自旋几何

孙天阳

目录

Chapter 1

Clifford 代数、自旋群及其表示

外代数 $\xrightarrow[Getzler]{\text{量子化}}$Clifford 代数
Clifford 代数：$\mathbb{C}, \mathbb{H}$

- $e_ie_j + e_je_i = -2\delta_{ij}$ 该式是新定义的乘法的关系

  $\mathbb{C} = \mathbb{R}\langle e\rangle$

  $e^2 = -1$

  $\mathrm{i}^2 = -1$

- $\mathbb{R}^2 = \langle e_1, e_2\rangle$

  $Cl(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}\langle 1, e_1, e_2, e_1e_2\rangle$

  $e_1^2 = e_2^2 = -1$

  $(e_1e_2)^2 = e_1e_2e_1e_2 = -e_1e_1e_2e_2 = -1$

  分别令 e_1, e_2, e_1e_2 为 i, j, k

  $ij = -ji$

  $ik = e_1e_1e_2 = -e_2$

  $ki = e_1e_2e_1 = -e_2e_1e_1 = e_2 = -ik$

  $\mathrm{i}^2 = j^2 = k^2 = -1$

  练习：$kj = -jk$

注记.

- $\wedge\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\{1, e_1, e_2, e_1 \wedge e_2\}$ 按外代数的生成关系生成

  $e_i \wedge e_j + e_j \wedge e_i = 0$

  而 *Clifford* 代数的生成关系是 $e_i \cdot e_j + e_j \cdot e_i = -2\delta_{ij}$

- $\nabla \xrightarrow{\text{量子化}} D$

  前者是 *Clifford* 联络，后者是 *Dirac* 算子

  Chern-Weil 理论 $\xrightarrow{\text{量子化}}$*A-S* 指标定理

定义 0.1. 设 k 是交换域（可理解为 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$），V 是 k-向量空间，q 是 V 上的二次型.

Clifford 代数：$Cl(V,q)$

张量代数：$\mathscr{T}(V)=\sum_{r=0}^{\infty}\otimes^r V$

$\otimes^r V=k\langle e_{i_1}\otimes e_{i_2}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}\rangle$

$\otimes^r V$ 可认为是 V^* 上的 r 重线性函数 $V^*\times\cdots\times V^*\to k$

理想：$\mathscr{T}_q(V)=\langle v\otimes v+q(v)\cdot 1:\forall v\in V\rangle$

定义：$Cl(V,q):=\dfrac{\mathscr{T}(V)}{\mathscr{T}_q(V)}$

$[v\otimes v+q(v)\cdot 1]=0$

$\Longrightarrow [v]\cdot[v]+q(v)\cdot 1=0$

$[v]\cdot[v]=-q(v)$，生成关系

注记. 回忆二次型：给定双线性函数 $f(\cdot,\cdot):V\times V\to k$，称 $Q(v)=f(v,v)$ 为二次型，称 f 为 Q 的极化.

哦哦，内积，范数，极化恒等式

$2f(v,w):=Q(v+w)-Q(v)-Q(w)$

讲究：为什么不把 2 除过去，因为不知道域特征

可适当选取一组基使得 $Q(v)$ 可写为标准型

$$Q(v)=(x^1)^2+\cdots+(x^k)^2-(x^{k+1})^2-\cdots(x^{k+l})^2$$

$sign(Q):=k-l$，正负惯性指标

注记. $\wedge(V)=\dfrac{\mathscr{T}(V)}{\langle v_i\otimes v_j+v_j\otimes v_i,\forall\ v_i,v_j\in V\rangle}$

$[v_i\otimes v_j+v_j\otimes v_i]=0\Longrightarrow [v_i]\wedge[v_j]+[v_j]\wedge[v_i]=0$

当 $q(v)$ 取 0 时退化为此情形

典范投影

$$\pi_q:\mathscr{T}(V)\longrightarrow\frac{\mathscr{T}(V)}{\mathscr{T}_q(V)}$$
$$\alpha\longmapsto[\alpha]$$

自然嵌入

$$V\hookrightarrow Cl(V,q)$$
$$e_i\mapsto[e_i]$$

定义 0.2. 如果 $\varphi\in\otimes^s V$，则称 φ 的纯度数（*pure degree*）为 s.

命题 0.1. $\pi_q\big|_V$ 为单射.

证明. 若 $\varphi\in\ker(\pi_q)\cap V=\mathscr{T}_q(V)\cap V$，则 $\varphi=0$.

