_1)$ 和 $(1,\lambda_2)$ 所以是不同的. 我们能安全丢掉 $\dot{x}$ 的分量是因为通过 $1\cdot\mathrm{e}^{\lambda_i t}$ 可以还原出所有信息. 包括前面不带阻尼的系统的例子也是, 称 $v=1$ 为特征向量是一种简便的而略带不严格的做法. 根据 c^2-4mk 的正负, 可以将带阻尼的系统分为过阻尼、临界阻尼和欠阻尼三种不同的情形.

- 当 $c^2-4mk>0$ 时, 为过阻尼, 此时有两个实的负特征值, $x(t)=C_1\mathrm{e}^{\lambda_1 t}+C_2\mathrm{e}^{\lambda_2 t}$.
- 当 $c^2-4mk<0$ 时, 为欠阻尼, 此时有两个复的特征值,

$$\lambda_{1,2}=-\frac{c}{2m}\pm\mathrm{i}\frac{\sqrt{4mk-c^2}}{2m}=-\zeta\omega_n\pm\mathrm{i}\omega_d,\quad \omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}},\zeta=\frac{c}{c_{\text{crit}}}=\frac{c}{2\sqrt{mk}},\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

- 当 $c^2-4mk=0$ 时, 为临界阻尼, 此时有一个二重实特征值 $-c/2m$, 但没有足够的特征向量

为了对这种没有足够特征向量的情况有一个好的理解, 我们回过头来从另一个角度看 A 有两个独立特征向量的情形, 此时任意时刻 z 可由特征向量线性表出, 即有 $z(t)=c_1(t)P_1+c_2(t)P_2$, 代入到 $\dot{z}=Az$, 得到 $\dot{c}_1(t)P_1+\dot{c}_2(t)P_2=\lambda_1c_1(t)P_1+\lambda_2c_2(t)P_2$, 比较系数得到 $\dot{c}_i=\lambda_ic_i$, 解得 $c_i=C_i\mathrm{e}^{\lambda_i t}$, 这样也反过来印证了我们一开始为什么要假设 $z(t)$ 形如 $w\mathrm{e}^{\lambda t}$ 的形式. 根据以上推导, 我们很自然知道没有足够特征向量的时候该怎么做, 即要求助于 Jordan 标准型理论, 寻找广义特征向量作为补充. 在这里, 我们寻找 $(A-\lambda I)P_2=P_1$, 即 $AP_2=\lambda P_2+P_1$. 这样一来我们又有了两个独立的向量,

$$\dot{c}_1(t)P_1+\dot{c}_2(t)P_2=(\lambda c_1(t)+c_2(t))P_1+\lambda c_2(t)P_2\Longrightarrow c_2(t)=C_2\mathrm{e}^{\lambda t},\quad c_1(t)=(C_1+C_2t)\mathrm{e}^{\lambda t}$$

$$z(t)=(C_1+C_2t)\mathrm{e}^{\lambda t}P_1+C_2\mathrm{e}^{\lambda t}P_2=C_1\mathrm{e}^{\lambda t}P_1+C_2\mathrm{e}^{\lambda t}(tP_1+P_2)=\mathrm{e}^{\lambda t}(C_1P_1+C_2P_2)+t\mathrm{e}^{\lambda t}C_2P_1$$

当 $t=0$ 时, $z(0)=C_1P_1+C_2P_2$, 所以可以看出 C_1,C_2 其实是初始条件 $z(0)$ 在基 P_1,P_2 下的坐标. 第一种观点, 关心系统在演化时它在 P_1,P_2 上的分量是如何随时间演化的, 可以看出 P_2 方向自己是一个纯粹的指数衰减, 而 P_1 方向包含了一个更复杂的带因子 t 的衰减. 这是由 P_2 激发的, 是因为 $AP_2=\lambda P_2+P_1$ 而不是 $AP_2=\lambda P_2$ 导致了 $\dot{c}_1(t)=\lambda c_1(t)+c_2(t)$ 而不是 $\dot{c}_1(t)=\lambda c_1(t)$ 所以 c_1 中要有额外的 $t\mathrm{e}^{\lambda t}$ 项. 第二种观点, 按照 C_1,C_2 来整理, 可以认为是两个基本解, 第一个是一个纯粹的沿 P_1 方向的指数衰减, 第二个也是一个指数衰减, 只不过它的向量初始状态是 P_2, 随后按照 tP_1+P_2 的规则收敛至 P_1. 第三种观点, 可以看出 $\mathrm{e}^{\lambda t}(C_1P_1+C_2P_2)=\mathrm{e}^{\lambda t}z(0)$ 是它自身的纯指数衰减, 而后一项可以写成 $t\mathrm{e}^{\lambda t}C_2P_1=t\mathrm{e}^{\lambda t}(A-\lambda I)z(0)$, 我们可以从如下角度去理解, $\dot{z}=Az$ 的解可以简洁地写为 $z(t)=\mathrm{e}^{At}z(0)$, 为了计算 e^{At}, 我们需要计算 A 的 Jordan 标准型 $A=PJP^{-1}$,

$$J=\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\lambda I+N,\quad \mathrm{e}^{Jt}=\mathrm{e}^{\lambda It}\mathrm{e}^{Nt},\quad \mathrm{e}^{Nt}=I+Nt+\frac{(Nt)^2}{2!}+\cdots=I+Nt$$

$$\mathrm{e}^{Jt}=(\mathrm{e}^{\lambda t}I)(I+Nt)=\mathrm{e}^{\lambda t}(I+Nt)=\mathrm{e}^{\lambda t}\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\lambda t} & t\mathrm{e}^{\lambda t}\\ 0 & \mathrm{e}^{\lambda t}\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{e}^{At}=P(\mathrm{e}^{\lambda t}(I+Nt))P^{-1}=\mathrm{e}^{\lambda t}(I+t(PNP^{-1}))=\mathrm{e}^{\lambda t}(I+t(P(J-\lambda I)P^{-1}))=\mathrm{e}^{\lambda t}(I+t(A-\lambda I))$$

$$\mathrm{e}^{At}=\mathrm{e}^{\lambda t}I+t\mathrm{e}^{\lambda t}(A-\lambda I),\quad z(t)=\mathrm{e}^{At}z(0)=\mathrm{e}^{\lambda t}z(0)+t\mathrm{e}^{\lambda t}(A-\lambda I)z(0).$$

通过以上讨论, 我们已经对特征模态和特征模态的缺失有了很好的理解, 接下来我们再举一个例子, 研究如下的双质量弹簧系统, 设两个质量块偏离平衡位置的位移分别为 x_1 和 x_2

$$\text{墙}|---k---[m]---k_c---[m]---k---|\text{墙}$$

取向右为正方向, 当 $x_1>0$ 时, 左侧的弹簧给左侧质量块向左的拉力, 所以应该是 $-kx_1$, 当 $x_2>0$ 时, 右侧的弹簧给右侧质量块向左的推力, 所以应该是 $-kx_2$, 当 $x_2-x_1>0$ 时, 中间的弹簧处于拉伸状态, 给左侧质量块向右的力, 给右侧质量块向左的力. 所以可以列出如下方程组

$$\begin{cases} m\dfrac{\mathrm{d}^2x_1}{\mathrm{d}t^2}=-kx_1+k_c(x_2-x_1)\\ m\dfrac{\mathrm{d}^2x_2}{\mathrm{d}t^2}=-kx_2-k_c(x_2-x_1)\end{cases}$$

设 $(x_1,x_2)^T=(v_1,v_2)^T\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$, 将上式代入到微分方程中, 得到

$$\begin{cases} -m\omega^2v_1=-(k+k_c)v_1+k_cv_2\\ -m\omega^2v_2=k_cv_1-(k+k_c)v_2\end{cases}\iff \begin{pmatrix}k+k_c & -k_c\\ -k_c & k+k_c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}=m\omega^2\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}$$

$$(k+k_c-m\omega^2)^2-k_c^2=0\Longrightarrow m\omega_1^2=k,\vec{v}_1=(1,1),\quad m\omega_2^2=k+2k_c,\vec{v}_2=(1,-1)$$

系统的第一个固有频率 ω_1 与中间弹簧 k_c 无关, $\vec{v}_1=(1,1)$ 说明两个质量块的振幅相等, 方向相同, 它们像一个整体一样, 同进同退, 中间弹簧的长度始终没有变化, 既不被压缩也不被拉伸, 系统的行为就好像中间弹簧不存在一样. 系统的第二个固有频率 ω_2 依赖于中间弹簧 k_c, $\vec{v}_2=(1,-1)$ 意味着两个质量块的振幅相等, 但方向相反. 在这种反向运动中, 中间的弹簧经历了剧烈的压缩和拉伸, 使得系统振荡得非常快, 因此频率更高. 任何这个双质量弹簧系统的自由振动, 无论初始条件如何, 都可以被看作是基本模态按不同比例的叠加.

$$x(t)=(A\cos(\omega_1t)+B\sin(\omega_1t))\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}+(C\cos(\omega_2t)+D\sin(\omega_2t))\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$$

通过四个初始条件 $x_1(0), x_1'(0), x_2(0), x_2'(0)$ 可以唯一确定系数 A, B, C, D. 从上面这个例子可以看出, 对特征模态的研究是非常有用的, 它可以让我们理解系统本身, 还可以得到所有自由振动的解.

