

# 样条函数与逼近论

孙天阳

中国科学技术大学数学科学学院

`tysun@mail.ustc.edu.cn`

2024 年 12 月 28 日

# 目录

目录	2
<b>1 差商</b>	<b>3</b>
1.1 绪论	3
1.1.1 分段插值	3
1.1.2 B 样条基函数	3
1.2 Lagrange 插值	4
1.3 Newton 插值	6
1.4 误差估计	10
1.5 Hermite 插值	11
1.6 差商的性质	13
1.7 样条空间	15
<b>2 B 样条的性质</b>	<b>17</b>
2.1 基本性质	17
2.2 B 样条的分析性质	19
2.3 B 样条的代数性质	20
2.4 等距节点 B 样条	21
<b>3 B 样条的相关算法</b>	<b>22</b>
3.1 de Boor 算法	22
3.2 节点插入算法	23
3.3 开花算法	24
3.4 层次 B 样条	25
<b>4 样条插值与逼近</b>	<b>26</b>
4.1 变差减缩性	26
4.2 样条插值与自然样条	28
4.3 三次样条插值与一般样条插值	29
4.4 样条逼近	30
4.5 拟插值方法	31

目录	2
<b>5 最佳一致逼近</b>	<b>32</b>
5.1 赋范线性空间的最佳逼近	32
5.2 代数多项式最佳一致逼近的表征	33
5.3 整体一致逼近、正线性算子定理	34
5.4 最佳一致逼近的收敛阶	35
<b>6 最佳平方逼近</b>	<b>36</b>
6.1 内积空间的最佳逼近	36
6.2 最佳平方逼近	37
6.3 正交多项式	38
<b>7 习题</b>	<b>39</b>
7.1 第九章	39

# Chapter 1

## 差商

### 1.1 绪论

多项式插值: Lagrange、Newton、Hermite。

$P_m$ : 最高不超过  $m$  次的多项式。

Runge 现象:  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}, x \in [-5, 5]$ , 用一个多项式插值不能很好地拟合这个函数。

#### 1.1.1 分段插值

分段插值  $\rightarrow$  样条: 分段光滑多项式。插值方法不行, 不做插值, 改做逼近。

给定区间  $[a, b]$ , 假设  $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k < x_{k+1} = b$ ,

$$\{I_i = [x_i, x_{i+1}), i = 0, \cdots, k\}$$

每一段上都可以约定多项式的次数, 叫做 multi-degree spline, 就是每段上最高次数不一样。我们这门课, 每一段上多项式次数, 给一个统一的最高值。

$$S_m(\Delta) := \{s(x) \mid s(x)|_{I_i} \in \mathbb{P}_m, s(x) \in C^{m-1}[a, b]\}$$

以后每个结点可以指定不同的光滑次数。

$S_m(\Delta) \subset C^{m-1}[a, b]$  线性空间 (关心基函数) + 对偶基。从计算的角度来说, 具有紧支集的基函数。学过有限元的话, 具有紧支集的函数  $\int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)dx$  就很好算。

#### 1.1.2 B 样条基函数

B 样条基函数 (B-spline), B 是 Basic。



其他的  $\varphi_i(x)$  是同理的. 这样一来,

$$p_m(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \cdots + a_m\varphi_m(x)$$

中的系数  $\{a_i\}_{i=0}^m$  就被确定为

$$a_i = f(x_i), \quad i = 0, \cdots, m.$$

我们给这组基一个专有的记号记作  $l_i$ , 称作 Lagrange 插值多项式, 将这种插值方式

$$p_m(x) = \sum_{i=0}^m f(x_i)l_i(x)$$

称作 **Lagrange 插值**.

**命题 1.2.2.**

$$\sum_{i=0}^m l_i(x) \equiv 1$$

证明. 左侧其实就是 1 的 Lagrange 插值多项式, 按插值的要求它在  $m+1$  个点取到 1, 这大于它的次数  $m$ , 所以只能恒为 1.  $\square$

如果引入记号

$$\omega_{m+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_m)$$

那么

$$l_i(x) = \frac{\omega_{m+1}(x)}{(x - x_i)\omega'_{m+1}(x_i)}.$$

### 1.3 Newton 插值

Lagrange 插值有一个缺点, 就是基函数高度依赖于节点的选择. 如果节点发生了变化, 哪怕是在原有的  $m$  个节点的基础上新增一个节点, 也需要重新算一遍基函数. 这就促使我们引入了 **Newton 插值**. 把握住目的是新增节点时能够复用原有的基函数, 就不难理解 Newton 插值的基函数的选择.

首先  $m = 0$  只有一个节点的时候, 很平凡的情形自然会选  $\varphi_0 = 1$  作为基函数. 当  $m = 1$  也就是有两个节点的时候, 首先我们已经有了  $\varphi_0 = 1$ , 所以矩阵长成

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \varphi_1(x_0) \\ 1 & \varphi_1(x_1) \end{pmatrix}$$

的样子, 我们为了  $B$  简单所以取  $\varphi_1 = x - x_0$ . 当  $m = 2$  时, 矩阵长成

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \varphi_2(x_0) \\ 1 & \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) \\ 1 & \varphi_1(x_2) & \varphi_2(x_2) \end{pmatrix}$$

依旧是为了矩阵简单我们取  $\varphi_2 = (x - x_0)(x - x_1)$ . 这样一来,  $\varphi_i(x)$  的取法就比较清楚了

$$\varphi_0(x) = 1, \quad \varphi_i(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

根据这种取法,  $A$  是一个下三角矩阵. 为什么不在  $\varphi_i(x)$  前加系数来进一步简化矩阵? 因为给  $\varphi_1(x)$  前加系数顶多把  $\varphi_1(x_1)$  给调成 1, 不可能同时把  $\varphi_1(x_2)$  给调成 1, 所以干脆摆烂, 这样系数还干净.

**命题 1.3.1** (作业).  $\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^m$  线性无关.

证明.

$$\lambda_0 + \lambda_1(x - x_0) + \lambda_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + \lambda_m(x - x_0) \cdots (x - x_{m-1}) = 0$$

取  $x = x_0$  推得  $\lambda_0 = 0$ . 再取  $x = x_1$  得  $\lambda_1 = 0$ . 以此类推. □

接下来我们看一下此时怎么确定

$$p_m(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \cdots + a_m\varphi_m(x)$$

中的系数. 我们三个观察, 首先注意到有

$$p_m(x) = p_{m-1}(x) + a_m\varphi_m(x),$$

这是因为  $\varphi_m$  在  $x_0, \dots, x_{m-1}$  处全为零, 即  $a_m\varphi_m(x)$  这一项对  $p_m(x)$  在  $x_0, \dots, x_{m-1}$  处的值没有影响, 所以除去这部分就是插值前  $m$  个节点的插值多项式. 从这里看出来, 采用牛顿插值, 我们不仅可以复用基函数, 在计算插入新节点后的插值多项式时还可以复用之前的插值多项式. 另一个观察是  $a_m$  就是  $p_m$  中  $x^m$  前的系数, 由插值多项式的存在唯一性, 我们可以利用 Lagrange 插值

$$p_m(x) = \sum_{i=0}^m f(x_i)l_i(x)$$

来计算  $a_m$ . 直接可以从上式与  $l_i(x)$  的定义读出  $p_m(x)$  的最高阶项次数就是

$$a_m = \sum_{i=0}^m f(x_i) \frac{1}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)}.$$

第三个观察是我们可以递归地计算出  $a_i$ , 首先在  $x = x_0$  处取值可以计算出

$$a_0 = f(x_0) =: [x_0]f$$

然后在  $x = x_1$  处取值得到

$$[x_1]f = [x_0]f + a_1(x_1 - x_0) \implies a_1 = \frac{[x_1]f - [x_0]f}{x_1 - x_0} =: [x_0, x_1]f$$