$\varphi\in\ker(\pi_q)\Longrightarrow\varphi=\sum_i a_i(v_i\otimes v_i+q(v_i))b_i$

可假设 a_i,b_i 为纯度数.

首先考虑 $\deg(a_i)+\deg(b_i)$ 最大的项，因为张量代数中有一个分次，

$\sum_{i'} a_{i'}(v_{i'} \otimes v_{i'} b_{i'}) = 0 \xrightarrow{\text{二次型作缩并}} a_{i'} q(v_i) b_{i'} = 0$
咋缩并的，按我理解反变协变才能缩并
$\Longrightarrow \sum_{i'} a_{i'}(v_{i'} \otimes v_{i'} + q(v_{i'})) b_{i'} = 0$
没听懂，哪里用到 φ 落在 V 里了，如果落在 V 里 φ 的 degree 就是 1 啊. □

$Cl(V,q): V \subset Cl(V,q)$，由 $v \cdot v = -q(v) \cdot 1$ 生成的.
定义 $2q(v,w) = q(v+w) - q(v) - q(w)$
$\Longrightarrow (v+w) \cdot (v+w) = -q(v+w) \cdot 1$
$\Longrightarrow v \cdot w + w \cdot v = -2q(v,w)$
若 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是 V 的一组基,则 Clifford 代数的一组基为 $\left\{ 1, e_1, \cdots, e_n, \underbrace{e.e_j}_{i<j}, \underbrace{e_1 \cdot e_j \cdot e_k}_{i<j<k}, \cdots, \underbrace{e_{i_1} \cdot e_{i_2} \cdot \cdots \cdot e_{i_k}}_{i_1<i_2<\cdots<i_k} \right.$
2^n 维，$\dim \bigwedge V = \dim Cl(V,q)$
$\mathbb{C}: \left\langle \mathbb{R}, q(v) = v^2 \right\rangle$
$\mathbb{H}: \left\langle \mathbb{R}^2, q(v^1 e_1 + v^2 e_2) = (v^1)^2 + (v^2)^2 \right\rangle$
$v \cdot w + w \cdot v = -2(v,w)$

1 第二次

前情回顾
$T = \sum_{s=0}^{\infty} \otimes^s v$

- $\xrightarrow{e_i \cdot e_j + e_j \cdot e_i = -2q(e_i, e_j)} Cl(V,q)$
- $\xrightarrow{e_i \wedge e_j = -e_j \wedge e_i} \wedge V$
- $\xrightarrow{e_i \cdot e_j = e_j \cdot e_i}$ 多项式代数

命题 1.1. *$\mathscr{A}$ 含幺结合代数，$f\colon V \to \mathscr{A}$ 线性映射，*

$$f(v)^2 = -q(v) \cdot 1_{\mathscr{A}}, \forall\ v \in V,$$

则唯一延拓为

$$\tilde{f}\colon Cl(V,q) \to \mathscr{A}$$

同态. 具有这样性质的代数是唯一的.

函子性质
$f\colon: (V,q) \longrightarrow (V',q')$

(1) f 线性

(2) $f^*(q') = q$

同态：$\tilde{f}\colon Cl(V,q)\to Cl(V',q')$Clifford 代数同构

$\iota\circ f\colon V\to Cl(V',q')$

$f(v)\cdot f(v)\overset{\iota}{=\!=}-q'(f(v))\cdot 1=-(f^*(q'))(v)\cdot 1=-q(v)\cdot 1$

$(V,q)\xrightarrow{f}(V',q')\xrightarrow{g}(V'',q'')$

提升

$\widetilde{g\circ f}=\tilde{g}\circ\tilde{f}$

title

正交群 $O(V,q)=\{f\in GL(V):f^*q=q\}$

$O(V,q)\xrightarrow{i}Aut(Cl(V,q))$

$Image(O(V,q))$ 是内自同构群

Z_2 分次

$\alpha\colon V\to V, v\mapsto -v$

容易验证 $\alpha^*q=q$

$\tilde{\alpha}:Cl(V,q)\to Cl(V,q)$ 同构

$$i=\begin{cases}0 & \text{偶次}\\ 1\text{奇次}\end{cases}$$

$Cl^i(V,q)=\left\{\varphi\in CL(V,q):\alpha(\varphi)=(-1)^i\varphi\right\}$

$Cl(V,q)=Cl^0(V,q)\oplus Cl^1(V,q)$

$Cl^i(V,q)\cdot Cl^j(V,q)\subset Cl^{i+j \mod 2}(V,q)$

$\mathbb{Z}_2$ 分次代数，也叫超代数

$Cl^0(V,q)$ 是子代数，$Cl^1(V,q)$ 不是.