上面我们直接假设 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ 而不是更一般的 $\mathrm{e}^{\lambda t}$, 实际上相当于我们有经验在这种无阻尼的情形 λ 一定是纯虚数所以设成了 $\mathrm{i}\omega$. 上面没有使用特征空间法, 因为对于无阻尼的情形, 只关心位移 x 的话不使用特征空间法也足够了, 我们依然把 $\vec{v}_1 = (1, 1)$ 称为特征向量, 上面已经讨论过这是一种简便而略带不严格的做法, 我们自己心里清楚就好了.

再总结一下到现在为止的结论, 实际上我们涉及到了两类问题, 一个是模态分析, 它研究一个系统的特征模态, 而不研究某个具体的真实发生的过程, 这是在频率域进行求解. 另一个是瞬态分析, 它研究给定初始状态后, 系统的状态随着时间的演化如何, 这是在时域进行求解. 以上两类问题, 有一个共同点, 即它们都是自由的, 而不是受迫的. 二者之间的联系是, 想求解系统状态随时间的演化, 那么就先将系统的初始状态在模态基下进行分解, 再让每个模态的分量按照指数形式独立演化. 当然模态缺失的情形需要另作处理.

受迫的意思是, 微分方程或边界条件中存在不依赖于未知函数的非零项, 它可以理解为一个外部的驱动力或者说源项, 这也是我们常说的非齐次问题. 对于非齐次问题, 我们惯常的做法是先考虑相应的齐次问题, 求得通解, 再求一个特解, 那么非齐次问题的解就是通解加上特解. 现在我们假设该外部激励是简谐的, 除了共振的情况外, 可以假设有一个与外部激励同频率的特解, 这同样是因为 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ 是微分算子的特征函数. 设

$$L = a_n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} + a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + a_0, \quad H(s) = a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$$

其中 $H(s)$ 被称为 L 的特征多项式, 它来自于 $L(\mathrm{e}^{st}) = H(s)\mathrm{e}^{st}$. 考虑 $L(y_p) = F_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$, 设

$$y_p = P\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \Longrightarrow L(P\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}) = PH(\mathrm{i}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} = F_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \Longrightarrow P = F_0/H(\mathrm{i}\omega)$$

共振的情况就是 $H(\mathrm{i}\omega) = 0$ 的情况. 这样, 在不共振的情况下, 在时域中的受迫瞬态分析就完成了. 如果想在频域中进行谐响应分析, 需要进一步额外假设通解的时间演化是衰减到 0 的, 这样才能分析在特定频率激励下的最终稳态行为. 谐响应分析就是分析 $F_0/H(\mathrm{i}\omega)$ 这个函数.

当发生共振, 也就是 $H(\mathrm{i}\omega) = 0$ 的情形, 我们使用算子湮灭法来求解. 考虑 $m\ddot{x} + kx = F_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_n t}$ 的例子, 记算子 $L = D^2 + \omega_n^2$, 那么原方程可写为 $mLx = F_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_n t}$, 而右侧被算子 L 作用为零, 所以 $mL^2x = 0$, 我们得到一个更高阶的齐次方程. 但本来的特征方程的单根 $\pm\mathrm{i}\omega_n$ 此时都变成二重根, 所以此时的解为 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_n t}, t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_n t}, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_n t}, t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_n t}$, 为了满足 $mLx = F_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_n t}$, 解为 $t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_n t}, t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_n t}$. 所以这里出现因子 t 的原因与临界阻尼的情形是一样的, 都是特征方程出现了重根, 只不过临界阻尼是系统自身的特征方程 $m\lambda^2 + c\lambda + k = 0$ 出现了重根, 而共振是进行过算子湮灭后的特征方程出现了重根.

Chapter 1

初等积分法

1.1 一阶线性方程

定理 1.1.1 (Gronwall 不等式). 设 $\psi(t)$ 满足

$$\psi(t) \leqslant \alpha(t) + \int_0^t \beta(s)\psi(s)\mathrm{d}s, \forall t \geqslant 0 \tag{1.1}$$

其中 $\beta(t)$ 非负, 那么

$$\psi(t) \leqslant \alpha(t) + \int_0^t \alpha(s)\beta(s)\mathrm{e}^{\int_s^t \beta(r)\mathrm{d}r}\mathrm{d}s, \forall t \geqslant 0 \tag{1.2}$$

证明. 首先想到的是考虑等式的情形,

$$\psi(t) = \alpha(t) + \int_0^t \beta(s)\psi(s)\mathrm{d}s, \forall t \geqslant 0 \tag{1.3}$$

希望能在此时推出

$$\psi(t) = \alpha(t) + \int_0^t \alpha(s)\beta(s)\mathrm{e}^{\int_s^t \beta(r)\mathrm{d}r}\mathrm{d}s, \forall t \geqslant 0 \tag{1.4}$$

对 (1.3) 两侧求导, 移项, 得到一个非齐次线性微分方程

$$\psi'(t) - \beta(t)\psi(t) = \alpha'(t) \tag{1.5}$$

选取它的一个积分因子

$$\mathrm{e}^{-\int_0^t \beta(s)\mathrm{d}s} \tag{1.6}$$

乘到 (1.5) 的两边, 得到

$$\left(\mathrm{e}^{-\int_0^t \beta(s)\mathrm{d}s}\psi(t)\right)' = \mathrm{e}^{-\int_0^t \beta(s)\mathrm{d}s}\alpha'(t) \tag{1.7}$$

将 (1.7) 两侧从 0 到 t 进行积分, 得

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-\int_0^t \beta(s)\mathrm{d}s}\psi(t) - \psi(0) &= \int_0^t \mathrm{e}^{-\int_0^s \beta(r)\mathrm{d}r}\alpha'(s)\mathrm{d}s && (1.8)\\
&= \int_0^t \mathrm{e}^{-\int_0^s \beta(r)\mathrm{d}r}\mathrm{d}\alpha(s) && (1.9)\\
&= \mathrm{e}^{-\int_0^s \beta(r)\mathrm{d}r}\alpha(s)\Big|_0^t - \int_0^t \alpha(s)\mathrm{d}\mathrm{e}^{-\int_0^s \beta(r)\mathrm{d}r} && (1.10)
\end{aligned}$$

$$= \mathrm{e}^{-\int_0^t \beta(r)\mathrm{d}r}\alpha(t) - \alpha(0) + \int_0^t \alpha(s)\beta(s)\mathrm{e}^{-\int_0^s \beta(r)\mathrm{d}r}\mathrm{d}s \tag{1.11}$$

在 (1.3) 中令 $t = 0$, 得 $\psi(0) = \alpha(0)$, 所以有

$$\mathrm{e}^{-\int_0^t \beta(r)\mathrm{d}r}\psi(t) = \mathrm{e}^{-\int_0^t \beta(r)\mathrm{d}r}\alpha(t) + \int_0^t \alpha(s)\beta(s)\mathrm{e}^{-\int_0^s \beta(r)\mathrm{d}r}\mathrm{d}s \tag{1.12}$$

$$\psi(t) = \alpha(t) + \int_0^t \alpha(s)\beta(s)\mathrm{e}^{\int_s^t \beta(r)\mathrm{d}r}\mathrm{d}s \tag{1.13}$$

等式的情形得证.

对于不等式的情形, 我们希望能照搬上面的证明, 但令人遗憾的是, 我们无法从积分的不等式直接得到微分的不等式.

但幸运的是, 如果记 (1.1) 式右侧的部分为 $\varphi(t)$, 即

$$\varphi(t) = \alpha(t) + \int_0^t \beta(s)\psi(s)\mathrm{d}s \tag{1.14}$$

那么我们有

$$\varphi'(t) = \alpha'(t) + \beta(t)\psi(t) \tag{1.15}$$

$$\leqslant \alpha'(t) + \beta(t)\varphi(t) \tag{1.16}$$

能这样放缩是因为我们预先假定了 $\beta(t) \geqslant 0$.

这样我们就得到了想要的微分的不等式

$$\varphi'(t) - \beta(t)\varphi(t) \leqslant \alpha'(t) \tag{1.17}$$

接下来照搬上面的证明

将 (1.6) 乘到 (1.17) 的两边, 得到

$$\left(\mathrm{e}^{-\int_0^t \beta(s)\mathrm{d}s}\varphi(t)\right)' \leqslant \mathrm{e}^{-\int_0^t \beta(s)\mathrm{d}s}\alpha'(t) \tag{1.18}$$

将 (1.18) 两侧从 0 到 t 进行积分, 得

$$\mathrm{e}^{-\int_0^t \beta(s)\mathrm{d}s}\varphi(t) - \varphi(0) \leqslant \int_0^t \mathrm{e}^{-\int_0^s \beta(r)\mathrm{d}r}\alpha'(s)\mathrm{d}s \tag{1.19}$$

$$= \int_0^t \mathrm{e}^{-\int_0^s \beta(r)\mathrm{d}r}\mathrm{d}\alpha(s) \tag{1.20}$$

$$= \mathrm{e}^{-\int_0^s \beta(r)\mathrm{d}r}\alpha(s)\Big|_0^t - \int_0^t \alpha(s)\mathrm{d}\mathrm{e}^{-\int_0^s \beta(r)\mathrm{d}r} \tag{1.21}$$

$$= \mathrm{e}^{-\int_0^t \beta(r)\mathrm{d}r}\alpha(t) - \alpha(0) + \int_0^t \alpha(s)\beta(s)\mathrm{e}^{-\int_0^s \beta(r)\mathrm{d}r}\mathrm{d}s \tag{1.22}$$