然后在  $x = x_2$  处取值得到

$$\begin{aligned} [x_2]f &= [x_0]f + [x_0, x_1]f \cdot (x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_1)(x_2 - x_0) \\ [x_2]f - [x_1]f + [x_1]f - [x_0]f &= [x_0, x_1]f \cdot (x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_1)(x_2 - x_0) \\ [x_1, x_2]f \cdot (x_2 - x_1) + [x_0, x_1]f \cdot (x_1 - x_0) &= [x_0, x_1]f \cdot (x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_1)(x_2 - x_0) \\ [x_1, x_2]f \cdot (x_2 - x_1) - [x_0, x_1]f \cdot (x_2 - x_1) &= a_2(x_2 - x_1)(x_2 - x_0) \\ a_2 &= \frac{[x_1, x_2]f - [x_0, x_1]f}{x_2 - x_0} =: [x_0, x_1, x_2]f \end{aligned}$$

然后在  $x = x_3$  处取值, 移项并合并产生更高阶项, 得到

$$\begin{aligned} &[x_2, x_3]f \cdot (x_3 - x_2) + [x_1, x_2]f \cdot (x_2 - x_1) + [x_0, x_1]f \cdot (x_1 - x_0) \\ &= [x_0, x_1]f \cdot (x_3 - x_0) + [x_0, x_1, x_2]f \cdot (x_3 - x_1)(x_3 - x_0) + a_3(x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_3 - x_0) \end{aligned}$$

移项并插入中间项得到

$$\begin{aligned} &[x_2, x_3]f \cdot (x_3 - x_2) - [x_1, x_2]f \cdot (x_3 - x_2) + [x_1, x_2]f \cdot (x_3 - x_1) - [x_0, x_1]f \cdot (x_3 - x_1) \\ &= [x_0, x_1, x_2]f \cdot (x_3 - x_1)(x_3 - x_0) + a_3(x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_3 - x_0) \end{aligned}$$

合并产生更高阶项得到

$$\begin{aligned} &[x_1, x_2, x_3]f \cdot (x_3 - x_2)(x_3 - x_1) + [x_0, x_1, x_2]f \cdot (x_3 - x_1)(x_2 - x_0) \\ &= [x_0, x_1, x_2]f \cdot (x_3 - x_1)(x_3 - x_0) + a_3(x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_3 - x_0) \end{aligned}$$

移项得到

$$\begin{aligned} &[x_1, x_2, x_3]f \cdot (x_3 - x_2)(x_3 - x_1) - [x_0, x_1, x_2]f \cdot (x_3 - x_2)(x_3 - x_1) = a_3(x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_3 - x_0) \\ &\implies a_3 = \frac{[x_1, x_2, x_3]f - [x_0, x_1, x_2]f}{x_3 - x_0} =: [x_0, x_1, x_2, x_3]f \end{aligned}$$

一般的, 在  $x = x_m$  处取值得到

$$[x_m]f = [x_0]f + [x_0, x_1]f \cdot (x_m - x_0) + \cdots + a_m(x_m - x_{m-1}) \cdots (x_m - x_0)$$

接下来我们将归纳证明, 将式子右侧的前  $k$  项挪到式子左侧, 会得到

$$\sum_{i=1}^{m-k+1} [x_{m-i+2-k}, \cdots, x_{m-i+1}]f \cdot (x_m - x_{m-i}) \cdots (x_m - x_{m-i+2-k}) - [x_{m-i+1-k}, \cdots, x_{m-i}]f \cdot (x_m - x_{m-i}) \cdots (x_m - x_{m-i+2-k})$$



当  $k = 1$  时, 这就是

$$\sum_{i=1}^m [x_{m-i+1}]f - [x_{m-i}]f = [x_m]f - [x_{m-1}]f + [x_{m-1}]f - [x_{m-2}]f + \cdots + [x_1]f - [x_0]f$$

这是显然的, 假设上式对  $k$  成立, 下证对  $k+1$  成立, 对  $k$  的式子变形并移项得

$$= \sum_{i=1}^{m-k+1} [x_{m-i+1-k}, \cdots, x_{m-i+1}]f \cdot (x_m - x_{m-i}) \cdots (x_m - x_{m-i+2-k})(x_{m-i+1} - x_{m-i+1-k}) - [x_0, \cdots, x_k]f \cdot (x_m - x_{k-1}) \cdots (x_m - x_0)$$

要证这玩意等于

$$\sum_{i=1}^{m-k} [x_{m-i+1-k}, \cdots, x_{m-i+1}]f \cdot (x_m - x_{m-i}) \cdots (x_m - x_{m-i+1-k}) - [x_{m-i-k}, \cdots, x_{m-i}]f \cdot (x_m - x_{m-i}) \cdots (x_m - x_{m-i+1-k})$$

首先可以看到含  $[x_{m-k}, \cdots, x_m]$  的项是一样的, 接下来就是证

$$- [x_{m-j-k}, \cdots, x_{m-j}]f \cdot (x_m - x_{m-j}) \cdots (x_m - x_{m-j+1-k}) + [x_{m-j-k}, \cdots, x_{m-j}]f \cdot (x_m - x_{m-j-1}) \cdots (x_m - x_{m-j-k}) \\ = [x_{m-j-k}, \cdots, x_{m-j}]f \cdot (x_m - x_{m-j-1}) \cdots (x_m - x_{m-j+1-k})(x_{m-j} - x_{m-j-k})$$

即证

$$-(x_m - x_{m-j}) \cdots (x_m - x_{m-j+1-k}) + (x_m - x_{m-j-1}) \cdots (x_m - x_{m-j-k}) = (x_m - x_{m-j-1}) \cdots (x_m - x_{m-j+1-k})(x_{m-j} - x_{m-j-k})$$

消去公因式, 即证

$$-(x_m - x_{m-j}) + (x_m - x_{m-j-k}) = x_{m-j} - x_{m-j-k}$$

这是显然的. 最后还需要额外验证

$$-[x_0, \cdots, x_k]f \cdot (x_m - x_k) \cdots (x_m - x_1) = [x_0, \cdots, x_k]f \cdot (x_m - x_{k-1}) \cdots (x_m - x_1)(x_k - x_0) - [x_0, \cdots, x_k]f \cdot (x_m - x_{k-1}) \cdots (x_m - x_0)$$

即证

$$-(x_m - x_k) \cdots (x_m - x_1) = (x_m - x_{k-1}) \cdots (x_m - x_1)(x_k - x_0) - (x_m - x_{k-1}) \cdots (x_m - x_0)$$

消去公因式, 即证

$$-(x_m - x_k) = (x_k - x_0) - (x_m - x_0),$$

这是显然的. 所以当  $k = m$  时我们得到

$$[x_1, \cdots, x_m]f \cdot (x_m - x_{m-1}) \cdots (x_m - x_1) - [x_0, \cdots, x_{m-1}]f \cdot (x_m - x_{m-1}) \cdots (x_m - x_1) = a_m(x_m - x_{m-1}) \cdots (x_m - x_1)(x_m - x_0)$$

$$\implies a_m = \frac{[x_1, \cdots, x_m]f - [x_0, \cdots, x_{m-1}]f}{x_m - x_0}$$

**定义 1.3.2.** 设  $\{x_i\}_{i=0}^m$  是  $[a, b]$  中互异的  $m+1$  个节点,  $f$  是定义在  $[a, b]$  上的函数. 定义

$$[x_0, \cdots, x_m]f := \frac{[x_1, \cdots, x_m]f - [x_0, \cdots, x_{m-1}]f}{x_m - x_0} = \sum_{i=0}^m f(x_i) \frac{1}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)} = \frac{D \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \cdots & x_{m-1} & x_m \\ 1 & x & \cdots & x^{m-1} & f \end{pmatrix}}{D \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \cdots & x_{m-1} & x_m \\ 1 & x & \cdots & x^{m-1} & x^m \end{pmatrix}}$$