$Cl(V,q)$ 与 $\wedge^*V$ 之间的关系

$\mathscr{T}(V)=\sum_{r=0}^{\infty}\otimes^r V$ filtration 过滤

$\tilde{\mathcal{F}}^0\subset\tilde{\mathcal{F}}^1\subset\tilde{\mathcal{F}}^2\subset\cdots\subset\mathscr{T}(V)$

其中 $\tilde{\mathcal{T}}=\sum_{s\leqslant k}\otimes^s V$

$\pi_q:\mathscr{T}(V)\to Cl(V,q)$

得到 Clifford 代数的 filtration.

$\mathcal{F}^0\subset\mathcal{F}^1\subset\mathcal{F}^2\cdots\subset Cl(V,q)$

$\mathcal{F}^i:=\pi_q(\tilde{\mathcal{F}}^i)$

$\mathcal{F}^r\cdot\mathcal{F}^s\subset\mathcal{F}^{r+s}$

$Cl(V,q)$ 成为 filtered 代数（滤过代数）

映射 $\forall r,s$

$\mathcal{F}^r/\mathcal{F}^{r-1}\times\mathcal{F}^s/\mathcal{F}^{s-1}\to\mathcal{F}^{r+s}/\mathcal{F}^{r+s-1}$

伴随分次代数

$C^*=\oplus_{r\geqslant 0}\mathscr{G}^r$，其中 $\mathscr{G}^r=\mathcal{F}^r/\mathcal{F}^{r-1}$

命题 1.2. 任意 (V,q)，$Cl(V,q)$ 的伴随分次代数

$$\mathcal{C}^* \cong \wedge^* V$$

证明.

$$\begin{tikzcd} \otimes^r V \arrow[r, "\pi_r"] \arrow[d] & \mathcal{F}^r \arrow[r] & \mathcal{F}^r/\mathcal{F}^{r-1} \\ \wedge^r V \arrow[urr, "\tilde{\varphi}_r"] & & \end{tikzcd}$$

- 满射
- 单射为什么 $\tilde{\phi}$ 形如这样

□

命题 1.3. $\wedge^* V \xrightarrow{\sim} Cl(V,q)$

向量空间同构，保持 *filtration(?)*

证明. $\underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{r} \xrightarrow{f_r} f_r(v_1, \cdots, v_r) = \dfrac{1}{r!}\sum_{\sigma} sgn(\sigma) v_{\sigma_1} \cdot \cdots \cdot v_{\sigma(r)} \in Cl(V,q)$

由外积泛性质得到 $\wedge^r V \xrightarrow{\tilde{f}} Cl(V,q)$

$f^2 H^2$

$|\nabla^{\Sigma} f|$ □

$\mathscr{A}, \mathscr{B}$ 是 k 上的含幺结合代数，定义 $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ 上的乘法

$(a \otimes b) \cdot (a' \otimes b') = (a \cdot a') \otimes (b \cdot b')$

$\mathscr{A} = \mathscr{A}^0 \oplus \mathscr{A}^1, \mathscr{B} = \mathscr{B}^0 \oplus \mathscr{B}^1 \mathbb{Z}_2$ 分次代数，定义 $\mathscr{A} \hat{\otimes} \mathscr{B}$

$(a \otimes b) \cdot (a' \otimes b') = (-1)^{(\deg b)(\deg a')}(a \cdot a') \otimes (b \cdot b')$

$(\mathscr{A} \hat{\otimes} \mathscr{B})^0 := \mathscr{A}^0 \otimes \mathscr{B}^0 + \mathscr{A}^1 \otimes \mathscr{B}^1$

$(\mathscr{A} \hat{\otimes} \mathscr{B})^1 := \mathscr{A}^0 \otimes \mathscr{B}^1 + \mathscr{A}^1 \otimes \mathscr{B}^0$

$\mathscr{F}^r := \sum_{k+l=r} \mathscr{F}^k(\mathscr{A}) \otimes \mathscr{F}^l(\mathscr{B}) \longrightarrow$ 给出了 $\mathscr{A} \hat{\otimes} \mathscr{B}$ 上的 filtration

命题 1.4. $V = V_1 \oplus V_2$，关于 (V,q) 的 $q-$ 正交分解 (?)