在 (1.14) 中令 $t = 0$, 得 $\varphi(0) = \alpha(0)$, 所以有

$$\mathrm{e}^{-\int_0^t \beta(r)\mathrm{d}r}\varphi(t) \leqslant \mathrm{e}^{-\int_0^t \beta(r)\mathrm{d}r}\alpha(t) + \int_0^t \alpha(s)\beta(s)\mathrm{e}^{-\int_0^s \beta(r)\mathrm{d}r}\mathrm{d}s \tag{1.23}$$

$$\varphi(t) \leqslant \alpha(t) + \int_0^t \alpha(s)\beta(s)\mathrm{e}^{\int_s^t \beta(r)\mathrm{d}r}\mathrm{d}s \tag{1.24}$$

而我们又有

$$\psi(t) \leqslant \varphi(t) \tag{1.25}$$

故得证! □

Chapter 2

存在和唯一性定理

2.1 Picard 存在唯一性定理

$$(E): \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y), y(x_0) = y_0$$

$$\text{矩形区域}R: |x - x_0| \leqslant a, |y - y_0| \leqslant b$$

$$I = [x_0 - h, x_0 + h]$$

$$h = min\{a, \frac{b}{M}\}, M > \max_{(x,y)\in R^2} |f(x,y)|$$

定理 2.1.1. *若 f 在 R 上连续并且关于 y 满足 Lipschitz 条件, 则 (E) 在 I 上存在唯一解.*

证明.*Step1* 转化为积分方程

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))dx$$

一方面, 若 $y = y(x)$ 是 (E) 的解, 则有

$$\frac{dy(x)}{dx} = f(x, y(x)), \forall x \in (x_0 - h, x_0 + h)$$

两边同时关于 x 从 x_0 到 x 积分, 可得

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} \frac{dy(x)}{dx} dx = \int_{x_0}^{x} f(x,y)dx$$

$$\Rightarrow y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))dx$$

另一方面, 若 $y = y(x)$ 是积分方程在 $(x_0 - h, x_0 + h)$ 上的解, 则 $y(x)$ 可导, 于是

$$\frac{dy(x)}{dx} = f(x, y(x)), y(x_0) = y_0$$

Step2 构造 *Picard* 序列 $\{y_n(x)\}$

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_n(x))dx$$

$$y_0(x) = y_0$$

要说明 $\forall x \in [x_0-h, x_0+h], \forall n \in N_0, (x, y_n(x))$ 在矩形 R 里面，才能说明序列的定义是好的

Claim: $|y_n(x) - y_0| \leqslant b$

n=1 时,$|y_1(x)-y_0| = |\int_{x_0}^{x} f(x,y_0)dx| \leqslant M|x-x_0| < Mh \leqslant b$.

设 $n=k$ 时断言成立，则当 $n=k+1$ 时,归纳法用在了哪里呢？需注意，只有前一个 $y_k(x)$ 是定义好的，我们才有下一个 y_{k+1} 可言；这里的归纳法并不是说下一个的证明利用到了前一个的成立，而是下一个的存在依赖于前一个的成立.

$$|y_{k+1}(x) - y_0| = |\int_{x_0}^{x} f(x, y_k(x))dx| \leqslant |\int_{x_0}^{x} M dx| = M|x-x_0| < b$$

.

Step3 Picard 序列的收敛性

$$y_n(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k(x) - y_{k-1}(x) + y_0$$

要证 $\{y_n(x)\}$ 收敛，只要证明级数 $\sum_{k=1}^{\infty} y_k(x) - y_{k-1}(x)$ 绝对收敛感觉这里的各种收敛乱乱的 $\cdots$ 先不管了吧... 淑芬学完了再说

要证明级数 $\sum_{n=0}^{\infty} |y_{n+1}(x) - y_n(x)|$ 在 I 上一致收敛

$$n=0, |y_1(x) - y_0(x)| \leqslant M|x-x_0|$$

$$\begin{aligned}
n=1, |y_2(x)-y_1(x)| &= \left|\int_{x_0}^{x} f(x,y_1(x))dx - \int_{x_0}^{x} f(x,y_0(x))dx\right| \\
&\leqslant \left|\int_{x_0}^{x} |f(x,y_1(x)) - f(x,y_0(x))|dx\right| \\
&\leqslant \left|\int_{x_0}^{x} L|y_1(x)-y_0(x)|dx\right| \\
&\leqslant \left|\int_{x_0}^{x} ML|x-x_0|dx\right| \\
&\leqslant ML\frac{|x-x_0|^2}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n=2, |y_3(x)-y_2(x)| &= \left|\int_{x_0}^{x} f(x,y_2(x))dx - \int_{x_0}^{x} f(x,y_1(x))dx\right| \\
&\leqslant \left|\int_{x_0}^{x} |f(x,y_2(x)) - f(x,y_1(x))|dx\right| \\
&\leqslant \left|\int_{x_0}^{x} L|y_2(x)-y_1(x)|dx\right| \\
&\leqslant \left|\int_{x_0}^{x} ML^2\frac{|x-x_0|^2}{2}dx\right| \\
&\leqslant ML^2\frac{|x-x_0|^3}{3!}
\end{aligned}$$

Claim:

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leqslant ML^{n-1}\frac{|x-x_0|^n}{n!}$$

用归纳法, 假设 $n=k$ 时结论成立, 则当 $n=k+1$ 时,

$$\begin{aligned}
|y_{k+1}(x)-y_k(x)| &= \left|\int_{x_0}^{x} f(x,y_k(x))dx - \int_{x_0}^{x} f(x,y_{k-1}(x))dx\right| \\
&\leqslant \left|\int_{x_0}^{x} |f(x,y_k(x))-f(x,y_{k-1}(x))|dx\right| \\
&\leqslant \left|\int_{x_0}^{x} L|y_k(x)-y_{k-1}(x)|dx\right| \\
&\leqslant \left|\int_{x_0}^{x} ML^n\frac{|x-x_0|^n}{n!}dx\right| \\
&\leqslant ML^n\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

因此,

$$\sum_{n=0}^{\infty}|y_{n+1}(x)-y_n(x)| \leqslant \frac{M}{L}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(L|x-x_0|)^n}{n!} \leqslant \frac{M}{L}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(Lh)^n}{n!} < +\infty$$

因此,$\exists\phi(x) s.t. y_n(x)\to\phi(x)$ 在 I 上一致收敛. 由于 $y_n(x)$ 在 I 上是连续的, 故 $\phi(x)$ 在 I 上也连续.

再由

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y_n(x))dx$$

关于 n 取极限得

$$\phi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y_n(x))dx$$

即 $y=\phi(x)$ 是 (E) 在 I 上的解.

Step4 唯一性

令 $y=u(x)$ 和 $y=v(x)$ 是 (E) 的两个不同的解, 它们共同的存在区间是 (x_0-d,x_0+d)

令 $w(x)=u(x)-v(x)$, 则

$$\begin{aligned}
|u(x)-v(x)| &= \left|\int_{x_0}^{x} |f(x,u(x))-f(x,v(x))|dx\right| \\
&\leqslant \int_{x_0}^{x} L|u(x)-v(x)|dx \\
&\leqslant Lk|x-x_0|
\end{aligned}$$

将第三行得到的不等式带入到第二行中, 得到

$$\begin{aligned}
|u(x)-v(x)| &\leqslant \int_{x_0}^{x} L|u(x)-v(x)|dx \\
&= \int_{x_0}^{x} L^2k|x-x_0|dx \\
&\leqslant \frac{k(L|x-x_0|)^2}{2}
\end{aligned}$$

重复上述过程可得,

$$|u(x)-v(x)| \leqslant \frac{K(L|x-x_0|)}{n!} \leqslant \frac{k(Ld)^n}{n!} \to 0, \text{当} n\to\infty$$

由 *Gronwell* 不等式,$u(x)-v(x)\equiv 0 \quad on[x_0-d,x_0+d]$

注记. 出现单个 f, 以 M 为界；出现两个 f 作差, 利用 *Lipschitz* 条件得到界

注记. 为什么要转化为积分方程？我们要求微分方程的解必须连续且可导, 而对于积分方程我们只需要要求解连续, 连续且满足积分方程一定可微, 这是一个很大的好处。

对解的正则性的要求降低了

积分号与极限可以换序... 开始触及到知识盲区了...

积分满足一些很显然的很好的估计, 比如

$$|\int f(x,y)dx| \leqslant \int |f(x,y)|dx$$

只是说在常微分方程及阶段这个优势不是很明显, 在偏微分方程阶段, 把微分方程化为积分方程是非常重要的手段

涉及到估计往往需要积分方程

注记. 现在我只知道 f 在矩形上有定义, 现在我假设 y 满足积分方程,$(x, y(x))$ 是否落到矩形中？ $|y(x)-y_0| = || \leqslant |\int_{x_0}^{x} Mdx| \leqslant M|x-x_0| < M(h-\epsilon) < b-\widetilde{\epsilon}$

注记. 第一步, 构造逼近解；第二步, 说明极限存在；第三步, 说明极限就是我们要找的

例 2.1.1 (Ricatti 方程)**.**

$$\frac{dy}{dx} = x^2+y^2, y(x_0) = y_0$$

先判断关于 y 是否 *Lipschitz*, 事实上有一个更强的条件, 即 f 关于 y 是否有连续的偏导数, 若有, 关于 y 用中值定理, 得到 f 关于 y 确实 *Lipschitz*

由 *Picard* 定理, 存在唯一的积分曲线经过 (x_0, y_0)

定理 2.1.2 (存在性 (Peano 存在定理))**.** 设函数 $f(x,y)$ 在矩形区域 R 内连续, 则初值问题 (E) 在区间 $|x-x_0| < h$ 上至少存在一个解 $y = y(x)$.