**命题 1.3.3.** 设  $\sigma \in S_{m+1}$  是一个全排列, 则  $[x_0, \cdots, x_m]f = [x_{\sigma(0)}, \cdots, x_{\sigma(m)}]f$ .

证明. 从差商是 Lagrange 插值多项式的首项系数的定义来看是显然的.  $\square$

**命题 1.3.4.** 从差商是 Lagrange 插值多项式的首项系数的定义验证递归定义成立.

证明.

$$\begin{aligned}
 [x_1, \dots, x_m]f - [x_0, \dots, x_{m-1}]f &= \sum_{i=1}^m f(x_i) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^m \frac{1}{x_i - x_k} - \sum_{i=0}^{m-1} f(x_i) \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{m-1} \frac{1}{x_i - x_k} \\
 &= f(x_m) \prod_{k=1}^{m-1} \frac{1}{x_m - x_k} - f(x_0) \prod_{k=1}^{m-1} \frac{1}{x_0 - x_k} + \sum_{i=1}^{m-1} f(x_i) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{m-1} \frac{1}{x_i - x_k} \left( \frac{1}{x_i - x_m} - \frac{1}{x_i - x_0} \right) \\
 &= f(x_m) \prod_{k=1}^{m-1} \frac{1}{x_m - x_k} - f(x_0) \prod_{k=1}^{m-1} \frac{1}{x_0 - x_k} + \sum_{i=1}^{m-1} f(x_i) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{m-1} \frac{1}{x_i - x_k} \frac{x_m - x_0}{(x_i - x_m)(x_i - x_0)} \\
 &= (x_m - x_0) \left[ f(x_m) \prod_{k=0}^{m-1} \frac{1}{x_m - x_k} + f(x_0) \prod_{k=1}^m \frac{1}{x_0 - x_k} + \sum_{i=1}^{m-1} f(x_i) \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^m \frac{1}{x_i - x_k} \right]
 \end{aligned}$$

□

**命题 1.3.5.** 设  $f \in C^m[a, b]$ , 则存在  $\xi \in (a, b)$  使得

$$[x_0, x_1, \dots, x_m]f = \frac{f^{(m)}(\xi)}{m!}$$

证明. 令  $e(x) = f(x) - P_m(x)$ , 则它是以  $\{x_i\}_{i=0}^m$  为零点的函数, 由 Rolle 中值定理, 存在  $\xi \in (a, b)$  使得  $e^{(m)}(\xi) = 0$ , 而  $P_m^{(m)}(\xi) = m![x_0, \dots, x_m]f = f^{(m)}(\xi)$ . □

**例 1.3.6** (作业). 计算  $f = x^n$  的各阶差商.

$$[x_0, \dots, x_m]f = \begin{cases} 0 & m > n \\ 1 & m = n \\ ? & m < n \end{cases}$$

## 1.4 误差估计



定理 1.5.3 (Cramer 法则).

$$[t_1, \dots, t_{m+1}]f = D \begin{pmatrix} t_1 & \cdots & t_m & t_{m+1} \\ 1 & \cdots & x^{m-1} & f \end{pmatrix} / D \begin{pmatrix} t_1 & \cdots & t_m & t_{m+1} \\ 1 & \cdots & x^{m-1} & x^m \end{pmatrix}$$

命题 1.5.4. 将出现在上式分母中的行列式称作带重节点的 Vandermonde 行列式, 证明

$$V(t_1, \dots, t_m) = \prod_{1 \leq i < j \leq r} (x_i - x_j)^{l_i l_j} \prod_{i=1}^r \prod_{k=1}^{l_i-1} k!$$

证明.

□

定理 1.5.5.

$$[t_1, \dots, t_{m+1}]f = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{l_i} \alpha_{ij} D^{j-1} f(x_i)$$

推论 1.5.6.

定理 1.5.7. 如果  $t_1 < t_{m+1}$ , 那么

$$[t_1, \dots, t_{m+1}]f = \frac{[t_2, \dots, t_{m+1}]f - [t_1, \dots, t_m]f}{t_{m+1} - t_1}$$

如果  $t_1 = \dots = t_{m+1}$ , 那么

$$[t_1, \dots, t_{m+1}]f = \frac{1}{m!} D^{(m)} f(t_1)$$

证明.

□

推论 1.5.8. 若  $D^m f(x) = 0$ , 则  $[t_1, \dots, t_{m+1}]f = 0$

## 1.6 差商的性质

命题 1.6.1 (Leibniz 公式). 对光滑函数  $f, g$ , 有

$$[t_1, \dots, t_{m+1}](f \cdot g) = \sum_{i=1}^{m+1} [t_1, \dots, t_i]f \cdot [t_i, \dots, t_{m+1}]g$$

证明一. 设  $p, q$  是  $f, g$  满足  $t_1, \dots, t_{m+1}$  作为插值条件的 Hermite 插值问题的解.

$$p = \sum_{i=1}^m (x - t_1) \cdots (x - t_i) [t_1, \dots, t_i]f$$

$$q = \sum_{i=1}^m (x - t_{i+1}) \cdots (x - t_{m+1}) [t_i, \dots, t_{m+1}]g$$

□

证明二. 当  $m = 0$  时,

$$[t_1](f \cdot g) = (f \cdot g)(t_1) = f(t_1) \cdot g(t_1) = [t_1]f \cdot [t_1]g$$

假设对  $m$  个插值节点成立, 下面推对  $m + 1$  个插值节点成立.

(1) 当  $t_1 = \dots = t_{m+1}$ ,

$$[t_1, \dots, t_{m+1}](f \cdot g) = \frac{D^m}{m!}(f \cdot g)(t_1)$$

$$LHS = \sum_i^{m+1} \frac{D^{(i-1)}f}{(i-1)!}(t_1) \cdot \frac{D^{m+1-i}g}{(m+1-i)!}(t_1) = \frac{1}{m!} \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} D^i f(t_1) \cdot D^{m-i} g(t_1) = \frac{D^m f \cdot g(t_1)}{m!}$$

(2) 若  $t_1 < t_{m+1}$

$$[t_1, \dots, t_{m+1}](f \cdot g) = \frac{[t_2, \dots, t_{m+1}](f \cdot g) - [t_1, \dots, t_m](f \cdot g)}{t_{m+1} - t_1}$$

$$= \frac{\sum_{i=2}^{m+1} [t_2, \dots, t_i]f \cdot [t_i, \dots, t_{m+1}]g - \sum_{i=1}^m [t_1, \dots, t_i]f \cdot [t_i, \dots, t_m]g}{t_{m+1} - t_1}$$

看分子

$$\sum_{i=2}^{m+1} ((t_i - t_1)[t_1, \dots, t_i]f + [t_1, \dots, t_{i-1}]f) [t_i, \dots, t_{m+1}]g - \sum_{i=1}^m [t_1, \dots, t_i](- (t_{m+1} - t_i)[t_i, t_{i+1}, \dots, t_{m+1}]g +$$

注意

$$\sum_{i=2}^{m+1} [t_1, \dots, t_{i-1}]f \cdot [t_i, \dots, t_{m+1}]g = \sum_{i=1}^m [t_1, \dots, t_i]f \cdot [t_{i+1}, \dots, t_{m+1}]g$$

从而上式为

$$\sum_{i=2}^{m+1} (t_i - t_1)[t_1, \dots, t_i]f \cdot [t_i, \dots, t_{m+1}]g + \sum_{i=1}^m (t_{m+1} - t_i)[t_1, \dots, t_i]f \cdot [t_i, \dots, t_{m+1}]g$$

$$= \sum_{i=1}^{m+1} [t_1, \dots, t_i]f \cdot [t_i, \dots, t_{m+1}]g(t_{m+1} - t_1)$$

□

推论 1.6.2.

$$[t_1, \dots, t_{m+1}](x - t_{m+1})f = [t_1, \dots, t_m]f$$

命题 1.6.3. 当  $\varepsilon_i \rightarrow 0$  时, 若  $\{t_{i,\varepsilon_i}\}_{i=1}^{n+1}$  是  $[t_1, t_n]$  的某个分割, 则

$$\{t_i\}_{i=1}^{n+1} \rightarrow \{t_i\}_{i=1}^{n+1}$$

对光滑函数  $f$  有:

$$\lim_{\varepsilon_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{n+1} f(t_i, \xi_i) \Delta t_i = \int_{t_1}^{t_n} f(t) dt$$

