# 黎曼几何

孙天阳

2024 年 1 月 24 日

# 目录


目录 . . . . . . . . . . 2

**1 黎曼度量** **3**

1 定义和例子 . . . . . . . . . . 3

2 Riemannian metric . . . . . . . . . . 3

2.1 Existence of Riemannian metric . . . . . . . . . . 4

2.2 黎曼度量张量 $\rightsquigarrow$ 度量 . . . . . . . . . . 5

2.3 度量 $\rightsquigarrow$ 黎曼度量张量 . . . . . . . . . . 5

3 商流形的黎曼度量 . . . . . . . . . . 6

**2 寻找最短线** **7**

1 最简单的例子 . . . . . . . . . . 7

2 弧长泛函与重新参数化 . . . . . . . . . . 8

3 弧长泛函与能量泛函 . . . . . . . . . . 9

4 能量泛函的固定端点且固定边界的一阶变分 . . . . . . . . . . 10

5 Christoffel 符号及测地线 . . . . . . . . . . 11

6 指数映射 . . . . . . . . . . 13

7 一致邻域 . . . . . . . . . . 15

7.1 totally normal neighborhood 的存在性 . . . . . . . . . . 15

8 Cut locus 1 . . . . . . . . . . 16

9 Hopf-Rinow Theorem . . . . . . . . . . 18

10 Cut locus 2 . . . . . . . . . . 20

11 黎曼覆盖映射 . . . . . . . . . . 21

12 Existence of shortest curves in given homotopy class . . . . . . . . . . 22

13 title . . . . . . . . . . 22

13.1 前情回顾 . . . . . . . . . . 22

14 能量泛函的变分 II . . . . . . . . . . 25

14.1 Gauss 引理 . . . . . . . . . . 25

14.2 第二变分公式 . . . . . . . . . . 25

**3 Levi-Civita 联络和黎曼曲率张量** **26**

1 仿射联络 . . . . . . . . . . 26

2 张量场的协变导数 . . . . . . . . . . 27

3 Levi-Civita 联络 . . . . . . . . . . 30
4 能量泛函的第二变分公式与曲率张量 . . . . . . . . . . 33
5 协变微分与 Ricci 恒等式 . . . . . . . . . . 34
6 协变微分的局部表达式 . . . . . . . . . . 35
7 音乐同构 . . . . . . . . . . 36
8 算符 . . . . . . . . . . 37
9 Bianchi 恒等式 . . . . . . . . . . 40
10 Riemann 曲率张量 . . . . . . . . . . 41
11 截面曲率 . . . . . . . . . . 42
12 高斯绝妙定理 . . . . . . . . . . 43
13 Ricci 曲率 . . . . . . . . . . 44
14 数量曲率 . . . . . . . . . . 45
15 Bochner 公式 . . . . . . . . . . 48
16 测地曲率 . . . . . . . . . . 49
17 Gauss-Bonnet 公式 . . . . . . . . . . 50

**4 Jacobi 场 51**

1 Jacobi 场 . . . . . . . . . . 51
2 Morse 指标定理 . . . . . . . . . . 52
3 Cartan-Hadamard 定理 . . . . . . . . . . 53
4 空间形式 . . . . . . . . . . 54
5 单连通空间形式的等距群 . . . . . . . . . . 55
5.1 $\mathbb{R}^n$ . . . . . . . . . . 55
5.2 $\mathbb{S}^n$ . . . . . . . . . . 55
5.3 $\mathbb{H}^n$ . . . . . . . . . . 55
6 Killing-Hopf 定理 . . . . . . . . . . 56
7 距离函数 . . . . . . . . . . 57

**5 比较定理 58**

1 Sturm 比较定理 . . . . . . . . . . 58
2 Rauch 比较定理 . . . . . . . . . . 59
3 Hessian 比较定理 . . . . . . . . . . 60
4 Laplacian 比较定理 . . . . . . . . . . 61
5 体积比较定理 . . . . . . . . . . 62

**6 规范理论 63**

**7 64**

1 泛函与变分 . . . . . . . . . . 64

# Chapter 1

# 黎曼度量

## 1 定义和例子

## 2 Riemannian metric

$\gamma : (a, b) \to M$

$\int_a^b |\gamma'(t)| \mathrm{d}t = length(\gamma)$

Hilbert space$\Longrightarrow$ Riemannian geometry

Banach space$\Longrightarrow$ Finsler geometry

Just for the purpose of

$\gamma'(t), (v, x)$

$\|\gamma'(t)\|^2 = g_{ij}v^iv^j = (v^1, \cdots, v^d)\begin{pmatrix} g_{ij} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^d \end{pmatrix}$ bilinear form, $(g_{ij})$ positive definite,symmetric matrix

$(U, y)$ $w^i \dfrac{\partial}{\partial y^i} = w^i \dfrac{\partial x^j}{\partial y^i}\dfrac{\partial}{\partial x^j}$

$h_{ij}(y(p)) = g_{kl}(x(p))\dfrac{\partial x^k}{\partial y^i}\dfrac{\partial x^l}{\partial y^j}$

$(g_{ij})$ $(0, 2)$ tensor! And we assume its coefficients are smooth on $x(U)$

**定义 2.1.** *A Riemannian metric $g$ on a smooth manifold $M$ is a smooth $(0, 2)$-tensor satisfying*

$$g(X, Y) = g(Y, X), \quad g(X, X) \geqslant 0 \& g_p(X, X) = 0 \Longleftrightarrow X(p) = 0$$

*for any smooth tangent vector field $X, Y$.*

*A Riemannian manifold is a smooth manifold with a Riemannian metric.*

**例子 2.2.** $\mathbb{R}^n$

- $(g_{ij}) = (\delta_{ij})$
- 球面几何 $(g_{ij}) = \dfrac{4}{(1 + \sum_{i=1}^n (x^i)^2)^2}(\delta_{ij})$
- 双曲几何 $(g_{ij}) = \dfrac{4}{(1 - \sum_{i=1}^n (x^i)^2)^2}(\delta_{ij})$

## 2.1 Existence of Riemannian metric

**定理 2.3.** *A smooth manifold has a Riemannian metric.*

*Extrinsic proof.* Whitney embedding

$f : M^n \to N^{n+k}$ smooth immersion ($\mathrm{d}f_p$ is injective)

Let $(N, g_N)$ be a Riemannian metric

Pull-back metric $f^* g_N$ on M

$$(f^* g_N)_p(X_p, Y_p) = g_N(\mathrm{d}f_p(X_p), \mathrm{d}f_p(Y_p))$$

□

*Intrinsic proof.* $U_p$ coordinate neighborhood.$\{U_p, p \in M\}$ open cover.

paracompact$\Longrightarrow$ WLOG,let $\{U_\alpha\}$ be a locally finite covering of $M$ by coordinate neighborhood.

Partition of unity $\{\varphi_\alpha\}$ subordinate to $\{U_\alpha\}$.

$x\colon U_\alpha \to x(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$

$g_p(X, Y) = \sum\limits_\alpha \varphi_\alpha(p)(g_\alpha)_p(X, Y)$. □

**定义 2.4.** *Let $(M, g_M), (N, g_N)$ be two Riemannian manifolds. $\varphi\colon M \to N$ is called an* ***isometry*** *if $\varphi$ is a diffeomorphism and $\varphi^* g_N = g_M$.*

## 2.2 黎曼度量张量 $\rightsquigarrow$ 度量

**定义 2.5.** *A function $d \colon M \times M \to \mathbb{R}$ is called a metric if*

(i) $d(p,q) \geqslant 0$, *and* $d(p,q) = 0 \Longleftrightarrow p = q$.

(ii) $d(p,q) = d(q,p)$.

(iii) $d(p,q) \leqslant d(p,r) + d(r,q)$, $\forall\ r \in M$.

Let $(M,g)$ be a Riemannian manifold, for any $p,q \in M$, consider
$C_{p,q} = \{\gamma : [a,b] \to M \mid \gamma$ piecewise smooth regular curve with $\gamma(a) = p, \gamma(b) = q\}$.
Define $d(p,q) = \inf\{Length(\gamma) \mid \gamma \in C_{p,q}\}$.
The following questions are immediate

(1) Is $C_{p,q}$ empty?

(2) Is $d(p,q) < +\infty$?

(3) Is $d$ a metric?

(4) Can the infimum be attained?

Let $E_p = \{q \in M : p,q$ can be connected by a curve $\in C_{p,q}\}$. It is easy to show by connectedness argument that $E_p = M$. So $C_{p,q}$ could not be empty.

Take $\gamma \in C_{p,q}$, we can cover it by finite coordinate charts. So we just need to show any piecewise smooth curve contained in a coordinate chart has finite length.

$$Length(\gamma) = \int_a^b \sqrt{g_{ij} \frac{\partial x^i \circ \gamma}{\partial t} \frac{\partial x^j \circ \gamma}{\partial t}} \mathrm{d}t$$

**引理 2.6.**

Next we show $d(p,q)$ is a metric. It is obvious from definition that $d(p,q) \geqslant$ and $d(p,q) = d(q,p)$. Because we consider piesewise smooth curve, triangle inequality is also easy. If $p \neq q$, we can find a coordinate chart $U$ of $p$ such that $q \notin U$.