定义 2.1.1. 设函数 $f(x,y)$ 在区域 G 内连续且满足不等式 $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leqslant F(|y_1-y_2|)$, 其中 $F(r) > 0$ 是 $r > 0$ 的连续函数, 而且积分 $\displaystyle\int_0^{r_1} \frac{r}{F(r)} = +\infty$, 其中 $r_1 > 0$ 是常数, 则称 f 在 G 内对 y 满足 *Osgood* 条件；特别地, 当取 $F(r) = Lr$ 时, 得到 *Lipschitz* 条件.

定理 2.1.3. 设 $f(x,y)$ 在区域 G 内对 y 满足 *Osgood* 条件, 则微分方程 (3.9) 在 G 内经过每一点的解是唯一的.

证明. 用反证法, 假设在 G 内存在一个点 (x_0, y_0), 使得方程 (3.9) 有两个解 $y = y_1(x), y = y_2(x)$ 都经过这个点, 存在一个 $x_1 \neq x_0$ 使得 $y_1(x_1) \neq y_2(x_1)$. 不妨设 $x_1 > x_0$,$y_1(x_1) > y_2(x_1)$. 令

$$\bar{x} = sup\{x_0 \leqslant x < x_1 : y_1(x) = y_2(x)\}$$

. 则

$$y_1(x) > y_2(x), \forall \bar{x} < x \leqslant x_1$$

$$\frac{d(y_1(x)-y_2(x))}{dx} = f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x)) \leqslant F(y_1-y_2), \forall \bar{x} < x < x_1$$

令 $r(x) = y_1(x-y_2(x))$, 则 $\dfrac{dr}{dx} \leqslant F(r), \forall \bar{x} < x < x_1$

$$\int_0^{r_1} \frac{dr}{F(r)} \leqslant \frac{\bar{x}}{x_1} dx = x_1 - \bar{x} < +\infty$$

由 Osgood 条件,$\frac{0}{r_1}\frac{dr}{F(r)} = +\infty$, 矛盾. □

2.2 解的延伸

考虑方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

定理 2.2.1. 设 P_0 为区域 G 内任意一点, 并设 Γ 是微分方程（*3.18*）的经过 P_0 点的任意一条积分曲线, 积分曲线 Γ 将在区域 G 内延伸到边界. 对于任意的含在区域 G 中的有界闭区域 G_1 包含 P_0, 那么 Γ 可以延伸到 G_1 之外.

证明. 设经过 P_0 的方程的解 Γ 为 $y = \phi(x)$. 设 J 是它的极大存在区间, 只考虑 Γ 在 P_0 右侧的延伸情况. 令 $J^+ = J \cap [x_0, +\infty)$ 是 Γ 在 P_0 右侧的极大存在区间.

- $J^+ = [x_0, +\infty)$, 则 Γ 是延伸到边界的.
- $J^+ = [x_0, x_1], x_1 < +\infty$, 以 $(x_1, \phi(x_1))$ 为中心, 作矩形 $|x - x_1| \leqslant a, |y - y_1| \leqslant b$, 由 Peano 存在定理, 存在 $h > 0$ 使得（3.18）在 $(x_1 - h, x_1 + h)$ 上存在一个解 $y = \phi_1(x)$ 令 $y_1(x)$, 则 y_x 是（3.18）在 $x_0 \leqslant x \leqslant x_1 + h$ 上的解
  事实上, 当 $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$,$\phi(x) = \phi(x_0) + \int_{x_0}^{x_1} f(x, \phi(x))dx$
  特别地,$\phi(x_1) = \phi(x_0) + \int_{x_0}^{x_1} f(x, \phi(x))dx$
  当 $x_1 \leqslant x \leqslant x_1 + h$,$\phi_1(x) = \phi(x_0) + \int_{x_0}^{x_1} f(x, \phi_1(x))dx$
  $$y_1(x) = \phi(x_1) + \int_{x_1}^{x} f(x, y_1(x)dx) = \phi(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1(x))dx$$
  这与 J^+ 是 Γ 的右行极大存在区间矛盾!
- $J^+ = [x_0, x_1), x_1 < +\infty$ 用反证法, 假设存在有界闭集 $G_1 \subset G, p \in G_1, \Gamma \subset G_1$. claim: 当 $x \to x_1$ 时,$\lim\limits_{x \to x_1} \varphi(x)$ 存在
  $$\forall x_n \to x_1, |\varphi(x_n) - \varphi(x_m)| = |\int_{x_m}^{x_n} \frac{d\varphi}{dx}dx| = |\int_{x_m}^{x_n} f(x, \varphi(x))dx| \leqslant \max_{(x,y)\in G} |f(x,y)| \leqslant M_1|x_n - x_m|$$
  故 $\{\varphi(x_n)\}$ 是 Cauchy 列
  令 $\bar{y} = \lim\limits_{x \to x_1} \varphi(x)$ 令, 则 $\tilde{y}(x)$ 是（3.18）在 $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$ 上的解
  事实上,$\varphi(x) = \varphi(x_0) + \int_{x_0}^{x_1} f(x, \varphi(x))dx, \forall x_0 \leqslant x \leqslant x_1$
  当 $x \to x_0$ 时,$\bar{y} = \varphi(x_0) + \int_{x_0}^{x_1} f(x, \varphi(x)dx) \Leftrightarrow \tilde{y}(x_1) = \varphi(x_0) + \int_{x_0}^{x_1} f(x, \tilde{y}(x))dx$

□

例 2.2.1. 试证微分方程

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$$

的任一解的存在区间都是有界的.

证明. 令 $f(x,y)=x^2+y^2$ 在 R^2 上连续, 且在 R^2 上关于 y 是局部 Lipschitz. 由 Picard 存在唯一性定理, 过任意一点 P_0 存在唯一的积分曲线 Γ, 要证 Γ 的极大存在区间是有界的.

否则, 设 Γ 的极大存在区间 J 是无界的. 不妨设 $(c,+\infty)\subset J$. 事实上, 如果 $y=y(x)$ 是原方程的解, 且 $(-\infty,c)\subset J$ 令 $\hat{y}(x)=-y(-x)$, 则

$$\frac{d\hat{y}}{dx}=\frac{dy}{dx}(-x)=(-x)^2+(y(-x))^2=x^2+(\hat{y}(x))^2$$

则 $\hat{y}(x)$ 也是原方程的解.

设 $x_1>0$,$(x_1,+\infty)\subset J$, 则

$$\frac{dy}{dx}>x_1^2+y^2,\forall x\in(x_1,+\infty)$$

故

$$\frac{1}{x_1^2+y^2}\frac{dy}{dx}\leqslant 1$$

$$\frac{d\frac{y}{x_1}}{x_1(1+\frac{y^2}{x_1^2})}=\frac{1}{x_1}darctan\frac{y}{x_1}$$

$$\frac{1}{x_1}\frac{darctan\frac{y}{x_1}}{dx}\leqslant 1$$

两边同时从 x_1 到 x 积分可得,

$$\frac{\pi}{x_1}\leqslant\frac{1}{x_1}(arctan\frac{y(x)}{x_1}-arctan\frac{y(x_1)}{x_1})\leqslant x-x_1,\forall x>x_1$$

令 $x\to+\infty$, 则得到矛盾! □

例 2.2.2. *在平面上任取一点 $P_0=(x_0,y_0)$, 试证初值问题*

$$\frac{dy}{dx}=(x-y)e^{xy^2},y(x_0)=y_0$$

的右行解都在区间 $x_0\leqslant x<\infty$ 存在.

证明. $f(x,y)=(x-y)e^{xy^2}$ 在 R^2 上连续, 局部 Lip, 由 Picard 定理, 过任意一点 P_0 存在唯一的积分曲线 Γ. 要证 Γ 的右行部分的存在区间是 $[x_0,+\infty)$

若 P_0 在直线 $y=x$ 的上方, 则过 P_0 的积分曲线会下降, 穿过 $y=x$ 到达它的下方. 由延伸定理,Γ 会延伸到 $G=\{(x,y)|x_0\leqslant x<+\infty\}$ 的边界. 由于在 $L:y=x$ 下方与它接近的点, 斜率远小于 1, 故 Γ 无法穿过 L 到达它的上方. 故 Γ 一直位于 L 的下方. 因此 Γ 的右行存在区间为 $[x_0,+\infty)$. □

定理 2.2.2. *设微分方程 $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$, 其中函数 $f(x,y)$ 在条形区域 $S:\alpha<x<\beta,-\infty<y<+\infty$ 内连续, 且满足不等式 $f(x,y)\leqslant A(x)|y|+B(x)$, 其中 $A(x)\geqslant 0,B(x)\geqslant 0$ 在区间 $\alpha<x<\beta$ 上连续, 则方程的每一个解都以区间 $\alpha<x<\beta$ 为最大存在区间.*

证明. 设 $P_0\in S$ 是任意一点. 由于 $f(x,y)$ 在 S 上是连续的, 由 Peano 定理, 一定存在过 P_0 的积分曲线 Γ. 要证 Γ 的最大存在区间是 (α,β) 只考虑右行解, 要证右行解的最大存在区间是 (x_0,β).