则存在 *Clifford* 代数的自然同构

$$Cl(V,q) \cong Cl(V_1,q_1) \hat{\otimes} Cl(V_2,q_2)$$

证明. $v \in V, v = v_1 + v_2, v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$

$f \colon V \to Cl(V_1,q_1) \hat{\otimes} Cl(V_2,q_2)$

$v = v_1 + v_2 \mapsto v_1 \otimes 1 + 1 \otimes v_2$

验证 $f(v) \cdot f(v) = -q(v)$ □

对合映射 $\tau : \mathscr{T}(V) \to \mathscr{T}(V)$

$e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k} \mapsto e_{i_k} \otimes \cdots \otimes e_{i_1}$

$\tau(\mathscr{J}_0) \subset \mathscr{J}_0$

$\tau^2 = Id$，称 τ 为转置映射

$(\psi \cdot \phi)^t = \phi^t \cdot \psi^t$

2 Pin 群，spin group

$Cl^\times(V,q)=\{\varphi\in Cl(V,q):\exists\varphi^{-1}\text{ s.t. }\varphi^{-1}\varphi=\varphi\varphi^{-1}=1\}$
当 $\dim V=n$，$k=\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$，$\dim Cl^\times(V,q)=2^n$
$\varphi\in GL(Cl(v,q))$

伴随表示

$Ad\colon Cl^\times(V,q)\to Aut(Cl(V,q))$
$\varphi\mapsto Ad_\varphi:=(v\mapsto\varphi v\varphi^{-1})$
在单位元处取切映射 $\Longrightarrow$
李代数同态：$ad\colon Cl(V,q)\to Der(Cl(V,q)),y\mapsto ad_y(x):[y,x]$
指数映射 $\exp\colon Cl(V,q)\to Cl^\times(V,q)$
$y\mapsto\sum_{k=0}^{\infty}\frac{y^k}{k!}$
$ad_y(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0}Ad_{exp(ty)}(x)$

命题 2.1. 令 $v\in V\subset Cl(V,q)$ *such that* $q(v)\neq 0$，则

(1) $Ad_v(V)=V$

(2) 对任意 $w\in V$，有

$$-Ad_v(w)=w-2\frac{q(v,w)}{q(v)}v$$

证明. $v^2=-q(v)\Longrightarrow v^{-1}=-\frac{v}{q(v)}$

$-q(v)Ad_v(w)=-q(v)v^{-1}vw=vwv=(-wv-2q(v,w))v=-wv^2-2q(v,w)v=wq(v)-2q(v,w)v$

两边同除 $q(v)$. □

$G_0=\{\varphi\in Cl^\times(V,q)\text{ s.t. }Ad_\varphi(V)=V\}$ 由命题知，$\{v\in V,q(v)\neq 0\}\subset G_0$
$(Ad_v^*q)(w):=q(Ad_v(w))=q(w)$
定义：$p(v,q):=\langle v\in V,q(v)\neq 0\rangle\leqslant Cl^\times(V,q)$
$P(V,q)\xrightarrow{Ad}O(V,q)=\{\lambda\in Gl(V)\colon\lambda^*q=q\}$

定义 2.1. $Pin(V,q)=\langle v\in V\colon q(v)=\pm1\rangle\leqslant p(V,q)$
自旋群 $spin(V,q)=Pin(V,q)\cap Cl^0(V,q)$

$Ad_v\colon V\to V$，扭曲的伴随表示
$\tilde{A}d\colon Cl^\times(V,q)\to Aut(Cl(V,q)),\varphi\mapsto\tilde{A}d_\varphi(y)=\alpha(\varphi)y\varphi^{-1}$

(1) $\tilde{A}d_{\varphi_1\varphi_2}=\tilde{A}d_{\varphi_1}\circ\tilde{A}d_{\varphi_2}$

(2) $\tilde{A}d_\varphi=Ad_\varphi,\varphi\in Cl^0(V,q)$

$$\tilde{A}d_v(w)=w-\frac{2q(v,w)}{q(v)}v$$

定义 2.2. $\tilde{p}(V,q)=\left\{\varphi\in Cl^\times(V,q)\colon\tilde{A}d_\varphi(V)=V\right\}$

命题 2.2. $\dim V < +\infty$，q 非退化，

$$\ker\left(\tilde{p}(V,q) \xrightarrow{\tilde{A}d} Gl(V)\right) = k^*$$

证明. 取 $\{v_1, \cdots, v_n\}$ 是 V 的一组基使得 $q(v_i) \neq 0$ 且 $\forall\, i \neq j, q(v_i, v_j) = 0$

设 $\varphi \in Cl^\times(V,q)$ s.t. $\varphi \in \ker(\tilde{A}d)$

$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 \in Cl^0(V,q) \oplus Cl^1(V,q)$

