连续介质力学

孙天阳

中国科学技术大学数学科学学院

tysun@mail.ustc.edu.cn

2025 年 1 月 27 日

目录

Part I

线弹性静力学

考虑静力学, 当然要建立研究对象的平衡方程, 对研究对象进行受力分析. 这就有了第一章应力分析, 也就是对弹性体内部的力的分析. 第二章研究了物体的变形, 是纯粹的几何学, 为后面的理论奠定基础. 第三章进行了一些假设, 一是应力由物体的变形唯一决定, 二是物体的初始状态没有应力, 三是应力与应变之间是线性关系. 我主要对第二条假设感到疑虑, 我不知道这是不是一条很本质的假设. 按他这样说的话静静摆在地上的桌子不能作为初始状态来进行分析, 但我觉得应该有一种等效的观点使得静静摆在地上的桌子能被视为初始的状态.

Chapter 1

应力分析

弹性力学中物体的受力分析与刚体力学中物体的受力分析是截然不同的. 首先, 弹性体受力后会变形, 从而产生内力, 这是与刚体的一个本质区别; 其次, 作用在弹性体上的外力, 一般不能简单地归结为作用在相应点上的一个合力和一对力偶, 而必须写成与外力分布相应的分布函数.

1 应力矢量

下面刻画某点 P 处的内力. 首先选取一个经过点 P 的定向光滑曲面 S, 其在点 P 处的单位外法向记为 $\vec{n}$. 在 P 周围取一个面元 ΔS, 该面元所受的力为 $\Delta\vec{\sigma}$. 欧拉-柯西应力定理指出

$$\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta\vec{\sigma}}{\Delta S}=\vec{\sigma}(P,\vec{n})$$

极限存在, 且只依赖于 S 在 P 处的单位外法向 $\vec{n}$ 而不依赖于 S. 一般我们略去 P 简记做 $\vec{\sigma}(\vec{n})$, 称作经过 P 点以 $\vec{n}$ 为单位外法向的平面上的应力矢量, 注意一般来说 $\vec{\sigma}(\vec{n})$ 不必与 $\vec{n}$ 是同一方向. 注意应力矢量并不是力, 而是单位面积上的力, 所以其量纲与压强相同. 可在直角坐标系下进行分解

$$\vec{\sigma}(\vec{n})=\sigma_1(\vec{n})\vec{e}_1+\sigma_2(\vec{n})\vec{e}_2+\sigma_3(\vec{n})\vec{e}_3.$$

也可沿 $\vec{n}$ 和与 $\vec{n}$ 垂直的方向 $\vec{t}$ 进行分解

$$\vec{\sigma}(\vec{n})=\vec{\sigma}_n+\vec{\tau}_t,$$

其中 $\vec{\sigma}_n$ 称为正应力, 而 $\vec{\sigma}(\vec{n})-(\vec{\sigma}(\vec{n})\cdot\vec{n})\vec{n}=\vec{\tau}_t$ 称为剪应力.

2 应力张量

本节我们证明,

$$\vec{\sigma}(\vec{n})=\vec{\sigma}(n_1\vec{e}_1+n_2\vec{e}_2+n_3\vec{e}_3)=n_1\vec{\sigma}(\vec{e}_1)+n_2\vec{\sigma}(\vec{e}_2)+n_3\vec{\sigma}(\vec{e}_3)$$

因此可将 $\vec{\sigma}(\vec{n})$ 视作关于 $\vec{n}$ 的线性映射. 记

$$\vec{\sigma}\begin{pmatrix}\vec{e}_1\\\vec{e}_2\\\vec{e}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sigma_{11}&\sigma_{12}&\sigma_{13}\\\sigma_{21}&\sigma_{22}&\sigma_{23}\\\sigma_{31}&\sigma_{32}&\sigma_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{e}_1\\\vec{e}_2\\\vec{e}_3\end{pmatrix}$$

考虑点 $P=(0,0,0), A=(a,0,0), B=(0,b,0), C=(0,0,c)$ 围成的四面体 $PABC$, 容易求出平面 ABC 的方程是

$$\frac{1}{a}x+\frac{1}{b}y+\frac{1}{c}z-1=0, \quad \vec{n}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}(\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c})$$

由等体积法可以求出 ABC 的面积是

$$\mathrm{d}S=\frac{1}{2}abc\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}$$

所以可以看到侧面的面积 $\mathrm{d}S_i$ 等于斜面 $\mathrm{d}S$ 的面积乘上 $\vec{n}$ 对应的分量 n_i. 在静力平衡下,

$$\vec{\sigma}(\vec{n})\mathrm{d}S-\vec{\sigma}(\vec{e}_i)\mathrm{d}S_i+\vec{f}\mathrm{d}V=\vec{\sigma}(\vec{n})\mathrm{d}S-n_i\vec{\sigma}(\vec{e}_i)\mathrm{d}S+\vec{f}\mathrm{d}V=0$$

$\mathrm{d}V$ 是 $\mathrm{d}S$ 的更高阶小量, 当令 $\mathrm{d}S$ 趋于零时得到

$$\vec{\sigma}(\vec{n})=n_i\vec{\sigma}(\vec{e}_i)$$

所以 $\vec{\sigma}$ 是一个线性映射.