否则, 存在 $x_0<\beta_0<\beta$, 使得右行解的最大存在区间是 $[x_0,\beta_0)$

任取 Γ 上一点 (x_1,y_1), 在矩形 $R:|x-x_1|\leqslant a,|y-y_1|\leqslant b$ 上,$f(x,y)$ 是连续的.

由 Peano 定理, 在 (x_1-h,x_1+h) 上存在解,$h=\min\{a,\frac{b}{M}\}$

设在 R 上,$A(x), B(x)$ 的最大值是 A_0, B_0, 则 $|f(x,y)| \leqslant A_0(|y|+b)+B_0$
取 $M = A_0(|y_1|+b)+B_0+1$, 则

$$\frac{b}{M} = \frac{b}{A_0(|y_1|+b)+B_0+1} \to \frac{1}{A_0}$$

当 b 充分大时,$\frac{b}{M} > \frac{1}{2A_0}$
选取 $a = \frac{1}{4A_0}$, 则 $h = \frac{1}{4A_0}$
取 x_1 充分接近 β_0, 则 Γ 可延伸到 $x_1 + \frac{1}{4A_0} > \beta_0$, 这与 $[x_0, \beta_0)$ 是右行最大存在区间矛盾! □

2.3 第一次习题课

例 2.3.1.

$$\frac{dy}{dx} \leqslant \frac{f(x)}{g(y)}, g(y) > 0$$

$$g(y)dy \leqslant f(x)dx$$

$$\int_0^y g(t)dt - \int_0^x f(t)dt \leqslant C$$

$$\psi(x) := \int_0^{y(x)} g(t)dt - \int_0^x f(t)dt$$

$$\dot{\psi}(x) =$$

例 2.3.2.

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2 \geqslant y^2$$

$$y(0) = 1$$

$$\frac{dy}{y^2} \geqslant dx$$

$$\psi(x) = \frac{1}{y} + x \leqslant \psi(0) = 1$$

$$\dot{\psi}(x) = -\frac{\dot{y}}{y^2} + 1 = -\frac{x^2+y^2}{y^2} + 1 \leqslant 0$$

注记. *若要证 $f = g$, 可证 f 和 g 满足相同的方程并且有相同的初值条件*

例 2.3.3.

$$\frac{dy}{dx} = f(y) in (x,y) \in R \times [a, a+\epsilon)]$$

其中 $f(a) = 0$,$f(y) > 0 in (a, a+\epsilon)$ 当 $|\int_a^{a+\epsilon} \frac{1}{f(y)} dy < \infty|$ 时, 有两条过 (x_0, a) 的积分曲线; 当 $|\int_a^{a+\epsilon} \frac{1}{f(y)} dy| = \infty$ 时, 只有一条

证明. 内容... □

2.4 比较定理

定理 2.4.1 (第一比较定理)**.** *假设函数 $f(x,y)$ 和 $F(x,y)$ 都在平面区域 G 内连续, 并且满足不等式 $f < F, \forall(x,y) \in G$, 又设函数 $y = \phi(x)$ 与 $y = \Phi(x)$ 在区间 $a < x < b$ 上分别是初值问题*

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), y(x_0) = y_0$$

$$\frac{dy}{dx} = F(x,y), y(x_0) = y_0$$

的解, 其中 $(x_0, y_0) \in G$, 则我们有 $\phi(x) < \Phi(x), when \quad x_0 < x < b; \phi(x) > \Phi(x), when \quad a < x < x_0$

证明. 只证明右行部分.

令 $\psi(x) = \Phi(x) - \phi(x)$, 则

$$\frac{d\psi}{dx} = F(x, \Phi(x)) - f(x, \phi(x)), \psi(x_0) = 0$$

由于 $F(x_0, \Phi(x_0)) > f(x_0, \phi(x_0))$, 故 $\frac{dy}{dx}(x_0) > 0$, 所以存在 $\sigma > 0$, 使得 $\psi(x) > 0, \forall x \in (x_0, x_0 + \sigma)$

要证的是 $\psi(x) > 0, \forall x_0 < x < b$ 否则, 存在 $x_0 + \sigma < x_1 < b$, 使得 $\psi(x_1) = 0$

令 $\beta = min\{x_0 < x < b | \psi(x) = 0\}$, 则 $\psi(\beta) = 0$, 且 $\psi'(\beta) \leqslant 0$

但是,$\frac{d\psi}{dx}(\beta) = F(x_1, \Phi(\beta)) - f(x, \phi(\beta)) > 0$, 矛盾! □

现在考虑初值问题

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), y(x_0) = y_0$$

其中 $f(x,y)$ 在矩形区域 $R : |x - x_0| \leqslant a, |y - y_0| \leqslant b$ 上连续. 令 $M > \max\limits_{(x,y)\in R} |f(x,y)|, h = mina, \frac{b}{M}$, 在区间 $[x_0 - h, x_0 + h]$ 上至少存在一个解如果在区间 $[x_0 - h, x_0 + h]$ 上初值问题 E 有两个解 $y = Z(x), y = W(x)$ 使得 E 的任何的解 $y = y(x)$ 都满足 $W(x) \leqslant y(x) \leqslant Z(x), x_0 - h \leqslant x \leqslant x_0 + h$, 则称 $W(x), Z(x)$ 分别是初值问题的最小解和最大解

定理 2.4.2. *存在 $0 < \sigma < h$, 使得在区间 $[x_0 - \sigma, x_0 + \sigma]$ 上初值问题存在最大解和最小解.*

定理 2.4.3 (Ascoli-Azela)**.** *设在区间 I 上给定一个函数列 $\{f_n(x)\}_1^\infty$, 称 $\{f_n(x)\}$ 在 I 上一致有界是指 $\exists K > 0$, 使得 $|f_n(x)| \leqslant K, \forall x \in J, \forall n \geqslant 1$. 称 $\{f_n(x)\}$ 在 I 上等度连续, 如果 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta$, 使得 $\forall |x_1 - x_2| < \delta, |f_n(x_1) - f_n(x_2)| < \epsilon, \forall n = 1, 2, \cdots$*

若 $\{f_n(x)\}$ 在有界闭区间 I 上一致有界, 并且等度连续, 则存在子列 $\{f_{n_k}(x)\}$ 在 I 上一致收敛.

证明. 考虑初值问题

$$(E_m) : \frac{dy}{dx} = f(x,y) + \epsilon_m, y(x_0) = y_0$$

$$\epsilon_m > 0, M_m = M + \epsilon_m, h_m = mina, \frac{b}{M_m} \leqslant h$$

若 ϵ_m 单调递减趋于 0,h_m 趋于 h.

则在 $(x_0 - h_m, x_0 + h_m)$ 上存在 (E_m) 的解 $y = \varphi_m(x)$

由于 $\epsilon \to 0$, 故 $h_m \to h$, 因此 $\exists \sigma > 0$, 当 m 充分大时,$\varphi(x)$ 在 $(x_0 - \sigma, x_0 + \sigma)$ 上都存在, 并且

$$\varphi_m(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f_m(x, \varphi_m(x))dx, f_m(x,y) = f(x,y) + \epsilon_m$$

由第一比较定理, 对于 (E) 的任一解 $y=\phi(x)$, 有

$$\varphi_m(x) < \phi(x), x_0-\sigma < x < x_0$$

$$\varphi_m(x) > \phi(x), x_0 < x < x_0+\sigma$$

$$|| \leqslant || + \int_{min}^{max} dx \leqslant, \forall x \in [], \forall m$$

$$|| = || \leqslant (M+1)||, \forall \epsilon > 0, \exists \delta = \frac{\epsilon}{2(M+1)}, \forall || < \delta, || < \epsilon$$

由 $Arzela-Adcoli$, 存在子列（仍记为 $\varphi_n(x)$）在 $[x_0-\sigma, x_0+\sigma]$ 上一致收敛到 $y=\Phi(x)$ 令 $m\to\infty$, 有

$$\Phi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f_m(x,\Phi(x))dx, \forall x \in [x_0-\sigma, x_0+\sigma]$$

且 $\Phi(x)$ 在 $[x_0-\sigma, x_0+\sigma]$ 上连续, 因此,$\Phi(x)$ 是 (E) 在 $[x_0-\sigma, x_0+\sigma]$ 上的解.