证明. 只需 (真的吗?) 针对节点  $t_i$ , 做扰动  $\varepsilon$ . 设原插值节点为

$$t_1 \leq \dots \leq t_{i-1} < t_i = t_{i+1} = \dots = t_{i+l-1} < t_{i+l} \leq \dots \leq t_{m+1}$$

做扰动  $\varepsilon$  后

$$t_1 \leq \dots \leq t_{i-1} < t_{i+1} = \dots = t_{i+l-1} < t_i + \varepsilon < t_{i+l} \leq \dots \leq t_{m+1}$$

$$[t_1, \dots, t_i + \varepsilon, t_{i+1}, \dots, t_{m+1}]f = \frac{D}{D}$$

□

命题 1.6.4.

$$\frac{\partial}{\partial t_i} [t_1, \dots, t_{m+1}]f = [t_1, \dots, t_{i-1}, t_i, t_i, t_{i+1}, \dots, t_{m+1}]f$$

证明.

$$\frac{\partial}{\partial} \square f =$$

□

命题 1.6.5.

证明.

□

例 1.6.6. 求  $H_3(x)$  满足  $H_3(1) = 1, H'_3(1) = 2, H_3(2) = 2, H'_4(2) = 3$ .

解.

$i$	右	左	(右, 左)		
1	1	1'	(右 = 2)		
2	1	1'	(右 = 1)		
3	2	2'	(右 = )		
4	2	2'			

□

例 1.6.7.

## 1.7 样条空间

定义 1.7.1. 设  $[a, b]$  给定, 有分割  $\Delta = \{x_i\}_{i=1}^k$  满足

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k < x_{k+1} = b$$

将  $[a, b]$  分为  $k+1$  个小区间  $I_i := [x_i, x_{i+1}) (i = 0, 1, \cdots, k-1), I_k := [x_k, x_{k+1}]$ . 称空间

$$S_m^\mu(\Delta) := \left\{ s(x) \mid s(x)|_{I_i} =: s_i(x) \in \mathbb{P}_m(I_i), i = 0, \cdots, k, D^j s_{i-1}(x_i) = D^j s_i(x_i), i = 1, \cdots, k, j = 0, \cdots, \mu_i \right\}$$

为  $m$  次  $\mu$  阶光滑样条空间, 其中  $\mu = (\mu_1, \cdots, \mu_k)$ ,  $\mu_i$  在  $-1$  到  $m$  之间取值.

引理 1.7.2. 证明  $S_m^\mu(\Delta)$  为一个有限维线性空间.

证明. 容易看出  $S_m^\mu(\Delta)$  是一个线性空间, 为了证明它是有限维的, 只需构造如下单线性映射

$$\iota: S_m^\mu(\Delta) \longrightarrow P_m(I_0) \times \cdots \times P_m(I_k), \quad s(x) \longmapsto (s_0(x), \cdots, s_k(x)).$$

□

定义 1.7.3. 由  $D^{\mu_i} s_{i-1}(x_i) = D^{\mu_i} s_i(x_i)$  产生的代数条件

$$s_i(x) = s_{i-1}(x) + c_i(x)(x - x_i)^{\mu_i+1}$$

其中  $c_i(x)$  称为  $x = x_i$  处的光滑余因子.

$$1, x, \cdots, x^m,$$

定理 1.7.4.

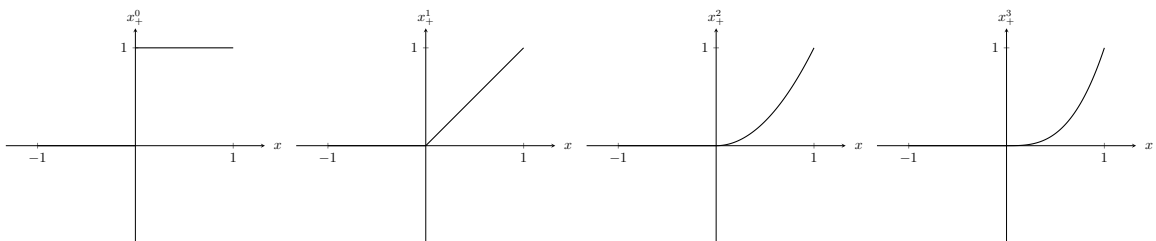
$$\dim S_m^\mu(\Delta) = m + 1 + \sum_{i=1}^k (m - \mu_i)$$

证明. 构造子空间, 然后是直和.

□

定义 1.7.5. 记

$$x_+^0 := \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$



定理 1.7.6. 对任意  $s(x) \in S_m^\mu(\Delta)$ , 存在  $s_0(x) \in \mathbb{P}_m$  以及  $\{\alpha_{ij}\}_{i=1, j=1}^{k, m-\mu_i-1}$

$$s(x) = s_0(x) + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m-\mu_i-1} \alpha_{ij} (x - x_i)_+^{\mu_i+j}$$



推论 1.7.7.  $\{\rho_{ij}(x) = (x - x_i)_+^{\mu_i+j}\}_{i=1, j=1}^{k, m-\mu_i-1}$  是  $S_m^\mu(\Delta)$  的一组基.

$$\underbrace{1, x, \dots, x^m}_{m+1 \uparrow}, \underbrace{(x - x_1)_+^{\mu_1+1}, \dots, (x - x_1)_+^m}_{m-\mu_1 \uparrow}, \dots, \underbrace{(x - x_k)_+^{\mu_k+1}, \dots, (x - x_k)_+^m}_{m-\mu_k \uparrow}$$

例 1.7.8. 考虑  $m = 2$ ,  $\Delta: a = 0 < 1 < 2 < 3 < 4 = b$ ,  $\mu = (0, 0, 0)$

$$\text{span} \{(x - 0)_+^0, (x - 0)_+^1, (x - 0)_+^2, (x - 1)_+^1, (x - 1)_+^2, (x - 2)_+^1, (x - 2)_+^2, (x - 3)_+^1, (x - 3)_+^2\}$$

推论 1.7.9. 考虑  $\mu = (-1, \dots, -1)$

命题 1.7.10.  $f(x) = (x - x_i)_+^r$  在  $x = x_i$  处是  $C^{r-1}$  连续的.

例 1.7.11.  $m = 1$ ,  $[a, b] = [0, 5]$ ,  $\Delta = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $\mu = (0, 0, 0, 0)$ , 基函数为

$$(x - 0)$$

这个其实就是因为, 在同一段区间上, 几个线性相关, 所以从理论上我们肯定有能力找到几个参数使得叠加起来是 0

就其实这些东西无关是因为起点不一样, 每个人负责提供一小段上的

$$(x - x_i)_+^t \text{ 与 } (x - x_j)_+^t$$

$$\text{当 } x > x_j \text{ 时, } \deg[(x - x_i)_+^t - (x - x_j)_+^t] = t - 1$$

求导, 指对  $x$  求导, 感觉像求导一样.

$$\text{考虑 } [0, 1](x - 1)_+^1$$

格式很像差商

$$[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+p+1}](x - t)_+^p \text{ 与 } S_m^\mu(\Delta)$$

## Chapter 2

# B 样条的性质

### 2.1 基本性质

定义 2.1.1. 给定重节点序列  $t_1 \leq \dots \leq t_{n+m+1}$ , 对于  $i = 1, 2, \dots, n$ , 定义第  $i$  个 B 样条函数

$$B_{i,m,t}(x) = (t_{i+m+1} - t_i)[t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+m+1}](t - x)_+^m$$

命题 2.1.2.

$$B_{i,m,t}(x) = (-1)^{m+1}(t_{i+m+1} - t_i)[t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+m+1}](x - t)_+^m$$