3 动量守恒/平衡方程

考虑一个体积为 V 表面积为 S 的单元体, 其 $\vec{e}_i$ 方向的动量定理为

$$\oint_S \sigma_i(\vec{n})\mathrm{d}S+\int_V f_i\mathrm{d}V=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho v_i\mathrm{d}V$$

对左侧使用高斯定理得到

$$\oint_S \sigma_i(\vec{n})\mathrm{d}S=\oint_S \sigma_{ij}n_j\mathrm{d}S=\oint_S \vec{\sigma}(\vec{e}_i)\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\int_V(\nabla\cdot\vec{\sigma}(\vec{e}_i))\mathrm{d}V=\int_V\frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij}\mathrm{d}V$$

由单元体的任意性, 我们得到恒成立的微分方程

$$f_i+\frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho v_i)$$

静力平衡时得到

$$f_i+\frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij}=0,$$

即 e_i 方向的体力加上应力矢量的散度为零. 注意这是内部区域满足的方程, 表面有额外的边值条件.

4 角动量方程

回忆角动量定理为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{r}\times m\vec{v})_i=\sum(\vec{r}\times\vec{F})_i$$

再次考虑一个体积为 V 表面积为 S 的单元体, 其 $\vec{e_i}$ 方向的角动量定理为

$$\frac{\mathrm{d}L_i}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V(\vec{r}\times\rho\vec{v})_i\mathrm{d}V=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V\epsilon_{ijk}x_j\rho v_k\mathrm{d}V=\int_V\epsilon_{ijk}v_j\rho v_k+\epsilon_{ijk}x_j\frac{\mathrm{d}(\rho v_k)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}V=\int_V\epsilon_{ijk}x_j\frac{\mathrm{d}(\rho v_k)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}V$$

$$M_i=\oint_S(\vec{r}\times\vec{\sigma}(\vec{n}))_i\mathrm{d}S+\int_V(\vec{r}\times\vec{f})_i\mathrm{d}V=\oint_S\epsilon_{ijk}x_j\sigma_k(\vec{n})\mathrm{d}S+\int_V\epsilon_{ijk}x_jf_k\mathrm{d}V$$

$$\oint_S\epsilon_{ijk}x_j\sigma_k(\vec{n})\mathrm{d}S=\oint_S\epsilon_{ijk}x_j\sigma_{kl}n_l\mathrm{d}S=\int_V(\epsilon_{ijk}x_j\sigma_{kl})_l\mathrm{d}V=\int_V\epsilon_{ijk}\sigma_{kj}+\epsilon_{ijk}x_j\sigma_{kl,l}\mathrm{d}V$$

$$\int_V\epsilon_{ijk}x_j\frac{\mathrm{d}(\rho v_k)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}V=\int_V\epsilon_{ijk}\sigma_{kj}+\epsilon_{ijk}x_j\sigma_{kl,l}\mathrm{d}V+\int_V\epsilon_{ijk}x_jf_k\mathrm{d}V\Longrightarrow\int_V\epsilon_{ijk}\sigma_{kj}\mathrm{d}V=0$$

5 主应力

一般来说, 物体中一点 P 沿某一方向为 $\vec{n}$ 的截面上的应力矢量 $\vec{\sigma}(\vec{n})$ 与 $\vec{n}$ 的方向不一致. 称二者方向一致的方向为主应力方向, 相应的应力矢量称为主应力矢量, 相应的缩放倍数称为主应力. 用线性代数的语言来说, 其实就是线性映射 $\vec{\sigma}(\vec{n})$ 的特征值和特征向量.

Chapter 2

应变分析

1 位移场

我们以物体变形前描述物体上每点位置的矢径 $\vec{r}$ 作为自变量, 以该点变形后距离初始位置的位移 $\vec{u}$ 作为因变量, 这样我们就得到了位移场 $\vec{u}(\vec{r})$, 物体变形后每点位置的矢径就是 $\vec{r}+\vec{u}(\vec{r})$.