由第一比较定理,(E) 的任意的解 $y=y(x)$, 都有

$$y(x) < \varphi_m(x), x_0 < x \leqslant x_0+\sigma$$

则有

$$y(x) \leqslant \Phi(x), x_0 < x \leqslant x_0+\sigma$$

□

定理 2.4.4. 设函数 $f(x,y)$ 与 $F(x,y)$ 都在平面区域 G 内连续且满足 $f(x,y) \leqslant F(x,y,\forall (x,y) in G)$, 又设函数 $\phi(x), \Phi(x)$ 分别是

$$(E_1): \frac{dy}{dx} = f(x,y), y(x_0) = y_0$$

$$(E_2): \frac{dy}{dx} = F(x,y), y(x_0) = y_0$$

的解 $((x_0,y_0)\in G)$ 并且 $y=\varphi(x)$ 是 (E_1) 的右行最小解和左行最大解, 则由如下关系:

$$\varphi(x) \leqslant \Phi(x), x_0 \leqslant x < b$$

$$\varphi(x) \geqslant \Phi(x), a < x \leqslant x_0$$

Chapter 3

奇解

3.1 一阶隐式微分方程

$$F(x,y,\frac{dy}{dx})=0$$

若从 (4.1) 可解出

$$y=f(x,p),p=\frac{dy}{dx}$$

对 x 求导,

$$p=f_x^{'}+f_p^{'}\frac{dp}{dx}$$

$$\frac{dp}{dx}=\frac{p-f_x^{'}}{f_p^{'}}$$

$$f_p^{'}dp+(f_x^{'}-p)dx=0$$

若 (4.3) 可解得通解 $p=v(x,C)$, 则原方程的解为 $y=f(x,v(x,C))$,C 为任意常数.

若 (4.3) 可解得一个特解 $p=w(x)$, 则原方程的特解为 $y=f(x,w(x))$.

有时可解 (4.3) 得到 $x=v(p,C)$, 则原方程的通解是 $y=f(v(p,C),p),x=v(p,C)$.

例 3.1.1. 求解克莱罗方程

$$y=xp+f(p)$$

其中 $f^{''}(p)\neq 0$

证明. 对 x 求导, 可得

$$p=p+x\frac{dp}{dx}+f^{'}(p)\frac{dp}{dx}\rightarrow(x+f^{'}(p))\frac{dp}{dx}=0$$

若 $x+f^{'}(p)=0$, 即 $x=-f^{'}(p),y=-pf^{'}(p)+f(p)$, 是特解

若 $\frac{dp}{dx}=0$, 则得到通解 $p=C$, 故原方程通解 $y=Cx+f(C)$

由于 $f^{''}(p)\neq 0$,p 可写成 □

例 3.1.2. 求解微分方程

$$x(y^{'})^2-2yy^{'}+9x=0$$

证明. 当 p=0 时, 不可能是方程的解当 $p \neq 0$ 时,

$$y = \frac{xp^2 + 9x}{2p} = \frac{xp}{2} + \frac{9x}{2p}$$

两边对 x 求导, 可得

$$p = \frac{p}{2} + \frac{x}{2}\frac{dp}{dx} + \frac{9}{2p} - \frac{9x}{2p^2}\frac{dp}{dx}$$

$$-(\frac{p}{2} - \frac{9}{2p}) + (\frac{x}{2} - \frac{9x}{2p^2})\frac{dp}{dx} = 0$$

$$(\frac{1}{2} - \frac{9}{2p^2})(x\frac{dp}{dx} - p) = 0$$

$\Rightarrow p = 3$, 原方程特解 $y = 3x$

若 $x\dfrac{dp}{dx} - p = 0$, 则 $p = Cx$ 故原方程通解是

$$y = \frac{Cx^2}{2} + \frac{9}{2C}$$

□

设隐式方程不显含自变量, 即 $F(y,p) = 0$

设 $y = g(t), p = h(t)$ 是 (4.12) 的一个参数表示, 则

$$dx = \frac{1}{p}dy = \frac{g^{'}(t)}{h(t)}dt$$

故

$$x = \int \frac{g^{'}(t)}{h(t)}dt + C$$

于是, 原方程的解为 $\begin{cases} x = \displaystyle\int \frac{g^{'}(t)}{h(t)}dt + C \\ y = g(t) \end{cases}$

例 3.1.3. 求解微分方程

$$y^2 + (\frac{dy}{dx})^2 = 1$$

若 $p = 0$, 则 $y = 1$, 是方程的特解

例 3.1.4. 考虑隐式微分方程 $F(x,y,p) = 0$ 设 $x = f(u,v), y = g(u,v), p = h(u,v)$ 上述方程的参数化表示由于 $dy = pdx$ 故

$$g_u^{'}du + g_v^{'}dv = h(f_u^{'}du + f_v^{'}dv)$$

因此

$$(g_u^{'} - hf_u^{'})du + (g_v^{'} - hf_v^{'})dv = 0$$

若从上式可以解出 $u = Q(v,C)$, 那么原方程的通解为 $\begin{cases} x = f(Q(v,C),v) \\ y = g(Q(v,C),v) \end{cases}$ 若从上式可以解出特解 $u = S(v)$, 则原方程的特解为 $\begin{cases} x = f(S(v),v) \\ y = g(S(v),v) \end{cases}$

例 3.1.5. 解微分方程

$$(\frac{dy}{dx})^2 + y - x = 0$$

Chapter 4

高阶微分方程

考虑 n 阶微分方程

$$\frac{d^n y}{dx^n} = F(x, y, \cdots, y^{n-1})$$

令

$$y_1 = y, y_2 = \frac{dy_1}{dx}, \cdots, y_n = \frac{dy_{n-1}}{dx}$$

原方程可以化为

$$\frac{dy_n}{dx} = F(x, y_1, \cdots, y_n)$$

一般地, 考虑 $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \cdots, y_n) \\ \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \cdots, y_n) \\ \cdots \\ \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \cdots, y_n) \end{cases}$ $f_1, \cdots, f_n$ 是关于变量 $(x, y_1, \cdots, y_n)$ 在区域 D 上的连续函数. 上式可以写成

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

如果 $f_k(x, y_1, \cdots, y_k) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} y_i + e_k(x)$, 则 $f(x, y) = A(x)y + e(x)$

此时,

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y + e(x)$$

若向量函数 $\vec{f}(x, \vec{y})$ 在 $|x - x_0| \leqslant a, |y - y_0| \leqslant b$ 连续, 且 $\vec{f}(x, \vec{y})$ 关于 $\vec{y}$ 满足 Lipschitz 条件: $\exists L > 0$, 使得

$$\left|\vec{f}(x, \vec{y_1}) - \vec{f}(x, \vec{y_2})\right| \leqslant L\left|\vec{y_1} - \vec{y_2}\right|$$

4.1 解对初值和参数的连续依赖性

考虑 $\begin{cases} \dfrac{d\vec{y}}{dx} = \vec{f}(x, \vec{y}, \lambda) \\ \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0 \end{cases}$ 要研究它的解 $y = \varphi(x; x_0, \vec{y}_0, \lambda)$ 对初值 $(x_0, \vec{y}_0)$ 及参数 λ 的连续依赖性令 $\tilde{x} = x - x_0, \tilde{\vec{y}} = \vec{y} - \vec{y}_0$

因此, 只需讨论方程

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y, \lambda) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

关于参数 λ 的连续依赖性.

证明. 1. 等价于

$$y = \int_0^x f(x, y, \lambda) dx$$

2. 定义

$$\varphi(x)$$

3. k=0 时, 结论成立

假设 k 时结论成立, 当 k+1 时,$\forall (x_0, \lambda_0) \in D$,

$$\begin{aligned} \varphi_{k+1}(x, \lambda) - \varphi(x_0, \lambda_0) &= \int_0^x f(x, \varphi_k(x, \lambda), \lambda) dx - \int_0^{x_0} f(x, \varphi_k(x, \lambda_0), \lambda) dx \\ &= \end{aligned}$$

□

定理 4.1.1. 设 n 维向量函数 $f(x, y)$ 在 (x, y) 空间内的某个开区域 G 上连续, 而且对 y 满足局部 *Lipschitz* 条件. 假设 $y = \xi(x)$ 是微分方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

的一个解, 令它的存在区间为 J. 现在区间 J 内任取一个有界闭区间 $a \leqslant x \leqslant b$, 存在常数 $\delta > 0$, 使得对于任何初值 $(x_0, y_0), a \leqslant x_0 \leqslant b, |y_0 - \xi(x_0)| \leqslant \delta$, 柯西问题

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), y(x_0) = y_0$$

的解 $y = \varphi(x, x_0, y_0)$ 也至少在区间 $a \leqslant x \leqslant b$ 存在, 并且在闭区域 $D_\delta : a \leqslant x \leqslant b, a \leqslant x_0 \leqslant b, |y_0 - \xi(x_0)| \leqslant \delta$ 上是连续的.

证明. 设 f 在 G 上是 Lipschitz 的, 令

$$\eta(x) = y(x) - \xi(x)$$

则

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{dy}{dx} - \frac{d\xi}{dx} = f(x, \eta + \xi) - f(x, \xi)$$
$$\eta(x_0) = y(x_0) - \xi(x_0) = y_0 - \xi(x_0)$$

把研究 y 转化为研究 η

由于 f 是 Lip 的,

$$|g(x, y)| \leqslant L|\eta|$$

$$|f(x, \eta_1) - g(x, \eta_2)| = |f(x, \eta_1 + \xi) - f(x, \eta_2 + \xi)| \leqslant L|\eta_1 - \eta_2|$$

构造 Picard 序列 $\Big\{$ ...

