偏微分方程 1

孙天阳

中国科学技术大学数学科学学院

tysun@mail.ustc.edu.cn

2025 年 9 月 20 日

序（2025 年 8 月 14 日）

该笔记最初作于 2020 年秋季学期上赵立丰老师的微分方程 1, 当时的我只学过代数学基础、解析几何、数学分析 A1、A2 和线性代数 A1, 没有系统接受过微分流形和黎曼几何的训练, 因此搞不清楚坐标变换, 更搞不明白球面上的拉普拉斯算子, 甚至还没搞懂积分换元公式. 即使以我目前的眼光回去看, 微分方程 1 里依旧有许多不严格、需要用更多理论才能解释的地方（主要在常微部分）.

本笔记分三章, 与赵老师的讲法一致, 分别为波动方程、扩散方程、调和方程. 微分方程 1 与微分方程 2 的主要区别在于微分方程 1 保持在经典解的框架下, 而在微分方程 2 中我们引入弱解.

微分方程 1 是博士生资格考试的科目之一, 这也是为什么我现在在看它（笑）.

目录

0.1 色散关系

分离变量法

使用分离变量法的前提条件是微分算子关于两个变量是解耦的（不必把时间看作一个特殊的变量）, 如果有初边值条件, 也需要是解耦的. 设研究的方程可以写成

$$(\partial_{\text{空}} + \partial_{\text{时}})f = 0$$

我们假设有变量分离形式的解 $f = A(r)T(t)$, 那么

$$\mathrm{d}_{\text{空}}A(r) = \lambda A(r), \quad \mathrm{d}_{\text{时}}T(t) = -\lambda T(t)$$

所以 $A(r)$ 和 $T(t)$ 分别是算子 $\mathrm{d}_{\text{空}}$ 和 $\mathrm{d}_{\text{时}}$ 的特征函数, 并且相应的特征值互为相反数. 则

$$f = \sum c_n A_n(r)T_n(t)$$

也是解. 以波动方程为例, 空间部分的特征函数为 $\mathrm{e}^{i\sqrt{\lambda}x}$ 或 $\mathrm{e}^{-i\sqrt{\lambda}x}$, 时间部分的特征函数为 $\mathrm{e}^{ia\sqrt{\lambda}x}$ 或 $\mathrm{e}^{-ia\sqrt{\lambda}x}$, 两两组合有四种可能, 其中 x 与 t 前系数的符号相同或相反决定了波传播的方向, 整体差的符号体现相位演化, 从实部来看没有区别. 最常见的约定是选取 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-kx)}$, 其中 $\omega > 0, k > 0, \omega = ak$. 后面我们称该式为色散关系, 现在可以看出它其实来自于要求 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ 和 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ 同属于一个特征值.

分离变量法让我们把偏微分的问题约化到常微分的问题.

傅里叶分析

数学中有一个一以贯之的思想就是用简单的东西去拼凑复杂的东西, 比如泰勒展开的原子是单项式 x^n, 傅里叶分析的原子是平面波 e^{ikx}, 除了这些之外我们还有许多特殊函数系. 那为什么傅里叶分析和平面波会出现在我们学习的这门课中呢？我想一个本质的原因在于我们这门课研究的方程是常系数线性偏微分方程, 其算子 L 与微分算子 ∂_x 和 ∂_t 是可交换的, 用量子力学的语言来说就是其算子与动量算子是对易的. 动量算子是厄密算子, 用泛函分析的语言来说就是自伴算子, 而根据自伴算子的谱理论（科大本科水平的泛函分析并不涉及）, 它有一组完备的正交基 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$, 因为 L 与动量算子对易, 二者有公共的特征向量, 可以验证 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-kx)}$ 就是 L 的特征向量. 正是常系数线性偏微分方程的形式, 它的空间平移不变性, 导致了它与动量算符对易, 导致傅里叶分析和平面波是适合用来研究它的工具. 如果上述论证没有说服你, 请允许我再举一个例子, 考虑氢原子的薛定谔方程

$$\left[-\frac{\hbar}{2m_e}\nabla^2 + V(r)\right]\psi(r) = E(r)$$

该方程的算子具有旋转不变性, 导致了它与角动量算符对易, 导致角动量算符的特征函数球谐函数是适合拿来研究氢原子的薛定谔方程的工具. 这两个例子是多么平行啊!