## 2.3 度量 $\rightsquigarrow$ 黎曼度量张量

https://mathoverflow.net/questions/45154/riemannian-metric-induced-by-a-metric

## 3 商流形的黎曼度量

1

2

# Chapter 2

# 寻找最短线

## 1 最简单的例子

### 欧式几何

设 $\mathbb{R}^2$ 上有两点 $p, q$, 我们知道连接 $p, q$ 的最短线是直线, 让我们来回顾一下证明.

以 $p$ 为原点建立极坐标系 $(r, \theta)$, 在此坐标系下标准度量写为

$$g = \mathrm{d}r \otimes \mathrm{d}r + r^2 \mathrm{d}\theta \otimes \mathrm{d}\theta.$$

设 $\gamma : [a, b] \to M$ 连接 $p, q$, 即 $\gamma(a) = p, \gamma(b) = q$. 在极坐标系下

$$\gamma(t) = (r(t), \theta(t), \quad \gamma'(t) = r'(t)\frac{\partial}{\partial r} + \theta'(t)\frac{\partial}{\partial \theta}.$$

我们计算 $\gamma$ 的长度

$$\begin{aligned} Length(\gamma) &= \int_a^b \sqrt{g(\gamma'(t), \gamma'(t))}\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b \sqrt{r'(t)^2 + r(t)^2\theta'(t)^2}\mathrm{d}t \\ &\geqslant \int_a^b |r'(t)|\mathrm{d}t \\ &\geqslant \left|\int_a^b r'(t)\mathrm{d}t\right| \\ &= |r(b) - r(a)|. \end{aligned}$$

其中等号成立当且仅当 $\theta'(t) \equiv 0, \gamma(t)$ 单调.

### 球面几何

$\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \theta \in (0, 2\pi)$, $\left\{(\varphi, \theta) \mid \varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \theta \in (0, 2\pi)\right\}$

$g = \mathrm{d}\varphi \otimes \mathrm{d}\varphi + \cos^2\varphi \mathrm{d}\theta \otimes \mathrm{d}\theta$ 以上例子依赖于预先知道了什么是最短线, 然后建立了相应的坐标卡, 能否把上述办法在一般的流形上推广.

## 2 弧长泛函与重新参数化

**定义 2.1.** 称光滑曲线 $\gamma\colon [a,b] \to M$ 是正则的如果 $\|\gamma'(t)\| \neq 0, \forall\ t \in I$.

### 分段光滑（正则）曲线

**定义 2.2.** *If $\gamma\colon I \to M$ is a smooth regular curve and if $p\colon I' \to I$ is a smooth map with non-zero derivative, then we say that $\gamma \circ p\colon I' \to M$ is a reparametrization of $\gamma\colon I \to M$.*

It is easy to check that any reparametrization of a smooth regular curve is still a smooth regular curve and this defines an equivalent relationship on the space of all smooth regular curves to $M$.

We will use **parametrized curve** to refer to a smooth regular curve and **curve without parametrization** to refer to an equivalent class of smooth regular curves under reparametrization.

Let $\gamma\colon [a,b] \to M$ be a parametrized curve, we can define its length

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \mathrm{d}t := \int_a^b \sqrt{g(\gamma'(t), \gamma'(t))} \mathrm{d}t.$$

It is easy to check that

**引理 2.3.** *If $\gamma \circ p\colon I' \to M$ is a reparametrization of $\gamma\colon I \to M$, then $L(\gamma \circ p) = L(\gamma)$.*

So we can actually define length for curves without parametrization.

### 弧长参数化

There is always a canonical representative element for any equivalent class of smooth regular curves under reparametrization.

**命题 2.4.** *Suppose $\gamma\colon I \to M$ is a parametrized curve.*

(1) $p\colon I \to [0, L(\gamma)], t \mapsto \int_a^t \|\gamma'(s)\| \mathrm{d}s$ *is a smooth map with non-zero derivative.*

(2) *Suppose $\gamma \sim \gamma'$, then $\gamma \circ p^{-1} = \gamma' \circ p'^{-1}$ as maps from $[0, L(\gamma)]$ to $M$.*

*We call $\gamma \circ p^{-1}$ the **arclength reparametrization** of $\gamma$.*

**命题 2.5.** *$\gamma\colon I \to M$ is parametrized with arclength iff $\|\gamma'(t)\| \equiv 1$.*

### 能量泛函

**定义 2.6.** 设 $\gamma\colon [a,b] \to M$ 是分段光滑正则曲线，定义

$$E(\gamma) = \frac{1}{2} \int_a^b \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle \, \mathrm{d}t$$

# 3 弧长泛函与能量泛函

**引理 3.1.**

$$L(\gamma)^2 \leqslant 2(b-a)E(\gamma).$$

等号成立当且仅当 $\|\gamma'(t)\|$ 是常值.

证明.

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \overset{\text{Holder}}{\leqslant} \sqrt{\int_a^b 1^2 \mathrm{d}t} \sqrt{\int_a^b \|\gamma'(t)\|^2 \mathrm{d}t} = \sqrt{b-a}\sqrt{2E(r)}.$$

□

**引理 3.2.** 假设 $\gamma$ 是连接 $p, q$ 的光滑正则最短线

## 4 能量泛函的固定端点且固定边界的一阶变分

上节中我们提到, 假设正则曲线 $\gamma$ 是连接 $p, q$ 的分段 $C^1$ 曲线中的最短线, 那么不妨设 $\gamma$ 是弧长参数化的, 此时 $\gamma$ 使得 $E$ 在连接 $p, q$ 的相同参数区间的曲线中取得最小值. 本节中, 我们计算 $\gamma$ 作为使得 $E$ 在连接 $p, q$ 的相同参数区间的曲线中取得最小值的曲线需要满足的方程, 也就是要计算能量泛函 $E$ 的固定端点且固定边界的一阶变分.

先考虑 $p, q, \gamma$ 都落在一个坐标卡 $(U, x)$ 中的情形, 设 $\gamma$ 在 $(U, x)$ 中的坐标表示为 $x(t)$. 任给定义在 $[a, b]$ 上的向量值函数 $y(t)$ 满足 $y(a) = y(b) = 0$, 则

$$x_\varepsilon(t) = x(t) + \varepsilon y(t)$$

是一族定义在 $[a, b]$ 上, 且端点都为 $p, q$ 的曲线, 且当 $\varepsilon$ 充分小时 $x_\varepsilon$ 落在 $U$ 中. 记

$$S(\varepsilon) = 2E(x_\varepsilon) = \int_a^b g_{ij}(x(t) + \varepsilon y(t)) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x^i(t) + \varepsilon y^i(t)) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x^j(t) + \varepsilon y^j(t)) \mathrm{d}t.$$

假设 $\gamma$ 是连接 $p, q$ 的最短线, 则

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} 2E(\gamma_\varepsilon) = \int_a^b g_{ij,k}(x) y^k \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t + \int_a^b g_{ij}(x)\frac{\mathrm{d}y^i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t + \int_a^b g_{ij}(x)\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}y^j}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$$

用分部积分处理后两项, 过程中利用到了 $y(a) = y(b) = 0$.

$$\int_a^b g_{ij}(x)\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}y^j}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = -\int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(g_{ij}(x)\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\right) y^j \mathrm{d}t = -\int_a^b g_{ij,k}(x)\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} y^j \mathrm{d}t - \int_a^b g_{ij}(x)\frac{\mathrm{d}^2 x^i}{\mathrm{d}t^2} y^j \mathrm{d}t$$

$$\int_a^b g_{ij}(x)\frac{\mathrm{d}y^i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = -\int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(g_{ij}(x)\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}\right) y^i \mathrm{d}t = -\int_a^b g_{ij,k}(x)\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t} y^i \mathrm{d}t - \int_a^b g_{ij}(x)\frac{\mathrm{d}^2 x^j}{\mathrm{d}t^2} y^i \mathrm{d}t$$

代回得

$$\int_a^b \left( g_{ij,k}(x)\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t} - g_{ik,j}(x)\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} - g_{kj,i}(x)\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t} - 2g_{ik}(x)\frac{\mathrm{d}^2 x^i}{\mathrm{d}t^2}\right) y^k \mathrm{d}t = 0.$$

由 $y(t)$ 的任意性, 我们得到对任意的 $k$, 有

$$g_{ij,k}(x)\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t} - g_{ik,j}(x)\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} - g_{kj,i}(x)\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t} - 2g_{lk}(x)\frac{\mathrm{d}^2 x^l}{\mathrm{d}t^2} = 0$$

整理指标得, 对于任意的 $l$, 有

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^l}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{2} g^{kl}(g_{ik,j} + g_{kj,i} - g_{ij,k})\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t} = 0.$$

## 5 Christoffel 符号及测地线

**定义 5.1.** 设 $(M,g)$ 是黎曼流形, $(U,x)$ 是一个坐标卡, $g$ 在 $(U,x)$ 下的分量表示为 $(g_{ij})$,

$$\Gamma^k_{ij}=\frac{1}{2}g^{kl}(g_{jl,i}+g_{il,j}-g_{ij,l}),$$

称作第二类 *Christoffel* 符号.