$\varphi \in \ker(\tilde{A}d) \iff \tilde{A}d_\varphi = Id \iff \forall v \in V, \alpha(\varphi)v\varphi^{-1} = v$

$\iff \alpha(\varphi)v = v\varphi$

$\implies \forall\, v \in V, v\varphi_0 = \varphi_0 v, -v\varphi_1 = \varphi_1 v$

$\varphi_0 = a_0 + v_1 a_1$，其中 a_0, a_1 为 $v_2, \cdots, v_n$ 的多项式

取 $v = v_1$，有 $v_1\varphi_0 = \varphi_0 v_1$

$\implies v_1(a_0 + v_1 a_1) = (a_0 + v_1 a_1)v_1$

$\implies v_1 a_0 + v_1^2 a_1 = a_0 v_1 + v_1 a_1 v_1 = a_0 v_1 - v_1^2 a_1 \implies 2v_1^2 a_1 = 0 \implies a_1 = 0$

$\implies \varphi = a_0$ 不含 v_1.

同理 $\varphi_1 = a_1 + v_1 a_0$

$-v_1(a_1 + v_1 a_0) = (a_1 + v_1 a_0)v_1$

$\implies -v_1 a_1 - v_1^2 a_0 = a_1 v_1 + v_1 a_0 v_1 = a_1 v_1 + v_1^2 a_0$

$\implies 2v_1^2 a_0 = 0, \varphi_1$ 不含 v_1 □

范数映射

$N\colon Cl(V,q) \to Cl(V,q), \varphi \mapsto N(\varphi) := \varphi\alpha(\varphi^t)$

注记. (1) $\alpha(\varphi^t) = (\alpha(\varphi))^t$

(2) $\forall\, v \in V, N(v) = v \cdot \alpha(v^t) = v\alpha(v) = -v^2 = q(v)$

命题 2.3. $\dim V < +\infty, q$ 非退化，则 $N\colon \tilde{p}(V,q) \to k^\times$

证明. $N(\tilde{p}(V,q)) \subset k^*$

取 $\varphi \in \tilde{p}(V,q)$，$\forall\, v \in V, \tilde{A}d_\varphi(v) = \alpha(\varphi)v\varphi^{-1} \in V$

$\implies \alpha(\varphi)v\varphi^{-1} = (\alpha(\varphi)v\varphi^{-1})^t = (\varphi^t)^{-1}v\alpha(\varphi)^t$

$\implies \varphi^t\alpha(\varphi)v\varphi^{-1}\alpha(\varphi^t)^{-1} = v$

$\tilde{A}d_{\alpha(\varphi^t)} \circ \tilde{A}d_\varphi(v) = v$

$\tilde{A}d_{\alpha(\varphi^t)\varphi}(v)$

$\tilde{A}d_{\alpha(\varphi^t)\varphi} = Id\big|_V$

$\alpha(\varphi^t)\varphi \in k^* \implies N(\varphi^t) \in k^*$

只要再说明 $(\tilde{p}(V,q))^t \subset \tilde{P}(V,q)$，假装自己说明了.

下说明 N 是同态.

$N(\varphi\psi) = \varphi\psi\alpha((\varphi\psi)^t) = \varphi\psi\alpha(\psi^t\alpha^t) = \varphi\psi\alpha(\psi^t)\cdot\alpha(\varphi^t) = N(\psi)\varphi\alpha(\varphi^t) = N(\psi)N(\varphi)$ □

推论 2.1. $\varphi \in \tilde{p}(V,q)$，则 $\tilde{A}d_\varphi\colon V \to V$ 保持二次型 q.

$\tilde{A}d = \tilde{p}(V,q) \to O(V,q)$

证明. $\varphi \in \tilde{p}(V,q)$，$N(\alpha(\varphi)) = N(\varphi)$

令 $V^* = \{v \in V : q(v) \neq 0\}$. 对 $\forall\ v \in V^*$，

$$N(\tilde{A}d_\varphi(v)) = N(\alpha(\varphi)v\varphi^{-1}) = N(\alpha(\varphi))N(v)N(\varphi^{-1}) = N(\varphi)N(\varphi^{-1})N(v) = N(v) = q(v)$$

□

定义 2.3. $P(V,q) = \left\{v_1 \cdots v_r \in Cl(V,q) : v_1, \cdots, v_r 为V^*中有限序列\right\}$

$\tilde{A}d \colon \underline{p}(V,q) \to O(V,q)$

$\tilde{A}d_{(v_1 \cdots v_r} = \tilde{A}d_{v_1} \circ \cdots \circ \tilde{A}d_{v_r} \in O(v,q)$

$\tilde{A}d \colon O(V,q)$ 满射

定理 2.1 (Cartan-Dieudonne)**.**

$sp(V,q) = P(V,q) \cap Cl^0(V,q)$

$SO(V,q) = \{\lambda \in O(V,q), \det \lambda = 1\}$

定理 2.7$\Longrightarrow \tilde{A}d \colon SP(V,q) \to SO(V,q)$ 也是满射.