证明. 将  $x$  视作参数, 考察关于  $t$  的函数  $(t - x)_+^m$  和  $(-1)^{m+1}(x - t)_+^m$ ,

$$(t - x)_+^m = \begin{cases} (t - x)^m & t > x \\ 0 & t < x \end{cases}, \quad (-1)^{m+1}(x - t)_+^m = \begin{cases} 0 & t > x \\ -(t - x)^m & t < x \end{cases}$$

所以二者之差是  $(t - x)^m$ , 一个关于  $t$  的  $m$  次多项式, 它的  $m + 1$  阶差商为 0. □

命题 2.1.3. 当  $m = 0$  时, 给定重节点序列  $t_1 \leq \dots \leq t_n$ , 第  $i$  个 B 样条函数为

$$B_{i,t}(x) = (t_{i+1} - t_i)[t_i, t_{i+1}](t - x)_+^0 = [t_{i+1}](t - x)_+^0 - [t_i](t - x)_+^0 = 1, \quad t_i < x \leq t_{i+1}.$$

命题 2.1.4. 假设  $t_i < t_{i+1} = \dots = t_{i+m+1}$ , 则

$$B_{i,m}(x) = \left( \frac{x - t_i}{t_{i+m+1} - t_i} \right)^m, \quad t_i \leq x < t_{i+m+1}.$$

证明. □

命题 2.1.5. 令  $t_i \leq \dots \leq t_{i+m+1} = x_1 \cdots x_l < \dots < x_r \cdots x_r$ , 则

$$B_{i,m,t} = \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^l \alpha_{jk} (x_i - x)_+^{m-k+1}, \quad j = 1, \dots, r, k = 0, \dots, m - l_j$$

命题 2.1.6 (局部性).

$$B_{i,m}(x) = \begin{cases} 0 & x \notin (t_i, t_{i+m+1}] \\ > 0 & x \in (t_i, t_{i+m+1}] \end{cases}$$

证明. 当  $x > t_{i+m+1}$  时, 关于  $t$  的函数  $(t-x)_+^m$  在  $[t_i, t_{i+m+1}]$  上恒为 0, 所以  $B_{i,m}(x) = 0$ .

当  $x < t_i$  时,  $(t-x)_+^m$  在  $[t_i, t_{i+m+1}]$  上就是  $m$  次多项式  $(t-x)^m$ , 所以  $B_{i,m}(x) = 0$ .  $\square$

**推论 2.1.7.** 对于  $[t_i, t_{i+1}]$ , 仅有  $m+1$  个非零 B 样条.

**命题 2.1.8** (de Boor-Cox 递推公式). 给定重节点序列  $t_1 \leq \dots \leq t_{n+m+1}$ , 则

$$B_{i,m}(x) = \frac{x-t_i}{t_{i+m}-t_i} B_{i,m-1}(x) + \frac{t_{i+m+1}-x}{t_{i+m+1}-t_{i+1}} B_{i+1,m-1}(x)$$

证明.

$$\begin{aligned} \frac{B_{i,m,t}(x)}{t_{i+m+1}-t_i} &= [t_i, \dots, t_{i+m+1}](t-x)_+^m \\ &= [t_i, \dots, t_{i+m+1}](t-x)(t-x)_+^{m-1} \\ &= [t_i]g(t) \cdot [t_i, \dots, t_{i+m+1}]h(t) + [t_i, t_{i+1}]g(t) \cdot [t_{i+1}, \dots, t_{i+m+1}]h(t) \\ &= (t_i-x)[t_i, \dots, t_{i+m+1}]h(t) + [t_{i+1}, \dots, t_{i+m+1}]h(t) \\ &= (t_i-x) \frac{[t_{i+1}, \dots, t_{i+m+1}]h(t) - [t_1, \dots, t_{i+m}]h(t)}{t_{i+m+1}-t_i} + [t_{i+1}, \dots, t_{i+m+1}]h(t) \\ B_{i,m,t}(x) &= (t_i-x)([t_{i+1}, \dots, t_{i+m+1}]h(t) - [t_1, \dots, t_{i+m}]h(t)) + (t_{i+m+1}-t_i)[t_{i+1}, \dots, t_{i+m+1}]h(t) \\ &= (t_{i+m+1}-t_i)[t_{i+1}, \dots, t_{i+m+1}]h(t) + (x-t_i)[t_i, \dots, t_{i+m}]h(t) \\ &= \frac{t_{i+m+1}-x}{t_{i+m+1}-t_{i+1}} B_{i+1,m-1}(x) + \frac{x-t_i}{t_{i+m}-t_i} B_{i,m-1}(x) \end{aligned}$$

$\square$

## 2.2 B 样条的分析性质

命题 2.2.1. 对于  $m \geq 1$ ,

$$D_+ B_{i,m}(x) = m \left( \frac{B_{i,m-1}(x)}{t_{i+m} - t_i} - \frac{B_{i+1,m-1}(x)}{t_{i+m+1} - t_{i+1}} \right).$$

证明.

$$\begin{aligned} B_{i,m}(x) &= (t_{i+m+1} - t_i)[t_i, \dots, t_{i+m+1}](t-x)_+^m \\ &= [t_{i+1}, \dots, t_{i+m+1}](t-x)_+^m - [t_i, \dots, t_{i+m}](t-x)_+^m \\ D_+ B_{i,m}(x) &= m(-[t_{i+1}, \dots, t_{i+m+1}](t-x)_+^{m-1} + [t_i, \dots, t_{i+m}](t-x)_+^{m-1}) \end{aligned}$$

□

命题 2.2.2. 对于  $m \geq 1$ ,

$$D_+^r B_{i,m}(x) = \frac{m}{m-r} \left( \frac{x-t_i}{t_{i+m}-t_i} D^r B_{i,m-1}(x) + \frac{t_{i+m+1}-x}{t_{i+m+1}-t_{i+1}} D^r B_{i+1,m-1}(x) \right)$$

证明.  $r=1$  的时候似乎也没有退化到上一个式子

□

命题 2.2.3.

$$\int_{t_i}^{t_{i+m+1}} B_{i,m}(x) dx = \frac{t_{i+m+1} - t_i}{m+1}.$$

证明.

$$0 = \int_{t_i}^{t_{i+m+2}} D_+ B_{i,m+1}(x) dx = \frac{m+1}{t_{i+m+1}-t_i} \int_{t_i}^{t_{i+m+1}} B_{i,m}(x) dx - \frac{m+1}{t_{i+m+2}-t_{i+1}} \int_{t_{i+1}}^{t_{i+m+2}} B_{i+1,m}(x) dx$$

记

$$J_i = \frac{m+1}{t_{i+m+1}-t_i} \int_{t_i}^{t_{i+m+1}} B_{i,m}(x) dx,$$

则上式等价于  $J_i = J_{i+1}$ . 构造  $\{s_i\}$  满足

$$s_1 = \dots = s_{m+1} = a, \quad s_{m+2} = t_i, \quad \dots, \quad s_{m+2+j} = t_{i+j}, \quad \dots, \quad s_{m+2+m+1} = t_{i+m+1}$$

则有

$$J_1 = \frac{m+1}{s_{m+2}-s_1} \int_{s_1}^{s_{m+2}} \frac{(s_{m+2}-x)^m}{(s_{m+2}-s_1)^m} dx = 1.$$

□

命题 2.2.4. 对  $B_{i,m}(x)$  考察端点处的连续性, 以  $t_i$  为例

$$(1) (-1)^{k+m-\alpha_i} D_+^k B_{i,m}(t_i) = 0, k = 0, 1, \dots, m - \alpha_i$$

$$(2) (-1)^{k+m-\alpha_i} D_+^k B_{i,m}(t_i) > 0, k = m - \alpha_i + 1, \dots, m$$

## 2.3 B 样条的代数性质

考虑节点  $t_1 \leq \dots \leq t_{n+m+1}$ , 考虑 B 样条基函数  $B_{1,m}, \dots, B_{n,m}$ .