**命题 5.2.**

$$\Gamma^k_{ij}=\Gamma^k_{ji}.$$

**命题 5.3.**

$$g_{ij,k}=g_{lj}\Gamma^l_{ki}+g_{il}\Gamma^l_{kj}$$

证明.

$$\begin{aligned}RHS&=\frac{1}{2}g_{lj}g^{lp}(g_{kp,i}+g_{pi,k}-g_{ki,p})+\frac{1}{2}g_{il}g^{lp}(g_{kp,j}+g_{pj,k}-g_{kj,p})\\&=\frac{1}{2}(g_{kj,i}+g_{ji,k}-g_{ki,j})+\frac{1}{2}(g_{ki,j}+g_{ij,k}-g_{kj,i})=g_{ij,k}\end{aligned}$$

□

**命题 5.4.** $\widetilde{\Gamma}^k_{ij}=\Gamma^\gamma_{\alpha\eta}\dfrac{\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^i}\dfrac{\partial x^\eta}{\partial\tilde{x}^j}\dfrac{\partial\tilde{x}^k}{\partial x^\gamma}+\dfrac{\partial\tilde{x}^k}{\partial x^\gamma}\dfrac{\partial^2x^\gamma}{\partial\tilde{x}^i\partial\tilde{x}^j}$

**命题 5.5.**

$$\frac{\mathrm{d}^2x^k}{\mathrm{d}t^2}+\Gamma^k_{ij}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}=0$$

是定义在流形上的方程, 称为测地线方程, 方程的解称为测地线.

注意到测地线方程是一个二阶非线性常微分方程, 因此我们只能得到解的局部存在唯一性,

**定理 5.6.** 对 $M$ 上的任意一点 $p$ 和任意一个切向量 $v\in T_pM$, 存在 $\varepsilon>0$ 和唯一一条测地线

$$\gamma\colon(-\varepsilon,\varepsilon)\longrightarrow M$$

使得 $\gamma(0)=p$ 且 $\gamma'(0)=v$.

**定理 5.7.** 对 $M$ 上的任意一点 $p$, 存在开集 $V\subset M$ 和 $\delta>0$ 和

$$\mathcal{U}_{V,\delta}=\{(q,v)\mid q\in V,v\in T_qM,\|v\|<\delta\}$$

和 $\varepsilon>0$ 和一个光滑映射

$$\gamma\colon(-\varepsilon,\varepsilon)\times\mathcal{U}_{V,\delta}\longrightarrow M$$

使得对任意的 $(q,v)\in\mathcal{U}_{V,\delta}$, 曲线

$$\gamma_{(q,v)}\colon(-\varepsilon,\varepsilon)\longrightarrow M,\quad t\longmapsto\gamma(t,q,v)$$

是满足 $\gamma(0,q,v)=q,r'(0,q,v)=v$ 的测地线.

**命题 5.8.** 测地线的切向量长度为常值.

证明.

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(g_{ij}(x(t))\frac{\mathrm{d}x^i(t)}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^j(t)}{\mathrm{d}t}\right) &= g_{ij,k}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t} + g_{ij}\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t} + g_{ij}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^2x^j}{\mathrm{d}t} \\
&= g_{ij,k}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t} + g_{ij}\left(-\Gamma^i_{kl}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}t}\right)\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t} + g_{ij}\frac{dx^i}{\mathrm{d}t}\left(-\Gamma^j_{kl}\frac{\mathrm{d}x^k}{d\ t}\frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}t}\right) \\
&= \left(g_{ij,k} - g_{lj}\Gamma^l_{ki} - g_{il}\Gamma^l_{kj}\right)\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t} = 0
\end{aligned}
$$

□

**引理 5.9** (Homogeneity of geodesic)**.** *If the geodesic* $\gamma(t,q,v)$ *is defined on* $t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$*, then the geodesic* $\gamma(t,q,\lambda v)$*,*$\lambda \in \mathbb{R}^+$ *is defined on the interval* $t \in (-\frac{\varepsilon}{\lambda},\frac{\varepsilon}{\lambda})$ *and*

$$\gamma(t,q,\lambda v) = \gamma(\lambda t,q,v).$$

## 6 指数映射

要根据一点附近的测地线的性质，来确定一个坐标系，使得测地线在这个坐标映射下投到欧氏区域后是直线.

其实拿切空间来做坐标区域应该是个挺自然的想法，毕竟切空间是该处的一阶线性近似

$$\begin{aligned}\exp_p : T_pM &\longrightarrow M \\ v &\longmapsto \gamma(1, p, v)\end{aligned}$$

- 选取 1 能够使测地线走的长度等于 $\|v\|_g$.

### 指数映射的定义域

3 月 4 日 52 分 30 秒

$V_p := \{v \in T_pM \mid \text{the geodesic } \gamma(t, p, v) \text{ is defined on } [0, 1]\}$.

为了 $\exp_p$ 成为坐标映射，我们希望 $V_p$ 至少包含以 $O$ 为心的一个开球！

3 月 4 日 55 分 45 秒

**命题 6.1.**

(1) $V_p$ *is star-shaped aroud* $O \in T_pM$*, i.e.*$\forall\ v \in V_p, \forall\ \lambda \in [0, 1]$*, then* $\lambda v \in V_p$.

(2) $\forall\ p, \exists\ \varepsilon = \varepsilon(p)$, s.t. $\gamma(t, p, v)$ *is defined on* $[0, 1]$ *once* $\|v\| < \varepsilon$.

3 月 4 日 1 小时 1 分 0 秒，反函数定理

3 月 4 日 1 小时 5 分 2 秒

**命题 6.2.** $\mathrm{d}\exp_p = \mathrm{Id}_{T_pM}$.

由逆映射定理，存在 $p$ 点的一个邻域 $U$ 使得 $\exp_p^{-1}\colon U \to T_pM$ 是微分同胚.

距离 $\exp_p^{-1}$ 成为坐标映射只差 $T_pM$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的一个同构，任取 $T_pM$ 的一组基即可.

**命题 6.3.** $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$.

**命题 6.4.** 选取 $T_pM$ 的一组基 $\{v_1, \cdots, v_n\}$. 断言 $g$ 在坐标映射 $\exp_p^{-1}\colon U \to T_pM \cong \mathbb{R}^n$ 下的分量在 $O$ 处的取值 $g_{ij}(O) = g(v_i, v_j)$.

**定义 6.5.** 选取 $T_pM$ 的一组标准正交基，此时的 $(\exp_p^{-1}, U)$ 称为 $p$ 的一个法坐标.

3 月 4 日 1 小时 17 分 45 秒

证明. $0 = \dfrac{\mathrm{d}^2 x^i}{\mathrm{d}t^2} + \Gamma_{jk}^i(x(t))\dfrac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t}$ □

**极坐标**

A curve $c(t) = (r(t), \varphi^1(t), \cdots, \varphi^{n-1}(t))$
$c'(t) = (\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}\varphi^1}{\mathrm{d}t}, \cdots, \frac{\mathrm{d}\varphi^{n-1}}{\mathrm{d}t}) =: (v^1, v^2, \cdots, v^n)$
$\|c'(t)\| = g_{ij}(c(t))v^i v^j = \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \underbrace{\sum_{i,j=1}^{n-1} g_{\varphi^i\varphi^j} \frac{\mathrm{d}\varphi^i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\varphi^j}{\mathrm{d}t}}_{\geqslant 0}$

3 月 8 日第二段 11 分 20 秒

**推论 6.6.** *For any $p \in M$,$\exists\ \rho > 0$ s.t. $\forall\ q$ with $d(p,q) = \rho$, there exists a unique shortest curve $\in C_{p,q}$.*

证明. $\exists\ \rho > 0$ s.t. $B(p, 2\rho)$ lies in a Riemannian polar coordinate neighborhood.

For any curve $c \in C_{p,q}$

$$c : [0,T] \to M, c(0) = p, c(T) = q$$

□

**推论 6.7.** 最短线是光滑的.

# 7 一致邻域

3 月 8 日 25 分 20 秒

3 月 8 日 28 分 56 秒

**定义 7.1.** *totally normal neighborhood.*

$\forall\ p \in M$, if $W \ni p$, $W$ is a normal neighborhood of every point $q \in W$, then $W$ is cassled a **totally normal neighborhood**.

## 7.1 totally normal neighborhood 的存在性

3 月 8 日第二段 35 分 4 秒

**引理 7.2.**

$$\mathrm{d}\exp(p, 0_p) : T_{p,0_p}(TM) \longrightarrow T_{p,p}(M \times M)$$

*is non sigular.*

3 月 8 日第二段 1 小时 3 分 54 秒

**定理 7.3.** *For any $p \in M$, $\exists$ a neighborhood $W$ of $p$, and a $\delta > 0$ such that $\forall q \in W$, $\exp_q$ is a diffeomorphism on $B(0_q, \delta) \subset T_q M$ and*

3 月 8 日第二段 1 小时 14 分 7 秒

**推论 7.4.**

# 8 Cut locus 1

3 月 8 日第二段 1 小时 25 分 32 秒，总结

### 测地线的最大存在区间的端点是开的

3 月 8 日第二段 1 小时 28 分 5 秒

给定 $p \in M, v \in T_pM$，有测地线 $\gamma(t,p,v) = \exp_p tv$.