定理 2.2. $k = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}.q \colon V$ 上的非退化的二次型. 则存在短正合列

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow Spin(V,q)\ \overset{\tilde{A}d}{So(V,q)} \longrightarrow 1.$$

其中 $F = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}, k = \mathbb{R} \\ \mathbb{Z}_4 = \left\{\pm 1, \pm\sqrt{-1}\right\}, k = \mathbb{C} \end{cases}$

证明. 设 $\varphi = v_1 \cdots v_r \in Pin(V,q)$

$\varphi \in \ker(\tilde{A}d) \Longrightarrow \varphi \in k^*$

$N(\varphi) = \varphi\alpha(\varphi)^t = \varphi^2$

$N(\varphi) = N(v_1) \cdots N(v_r) = \pm 1$

$\Longrightarrow \varphi^2 = \pm 1$ □

定理 2.3. 任意 (r,s)，短正合序列

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow Spin_{r,s} \longrightarrow SO_{r,s} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow Pin_{r,s} \longrightarrow O_{r,s} \longrightarrow 0$$

若 $(r,s) \neq (1,1)$，则二重覆叠映射非平凡.

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow Spin_n \longrightarrow SO(n) \longrightarrow 0, n \geqslant 3$$

是万有覆叠映射.

证明. $(r,s) \neq (1,1)$，取 $e_1, e_2 \in \mathbb{R}^n$，使得 $q(e_1) = q(e_2) = \pm 1$，则

$r(t) = \pm\cos(2t) + e_1 \cdot e_2 \sin(2t), t \in [0, \dfrac{\pi}{2}]$

$r(t) = (e_1 \cos t + e_2 \sin t)(e_2 \cos t - e_1 \cos t)$

$q(v_1) = q(v_2) = \pm 1$

- $r(t) \in spin_{r,s}$

□

3 Clifford 代数

$Cl_{r,s} := Cl(V,q)$，$V=\mathbb{R}^{r+s}$，$q(x)=x_1^2+\cdots+x_r^2-x_{r+1}^2-\cdots-x_{r+s}^2$
特别 $Cl_n := Cl_{n,0}$
$Cl_n^* = Cl_{0,n}$

命题 3.1. 取 $e_1,\cdots,e_{r+s}$ 为 $\mathbb{R}^{r+s}\subset Cl_{r,s}$ 的 q 正交基，则 $Cl_{r,s}$

$$e_ie_j+e_je_i=\begin{cases}-2\delta_{ij} & i\leqslant r\\ 2\delta_{ij} & i>r\end{cases}$$

命题 3.2. $Cl_{r,s}\cong Cl_1\hat{\otimes}\cdots\hat{\otimes}\hat{\otimes}Cl_1^*\hat{\otimes}\cdots\hat{\otimes}Cl_1^*$

注记. $Cl_1=\mathbb{C}, Cl_1^*=\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}$

定义 3.1. 体积元：$\omega=e_1\cdots e_re_{r+1}\cdots e_{r+s}$，$q-$ 正交定向基

习题：ω 不依赖于基的选取.

命题 3.3. 令 $n=r+s$，则 $\omega^2=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}+s}$
且 $\forall\ v\in\mathbb{R}^n, v\cdot w=(-1)^{n-1}wv$
特别地，当 n 奇，$w\in Z(Cl_{r,,s})$
n 偶，$\varphi\omega=\omega\alpha(\varphi)$

证明. 取 $e_1,\cdots,e_{r+s}$ 是 $q-$ 正交定向基.
$\omega^2=e_1\cdots e_{r+s}e_1\cdots e_{r+s}=(-1)^{n-1}e_1^2e_2\cdots e_{r+s}e_2\cdots e_{r+s}$
$=(-1)^{n-1}(-1)^{n-2}e_1^2e_2^2(e_3\cdots e_{r+s})^2$
$(-1)^{\sum_{i=1}^{n-1}i}e_1^2e_2^2\cdots e_{r+s}^2$
$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(-1)^r$ □

$$\omega^2=\begin{cases}(-1)^s & n=3,4 \mod 4\\ (-1)^{s+1} & n=1,2 \mod 4\end{cases}$$