$$B_{i,m}(x) = [t_{i+1}, \dots, t_{i+m+1}](t-x)_+^m - [t_i, \dots, t_{i+m}](t-x)_+^m$$

令  $P_i^x(t) \in \mathbb{P}_m$  是关于函数  $f(t) = (t-x)_+^m$  插值于  $t_i, \dots, t_{i+m}$  的插值多项式, 那么  $P_{i+1}^x(t) - P_i^x(t)$  是以  $t_{i+1}, \dots, t_{i+m}$  为零点的多项式, 那么

$$P_{i+1}^x(t) - P_i^x(t) = c(t-t_{i+1}) \cdots (t-t_{i+m})$$

根据差商的定义, 常数  $c$  其实就是  $B_{i,m}(x)$ , 所以我们得到

$$P_{i+1}^x(t) - P_i^x(t) = B_{i,m}(x)(t-t_{i+1}) \cdots (t-t_{i+m}) =: B_{i,m}(x)\rho_{i,m}(t), \quad i = 1, \dots, n$$

对  $i$  从 1 到  $n$  求和得到

$$P_{n+1}^x(t) - P_1^x(t) = \sum_{i=1}^n B_{i,m}(x)\rho_{i,m}(t).$$

分析  $P_{n+1}^x(t)$ , 它与  $f(t) = (t-x)_+^m$  在  $t_{n+1}, \dots, t_{n+1+m}$  处一致, 而当  $x < t_{n+1}$  时,  $(t-x)_+^m$  在  $[t_{n+1}, t_{n+1+m}]$  就是  $(t-x)^m$ , 所以此时  $P_{n+1}^x(t) = (t-x)^m$ . 再分析  $P_1^x(t)$ , 它与  $f(t) = (t-x)_+^m$  在  $t_1, \dots, t_{m+1}$  处一致, 而当  $x > t_{m+1}$  时,  $(t-x)_+^m$  在  $[t_1, t_{m+1}]$  就是 0, 所以此时  $P_1^x(t) = 0$ .

**定理 2.3.1** (Marsden 等式). 任意  $x \in [t_{m+1}, t_{n+1}]$ , 任意  $y \in \mathbb{R}$ , 有

$$(y-x)^m = \sum_{i=1}^n \rho_{i,m}(y)B_{i,m}(x).$$

注记.  $[t_{m+1}, t_{n+1}]$  是  $B_{1,m}, \dots, B_{n,m}$  能撑满的最大区间, 可以这样记忆 Marsden 等式成立的区间.

**推论 2.3.2.** 任意  $x \in [t_{m+1}, t_{n+1}]$ , 任意  $0 \leq r \leq m$ , 有

$$x^r = \sum_{i=1}^n c_{i,r} B_{i,m}(x), \quad c_{i,r} = \frac{(m-r)!r!}{m!} \text{Sym}_r(t_{i+1}, \dots, t_{m+1})$$

证明. 对 Marsden 等式两边关于  $y$  求  $m-r$  次导, 再令  $y=0$ , 整理得到

$$x^r = \sum_{i=1}^n (-1)^r \frac{r!}{m!} D_y^{m-r} \rho_{i,m}(0) B_{i,m}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{(m-r)!r!}{m!} \text{Sym}_r(t_{i+1}, \dots, t_{m+1}) B_{i,m}(x).$$

□

**推论 2.3.3.** 任意  $x \in [t_\mu, t_{\mu+1}]$ , 任意  $0 \leq r \leq m$ , 有

$$x^r = \sum_{i=\mu-m}^{\mu} c_{i,r} B_{i,m}(x).$$

**推论 2.3.4** (单位剖分性).

$$1 = \sum_{i=\mu-m}^{\mu} B_{i,m}(x), \quad x \in [t_\mu, t_{\mu+1}].$$

**定理 2.3.5** (Curry-Schoenberg). 1

参考资料 [Marsden's identity](#)

## 2.4 等距节点 B 样条

定义 2.4.1. 取  $t = [0, 1, \dots, m+1]$ , 记  $N^m(x) = B_{0,t,m}(x)$ .

定义 2.4.2. 当  $t_{i+1} - t_i = h$  时, 称  $B_{i,m}(x)$  为等距节点 B 样条.

命题 2.4.3. 设  $t = (t_i, \dots, t_{i+m+1})$ ,  $t' = (t_i + y, \dots, t_{i+m+1} + y)$ , 则  $B_{i,t',m} = B_{i,t,m}(x - y)$ .

证明. □

引理 2.4.4.

$$[at_i, \dots, at_{i+m+1}]f(t) = \frac{1}{a^{m+1}}[t_i, \dots, t_{i+m+1}]f(at)$$

推论 2.4.5. 设  $t'' = (at_i + b, \dots, at_{i+m+1} + b)$ , 则

$$B_{t'',m}(x) = \frac{1}{a}B_{t,m}\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

命题 2.4.6.

$$N^m(x) = \frac{x}{m}N^{m-1}(x) + \frac{m+1-x}{m}N^{m-1}(x)$$

命题 2.4.7.

$$\int_0^{m+1} N^m(x) dx = 1$$

命题 2.4.8.

$$N^m(x) = N^m(m+1-x)$$

命题 2.4.9.

$$D_+ N^m(x) = N^{m-1}(x) - N^{m-1}(x-1)$$

命题 2.4.10.

$$N^m(x) = \frac{1}{m!} \sum_{i=0}^{m+1} (-1)^{m+1-i} \binom{m+1}{i} (i-x)_+^m$$

命题 2.4.11.

$$\Delta_h^r f(t) = r! h^r [t, t+h, \dots, t+rh] f(t)$$

## Chapter 3

# B 样条的相关算法

### 3.1 de Boor 算法

考虑 B 样条函数  $s(x) = \sum_{i=1}^n c_i B_{i,m}(x)$ , 求  $s(x), s'(x)$  在一点  $x = x_0$  处的函数值. 设  $x_0 \in [t_\mu, t_{\mu+1}]$ , 则在这个区间上非零的 B 样条基函数为  $B_{\mu-m,m}$  到  $B_{\mu,m}$  一共  $m+1$  个, 则

$$\begin{aligned} s(x) &= \sum_{i=1}^n c_i B_{i,m}(x) = \sum_{i=\mu-m}^{\mu} c_i B_{i,m}(x) \\ &= \sum_{i=\mu-m}^{\mu} c_i \left( \frac{x - t_i}{t_{i+m} - t_i} B_{i,m-1}(x) + \frac{t_{i+m+1} - x}{t_{i+m+1} - t_{i+1}} B_{i+1,m-1}(x) \right) \\ &= \sum_{i=\mu-m+1}^{\mu} \left( \frac{t_{i+m} - x}{t_{i+m} - t_i} c_{i-1} + \frac{x - t_i}{t_{i+m} - t_i} c_i \right) B_{i,m-1}(x) \end{aligned}$$

注意  $B_{\mu-m,m-1}$  和  $B_{\mu+1,m-1}$  在  $[t_\mu, t_{\mu+1}]$  上为零. 记  $c_i$  为  $c_i^{[0]}$ , 则我们有如下 de Boor 算法

$$c_i^{[r]} = \frac{t_{i+m+1-r} - x}{t_{i+m+1-r} - t_i} c_{i-1}^{[r-1]} + \frac{x - t_i}{t_{i+m+1-r} - t_i} c_i^{[r-1]}$$

例 3.1.1.

命题 3.1.2.

$$s'(x) = \sum_{i=1}^n c_i B'_{i,m}(x) = \sum_{i=1}^n c_i m() = \sum_{i=2}^n m \left( \frac{c_i - c_{i-1}}{t_{i+m} - t_i} \right) B_{i,m-1}(x)$$

### 3.2 节点插入算法

问题: 考虑  $t = (t_1, \dots, t_{n+m+1})$  对应  $n$  个 B 样条基  $B_{1,t}, \dots, B_{n,t}$ , 在区间  $[t_\mu, t_{\mu+1})$  内插入一个新节点  $z$ , 得到  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_{n+m+2}) = (t_1, \dots, t_\mu, z, t_{\mu+1}, \dots, t_{n+m+1})$ , 对应  $n+1$  个 B 样条基  $B_{1,\tau}, \dots, B_{n+1,\tau}$ , 看  $\{B_{1,t}, \dots, B_{n,t}\}$  与  $\{B_{1,\tau}, \dots, B_{n+1,\tau}\}$  之间的关系.