假设 $[0,b]$ 是 $\gamma$ 的最大存在区间. 记 $q = \gamma(b,p,v), w = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=b} \gamma(t,p,v)$.

存在经过 $q$，以 $w$ 为初始切向量的测地线 $\tilde{\gamma}$，$\tilde{\gamma}$ 在某区间 $(-\varepsilon,\varepsilon)$ 上有定义.

断言 $\gamma\big|_{(b-\varepsilon,b]}$ 的反转与 $\tilde{\gamma}\big|_{(-\varepsilon,0]}$ 的反转都是以 $q$ 为起点，以 $-w$ 为初始切向量的测地线.

这是由链式法则与测地线方程的特点保证的.

由存在唯一性知 $\gamma$ 与 $\tilde{\gamma}$ 在公共定义域上重合. 这与 $[0,b]$ 是 $\gamma$ 的最大存在区间矛盾.

### 测地线是最短线的最大区间相对测地线的最大存在区间是闭的

3 月 8 日第二段 1 小时 31 分 7 秒

由最短线也是连接其上任意两点的最短线，知测地线是最短线的点是个区间.

$A = \{t > 0 \mid d(p,\gamma(t)) = t\|v\|_g\}$ 是闭的.

Either $A = (0,b)$ or $A = (0,a]$ for some $0 < a < b$.

**定义 8.1.**

- *如果* $A = (0,a]$，*则称* $\gamma(a)$ *是* $p$ *沿测地线* $\gamma$ *的割点.*
- *如果* $A = (0,b)$，*则称* $p$ *沿测地线* $\gamma$ *没有割点.*
- *称割点的全体为* $p$ *的割迹，记作* $C(p)$.
- *定义* $\tau$: $\{v \in T_pM \mid \|v\|_g = 1\} \to \mathbb{R}, \tau(v) = \begin{cases} a & \textit{if } \exp_p(av) \textit{ is a cut point of } p \\ b & \textit{if } p \textit{ has no cut point along } t \mapsto \exp_p(tv) \end{cases}$

**定义 8.2.**

- *Define a map* $\tau : S_p \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

  $\forall v \in S_p, \tau(v) = \begin{cases} a & \textit{if } \exp_p(av) \textit{is a cut point ofp} \\ \infty & \textit{ifphas no cut point alongt} \mapsto \exp_p(tv) \end{cases}$

  $E(p) = \{tv \mid v \in S_p, 0 \leqslant t < \tau(v)\}$

  $\tilde{C}(p) = \{tv \mid v \in S_p, t = \tau(v)\}$

  $C(p) = \{\textit{cut points ofp}\} = \exp_p(\tilde{C}(p))$

$[0,b)$ is the maximal interval on which $t \mapsto \exp_p tv$ is defined.

**命题 8.3.** $\forall\ p,q \in M, \exists$ *two shortest curve connecting* $p$ *and* $q$*,*

**推论 8.4.** $\exp_p : E(p) \to \exp_p(E(P)) \subset M$ *is injective.*

证明. Suppose $\exists V, W \in E(p)$ s.t. $\exp_p(V) = \exp_p(W) = q$.

$t \mapsto \exp_p\left(t\dfrac{v}{\|v\|}\right)$

$t \mapsto \exp_p\left(t\dfrac{w}{\|w\|}\right)$

Contradiction. □

**推论 8.5.** $\exp_p(E(P)) \cap C(p) = \varnothing$.

证明. Suppose $\exists\ v \in \tilde{C}(p), W \in E(p)$ s.t. $\exp_p V = \exp_p W = q$

Contradiction. □

Question: $\exp_p(E(p)) \cup C(p) = M$?

$\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

$\forall q \in \exp_p(E_p) \cup C(p) = M$?

## 9 Hopf-Rinow Theorem

3 月 11 日 27 分 14 秒
任给 $p_0, q \in M$,$d(p_0, q) = r_0$. 我们想要找 $p_0, q$ 之间的最短线.
我们知道局部上总是可以做的，问题是 $p_0, q$ 可能离得很远.
思路是一步一步走.
选取以 $p_0$ 为中心的一个 normal ball $B(p_0, \rho_0)$，若 $q \in B(p_0, \rho_0)$，结束.
若 $q \notin B(p_0, \rho_0)$，假设 $p_0, q$ 之间存在最短线 $\gamma$，易知

- $\gamma \cap \partial B(p_0, \rho_0) = \{pt\} =: \{p_1\}$.
- $d(p_0, q) = \min\limits_{p \in \partial B(p_0, \rho_0)} d(p, q)$.

从 $p_1$ 出发，我们可以找一个 normal ball $B(p_1, \rho_1)$，并重复上述操作.
问题是：(1) $p_0$ 到 $p_2$ 的分段曲线是最短的吗？(2) 最终能达到 $q$ 吗？

- $d(p_1, q) = r_0 - \rho_0$
  - 假如 $d(p_1, q) < r_0 - \rho_0$，那么可以找到一条连接 $p_0, q$ 的长度小于 $r_0$ 的曲线，矛盾.
  - 假如 $d(p_1, q) > r_0 - \rho_0$. 任选连接 $p_0, q$ 的曲线 $\gamma$，$Length(\gamma) \geqslant \rho_0 + d(p_1, q)$.
    取下确界，得 $r_0 \geqslant \rho_0 + d(p_1, q) > r_0$，矛盾.
- $d(p_0, p_2) = \rho_0 + \rho_1$
  - $d(p_0, p_2) \leqslant d(p_0, p_1) + d(p_0, p_2) = \rho_0 + \rho_1$.
  - $d(p_0, p_2) \geqslant d(p_0, q) - d(p_2, q) = r - (r - \rho_0 - \rho_1) = \rho_0 + \rho_1$.

因此，走了 $n$ 步之后，$p_0$ 和 $p_n$ 之间的连线仍是最短的.
3 月 11 日 55 分 24 秒名场面：方向决定道路，道路决定命运.
容易举出一些例子使得 (2) 不成立，为此我们附加一些额外的条件.
3 月 11 日 59 分 19 秒

**定义 9.1.**

- *injective radius at* $p \in M$ : $i(p) = \sup\left\{\rho > 0 \mid \exp_p\big|_{B(O,\rho)} \text{ is a diffeomorphism}\right\}$.
- *injective radius of* $M$ : $i(M) = \inf\limits_{p \in M} i(p)$.

$M$ compact $\Longrightarrow i(M) > 0$.
3 月 11 日 1 小时 4 分 52 秒
Given $p \in M$,

1. Assumption I: $\overline{B_p(r)}$ is compact($\Longleftrightarrow$All closed bounded subsets of $M$ is compact).
2. Assumption II: $(M, g)$ is a complete metric space.
3. Assumption III: $\exp_p(p)$ is defined on the whole space $T_pM$.

这三个条件都可以保证 (2). 下面用 Assupmtion III 推 (2).

3 月 21 日 1 小时 11 分 43 秒

*证明.* $p, V \in T_pM$ $c(t) = \exp_p tV$

Aim:$c(r) = \exp_p(rV) = q$

Consider the set $I := \{t \in [0,r] \mid d(c(t), q) = r - t\}$

□

1 小时 24 分 33 秒

事实上，上面几种假定是等价的，这就是 Hopf-Rinow 定理.

3 月 15 日 2 分 31 秒

**定理 9.2** (Hopf-Rinow,1931)**.** *Let $(M, g)$ be a Riemannian manifold, TFAE*

(1) *$(M, d_g)$ is a complete metric space.*

(2) *All closed bounded subsets of $M$ is compact.*

(3) *$\exists\ p \in M$, $\exp_p$ is defined on the whole $T_pM$.*

(4) *$\forall\ p \in M$, $\exp_p$ is defined on the whole $T_pM$.*

*Moreover, each of the statements $(1) - (4)$ implies*

(5) *$\forall\ p, q \in M$ can be joined by a shortest curve.*

**注记.** 原始论文：*Ueber den Begriff der vollständigen differentialgeometrischen Fläche*.

*证明.*

- $(3) \Longrightarrow (2)$

  Claim:$\forall\ r > 0, \overline{B(p,r)}$ is compact.

  For any bounded closed subset $K$, $\exists\ r_k$ such that $K \subset \overline{B(p, r_k)}$.

  FACT:$\overline{B(p,r)} = \exp_p(\overline{B(Op,r)})$

  - $\exp_p(\overline{B(O_p,r)}) \subset \overline{B(p,r)}$

    $\forall\ v \in \overline{B(O_p,r)}, d(p, \exp_p V) \leqslant r \Longrightarrow \exp_p V \in \overline{B(p,r)}$
  - $\forall q \in \overline{B(p,r)}$,

- $(2) \Longrightarrow (1)$

- $(1) \Longrightarrow (4)$

  Suppose $\exists\ p \in M$ and $v \in T_pM$ such that the geodesic $t \mapsto \exp_p tv$ is defined on the maximal interval $[a, b), b < \infty$.

  For any $\{t_n\} \subset [a, b)$ such that $t_n \to b$, $d(\exp_p t_n v, \exp_p t_m v) \leqslant \|v\|_g |t_n - t_m|$ and then $\{\exp_p t_n v\}$ is a Cauchy sequence.