引理 3.1. 设 $\omega\in Cl_{r,s},\omega^2=1$，令
$\pi^+=\dfrac{1}{2}(1+\omega),\pi^-=\dfrac{1}{2}(1-\omega)$
则

(1) $\pi^+\pi^-=1$

(2) $(\pi^+)^2=\pi^+,(\pi^-)^2=\pi^-$

(3) $\pi^+\pi^-=\pi^-\pi^+=0$

命题 3.4. $\omega^2=1, r+s$ 为奇数，则

$$Cl_{r,s}=Cl_{r,s}^+\oplus Cl_{r,s}^-$$

其中 $Cl_{r,s}^\pm=\pi^\pm Cl_{r,s}=Cl_{r,s}\pi^\pm$
$\alpha(Cl_{r,s}^\pm)=Cl_{r,s}^\mp$

命题 3.5. $\omega^1=1$，$r+s$ 偶数，$V\colon Cl_{r,s}-$ 模，即 $Cl_{r,s}\xrightarrow{\varphi}Hom(V,V)$ 代数同态

则 $V=V^+\oplus V^-$，$V^\pm=\{v\in V\colon \rho(w)v=\pm v\}$

$V^+=\mathrm{i}^+\cdot V, V^-=\pi^-\cdot V$

且任意 $e\in\mathbb{R}^{r+s}, q(e)\neq 0$，则 $\mathrm{e}\colon V^+\to V^-, V^-\to V^+$

证明. $V^\pm:=\pi^{\pm V}$

$V=V^+\oplus V^-$

由 $\forall v\in V, v\omega=-\omega v$

$\Longrightarrow e\pi^+=e\cdot\dfrac{1}{2}(1+\omega)=\pi^-e$ □

定理 3.1. $\forall\ r,s$，代数同构

$$Cl_{r,s}\cong Cl^0_{r+1,s}$$

特别地，$Cl_n\cong Cl^0_{n+1}$.

证明. 取 q 正交基，$e_1,\cdots,e_{r+s+1}\in\mathbb{R}^{r+s+1}$ 使得

$$\begin{cases} q(e_i)=1 & 1\leqslant i\leqslant r+1\\ q(e_i)=-1 & r+1<i\leqslant n+1\end{cases}$$

取 $spin\{e_i\mid i\neq r+1\}=\mathbb{R}^{r+s}$

定义 $f\colon\mathbb{R}^{r+s}\longrightarrow Cl^0_{r+s}$（之后提升）

$e_i\mapsto e_{r+r}\cdot e_i$

$x\in\mathbb{R}^{r+s}=\displaystyle\sum_{i\neq r+1}x_ie_i, f(x)^2=-q(x)$ □

由命题 1.1，$\Longrightarrow\tilde{f}\colon Cl_{r,s}\to Cl^0_{r+s+1}$

由维数知同构.

命题 3.6. $L\colon Cl_n\to Cl_n$

$\varphi\mapsto L(\varphi):=-\displaystyle\sum_i e_i\varphi e_i$

其中 e_i 为 $\mathbb{R}^n$ 的正交基.

令 $\tilde{L}:=\alpha\circ L$，则 $\tilde{L}$ 的特征空间为 $\Lambda^p=\Lambda^p(\mathbb{R}^n)$ 在 Cl_n 中的典范的像.

$\tilde{L}\big|_{\bigwedge^p}=(n-2p)Id$

证明. $\varphi\in\displaystyle\bigwedge^p,\varphi=e_1\cdots e_p$

$$L(\varphi)=-\sum_i e_i(e_1\cdots e_p)e_i=-\sum_{i=1}^p e_i(e_1\cdots e_p)e_i-\sum_{i=p+1}^n e_j(e_1\cdots e_p)e_i$$

$$=(-1)^{p-1}\sum_{p=1}^p e_1\cdots e_p+(-1)^p\sum_{i=p+1}^n e_1\cdots e_p$$

$$=(-1)^p(n-2p)e_1\cdots e_p=(n-2p)\alpha(e_1\cdots e_p)$$ □

3.1 title

$Cl_n \cong \bigwedge^* \mathbb{R}^n$ 下，Clifford 乘法的表示

$\mathbb{R}^n \cong (\mathbb{R}^n)^*$

任意 $v \in \mathbb{R}^n$，缩并

v

易证

血压高了

命题 3.7. $Cl_n \cong \bigwedge^* \mathbb{R}^n, \forall v \in \mathbb{R}^n, \varphi \in Cl_n$