引理 3.2.1.  $S_m^t \subset S_m^\tau$ .

证明. 任取  $s(x) \in S_m^t$

(1)  $z \neq t_\mu$ .

(2)  $z = t_\mu$ . 设  $s(x)$  在  $t_\mu$  处光滑性为  $p_i$ , 则  $s(x) \in C^{p_i} \subset C^{p_i-1}$ .

□

因为  $z \in [t_\mu, t_{\mu+1})$ , 有一个简单的观察

$$\begin{cases} B_{i,t} = B_{i,\tau}, & i = 1, \dots, \mu - m - 1 \\ B_{i,t} = B_{i+1,\tau}, & i = \mu + 1, \dots, n \end{cases}$$

引理 3.2.2.

$$[x_0, \dots, x_k]f = \frac{z - x_0}{x_k - x_0} [x_0, \dots, x_{k-1}, z]f + \frac{x_k - z}{x_k - x_0} [x_1, \dots, x_k, z]f$$

证明.

$$\begin{aligned} [x_0, \dots, x_k]f &= \frac{[x_1, \dots, x_k]f - [x_0, \dots, x_{k-1}]f}{x_k - x_0} \\ &= \frac{[x_1, \dots, x_{k-1}, z]f - [x_0, \dots, x_{k-1}]f + [x_1, \dots, x_k]f - [x_1, \dots, x_{k-1}, z]f}{x_k - x_0} \\ &= \frac{(z - x_0)[x_0, \dots, x_{k-1}, z]f + (x_k - z)[x_1, \dots, x_k, z]f}{x_k - x_0} \end{aligned}$$

□

定理 3.2.3.

$$\begin{cases} B_{\mu-m,t}(x) = B_{\mu-m,\tau}(x) + \frac{t_{\mu+1}-z}{t_{\mu+1}-t_{\mu-m+1}} B_{\mu-m+1,\tau}(x) \\ B_{i,t}(x) = \frac{z-t_i}{t_{i+m}-t_i} B_{i,\tau}(x) + \frac{t_{i+m+1}-z}{t_{i+m+1}-t_{i+1}} B_{i+1,\tau}(x) \\ B_{\mu,t}(x) = \frac{z-t_\mu}{t_{\mu+m}-t_\mu} B_{\mu,\tau}(x) + B_{\mu+1,\tau}(x) \end{cases}$$

$$s(x) = \sum_{i=1}^n c_i B_{i,t}(x) = \sum_{i=1}^{n+1} b_i B_{i,\tau}(x)$$

定理 3.2.4 (Boehm 算法).

$$b_i = \begin{cases} c_i & 1 \leq i \leq \mu - m \\ \frac{t_{i+m}-z}{t_{i+m}-t_i} c_{i-1} + \frac{z-t_i}{t_{i+m}-t_i} c_i & \mu - m + 1 \leq i \leq \mu \\ c_{i-1} & \mu + 1 \leq i \leq n + 1 \end{cases}$$

例 3.2.5.



### 3.3 开花算法

**定理 3.3.1.** 对于任一  $n$  次多项式  $F(x)$ , 存在唯一的映射  $f$  满足

- (1)  $f$  是对称的.
- (2)  $f$  关于每个变量是仿射的.
- (3)  $f(u, \dots, u) = F(u)$

此时称  $f$  是  $F$  的开花多项式.

### 3.4 层次 $B$ 样条

## Chapter 4

# 样条插值与逼近

### 4.1 变差减缩性

定义 4.1.1 (强符号改变). 令  $c = (c_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$ , 定义  $S^-(c): c \rightarrow \mathbb{R}$  表示  $c$  中元素的符号改变次数.

例 4.1.2.

$$S^-(1, -2) = 1, \quad S^-(1, 0, -1, 3, 2) = 2.$$

引理 4.1.3. 令  $s(x) = \sum_{i=1}^n c_i B_{i,t}(x) = \sum_{i=1}^{n+1} b_i B_{i,\tau}(x)$ , 其中  $\tau$  是由  $t$  插入一个节点得到. 则

$$S^-(b) \leq S^-(c),$$

其中  $b = (b_i)_{i=1}^{n+1}, c = (c_i)_{i=1}^n$ .

证明. 由 Boehm 算法

$$b_i = (1 - \alpha_i)c_{i-1} + \alpha_i c_i, \quad i = 1, 2, \dots, n+1, \quad 0 \leq \alpha_i \leq 1, \quad c_0 = c_{n+1} = 0$$

那么  $b_i$  至少与  $c_{i-1}$  和  $c_i$  中一个符号相同, 所以

$$S^-(c) = S^-(b_1, c_1, b_2, c_2, b_3, \dots, b_n, c_n, b_{n+1}) \geq S^-(b).$$

□

推论 4.1.4. 令  $s(x) = \sum_{i=1}^n B_{i,t}(x) = \sum_{i=1}^k b_i B_{i,\tau}(x)$ , 其中  $\tau$  是由  $t$  插入  $k - n$  个节点得到. 则

$$S^-(b) \leq S^-(c).$$

定理 4.1.5 (VDP). 令  $s(x) = \sum_{i=1}^n c_i B_{i,t}(x), x \in I$ , 则  $S^-(s(x)) \leq S^-(c), c = (c_i)_{i=1}^n$

定义 4.1.6. 定义  $r = S^-(f(x))$  为  $f(x)$  在  $I$  上的符号改变数, 如果存在  $r+1$  个数  $x_1 < x_2 < \dots < x_{r+1} \in I$  满足

$$S^-(f(x_1), \dots, f(x_{r+1})) = r$$

且这样的  $r$  是最大的.

证明. 令  $r = S^-(s(x))$  且  $(x_i)_{i=1}^{r+1}$  为  $r+1$  个递增的数满足

$$S^-(s(x_1), \dots, s(x_{r+1})) = r$$

于是可以在  $t$  中插入节点  $x_i, i = 1, 2, \dots, r+1$  使得  $x_i$  的重数达到  $m$  ( $m$  为样条次数), 记新的节点向量为  $\tau$ . 对于每个点  $x_i$  而言, 仅有一个 B 样条基函数  $B_{j_i, \tau}(x)$  在  $x_i$  处为 1, 于是  $s(x_i) = b_{j_i}$ . 从而

$$S^l(s(x_1), \dots, s(x_{r+1})) = S^-(b_{j_1}, \dots, b_{j_{r+1}}) \leq S^-(b) \leq S^-(c)$$

□

**定理 4.1.7** (VDP, 平面样条曲线). 令  $s(x) = \sum_{i=1}^n c_i B_{i,t}(x), x \in I, c_i \in \mathbb{R}^2$ , 令  $L$  是任一条  $\mathbb{R}^2$  中的直线, 则

$$S \text{ 穿过 } L \text{ 的次数} \leq \text{控制多边形穿过 } L \text{ 的次数}$$

证明. 假设直线为  $L = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid p \cdot n - a = 0\}, n \in \mathbb{R}^2$  为单位法向量,  $a \in \mathbb{R}$  为常数, 令  $\sigma(x) = s(x) \cdot n - a$  是一个数值函数, 于是  $S^-(\sigma(x))$  表示  $s$  穿过  $L$  的次数.