  $\exists\ p_0 \in M$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \exp_p t_n v = p_0$,i.e. $\forall \delta > 0, \exists N$ such that $\exp_p t_n v \in B(p_0, \delta), \forall n \geqslant N$.

□

**引理 9.3.** 内容...

# 10 Cut locus 2

3 月 15 日 39 分 24 秒

**定理 10.1.** *Let $(M,g)$ be a complete Riemannian manifold, then*

$$M = \exp_p(E(p)) \sqcup c(p).$$

**定理 10.2.** *Let $(M,g)$ be a complete Riemannian manifold.*

*Let $\gamma\colon [a,b] \to M$ be a normal geodesic with $p = \gamma(0)$, $v$*

证明. Choose a sequence of parameters

$$a_1 > a_2 > a_3 > \cdots, \quad \lim_{i\to+\infty} a_i = a.$$

By completeness, $\exists v_i \in T_pM, \|v_i\| = 1$ such that

$$\gamma_i(t) = \exp_p tv_i, t \in [0, b_i]$$

is a shortest curve form $p$ to $\gamma(a_i)$, where $b_i = d(p, \gamma(a_i))$.

Notice that $v_i \neq v$.

$\lim_{i\to+\infty} p_i =$ □

## 11 黎曼覆盖映射

## 12 Existence of shortest curves in given homotopy class

- isometry：微分同胚，度量等于拉回
-

3 月 15 日 1 小时 26 分 15 秒

**定理 12.1.** *Let $(M, g)$ be compact.*

*Then every homotopy class of closed curves in $M$ contains a curve which is shortest in its homotopy class and a geodesic.*

**引理 12.2.** *Let $(M, g)$ be compact, $\exists \rho_0 > 0$ such that for any $\gamma_0, \gamma_1 \colon S^1 \to M$ be closed curves with $d(\gamma_0(t), \gamma_1(t)) \leqslant \rho_0, \forall\ t \in S_1$ we have $\gamma_0$ and $\gamma_1$ are homotopic.*

**引理 12.3.** *A shortest curve in a homotopy class is geodesic.*

证明. Let $(\gamma)n_{n\in\mathbb{N}}$ is a minimizing sequence for length in the homotopy class.

All are parametrized proportional to arc length.

We can find $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < t_{n+1} = 2\pi$ with the property that

$$Length(\gamma_n\mid_{t_i, t_{i+1}}) \leqslant \frac{\rho_0}{2}$$

□

## 13 title

### 13.1 前情回顾

**Riemannian Covering map**

$\pi : (\tilde{M}, \pi^* g) \to (M, g)$ smooth map

locally Riemannian isometry

isometry $\varphi \colon (M, g_M) \to (N, g_N)$ is called an isometry if $\varphi$ is diffeomorphism and $g_M = \varphi^* g_N$

locally isometry $\varphi \colon (M, g_M) \to (N, g_N)$ smooth map, $\forall p \in M \exists U \in p$such that $\varphi\big|_U \colon U \to \varphi(U)$ is an isometry 问题：对 $\varphi(U)$ 有没有要求

locally Riemannian isometry $\varphi \colon (M, g_M) \to (N, g_N)$ smooth map, $\forall\ p \in M, \mathrm{d}\varphi_p : T_pM \to T_{\varphi(p)}N$ is a linear isometry.

**命题 13.1.** *Let $\varphi \colon (M, g_M) \to (N, g_N)$ be a locally Riemannian isometry.*

(1) *$\varphi$ maps geodesics to geodesics.*

(2) *For any $\tilde{p}, \tilde{v} \in T_{\tilde{p}}M$, we have*

$$\varphi \circ (\exp_{\tilde{p}} \tilde{v}) = \exp_{\varphi(\tilde{p})}(\mathrm{d}\varphi_{(\tilde{p})}(\tilde{v})).$$

$$\begin{array}{ccc} T_{\tilde{p}}M & \xrightarrow{\mathrm{d}\varphi(\tilde{p})} & T_{\varphi(\tilde{p})N} \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ M & \xrightarrow{\quad\varphi\quad} & N \end{array}$$

(3) *$\varphi$ is distance non-increasing.*

$$\forall\ \tilde{p},\tilde{q}, d_N(\varphi(\tilde{p}),\varphi(\tilde{q})) \leqslant d_M(\tilde{p},\tilde{q})$$

(4) *$\varphi$ is bijective, then it is distance preserving.*

**定理 13.2.** *$(M, g_M)$ complete Riemannian manifold, $p, q \in M$. Every homotopy class of paths from $p$ to $q$ contains a shortest curve.*

证明. Assume that $(M, g_M)$ complete$\Longrightarrow (\tilde{M}, \pi^* g)$ is complete.

□

**命题 13.3.** *Let $\pi\colon (\tilde{M},\tilde{g}) \to (M,g)$ is a Riemannian covering map, then $(M,g)$ complete iff $(\tilde{M},\tilde{g})$ complete.*

证明.

ete $\Longrightarrow (\tilde{M},\tilde{g})$complete $\forall \tilde{p} \in \tilde{M}, \tilde{v} \in T_{\tilde{p}\tilde{M}}, t \mapsto \exp_{\tilde{p}} t\tilde{v}$

$p = \pi(\tilde{p}), v = \mathrm{d}\pi(\tilde{p})(\tilde{v})$

geodesic $t \mapsto \exp_p tv$ is defined on $[0,\infty)$

path liftying, $\exists \tilde{\gamma}$ a path in $\tilde{M}$ such that $\gamma\tilde{(0)} = \tilde{p}, \pi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$

$\dfrac{\mathrm{d}\tilde{\gamma}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} = \tilde{v}$

ete $\Longrightarrow (M,g)$complete $\forall p \in M, \forall v \in T_p M, t \mapsto \exp_p tv$

□

**命题 13.4.** *Let $\pi\colon (\tilde{M},\tilde{g}) \to (M,g)$ is a local Riemannian isometry. Suppose $(\tilde{M},\tilde{g})$ complete. Then $(M,g)$ is complete and $\pi$ is a Riemannian covering map.*

证明. (1) $\pi$ is surjective.

$\forall \tilde{p} \in \tilde{M}, p = \pi(\tilde{p}) \in M$

$\forall q \in M$,$\exists$ a shortest geodesic $\gamma$ from $p$ to $q$.

Let $\tilde{\gamma}$ be the lifting of $\gamma$ starting at $\tilde{p} = \tilde{\gamma}(0)$

$\pi \circ \tilde{\gamma} = \gamma, q = \gamma(t_0), \pi \circ \tilde{\gamma}(t_0) = \gamma(t_0) = q$

(2) evenly covered

$p \in U, \pi^{-1}(U) = \displaystyle\bigsqcup_{\alpha\in\Lambda} \tilde{U}_\alpha$

$\pi\colon \tilde{U}_\alpha \to U$ diffeomorphism

Normall ball $B(p,\varepsilon)$

$\tilde{U}_\alpha = B(\tilde{p}_\alpha,\varepsilon)$ metric ball

(a) $\tilde{U}_\alpha \cap \tilde{U}_\beta = \varnothing, \forall \alpha \neq \beta$

$d(\tilde{p}_\alpha, \tilde{p}_\beta) \geqslant 2\varepsilon$

(b) $\pi^{-1}(U) = \bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda} \tilde{U}_\alpha$

- $\forall \tilde{q} \in \tilde{U}_\alpha$ for some $\alpha \in \Lambda$
  $\exists$ a geodesic $\tilde{\gamma}$ of length $< \varepsilon$ from

□

$(U, x)$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^i(t)}{\mathrm{d}t^2} + \Gamma^i_{jk}(x(t)) \frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t} = 0, i = 1, \cdots, n$$

# 14 能量泛函的变分 II

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}s} &= \frac{1}{2}\int_a^b \frac{\partial}{\partial s}\left\langle \frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial t}\right\rangle \mathrm{d}t && \frac{\partial F}{\partial t}\text{视作沿曲线}F(t,\cdot)\text{的向量场}\\
&= \int_a^b \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}\frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial t}\right\rangle \mathrm{d}t && \frac{\partial F}{\partial t}\text{视作沿}F\text{的向量场}\\
&= \int_a^b \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\frac{\partial F}{\partial s}, \frac{\partial F}{\partial t}\right\rangle \mathrm{d}t\\
&= \int_a^b \frac{\partial}{\partial t}\left\langle \frac{\partial F}{\partial s}, \frac{\partial F}{\partial t}\right\rangle \mathrm{d}t - \int_a^b \left\langle \frac{\partial F}{\partial s}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\frac{\partial F}{\partial t}\right\rangle \mathrm{d}t\\
E'(0) &= \langle V, T\rangle\Big|_a^b - \int_a^b \langle V, \nabla_T T\rangle \,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

3 月 29 日 1 小时 35 分 41 秒

## 14.1 Gauss 引理

3 月 29 日 1 小时 36 分 33 秒

## 14.2 第二变分公式

3 月 29 日 1 小时 51 分 30 秒

# Chapter 3

# Levi-Civita 联络和黎曼曲率张量

关于向量丛上的联络、拉回丛上的拉回联络、联络的曲率形式的知识, 可参考微分流形笔记.