$v \cdot \varphi = v \wedge \varphi - vL\varphi$

证明. 取 $\mathbb{R}^n$ 的正交基，$e_1, \cdots, e_n$，使得 $v = t\mathrm{e}_1$，$t \in \mathbb{R}$

令 $\varphi = e_{i_1}, \cdots$ $\square$

4 分类

$Cl_{r,s} \cong$ 矩阵代数
$Cl_{1,0} \cong \mathbb{C}$
$Cl_{0,1} \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} = \langle 1, t \mid t^2 = 1 \rangle$
$Cl_{2,0} = \mathbb{H}$
$Cl_{0,2} \xlongequal{\text{习题}} [\text{代数同构}]\mathbb{R}(2)$
$Cl_{1,1} = \mathbb{R}(2)$

定理 4.1. $\forall\, r, s, n \geqslant 0$，代数同构 $Cl_{n,0} \otimes Cl_{0,2} \cong Cl_{0,n+2}$
$Cl_{0,n} \otimes Cl_{2,0} \cong Cl_{n+2,0}$
$Cl_{r,s} \otimes Cl_{1,1} \cong Cl_{r+1,s+1}$

命题 4.1.
- $\mathbb{C} \otimes \mathbb{H} \cong \mathbb{C}(2)$
- $\mathbb{H} \otimes \mathbb{H} \cong \mathbb{R}(4)$

证明.

(3) $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$
$(1,0) \mapsto \frac{1}{2}(1 \otimes 1 + \mathrm{i} \otimes \mathrm{i})$

1.

□

$\mathbb{C}$ 上的非退化二次型
$q_{\mathbb{C}}(z) = \sum_{j=1}^{n} z_j^2$
$Cl_{r,s} \otimes \mathbb{C} \cong Cl(\mathbb{C}^{r+s}, q \otimes \mathbb{C})$

定义 4.1. $Cl_n := Cl(\mathbb{C}^n, q_{\mathbb{C}})$

定理 4.2. $\forall\, n \geqslant 0$，周期性同构，

- $Cl_{n+8,0} \cong Cl_{n,0} \otimes Cl_{8,0}$
- $Cl_{0,n+8} \cong Cl_{0,8} \otimes Cl_{0,n}$
- $Cl_{n+2} \cong Cl_n \otimes_{\mathbb{C}} Cl_2$
- $Cl_{8,0} = R(16)$
- $Cl_{2\llcorner}$

5 表示

V 是 k 向量空间，q 是 V 上的二次型

定义 5.1. $\mathbb{K} \supset k$

$Cl(V,q)$ 的 $\mathbb{K}$ 表示

$\rho\colon Cl(V,q) \to Hom_{\mathbb{K}}(W,W)$ 的 k 代数同态. 其中 W 是 $\mathbb{K}$ 有限维向量空间.

称 W 为 $\mathbb{K}$ 上的 $Cl(V,q)$ 模

任意 $\varphi \in Cl(V,q)$，$w \in W$

$\varphi \cdot w := \rho(\varphi)(w)$

Clifford 乘法

W 实向量空间，$J\colon W \to W$，$\mathbb{R}$ 线性使得 $J^2 = -\mathrm{Id}$.

W 成为复向量空间

$Cl_{r,s}$ 的复表示

实表示

$W_{\mathbb{R}}$ 上有四元数结构，存在 $I, J, K \in Hom_{\mathbb{R}}(W,W)$ 使得 $I^2 = J^2 = K^2 = -\mathrm{Id}$

$IJ = -JI = K$

$JK = -KJ = I$

$KI = -IK = J$

定义 5.2. $V, q, k \subset \mathbb{K}$

$\mathbb{K}$ 表示 $\rho\colon Cl(V,q) \to Hom_{\mathbb{K}}(W,W)$

称为可约的，如果

$W = W_1 \oplus W_1$，使得任意 $\varphi \in Cl(V,q)$，$\rho(\varphi)(W_i) \subset (W_i)$

$\rho = \rho_1 \oplus \rho_2$

命题 5.1. $Cl(V,q)$ 的表示 ρ

$\forall r, s, Cl_{r,s} \cong Cl^0_{r+1,s}$

$Spin_{r,s} \subset Cl^0_{r,s} \cong Cl_{r-1,s}$

Clifford 代数的表示就可以诱导 Spin 群的表示

由此以后 $Cl_n = Cl_{n,0}$

$d_n = \dim_{\mathbb{R}} W$，$Cl_n$ 的不可约 $\mathbb{R}$ 表示

$d_n^{\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{C}} W$，不可约复表示的维数

K_n 与 $\rho(Cl(V,q))$ 交换的