色散关系

如果上述论证也没有说服你, 那也没有关系, 因为这是用来说服我自己的. 我在学偏微分方程数值解的时候, 老师教我们, 给定一个常系数线性偏微分方程, 就拿 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-kx)}$ 去试探, 去得到是解的时候 ω 与 k 之间的关系, 这个关系就是色散关系, 它能告诉我们许多事情. 但为什么是 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-kx)}$? 我可以给出两个回答, 第一个就是分离变量法, 当你去算 $P(\partial_x)$ 的特征函数的时候, 常微分方程的知识告诉我们只要 0 不是重根那么特征函数就形如 e^{ikx}. 第二个回答就是上述关于傅里叶分析的讨论让我有信心相信平面波 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-kx)}$ 确实是适合研究常系数线性偏微分方程的原子.

Chapter 1 波动方程

本章我们研究波动方程

$$\Box u = u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$$

其中 $a > 0$ 是常数. 不管是理想弦的振动, 还是真空中电磁波的传播, 其服从的规律都是波动方程.

首先在这里我要介绍最基本的对微分方程问题的分类. 从空间区域的边界来看, 柯西问题研究的是没有边界的空间区域（如整个直线 $\mathbb{R}$ 或整个空间 $\mathbb{R}^n$）上的演化问题, 因此相应的只需要初始条件如初始位移 φ 和初始速度 ψ; 而初边值问题研究的是有边界的空间区域（如有限区间 $[0,1]$ 或某个区域 Ω）上的演化问题, 因此既需要初始条件, 也需要边界条件. 从问题是否含源来看, 齐次问题描述的是系统在没有外部影响下的自由演化, 方程的右边项和边界条件的值都为零. 非齐次问题描述的是系统在存在外部影响或非零边界约束下的受迫演化, 方程的右边项或边界条件的值不为零.

对于非齐次问题, 如非齐次的柯西问题,

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), \quad u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x)$$

可以通过线性将其拆解为一个齐次的柯西问题和一个初值为零的非齐次问题

$$v_{tt} - a^2 v_{xx} = 0, \quad v(x,0) = \varphi(x), \quad v_t(x,0) = \psi(x)$$

$$w_{tt} - a^2 w_{xx} = f(x,t), \quad w(x,0) = 0, \quad w_t(x,0) = 0$$

这样 $u = v + w$ 就是原方程的解. 根据以上分类与观察, 本章的结构如下, 首先讨论一维齐次波动方程的柯西问题, 然后是一维齐次波动方程的初边值问题, 然后是非齐次波动方程, 然后是高维波动方程的柯西问题. 最后我们给出波动方程的衰减估计与能量估计.

1.1 柯西问题

例 1.1.1. 利用线性变换

$$\xi = x + \lambda_1 y,$$
$$\eta = x + \lambda_2 y$$

将方程

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

变为下面形状

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

解.

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = 1, \frac{\partial \xi}{\partial y} = \lambda_1, \frac{\partial \eta}{\partial x} = 1, \frac{\partial \eta}{\partial y} = \lambda_2$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}$$
$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \lambda_1\frac{\partial u}{\partial \xi} + \lambda_2\frac{\partial u}{\partial \eta}$$
$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} = \lambda_1\frac{\partial}{\partial \xi} + \lambda_2\frac{\partial}{\partial \eta}$$

所以有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \lambda_1\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + (\lambda_1 + \lambda_2)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \lambda_2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \lambda_1^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\lambda_1\lambda_2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \lambda_2^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

代入得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(A + 2\lambda_1 B + \lambda_1^2 C) + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}2(A + (\lambda_1 + \lambda_2)B + \lambda_1\lambda_2 C) + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}(A + 2\lambda_2 B + \lambda_2^2 C) = 0$$

欲变成

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

只需令

$$A + 2\lambda_1 B + \lambda_1^2 C = 0, A + 2\lambda_2 B + \lambda_2^2 C = 0$$

□

具体到我们的情况, 对于无边界的自由振动, 我们可以解得其通解为

$$u(x,t) = F(x - at) + G(x + at) \tag{1.1}$$

其中 F 和 G 是任意两个可微的单变量函数, 它们的具体形式可由初始条件(**??**)和(**??**)解出, 最后得到达朗贝尔公式

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(s)\mathrm{d}s \tag{1.2}$$

注记. 值得一提的是, 达朗贝尔公式是能够描述 $t < 0$ 时的情况的.