## 1 仿射联络

## 2 张量场的协变导数

本节我们从切丛上的一个联络出发, 定义张量丛上的一个联络.

**定理 2.1.** 设 $M$ 是光滑流形，$\nabla$ 是其上的仿射联络，那么存在唯一的映射

$$\nabla\colon \Gamma(TM)\times\Gamma\left(\bigotimes^{r,s}TM\right)\to\Gamma\left(\bigotimes^{r,s}TM\right)$$

满足

(1) $\nabla_{fX+fY}A=f\nabla_X A+g\nabla_Y A$

(2) $\nabla_X(A_1+A_2)=\nabla_X A_1+\nabla_X A_2$

(3) $\nabla_X(fA)=(Xf)A+f\nabla_X A$

(4) 当 $A\in C^\infty(M)$ 或 $\Gamma(TM)$ 时，$\nabla$ 与给定的仿射联络一致.

(5) $\nabla_X(A_1\otimes A_2)=(\nabla_X A_1)\otimes A_2+A_1\otimes\nabla_X A_2$

(6) $C(\nabla_X A)=\nabla_X(CA)$，其中 $C\colon\Gamma(\bigotimes^{r,s}TM)\to\Gamma(\bigotimes^{r-1,s-1}TM)$

证明. $A\in\Gamma(\bigotimes^{r,s}TM)$
$A=A^{i_1i_2\cdots i_r}_{j_1j_2\cdots j_s}Y_{i_1}\otimes Y_{i_2}\otimes\cdots\otimes Y_{i_r}\otimes\omega^{j_1}\otimes\cdots\otimes\omega^{j_s}$
$\nabla_X A=\sum\nabla_X$
$=\sum X(A^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s})Y_{i_1}$
线性，Leibniz
唯一的问题是如何对微分 1 形式求导
$\omega\in\Omega^1(M)=\Gamma(T^*M)$
$\nabla_X\omega?$
$\forall Y\in\Gamma(TM),\omega(Y)\in C^\infty(TM)$
$X(\omega(Y))=\nabla_X(\omega(Y))=\nabla_X(C(\omega\otimes Y))=C(\nabla_X(\omega\otimes Y))$
$C(\nabla_X\omega\otimes Y+\omega\otimes\nabla_X Y)$
$\nabla_X(\omega)Y+\omega(\nabla_X Y)$
$(\nabla_X\omega)=X(\omega(Y))-\omega(\nabla_X Y)$
$\Longrightarrow$ uniqueness □

**注记.** (1) *is a consequence of the other assumptions.*
不是那么令人惊讶，这是说在这里是多余的，而不是在仿射联络的最初定义中也是多余的
$\forall X,Y,Z\in\Gamma(TM)$
$f,g\in C^\infty(TM),\omega\in\Gamma(T^*M)$

证明. $(fX+gY)\omega(Z)=\nabla_{fX+gY}\omega(Z)+\omega(\nabla_{fX+gY})Z$
$=fX(\omega(Z))+gY(\omega(Z))$ □

**推论 2.2.** $\forall\ A \in \Gamma(\bigotimes^{r,s} TM), \omega_\alpha \in \Gamma(T^*M), \alpha = 1, 2, \cdots, r, Y_j \in \Gamma(TM), j = 1, \cdots, s$
*We have* $(\nabla_X A)(\omega_1, \cdots, \omega_s; Y_1, \cdots, Y_s)$
$= A(\omega_1, \cdots, \omega_r, Y_1, \cdots, Y_s)$

locality
$\nabla_X A(p)$ only depends on $X$ at $p$ and $Y$ in $U \ni p$.
$(M, \nabla)$
$\varphi\colon V \to W$ isomorphism
$\varphi^*\colon W^* \to V^*$ isomorphism $,\alpha \mapsto \varphi^*(\alpha)$
$\forall v \in V, \varphi^*(\alpha)(v) := \alpha(\varphi(v))$
$P_{c,0,t}\colon T_{c(0)}M \to T_{c(t)}M$
$\longrightarrow \tilde{P}_{c,0,t}\colon \bigotimes^{r,s} T_{c(0)}M \to \bigotimes^{r,s} T_{c(t)}M$
$v_1 \otimes \cdots \otimes v_r \otimes \omega^1 \otimes \cdots \otimes \omega^r \mapsto P_{c,0,t}(v_1) \otimes \cdots \otimes$
Define $\nabla_{X(p)} A := \lim_{h \to 0} \frac{\tilde{P}}{}$

**定义 2.3.** 称张量场 $A$ 为平行的如果 $\nabla_X A = 0,\ \forall\ X \in \Gamma(TM)$.

设曲线 $c(t)$ 在坐标卡 $(U,x)$ 中表达为 $(c^1(t),\cdots,c^n(t))$. 计算切向量 $c'(t)$ 关于自身的协变导数.

$$\begin{aligned}\frac{Dc'(t)}{\mathrm{d}t} &= \frac{D}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}c^i(t)}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \frac{\mathrm{d}^2c^i(t)}{\mathrm{d}t^2}\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\mathrm{d}c^i(t)}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}c^j(t)}{\mathrm{d}t}\nabla_{\partial_j}\frac{\partial}{\partial x^i} \\ &= \left(\frac{\mathrm{d}^2c^k(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}c^i(t)}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}c^i(t)}{\mathrm{d}t}f_{ij}^k\right)\frac{\partial}{\partial x^k}\end{aligned}$$

其中

$$\nabla_{\partial_j}\frac{\partial}{\partial x^i} = f_{ij}^k\frac{\partial}{\partial x^k}.$$

如果把 $f_{ij}^k$ 取为 $\Gamma_{ij}^k$, 那么 $\dfrac{Dc'(t)}{\mathrm{d}t} = 0$ 等价于测地线方程.

**注记.** 联络就是由 $n^3$ 个函数 $f_{ij}^k$ 给定的. 但显然不是说随便给我 $n^3$ 个函数我都决定联络. 但给你 $\Gamma_{ij}^k$ 是可以决定联络的. 在这个联络下, 测地线方程就等价于 $\dfrac{Dc'(t)}{\mathrm{d}t} = 0$.

事实上,$\Gamma_{ij}^k$ 决定的联络也不是唯一的使得测地线方程等价于 $\dfrac{Dc'(t)}{\mathrm{d}t} = 0$ 的联络,$\Gamma_{ij}^k$ 决定的联络自身还有一些特殊性,

(1) $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$

(2) $g_{ij,l} = g_{ij}\Gamma_{jl}^k + g_{kj}\Gamma_{il}^k$

这两个式子, 在我们学过联络之后, 可以翻译为

(1) $\Gamma_{ij}^k$ 决定的联络是无挠的.

(2) $g$ 关于 $\Gamma_{ij}^k$ 决定的联络是平行的.

满足这两条性质的联络是唯一的.

# 3 Levi-Civita 联络

**定义 3.1.** 称仿射联络 $\nabla$ 是 $(M,g)$ 上的 Levi-Civita 联络如果 $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$ 且 $\nabla g = 0$.

**命题 3.2.** $\nabla$ 是无挠的 $\iff \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

证明. 容易看出 $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k \iff \nabla_{\partial_i}\partial_j = \nabla_{\partial_j}\partial_i$. 那么

$$\begin{aligned}\nabla_X Y &= \nabla_{X^i\partial_i}\left(Y^j\partial_j\right)\\ &= X^i\frac{\partial Y_j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j} + X^iY^j\nabla_{\partial_i}\partial_j\\ &= \nabla_Y X + [X,Y].\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}R_{ijkl} =& \Delta R_{ijkl} + 2(B_{ijkl} - B_{ijlk} - B_{iljk} + B_{ikjl})\\ & - g^{pq}R_{pjkl}R_{qi} + R_{ipkl}R_{qj} + R_{ijpl}R_{qk} + R_{ijkp}R_{ql}\end{aligned}$$

□

**命题 3.3.** $\nabla$ 是度量相容的 $\iff$ $g_{ij,l} = g_{ik}\Gamma_{jl}^k + g_{kj}\Gamma_{jl}^k$.

证明. □

**定理 3.4** (黎曼几何基本定理)**.** *任意黎曼流形 $(M,g)$ 上存在唯一的 Levi-Civita 联络.*

局部坐标下的证明. 假定存在性. 轮换一下就能说明 $\Gamma_{ij}^k = \dfrac{1}{2}g^{kl}(g_{il,j} + g_{jl,i} - g_{ij,l})$. □

不用坐标的证明. Suppose existence.