由于  $\sum_{i=1}^n B_{i,t}(x) \equiv 1$ , 从而  $\sigma(x)$  可以写为  $\sigma(x) = \sum_{i=1}^n \gamma_i B_{i,\tau}(x)$ , 其中  $\gamma_i = c_i \cdot n - a$  并且  $S^-(\gamma)$  表示控制多边形穿过  $L$  的次数, 其中  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$  □

## 4.2 样条插值与自然样条

问题: 给定插值节点  $(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, n$ , 定义  $m$  次样条空间  $S_m^t(\Delta), \Delta = \{x_1, \dots, x_n\}$ , 但  $\dim S_m^t(\Delta) = m + 1 + n$ . 所以需要添加一些限制.

**定义 4.2.1.**

为自然样条空间, 其中的样条为自然样条.

问题: 设  $1 \leq m \leq n$ . 给定区间  $[a, b]$ , 剖分  $\{x_1, \dots, x_n\}$ . 寻找  $N(x) \in NS_{2m-1}^t(\Delta)$ , 插值  $(x_i, y_i)$  使得  $N(x_i) = y_i, i = 1, 2, \dots, n$ .

**定理 4.2.2.** 上述插值问题解存在唯一.

证明. 证明相应的齐次插值问题解为 0 即可. 即设  $\bar{N}(x) \in NS_{2m-1}^t(\Delta)$  满足  $\bar{N}(x_i) = 0, i = 1, 2, \dots, n$ , 下证  $\bar{N}(x) \equiv 0$ . 考虑

$$\sigma(\bar{N}) = \int_a^b (\bar{N}^{(m)}(x))^2 dx = \int_a^b \bar{N}^{(m)} dx$$

□

### 4.3 三次样条插值与一般样条插值

## 4.4 样条逼近

## 4.5 拟插值方法



## Chapter 5

# 最佳一致逼近

### 5.1 赋范线性空间的最佳逼近

推论 5.1.1. 设  $M \subset X$  为  $X$  的有限维子空间, 则对任意  $x \in X$  有  $B_M(f) \neq \emptyset$ .

定理 5.1.2. 设  $M \subset X$  为严格凸赋范线性空间, 则对

例 5.1.3. 设  $X = \{x = (x_1, \cdots, x_n, \cdots) \mid \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0\}, \|x\| := \sup_n |x_n|$ , 设

$$M = \left\{ m \in X \mid \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m_n}{2^n} = 0 \right\}$$

则  $B_M(x) = \emptyset, \forall x \in X \setminus M$

## 5.2 代数多项式最佳一致逼近的表征

### 5.3 整体一致逼近、正线性算子定理

**定理 5.3.1** (Weierstrass 第一定理). 设  $f(x) \in C[a, b]$ , 则  $\forall \varepsilon > 0, \exists$  多项式  $P(x)$  使得  $\|f - P\|_{\infty} < \varepsilon$ .

## 5.4 最佳一致逼近的收敛阶

**定义 5.4.1.** 设  $f(x) \in C(I)$ , 定义  $\omega_f(\delta) = \sup_{|x-y| \leq \delta} |f(x) - f(y)|$ , 称作函数的连续模.

**命题 5.4.2.** 函数的连续模具有如下性质

- (1) 当  $\delta_1 \leq \delta_2$  时  $\omega_f(\delta_1) \leq \omega_f(\delta_2)$ .
- (2)  $\omega_f(\delta_1 + \delta_2) \leq \omega_f(\delta_1) + \omega_f(\delta_2)$ . 从而  $\omega_f(n\delta) \leq n\omega_f(\delta)$ .
- (3)  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega_f(\delta) = 0 \iff f$  是一致连续的.
- (4) 对任意  $\lambda > 0$ , 有  $\omega_f(\lambda\delta) \leq (\lambda + 1)\omega_f(\delta)$ .
- (5)  $f$  是  $\alpha$ -阶 Hölder 连续的  $\iff$  存在常数  $M > 0$  使得对任意  $\delta > 0$  有  $\omega_f(\delta) \leq M\delta^\alpha$ .

证明.

- (2) 对任意  $|x - y| \leq \delta_1 + \delta_2$ , 可以找到  $z$  使得  $|x - z| \leq \delta_1$  且  $|z - y| \leq \delta_2$ ,

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(z)| + |f(z) - f(y)| \leq \omega_f(\delta_1) + \omega_f(\delta_2).$$

右侧是与  $x, y$  无关的常数, 对左侧关于  $|x - y| \leq \delta$  取上确界即可.

(3)

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \omega_f(\delta) = 0 &\iff \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall \delta < \eta, \omega_f(\delta) < \varepsilon \\ &\iff \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall |x - y| < \eta, |f(x) - f(y)| < \varepsilon \iff f \text{ 一致连续.} \end{aligned}$$

(4)

$$\omega_f(\lambda\delta) \leq \omega_f(([\lambda] + 1)\delta) \leq ([\lambda] + 1)\omega_f(\delta) \leq (\lambda + 1)\omega_f(\delta).$$

- (5) 假设  $f$  是  $\alpha$ -阶 Hölder 连续的, 那么  $\sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}$  是有限数, 记为  $M$ , 则对任意  $x \neq y$  有  $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^\alpha$ , 则对任意  $|x - y| \leq \delta$  有  $|f(x) - f(y)| \leq M\delta^\alpha$ , 即  $\omega_f(\delta) \leq M\delta^\alpha$ .

假设存在常数  $M > 0$  使得对任意  $\delta > 0$  有  $\omega_f(\delta) \leq M\delta^\alpha$ , 那么

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq \frac{\omega_f(|x - y|)}{|x - y|^\alpha} \leq M \implies f \text{ 是 } \alpha\text{-阶 Hölder 连续的.}$$

□

## Chapter 6

# 最佳平方逼近

### 6.1 内积空间的最佳逼近

## 6.2 最佳平方逼近

### 6.3 正交多项式

# Chapter 7

## 习题

### 7.1 第九章

1. 请尝试利用差商作为插值多项式的首项系数的定义, 证明

$$[t_1, \dots, t_r]f = [t_1, \dots, t_r, t_{r+1}](t - t_{r+1})f.$$

证明. 设  $r-1$  次多项式  $p(t)$  是于  $[t_1, \dots, t_r]$  对函数  $f$  进行插值的插值多项式, 断言  $r$  次多项式  $(t - t_{r+1})p(t)$  是于  $[t_1, \dots, t_r, t_{r+1}]$  对函数  $(t - t_{r+1})f$  进行插值的插值多项式. 我们在  $t_1$  处进行比较, 假设  $t_1$  在原始的节点中出现  $l$  次, 下面讨论  $t_{r+1}$  是否是  $t_1$ .

- $t_{r+1} \neq t_1$ . 只需比较函数与插值多项式在  $t_1$  处从  $C^0$  到  $C^{l-1}$  阶是否一致

$$C_0 : (t_1 - t_{r+1})f(t_1) = (t_1 - t_{r+1})p(t_1)$$

$$C_1 : f(t_1) + (t_1 - t_{r+1})f'(t_1) = p(t_1) + (t_1 - t_{r+1})p'(t_1)$$

$$C_{l-1} : (l-1)f^{(l-2)}(t_1) + (t_1 - t_{r+1})f^{(l-1)}(t_1) = (l-1)p^{(l-2)}(t_1) + (t_1 - t_{r+1})p^{(l-1)}(t_1)$$

- $t_{r+1} = t_1$ . 需要比较函数与插值多项式在  $t_1$  处从  $C^0$  到  $C^l$  阶是否一致

$$C_0 : 0 = 0$$

$$C_1 : f(t_1) = p(t_1)$$

$$C_{l-1} : (l-1)f^{(l-2)}(t_1) = (l-1)p^{(l-2)}(t_1)$$

$$C_l : lf^{(l-1)}(t_1) = lp^{(l-1)}(t_1)$$

□

6. 证明

$$[t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+m}](t - x)_+^{m-1} = (-1)^m [t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+m}](x - t)_+^{m-1}$$

证明.

$$(t - x)_+^{m-1} - (-1)^m (x - t)_+^{m-1} = (t - x)^{m-1}((t - x)_+^0 + (x - t)_+^0) = (t - x)^{m-1}$$

□