Claim

$$||\leqslant \frac{(L|x-x_0|)^{k+1}}{(k+1)!}|y_0-\xi(x_0)|$$

$$|\varphi_k(x)|\leqslant\sigma$$

用数学归纳法证明 Claim1

当 k=0 时,

$$\varphi_1(x)-\varphi_0(x)=|\int_{x_0}^{x}|\leqslant L|y_0-\xi(x_0)|dx=L|y_0-xi(x_0)||x-x_0|$$

结论成立

设 k 时结论成立, 则 k+1 时,

$$|\varphi_{k+1}(x)-\varphi_k(x)|=|\int_{x_0}^{x}(g(x,\varphi_k(x))-g(x,\varphi_{k-1}(x)))dx$$

取 $\sigma>0$, 使得 $D=\{(x,y)||y-\xi(x)|\leqslant\sigma\}\subset G$ 由于 f 在 G 上局部 Lipschitz, 则 f 在 D 上关于 y 是 Lipschitz 的. 取 $\delta>0$ 使得 $\delta e^{L|b-a|}=\dfrac{\sigma}{2}$ □

4.2 解对初值和参数的连续可微性

定理 4.2.1. 设 $f(x,y,\lambda)$ 在区域 $G:|x|\leqslant a,|y|\leqslant b,|\lambda-\lambda_0|\leqslant c$ 上连续, 而且对 y,λ 又连续的偏导数, 则 (5.5.2) 的解 $y=\varphi(x,\lambda)$ 在区域 D 上是连续可微的.

Chapter 5

线性微分方程组

5.1 一般理论

考虑标准形式的 n 阶线性微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}x} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)y_j + f_i(x), \quad i = 1, \cdots, n, \quad a < x < b$$

其中出现的系数 $a_{ij}(x), f_i(x) \in C(a,b)$. 可改写成矩阵的形式

$$\frac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}x} = A(x)\vec{y} + \vec{f}(x), \quad a < x < b$$

要想说明 (a,b) 上的唯一性, 只需说明 (a,b) 中的任意的闭区间的唯一性.

$\forall I \subset (a,b)$ 是闭区间,

$$|g(x,y_1) - g(x,y_2)| = |A(x)(y_1 - y_2)| \leqslant L|y_1 - y_2|$$

由 Picard 存在唯一性定理,(6.1) 在 (a,b) 上有唯一解.

5.2 齐次线性微分方程组

考虑标准形式的 n 阶齐次线性微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}x} = A(x)\vec{y}, \quad a < x < b \tag{5.1}$$

记方程的解的全体为 S, 容易看出 S 是一个线性空间.

命题 5.2.1. *S 是 n 维线性空间.*

证明. 任取 $x_0 \in (a,b)$, 定义

$$H_{x_0} \colon S \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad \vec{y} \longmapsto \vec{y}(x_0)$$

- H_{x_0} 是线性映射. 显然.
- H_{x_0} 是满射. 任意初值存在解.
- H_{x_0} 是单设. 这样的解是唯一的.

□

定义 5.2.1. *称(5.1)的 n 个线性无关的解为一组基础解系.*

假设已知方程(5.1)的 n 个解 $y_1, \cdots, y_n$, 这 n 个在区间 (a,b) 上的函数的线性无关性等同于任取 $x_0 \in (a,b)$ 后 n 个数组向量 $y_1(x_0), \cdots, y_n(x_0)$ 的线性无关性. 线性代数的知识告诉我们要考察

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_{11}(x_0) & \cdots & y_{1n}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1}(x_0) & \cdots & y_{nn}(x_0) \end{vmatrix}.$$

上面的观察告诉我们 $W(x)$ 在 (a,b) 上要么恒为零要么恒不为零.

定理 5.2.1.

$$W(x) = \mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} \operatorname{tr} A(x)\mathrm{d}x} W(x_0)$$

5.3 非齐次线性微分方程组

定义 5.3.1. 对应于解组 (6.8), 令矩阵 $Y(x)$

例 5.3.1. 内容...

证明.

$$\frac{d}{dx}$$

由于

故

$$\Phi^{-1}(s)\begin{pmatrix}0\\f(s)\end{pmatrix}=\frac{f(s)}{W(s)}\begin{pmatrix}-\varphi_2(s)\\\varphi_1(s)\end{pmatrix}$$

□

5.4 高阶线性微分方程

考虑

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}+a_1(x)\frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}x^{n-1}}+\cdots+a_n(x)y=f(x),\quad a<x<b \tag{5.2}$$

引进新的未知函数

$$y_1=y,y_2=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\cdots,y_n=\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}}$$

则方程(5.2)等价于如下方程组

$$\frac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}x}=A(x)\vec{y}+\vec{f}(x),$$

其中

$$\vec{y}=\begin{pmatrix} y_1\\ \vdots\\ y_{n-1}\\ y_n\end{pmatrix},\quad \vec{f}(x)=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ f(x)\end{pmatrix},\quad A(x)=\begin{pmatrix} & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_1(x)\end{pmatrix}.$$

5.5 常系数高阶线性微分方程

例 5.5.1. 设欧拉方程

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x) \tag{5.3}$$

其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 都是常数,$x > 0$. 试利用适当的变换把它化成常系数的非齐次线性微分方程.

解. 设 $x = \mathrm{e}^t$, 即 $t = \ln x$.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} \\
&= \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) \\
&= -\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{1}{x^2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - 1\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{x^2}\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\right] \\
&= -2\frac{1}{x^3}\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) + \frac{1}{x^3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) \\
&= \frac{1}{x^3}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - 2\right)\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) \\
&= \frac{1}{x^3}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - 2\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - 1\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}$$

记

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} =: \mathrm{D}$$

不难由归纳法证明

$$y^{(k)} = \frac{1}{x^k}\mathrm{D}(\mathrm{D}-1)\cdots(\mathrm{D}-k+1)y$$

□

Chapter 6

幂级数解法

Chapter 7

定性理论与分支理论初步

7.1 动力系统、相空间与轨线

设 t 时刻质点的位置 $x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, 运动速度 $v=(v_1(x),\cdots,v_n(x))$, 则质点的运动方程为

$$\frac{dx}{dt}=v(x) \tag{7.1}$$

这个方程不显含自变量, 称这样的方程是自治的. 若 $v(x)$ 满足 Picard 定理的条件, 则以 $x(t_0)=x_0$ 有唯一解 $x=\varphi(t;t_0,x_0)$.

注记. *为什么要将之视为 R^n 中的一条曲线而不是 R^{n+1} 中的一条曲线*

把 x 取值的的空间 $\mathbb{R}^n$ 称为相空间, 把 (t,x) 所在的空间 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ 称为增广相空间

(8.3) 给出了与线速场 $u(x)$ 相吻合的一条“光滑”曲线, 称之为轨线。用箭头在轨线标明对应于时间增加质点的运动方向.

目标：从向量场 $v(x)=(v_1(x),\cdots,v_n(x))$ 出发获取轨线的集合特征, 或者更进一步, 弄清轨线族的拓扑结构图

拓扑结构中有两个东西特别重要,

1. 平衡点：若 $v(x_0)=0$, 则称 x_0 为方程7.1的一个平衡点. 对于平衡点我们需要关注它是否是稳定的、渐近稳定的, 如果不稳定, 我们想知道它为什么不稳定

2. 闭轨：若存在方程7.1的非定常的周期运动 $\varphi(t+T;t_0,x_0)=\varphi(t;t_0,x_0),\forall t$, 我们想知道相图中是否存在闭轨, 如果存在, 有多少条

例 7.1.1. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-y+x(x^2+y^2-1)\\ \dfrac{dy}{dt}=x+y(x^2+y^2-1)\end{cases}$

令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ 则???

$\begin{cases}\dfrac{dr}{dt}=r(r^2-1), r(0)=r_0\\ \dfrac{d\theta}{dt}=1, \theta(0)=\theta_0\end{cases}$

那么我们可以找到平衡点

1. $r_0=0$

2. $r_0 \neq 0$

$$r(t) = \frac{1}{\sqrt{1-(1-\frac{1}{r_0^2})e^{2t}}}$$

注记. 这个极坐标的变换不保持平衡点???

本例中我们是通过把解解出来之后研究它的相图, 本章的目的是不解它就研究它的相图

称方程7.1为一个动力系统, 其基本性质如下:

1. 积分曲线的平移不变性设 $\varphi(t)$ 是方程7.1的一个积分曲线, 则 $\varphi(t+C)$ 仍然是积分曲线. 注意, 不重合.
   $\dfrac{d\varphi(t+C)}{dt} = \dfrac{d\varphi}{dt}(t+C) = v(\varphi(t+C))$
   要去思考一下对于非自治方程为什么就不成立了

2. 经过相空间每一点的轨线是唯一的.

   性质一和性质二说明, 每条轨线都是增广相空间中沿 t 轴可平移重合的一族积分曲线在相空间中的投影, 而且只是这族积分曲线的投影.

3. 群的性质, 单参数连续变换群! 好耶

7.2 解的稳定性

考虑

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) \tag{7.2}$$

其中 $f(t,x)$ 对 $x \in G \subset \mathbb{R}^n, t \in (-\infty, +\infty)$ 连续, 且关于 x 满足李氏条件.

定义 7.2.1. 假设(7.2)有一个解 $x = \varphi(t)$ 在 $t_0 \leqslant t < +\infty$ 有定义.

称(7.2)的解 $x = \varphi(t)$ 是 *Lyapunov* 稳定的, 如果对于 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, s.t.$ 对于 $\forall x_0$ 满足 $|x_0 - \varphi(t_0)| < \delta$, 有 $|x(t;t_0,x_0) - \varphi(t)| < \varepsilon$ 对 $\forall t \geqslant t_0$ 成立.