Given $X, Y \in \Gamma(TM)$, we can determine $\nabla_X Y$ by determine $\langle \nabla_X Y, Z\rangle$ for any $Z \in \Gamma(TM)$.

$$\begin{aligned}\langle\nabla_X Y, Z\rangle &\overset{(2)}{=} X\langle Y,Z\rangle - \langle Y, \nabla_X Z\rangle\\ &\overset{(1)}{=} X\langle Y,Z\rangle - \langle Y, \nabla_Z X + [X,Z]\rangle\\ &= X\langle Y,Z\rangle - \langle Y,[X,Z]\rangle - \langle Y,\nabla_Z X\rangle\\ &\overset{(2)}{=} X\langle Y,Z\rangle - \langle Y,[X,Z]\rangle - Z\langle Y,X\rangle + \langle \nabla_Z Y, X\rangle\\ &\overset{(1)}{=} X\langle Y,Z\rangle - \langle Y,[X,Z]\rangle - Z\langle Y,X\rangle + \langle \nabla_Y Z + [Z,Y], X\rangle\\ &= X\langle Y,Z\rangle - \langle Y,[X,Z]\rangle - Z\langle Y,X\rangle + \langle X,[Z,Y]\rangle + \langle\nabla_Y Z, X\rangle\\ &\overset{(2)}{=} X\langle Y,Z\rangle - \langle Y,[X,Z]\rangle - Z\langle Y,X\rangle + \langle X,[Z,Y]\rangle + Y\langle Z,X\rangle - \langle Z,\nabla_Y X\rangle\\ &\overset{(1)}{=} X\langle Y,Z\rangle - \langle Y,[X,Z]\rangle - Z\langle Y,X\rangle + \langle X,[Z,Y]\rangle + Y\langle Z,X\rangle - \langle Z,\nabla_X Y + [Y,X]\rangle\end{aligned}$$

$$2\langle\nabla_X Y, Z\rangle = X\langle Y,Z\rangle + Y\langle Z,X\rangle - Z\langle X,Y\rangle - \langle X,[Y,Z]\rangle + \langle Y,[Z,X]\rangle + \langle Z,[X,Y]\rangle$$

□

**引理 3.5.** 设 $(M,g)$ 是黎曼流形，$\nabla$ 是其上与 $g$ 相容的联络. 设 $c\colon (a,b)\to M$ 是光滑曲线，$\dfrac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}$ 是 $\nabla$ 诱导的沿曲线的协变导数. 设 $V(t), W(t)$ 是沿 $c$ 的光滑曲线，那么

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle V(t),W(t)\rangle = \left\langle \frac{DV}{\mathrm{d}t}(t), W(t)\right\rangle + \left\langle V(t), \frac{DW}{\mathrm{d}t}(t)\right\rangle.$$

证明. 设在坐标邻域 $(U,x)$ 中 $V(t)=V^i(t)\dfrac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{c(t)}, W(t)=W^j(t)\dfrac{\partial}{\partial x^j}\Big|_{c(t)}$, 那么

$$
\begin{aligned}
\text{LHS} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(V^i(t)W^j(t)\left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{c(t)}, \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_{c(t)}\right\rangle\right)\\
&= \left\langle \frac{\mathrm{d}V^i}{\mathrm{d}t}(t)\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{c(t)}, W(t)\right\rangle + \left\langle V(t), \frac{\mathrm{d}W^j}{\mathrm{d}t}(t)\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_{c(t)}\right\rangle + V^i(t)W^j(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{c(t)}, \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_{c(t)}\right\rangle\\
&= \left\langle \frac{\mathrm{d}V^i}{\mathrm{d}t}(t)\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{c(t)}, W(t)\right\rangle + \left\langle V(t), \frac{\mathrm{d}W^j}{\mathrm{d}t}(t)\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_{c(t)}\right\rangle + V^i(t)W^j(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g\left( \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{c(t)}, \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_{c(t)}\right)\\
&= \left\langle \frac{\mathrm{d}V^i}{\mathrm{d}t}(t)\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{c(t)}, W(t)\right\rangle + \left\langle V(t), \frac{\mathrm{d}W^j}{\mathrm{d}t}(t)\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_{c(t)}\right\rangle + V^i(t)W^j(t)c'(t)g\left( \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\\
&= \left\langle \frac{\mathrm{d}V^i}{\mathrm{d}t}(t)\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{c(t)}, W(t)\right\rangle + \left\langle V(t), \frac{\mathrm{d}W^j}{\mathrm{d}t}(t)\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_{c(t)}\right\rangle + V^i(t)W^j(t)\nabla_{c'(t)}g\left( \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\\
&= \left\langle \frac{DV}{\mathrm{d}t}, W\right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{\mathrm{d}t}\right\rangle
\end{aligned}
$$

□

**注记.**

**命题 3.6.** 设 $(M,g)$ 是黎曼流形，$\nabla$ 是其上的仿射联络. 那么 $\nabla$ 与 $g$ 相容当且仅当任意平行移动是等距同构.

证明. $c\colon [a,b]\to M$ curve

$\mathcal{P}_{c,a,t}\colon T_{c(a)}M \to T_{c(t)}M$

- 
- 任意 $X,Y,Z\in\Gamma(TM), \forall p\in M$

□

**命题 3.7.** 设 $\nabla$ 是 $M$ 上的无挠联络. 设 $s\colon \mathbb{R}^2 \to M \in C^\infty$, $V$ 是沿 $s$ 的光滑向量场. 那么

$$\widetilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x}} s_* \frac{\partial}{\partial y} = \widetilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial y}} s_* \frac{\partial}{\partial x}.$$

证明. 直接在局部坐标下计算. $\square$

## 4 能量泛函的第二变分公式与曲率张量

# 5 协变微分与 Ricci 恒等式

4 月 1 日 1 小时 23 分 16 秒

## 6 协变微分的局部表达式

设 $A$ 是 $M$ 上的 $(r,s)$ 型张量, 在局部坐标卡 $(U,x)$ 内,

$$A = A^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\otimes \mathrm{d}x^{j_1}\otimes\cdots\otimes\mathrm{d}x^{j_s}.$$

我们来计算 $(r,s+1)$ 型张量 $\nabla A$, 设

$$\nabla A = B^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s k}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\otimes \mathrm{d}x^{j_1}\otimes\cdots\otimes\mathrm{d}x^{j_s}\otimes\mathrm{d}x^k.$$

那么

$$\begin{aligned}
B^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s k} &= (\nabla_{\partial_k}A)\left(\mathrm{d}x^{i_1},\cdots,\mathrm{d}x^{i_r},\partial_{j_1},\cdots,\partial_{j_s}\right) = \partial_k\left(A(\mathrm{d}x^{i_1},\cdots,\mathrm{d}x^{i_r},\partial_{j_1},\cdots,\partial_{j_s})\right)\\
&\quad-\sum A(\mathrm{d}x^{i_1},\cdots,\nabla_{\partial_k}\mathrm{d}x^{i_h},\cdots,\mathrm{d}x^{i_r},\partial_{j_1},\cdots,\partial_{j_s}) - \sum A(\mathrm{d}x^{i_1},\cdots,\mathrm{d}x^{i_r},\partial_{j_1},\cdots,\nabla_{\partial_k}\partial_{j_h},\cdots,\partial_{j_s})\\
&= \partial_k A^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s} + A^{i_1\cdots i_{h-1} l i_{h+1}\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}\Gamma^{i_h}_{kl} - A^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_{h-1} l j_{h+1}\cdots j_s}\Gamma^l_{kj_h}
\end{aligned}$$

# 7 音乐同构

$$\flat\colon T_pM \longrightarrow T_p^*M, \quad X \longmapsto \flat X, \quad \flat X(Y) = g(X, Y).$$

$$\sharp\colon T_p^*M \longrightarrow T_pM, \quad \omega \longmapsto \sharp\omega, \quad g(\sharp\omega, Y) = \omega(Y).$$

# 8 算符

### 函数的梯度

函数的梯度就是函数的外微分在算符同构下的像. 在局部坐标系下,

$$\operatorname{grad} f = \sharp \mathrm{d} f = \sharp \left( \frac{\partial f}{\partial x^i} \mathrm{d} x^i \right) = \frac{\partial f}{\partial x^i} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j}$$

### 向量场的散度

在欧式空间中, 向量场的散度即为每个分量在各自的方向上求导再求和.

在流形上的一种推广方式是, 首先指定流形上的一种求导方式, 即一个仿射联络 $\nabla$, 然后考虑

$$\nabla X = X^i_{;j}\partial_i \otimes \mathrm{d}x^j,$$

然后定义 $\operatorname{div} X = \sum X^i_{;i}$. 因为这个量是 $\nabla X$ 作为线性变换时的迹, 因此是不依赖于基的选取的, 也就是不依赖于局部坐标的选取, 从而是良定的. 注意

$$X^i_{;i} = \partial_i X^i + X^h \Gamma^i_{hi}$$

因此实际上我们是对 $\sum \partial_i X^i$ 进行了一些修正得到了一个良定的量.