1.2 半直线问题

考虑一维波动方程的半直线问题

$$\partial_t^2 u - a^2\partial_x^2 u = 0, \quad x > 0, t > 0, \quad u(x,0) = \varphi(x), \quad \partial_t u(x,0) = \psi(x), \quad u(0,t) = 0$$

可以看到除了初值的信息 φ 和 ψ, 我们还需要边值条件, 这里使用了 Dirichlet 边界条件作为例子. 一维半直线问题的解决思路是, 构造一个全直线问题, 使得它的解在 $x = 0$ 处自动满足半直线问题需要的边值条件, 这样取 $x \geqslant 0$ 的部分就自动得到了半直线问题的解. 回忆 D'Alembert 公式

$$u(0,t) = \frac{\varphi(-at) + \varphi(at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{-at}^{at} \psi(s)\mathrm{ds}$$

可以看到如果想让 $u(0,t) \equiv 0$, 只需要对 φ 和 ψ 做奇延拓.

如果是 Neumann 边值条件 $u_x(0,t) = 0$, 还是回忆 D'Alembert 公式, 关于 x 求导得到

$$u_x(x,t) = \frac{\varphi'(x-at) + \varphi'(x+at)}{2} + \frac{\psi(x+at) - \psi(x-at)}{2a}$$

$$u_x(0,t) = \frac{\varphi'(-at) + \varphi'(at)}{2} + \frac{\psi(at) - \psi(-at)}{2a}$$

可以看到如果想让 $u_x(0,t) \equiv 0$, 只需要对 φ 和 ψ 做偶延拓.

例 1.2.1. *求解如下一维波动方程的半直线问题, 其中 $k > 0$ 为常数*

$$\partial_t^2 u - a^2\partial_x^2 u = 0, \quad x > 0, t > 0, \quad u(x,0) = \varphi(x), \quad \partial_t u(x,0) = 0, \quad (u_x - ku_t)(0,t) = 0$$

解. 对 $\psi(x)$ 作零延拓, 记 $\varphi(x)$ 延拓后的函数为 $\Phi(x)$. 由 D'Alember 公式,

$$u(x,t) = \frac{\Phi(x+at) + \Phi(x-at)}{2}, \quad u_x(x,t) = \frac{\Phi'(x+at) + \Phi'(x-at)}{2}, \quad u_t(x,t) = \frac{a\Phi'(x+at) - a\Phi'(x-at)}{2}$$

$$(u_x - ku_t)(0,t) = 0 \Longrightarrow (ka+1)\Phi'(-at) = (ka-1)\Phi'(at), t > 0 \Longrightarrow \Phi'(x) = \frac{ka-1}{ka+1}\Phi'(-x), x < 0$$

$$\Longrightarrow \Phi(x) = \frac{1-ka}{ka+1}\Phi(-x) + C \Longrightarrow \Phi(0) = \frac{1-ka}{ka+1}\Phi(0) + C \Longrightarrow C = \frac{2ka}{ka+1}\varphi(0)$$

□

1.3 分离变量法

当我们使用分离变量法时, 我们总是将偏微分方程分解成几个常微分方程. 其中, 空间部分的方程, 连同其边界条件, 通常构成一个 Sturm-Liouville 问题. Sturm-Liouville 理论保证我们能找到一组完备且正交的本征函数基 $\{X_n(x)\}$. 完备性保证了任何初始条件 $u(x,0)=f(x)$ 都可以被表示为 $\sum c_n X_n(x)$. 由于解的叠加性和唯一性, 一旦我们用这个级数表示了初始条件, 并且让每一项随时间演化, 那么这个级数和 $u(x,t)=\sum c_n T_n(t) X_n(x)$ 就构成了该初始条件下的唯一解.