称(7.2)的解 $x = \varphi(t)$ 是渐进稳定的, 如果 $\exists \delta_1, s.t.$ 对于 $\forall x_0$ 满足 $|x_0 - \varphi(t_0)| < \delta_1$, 有 $\lim\limits_{t\to\infty} |x(t;t_0,x_0) - \varphi(t)| = 0$ 成立.

7.2.1 线性稳定性

令

$$y = \tilde{y} + y_*,$$

代入到

$$\frac{dy}{dt} = f(y)$$

则

$$LHS = \frac{d(\tilde{y}+y_*)}{dt} = \frac{d\tilde{y}}{dt}$$

$$\begin{aligned} RHS = f(\tilde{y}+y_*) &= f(y_*) + f^{'}(y_*)\tilde{y} + \Big[f(\tilde{y}+y_*) - f(y_*) - f^{'}(y_*)\tilde{y}\Big] \\ &= f^{'}(y_*)\tilde{y} + \Big[f(\tilde{y}+y_*) - f^{'}(y_*)\tilde{y}\Big] \end{aligned}$$

$$= A\tilde{y} + N(\tilde{y})$$

其中 $A = f^{'}(y_*)$ 是常数矩阵, 而 $N(\tilde{y})$ 满足 $\lim\limits_{\tilde{y}\to 0}\dfrac{|N(\tilde{y})|}{|\tilde{y}|} = 0$.

在(7.2)中, 设 $x = 0$ 是一个解, 令 $f(t,x) = A(t)x + N(t,x)$, $\lim\limits_{|x|\to 0}\dfrac{|N(t,x)|}{|x|} = 0, N(t,0) = 0$

$A(t)$ 是 n 阶矩阵, 在 $t \geqslant t_0$ 上连续

考虑方程

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \tag{7.3}$$

的稳定性. 称它的稳定与不稳定为原方程7.2的线性稳定与不稳定

定理 7.2.1. *在 (7.3) 中, 若 $A(t)$ 是常数矩阵, 则*

1. *零解是渐近稳定的, 当且仅当 A 的全部特征根有负的实部*

2. *零解是稳定的, 当且仅当 A 的全部特征根实部非正, 并且实部为零的特征根对应的 Jordan 块是一阶的*

3. *零解是不稳定的, 当且仅当 A 有实部为正的特征根或 A 有实部为零的特征根且它对应的 Jordan 块是高于一阶的*

7.2.2 Lyapunov 第二办法 (针对非线性方程)

考虑自治系统

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = f(\vec{y}) \tag{7.4}$$

定理 7.2.2 (Lyapunov 稳定性)**.** *令 $\vec{y}_*$ 是方程 (7.4) 的平衡点, 令 $L : O \to R$ 是包含 $\vec{y}_*$ 的开集 O 上的连续可微函数, 假设*

1. *$L(\vec{y}_*) = 0$, 且 $L(\vec{y}) > 0, \forall \vec{y} \in O\backslash\{\vec{y}_*\}$*

2. $$\dot{L}(\vec{y}) \ = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} L \circ \phi_t(\vec{y}) \leqslant 0, \forall \vec{y} \in O\backslash\{\vec{y}_*\}$$

   其中 $\phi_t(\vec{y})$ 表示以 $\vec{y}$ 为初值的(7.4)的解.

则 $\vec{y}_*$ 是稳定的, 若再假设 $\dot{L}(\vec{y}) < 0, \forall \vec{y} \in O\backslash\{\vec{y}_*\}$, 则 $\vec{y}_*$ 是渐近稳定的.

证明. 1. ε 充分小, 使得 $B_\varepsilon(\vec{y}_*) \subset O$

定义 $\alpha = \min\{L(\vec{y})\big||\vec{y} - \vec{y}_*| = \varepsilon\}$

$u_\varepsilon = \{y \in B_\varepsilon(y_*)\big|L(y) < \alpha\}$, 则 u_ε 是开集, 且 $y_* \in u_\epsilon$

由 $\dot{L} \leqslant 0$, 若 $y_0 \in u_\epsilon$, 则

$$\frac{d}{dt}L(y(t)) \leqslant 0$$

以 y_0 为初值的解一定一直限制在 u_ϵ 中,

现在对于 $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta$ 使得 $B_\delta \subset U_\epsilon$, 以 y_0 为初值的解一直在 u_ϵ 中,

$$|y(t) - y_*| < \epsilon, \forall t$$

取 δ 使得 $B_\delta(y_*) \subset U_\epsilon$ 中, 则 y_* 是稳定的.

2. 由稳定性,$|y(t)-y_*|<\epsilon,\forall t$, 故 $|y(t)|\leqslant< M,\forall t$, 故存在收敛子列 $t_n\to\infty$ 使得 $y(t_n)\to z_0$

   现在要证的是,

$$\lim_{t\to\infty}|y(t)-y_*|=0$$

   现在先证 z_0 就是 y_*

   由于 $\dot{L}<0, L(y(t))$ 严格递减趋于 $L(z_0)$,（$L(y(t))$ 的极限你是知道存在的, 但是你不知道 $y(t)$ 的极限, 你只知道 $y(t_n)$ 的极限, 但是对于 L 这个极限相同）

   令 $z(s)$ 是以 z_0 为初值的解, 则有 3,

$$L(z(s))<L(z_0),\forall s>0$$

   这里不能由 $L(z_0)$ 最小出点东西?

   令 $Y_n(s)$ 是以 $y(t_n)$ 为初值的解, 则 $Y_n(s)=y(t_n+s)$

   并且我们还知道 $y(t_n)\to z_0, Y_n(s)$ 是以 $y(t_n)$ 的解,$z(s)$ 是以 z_0 为初值的解, 由解对初值的连续依赖性, 当 n 充分大时,$L(Y_n(s))=L(y(t_n+s))<L(z_0),\forall s>0$, 这与 $L(y(t))>L(z_0)$ 矛盾.

   于是 $y(t)$ 只能以 y_* 为唯一的极限点??? $y(t)$ 咋就有极限了.

□

例 7.2.1. 分析方程组 $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=(\varepsilon x+2y)(z+1)\\ \dfrac{dy}{dt}=(-x+\epsilon y)(z+1)\\ \dfrac{dz}{dt}=-z^3\end{cases}$ 的平衡点的稳定性

证明. $\begin{cases}(\varepsilon x+2y)=0\\ (-x+\epsilon y)=0\\ z=0\end{cases}\Rightarrow (0,0,0)$ 是平衡点找线性部分

$$(x,y,z)=(0+\tilde{x},0+\tilde{x},0+\tilde{x})$$

所以直接看线性化方程是什么, $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\epsilon x+2y\\ \dfrac{dy}{dt}=-x+\epsilon y\\ \dfrac{dz}{dt}=0\end{cases}$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\epsilon & 2 & 0\\ -1 & \epsilon & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

$$det(A-\lambda E)=-\lambda((\lambda-\epsilon)^2+2)$$

$$\lambda_1=0,\lambda_2=\epsilon+\sqrt{2}i,\lambda_3=\epsilon-\sqrt{2}i$$

如果 $\epsilon>0$, 那么这个系统是线性不稳定的, 进而使不稳定的. 如果 $\epsilon\leqslant 0$, 虽然是线性稳定的, 但是不知道非线性怎么样.

构造 *Lypnouv* 函数,

$$L(x,y,z)=ax^2+by^2+cz^2$$

我要求一些系数 abc 使得满足应用定理的条件.

$$\dot{L}(x,y,z)=\frac{\partial L}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial L}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial L}{\partial x}\dot{x}$$

$$2ax((\epsilon x+2y)(z+1))+2by(-x+\epsilon y)(z+1)$$

$$\epsilon(2ax^2+2by^2)(z+1)+(4a-2b)xy(z+1)-2cz^4$$

当 $\epsilon=0$ 时, 取 a=1,b=2,c=1

$$\dot{L}=-z^4\leqslant 0$$

$\Rightarrow (0,0,0)$ 是非线性稳定的.

当 $\epsilon<0$ 时,

$$\dot{L}(x,y,z)=\varepsilon(2x^2+4y^2)-2z^4<0$$

故 $(0,0,0)$ 是渐近稳定的. □

7.3 平面上的动力系统, 奇点与极限环

考虑平面上的动力系统

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=X(x,y)\\ \dfrac{dy}{dt}=Y(x,y)\end{cases}$$

$X(x,y),Y(x,y)$ 是平面上的连续函数.

为什么要考虑平面上的动力系统, 因为对于高维的动力系统, 我们可以两两组合考虑多个平面上的动力系统

消去 t, 得到 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{Y(x,y)}{X(x,y)}$

先来考虑线性系统

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

若 A 是非退化的, 则称 $(0,0)$ 为初等奇点, 否则, 称之为高阶奇点. 令 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}$ 则原方程变为

$$T\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}=AT\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}\Rightarrow\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}=T^{-1}AT\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}$$

不妨设 A 是 Jordan 标准形. 即 A 为以下三种之一

1. $\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&\mu\end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix}\lambda&0\\1&\mu\end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix}\alpha&-\beta\\\beta&\alpha\end{pmatrix}$

1. $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$

   $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \lambda x \\ \dfrac{dy}{dt} = \mu y \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\mu y}{\lambda x} \Rightarrow y = C|x|^{\frac{\mu}{\lambda}}$$

   (a) $\lambda = \mu, y = C|x|$, 还要判断一下稳定性

   (b) λ, μ 同号

      i. $|\dfrac{\mu}{\lambda}| > 1$