假设 $\vec{r}$ 和 $\vec{r}+\vec{dr}$ 是相邻的两点, 反映物体变形的是两点之间相对位置的变化

$$d\vec{u}(\vec{r}) = \vec{u}(\vec{r}+\vec{dr}) - \vec{u}(\vec{r})$$

Chapter 3

应力应变关系

Chapter 4

有限元方法

1 变分形式

总结前三章, 我们建立了线弹性静力学的如下方程组

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j} + f_i = 0 \\ \sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl} \\ \epsilon_{ij} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \end{cases}$$

其中 f_i 是体力, 认为是已知量; 而 C_{ijkl} 是弹性张量, 也认为是已知量; 未知量是 u, ϵ, σ, 一共 15 个未知量; 第一组方程是平衡方程, 共 3 个; 第二组方程是应力应变关系, 是线性方程, 共 6 个; 第三组方程是应变张量 ϵ 的定义式, 共 6 个, 所以也一共 15 个方程, 与未知量个数刚好匹配.

常用的边界条件是 Dirichlet 边界条件, 即边界的某部分被固定, 位移场为零

$$u_i = 0, \quad x \in \Gamma_1$$

和 Neumann 边界条件, 即边界的某部分施加了面力 g_i

$$\sigma_{ij}n_j = g_i, \quad x \in \Gamma_2$$

下面我们导出这个问题的变分形式. 将 ϵ_{ij} 写作 $\epsilon_{ij}(u)$ 以示区分. 设 $u, \epsilon(u), \sigma$ 是满足以上偏微分方程组与边值条件的解, 设 v 是测试函数, 将 v 乘到平衡方程两端并在 Ω 上积分

$$-\int_\Omega \sigma_{ij,j} v_i \mathrm{d}x = \int_\Omega f_i v_i \mathrm{d}x$$

由分部积分得

$$-\int_\Omega \sigma_{ij,j} v_i \mathrm{d}x = \int_\Omega \sigma_{ij} v_{i,j} \mathrm{d}x - \int_\Gamma \sigma_{ij} v_i n_j \mathrm{d}S = \int_\Omega \sigma_{ij}\epsilon_{ij}(v) \mathrm{d}x - \int_\Gamma \sigma_{ij} v_i n_j \mathrm{d}S$$

用上边界条件得到

$$\int_\Omega C_{ijkl}\epsilon_{kl}(u)\epsilon_{ij}(v)\mathrm{d}x = \int_\Omega f_i v_i \mathrm{d}x + \int_{\Gamma_2} g_i v_i \mathrm{d}S.$$

2 二维问题

我们假设体力、应力、应变都落在一个二维平面内, 那么应力

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{pmatrix}$$

应变

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_{yy} \end{pmatrix}$$

Part II

流体力学

我们称静止时处处的应力张量都不具有剪切分量的连续体为流体. 而我们允许流体在运动时有剪切分量, 这也反映了流体的粘性. 如果假设运动时也没有剪切分量, 也就是假设流体无粘, 那么称之为理想流体.

Chapter 5

流体力学的基本概念

1 应力张量

理想流体的应力张量

理想流体忽略粘性, 即忽略剪切应力. 这样一来理想流体中任何一点沿任何方向都是应力张量的特征矢量, 所以应力张量作为线性变换只能是标量变换,

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{pmatrix}$$

取负号的原因是强调力是压力（因为流体不能承受拉力）. 由此可见, 在理想流体中, 只要用一个标量函数 P 便可完全刻画任一点的应力状态.

Chapter 6

流体力学的基本方程

1 连续性方程

采用欧拉描述, 考虑密度场 $\rho(\vec{r},t)$ 和速度场 $\vec{v}(\vec{r},t)$, 选择某个区域 V, 则 t 时区域 V 的质量为

$$m = \int_V \rho(\vec{r},t)\mathrm{d}\vec{r}$$

质量关于时间的变化率为

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}(\vec{r},t)\mathrm{d}\vec{r}$$

根据物理直觉, 质量关于时间的变化率同样可以表示为

$$\int_{\partial V} \rho\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \int_V \nabla\cdot(\rho\vec{v})\mathrm{d}\vec{r}$$

当 $\vec{v}$ 朝外时, 表示质量减少, 比较正负号可得

$$\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}\mathrm{d}\vec{r} + \int_V \nabla\cdot(\rho\vec{v})\mathrm{d}\vec{r} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{v}) = 0$$

或者将后一项展开

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\rho\cdot\vec{v} + \rho(\nabla\cdot\vec{v}) = \frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla\cdot\vec{v}) = 0$$

但按照另一种观点似乎说不通, 转换回拉格朗日描述, 一直考虑这堆质点

$$m = \int_V \rho(\vec{r},t)\mathrm{d}\vec{r} = \int_{V_0} \rho(\vec{r}(x_0,t),t)\cdot J\mathrm{d}x$$

Part III

声学

稳态且时谐的声压 p 服从标量 Helmholtz 方程

$$\nabla \cdot (\rho^{-1} \nabla p) + \omega^2 \kappa^{-1} p = 0, \quad x \in \Omega$$

其中 ρ 和 κ 代表物质的密度和体积模量.

Chapter 7

有限元方法