考虑边值问题

$$\begin{cases} y''(x)+(\lambda+q(x))y(x)=0 \quad 0<x<1 & (1.3a) \\ y(0)\cos\alpha - y'(0)\sin\alpha = 0 & (1.3b) \\ y(1)\cos\beta - y'(1)\sin\beta = 0 & (1.3c) \end{cases}$$

注记. *观察到我们之前讨论的是 $q(x)=0, \alpha=0, \beta=0$ 的特殊情况.*

若存在 λ_0 使得初值问题(1.3)有非零解 $y=\varphi_0(x)$, 则称 λ_0 为该方程的特征值, 称 φ_0 为从属于特征值 λ_0 的特征函数.

注记. *我希望能有一个方程的特征值与特征函数的一般的定义.*

考虑由(1.3a)和(1.3b)得到的初值问题

$$\begin{cases} y''(x)+(\lambda+q(x))y(x)=0 \quad 0<x<l & (1.4a) \\ y(0)=\sin\alpha & (1.4b) \\ y'(0)=\cos\alpha & (1.4c) \end{cases}$$

注记. *虽然(1.4a)和(1.4b)仅仅是满足初值条件(1.3b)的一组特解, 但是注意到其他的解都可以由(1.4)乘上一个常数得到, 因此我们并没有丧失一般性.*

初值问题(1.4)一定存在解 $\varphi(x,\lambda)$. 现在要考虑的问题是, 什么样的 λ 能够使得 $y=\varphi(x,\lambda)$ 还满足(1.3c)

$$\varphi(1,\lambda)\cos\beta - \varphi'(1,\lambda)\sin\beta = 0 \tag{1.5}$$

作极坐标换元, 令

$$\begin{cases} \varphi(x,\lambda)=\rho(x,\lambda)\sin(\theta(x,\lambda)) & (1.6a) \\ \varphi'(x,\lambda)=\rho(x,\lambda)\cos(\theta(x,\lambda)) & (1.6b) \end{cases}$$

则

$$\begin{cases} \rho(x,\lambda)=\sqrt{[\varphi(x,\lambda)]^2+[\varphi'(x,\lambda)]^2} & (1.7a) \\ \theta(x,\lambda)=\arctan\dfrac{\varphi(x,\lambda)}{\varphi'(x,\lambda)} & (1.7b) \end{cases}$$

$$\theta' = \cos^2\theta + (\lambda+q(x))\sin^2\theta$$

$$\varphi(1,\lambda)\cos\beta - \varphi'(1,\lambda)\sin\beta = 0$$

$\Rightarrow$

$$\theta(1,\lambda)=\beta+k\pi$$

$\Rightarrow$

$$\theta(0,\lambda)=\alpha+j\pi$$

引理 1.3.1. 对任意的 $k = 0, 1, \cdots$,

$$\theta(1, \lambda) = \beta + k\pi$$

有且只有一个根 λ_k, 并且当 $k \to \infty, \lambda_k \to \infty$

$$0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_k < \cdots \to \infty$$

引理 1.3.2. 对于每一个特征值 λ_n,(1.3)有且只有一个线性无关的特征函数.

证明. 假设 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 都是 λ_n 的特征函数, 则

$$\varphi(0)\cos\alpha - \psi'(0)\sin\alpha = 0$$

$$\psi(0)\cos\alpha - \psi'(0)\sin\alpha = 0$$

将 $\cos\alpha$ 和 $\sin\alpha$ 看成未知函数, 有非零解, 推出系数行列式为零, 也就是 Wronsky 行列式在 0 处的取值为零, 进而线性相关. □

令 $\varphi_n = \varphi(x, \lambda_n)$, 则有下面的引理

引理 1.3.3. 特征函数系 $\{\varphi_n(x) | n = 0, 1 \cdots\}$ 在区间 $[0, 1]$ 上组成一个正交系, 即

$$\int_0^1 \varphi_n(x)\varphi_k(x)dx = \begin{cases} \delta_k > 0 & n = k \\ 0 & n \neq k \end{cases}$$