**命题 8.1.** *设 $\nabla$ 是 $M$ 上的 Levi-Civita 联络, 那么*

$$\operatorname{div} X = \frac{1}{\sqrt{G}}\partial_i\left(\sqrt{G}X^i\right), \quad G = \det(g_{ij}).$$

*证明.* □

### 函数的 Hessian

### Laplace-Beltrami 算子

## 9 Bianchi 恒等式

- 第一 Bianchi 恒等式的 global 版本、证明和局部版本
- 第二 Bianchi 恒等式的 global 版本、证明和局部版本

**命题 9.1.** 设 $M$ 是光滑流形，$\nabla$ 是其上无挠的仿射联络，$R$ 是相应的的曲率张量. 那么对于任意 $X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$，我们有

(1)（第一 *Bianchi* 恒等式）$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0.$

(2)（第二 *Bianchi* 恒等式）$(\nabla_X R)(Y,Z)W$

## 10 Riemann 曲率张量

## 11 截面曲率

## 12 高斯绝妙定理

## 13 Ricci 曲率

## 14 数量曲率

**例子 14.1.** 考虑复平面上的黎曼度量

$$g=\frac{4}{(1+x^2+y^2)^2}(\mathrm{d}x\otimes\mathrm{d}x+\mathrm{d}y\otimes\mathrm{d}y)=\frac{4}{(1+|z|^2)^2}|\mathrm{d}z|^2,$$

计算它的 *Gauss* 曲率.

解. 记

$$f=\frac{4}{(1+x^2+y^2)^2}$$

则

$$K=-\frac{\Delta\log f}{2f}.$$

$$\Delta\log f=-2\Delta\log(1+x^2+y^2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\log(1+x^2+y^2)=\frac{2x}{1+x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\log(1+x^2+y^2)=\frac{2(1+x^2+y^2)-2x\cdot 2x}{(1+x^2+y^2)^2}=\frac{2-2x^2+2y^2}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$\Delta\log(1+x^2+y^2)=\frac{4}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$K=-\frac{1}{2}\frac{(1+x^2+y^2)^2}{4}\cdot(-2)\cdot\frac{4}{(1+x^2+y^2)^2}=1$$

□

**例子 14.2.** $g$ 的定义同上, 考虑映射 $F(z)=z^n$, 计算 $F^*g$ 在 $\mathbb{C}^*$ 上的 *Gauss* 曲率.

解. 设 $\zeta=z^n$, 则 $\mathrm{d}\zeta = nz^{n-1}\mathrm{d}z$

$$F^*g=\frac{4}{(1+|z|^{2n})^2}\cdot n^2\cdot|z|^{2n-2}|\mathrm{d}z|^2=n^2\frac{4}{(1+(x^2+y^2)^n)^2}(x^2+y^2)^{n-1}(\mathrm{d}x\otimes\mathrm{d}x+\mathrm{d}y\otimes\mathrm{d}y)$$

记

$$f=n^2\frac{4}{(1+(x^2+y^2)^n)^2}(x^2+y^2)^{n-1}$$

则

$$K=-\frac{\Delta\log f}{2f}.$$

$$\log f=-2\log(1+(x^2+y^2)^n)+(n-1)\log(x^2+y^2)+\mathrm{const}$$

我们在 $\mathbb{C}^*$ 上计算 $\Delta\log f$, 此时 $\Delta\log(x^2+y^2)=0$.

$$\frac{\partial}{\partial x}\log(1+(x^2+y^2)^n)=\frac{n(x^2+y^2)^{n-1}\cdot 2x}{1+(x^2+y^2)^n}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\log(1+(x^2+y^2)^n)&=\frac{(n(n-1)(x^2+y^2)^{n-2}4x^2+2n(x^2+y^2)^{n-1})(1+(x^2+y^2)^n)-n^2(x^2+y^2)^{2n-2}\cdot 4x^2}{(1+(x^2+y^2)^n)^2}\\&=\frac{n(n-1)(x^2+y^2)^{n-2}4x^2+2n(x^2+y^2)^{n-1}}{(1+(x^2+y^2)^n)^2}\\&+\frac{n(n-1)(x^2+y^2)^{2n-2}4x^2+2n(x^2+y^2)^{2n-1}-n^2(x^2+y^2)^{2n-2}\cdot 4x^2}{(1+(x^2+y^2)^n)^2}\\ \Delta\log(1+(x^2+y^2)^n)&=\frac{4n(n-1)(x^2+y^2)^{n-1}+4n(x^2+y^2)^{n-1}}{(1+(x^2+y^2)^n)^2}\\&+\frac{4n(n-1)(x^2+y^2)^{2n-1}+4n(x^2+y^2)^{2n-1}-4n^2(x^2+y^2)^{2n-1}}{(1+(x^2+y^2)^n)^2}\\&=\frac{4n^2(x^2+y^2)^{n-1}}{(1+(x^2+y^2)^n)^2}\end{aligned}$$

$$K=-\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}\frac{(1+(x^2+y^2)^n)^2}{4}\frac{1}{(x^2+y^2)^{n-1}}(-2)\frac{4n^2(x^2+y^2)^{n-1}}{(1+(x^2+y^2)^n)^2}=1$$

□

**注记.** 让我们分析一下 $F^*g$ 在原点附近的行为.

$$\log f=-2\log(1+(x^2+y^2)^n)+(n-1)\log(x^2+y^2)+\mathrm{const}$$

所以 $F^*g$ 在原点处有一个 $2\pi n$ 的锥角度.

## 15 Bochner 公式

## 16 测地曲率

## 17 Gauss-Bonnet 公式

**定理 17.1.** 设 $M$ 是紧的二维黎曼流形, 其边界 $\partial M$ 光滑, 则

$$\int_M K\mathrm{d}A + \int_{\partial M} k_g \mathrm{d}s = 2\pi\chi(M).$$

# Chapter 4

# Jacobi 场

## 1 Jacobi 场

**定义 1.1.** 设 $\gamma\colon [a,b] \to M$ 是一条测地线. 对于 $t_0, t_1 \in [a,b]$，如果存在沿 $\gamma$ 的不恒为零的 *Jacobi* 场 $U(t)$，满足 $U(t_0) = U(t_1) = 0$，则称 $t_0, t_1$ 是沿 $\gamma$ 的共轭值. 将所有这样的 *Jacobi* 场与恒为零的向量场所构成的线性空间的维数称作 $t_0$ 和 $t_1$ 作为共轭值的重数. 称 $\gamma(t_0)$ 和 $\gamma(t_1)$ 为沿 $\gamma$ 的共轭点.

## 2 Morse 指标定理

## 3 Cartan-Hadamard 定理

# 4 空间形式

**定义 4.1.** 称常截面曲率的完备黎曼流形为空间型.

**引理 4.2.** 内容...

**定理 4.3.** 设 $(M_i^n, g_i)$ 是单连通、截面曲率为 $c$ 的空间型. 设 $p_i \in M_i$, $\left\{e_i^1, \cdots, e_i^n\right\}$ 是 $T_{p_i}M_i$ 的标准正交基，那么存在唯一的保距映射 $\varphi\colon M_1 \to M_2$ 使得 $\varphi(p_1) = p_2, \varphi_{*,p}(e_1^j) = e_2^j$.

# 5 单连通空间形式的等距群

## 5.1 $\mathbb{R}^n$

**命题 5.1.** $Iso(\mathbb{R}^n) \cong T(n) \rtimes O(n)$.

证明. 假设 $f \in Iso(\mathbb{R}^n)$ 满足 $f(0)=0$，否则考虑 $\tilde{f} = f - f(0)$.

(1) $f$ 保持内积. 因为 $f$ 保持距离，所以对任意 $x, y \in \mathbb{R}^n$，有

$$\|f(x)-f(y)\|^2 = \|x-y\|^2 \Longrightarrow \langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle .$$

(2) $f$ 是线性的.

- $\|f(ax)-af(x)\|^2 = \|f(ax)\|^2+\|af(x)\|^2-2\langle f(ax), af(x)\rangle = \|ax\|^2+\|ax\|^2-2\|ax\|^2 = 0.$
- $\|f(x+y)-f(x)-f(y)\|^2 \xlongequal{\text{展开}} \cdots \xlongequal{\text{脱}f} \cdots \xlongequal{\text{合并}} \|x+y-x-y\|^2 = 0.$

(3) $f \in O(n)$.

$\square$

**注记.** 证明了稍稍强一点的事：等距 $\Longrightarrow$ 双射.

## 5.2 $\mathbb{S}^n$

**命题 5.2.** $Iso(\mathbb{S}^n) \cong \mathrm{O}(n+1)$.

证明. https://math.stackexchange.com/questions/130193/isometries-of-mathbbsn $\square$

## 5.3 $\mathbb{H}^n$

## 6 Killing-Hopf 定理

# 7 距离函数

# Chapter 5

# 比较定理

## 1 Sturm 比较定理

## 2 Rauch 比较定理

## 3 Hessian 比较定理

## 4 Laplacian 比较定理

# 5 体积比较定理

# Chapter 6

# 规范理论

# Chapter 7

## 1　泛函与变分

**定义 1.1.** 设 $c\colon [a,b] \to M$ 是一条光滑曲线. $c$ 的一个（单参数）变分是指一个光滑映射

$$F\colon [a,b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M, \quad (t,s) \mapsto F(t,s)$$

满足 $F(t,0) = c(t)$. 记 $\dfrac{\partial F}{\partial t} = \mathrm{d}F\left(\dfrac{\partial}{\partial t}\right), \dfrac{\partial F}{\partial s} = \mathrm{d}F\left(\dfrac{\partial}{\partial s}\right)$（注意该记法与将 $\mathrm{d}c\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)$ 记作 $c'(t)$ 的习惯相同）. 称沿 $c$ 的向量场 $V(t) := \dfrac{\partial F}{\partial s}(t,0)$ 为变分场.