证明. 当 $n \neq 0$ 时, 令 $f(x) = \begin{vmatrix} \varphi_n & \varphi_k \\ \varphi_n' & \varphi_k' \end{vmatrix}$, 则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f = \varphi_n(-\lambda_k - q)\varphi_k - \varphi_k(-\lambda_n - q)\varphi_n = (\lambda_n - \lambda_k)\varphi_n(x)\varphi_k(x)$$

从 0 到 1 积分,

$$f(1) - f(0) = (\lambda_n - \lambda_k)\int_0^1 dx$$

然而利用上一个引理中的证明的技巧可证 $f(0) = f(1) = 0$

又因为 $\lambda_n \neq \lambda_k$, 所以 $\int_0^1 \varphi_n(x)\varphi(_k)(x)dx = 0$ □

定理 1.3.4. 全体特征函数 $\{\varphi_k | k = 0, 1, \cdots\}$ 构成 $L^2([0, 1])$ 中的完备正交系.

例 1.3.5. 使用分离变量法求解以下问题, 其中 $0 \leqslant x \leqslant l, t \geqslant 0$.

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0.$$

解.

$$u(x,t) = X(x)T(t) \Longrightarrow X(x)T''(t) - a^2 X''(x)T(t) = 0 \Longrightarrow \frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \quad X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(l) = 0$$

- 当 $\lambda < 0$ 时, $X(x) = C_1 \mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 \mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}x}$, 满足边值条件的只有平凡解.
- 当 $\lambda = 0$ 时, $X(x) = C_1 x + C_2$, 满足边值条件的只有平凡解.
- 当 $\lambda > 0$ 时, $X(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x$. 由 $X(0) = 0$ 得到 $C_1 = 0$.

  由 $X(l) = 0$ 得到 $C_2 \sin\sqrt{\lambda}l = 0$, 要想得到非平凡解, 就必须

  $$\sqrt{\lambda}l = k\pi \Longrightarrow \lambda_k = (\frac{k\pi}{l})^2, \quad k = 1, 2, \cdots \Longrightarrow X_k(x) = \sin\frac{k\pi}{l}x, \quad k = 1, 2, \cdots$$

再考虑时间部分的方程, 相应求解得到

$$T_k(t) = A_k \cos\frac{ak\pi}{l}t + B_k \sin\frac{ak\pi}{l}t,$$

其中 A_k, B_k 是待确定的常数. 这样我们就得到了级数解

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x)T_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k \cos\frac{ak\pi}{l}t + B_k \sin\frac{ak\pi}{l}t\right)\sin\frac{k\pi}{l}x.$$

下面适当选择 A_k, B_k 以满足初值条件

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\frac{k\pi}{l}x = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \frac{ak\pi}{l}\sin\frac{k\pi}{l}x = \psi(x).$$

□

例 1.3.6. 使用分离变量法求解以下问题, 其中 $0 \leqslant x \leqslant l, t \geqslant 0$.

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad -u_x(0,t) + a_0 u(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) + a_l u(l,t) = 0.$$

解.

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad -X'(0) + a_0 X(0) = 0, \quad X'(l) + a_l X(l) = 0$$

代入发现只有平凡解也好, 说不希望指数型增长或线性增长的解也好, 我们只考虑 $\lambda > 0$ 的情况

$$X(x) = C\cos(\sqrt{\lambda}x) + D\sin(\sqrt{\lambda}x), \quad X'(x) = -C\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}x) + D\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}x)$$

由 $x = 0$ 的边值条件得 $-D\sqrt{\lambda} + a_0 C = 0$, 即 $C = (\sqrt{\lambda}D)/a_0$. 由 $x = l$ 的边值条件, 得

$$(a_0 + a_l)\cos\sqrt{\lambda}l + (\frac{a_0 a_l}{\sqrt{\lambda}} - \sqrt{\lambda})\sin\sqrt{\lambda}l = 0 \Longrightarrow \tan(\sqrt{\lambda}l) = \frac{(a_0 + a_l)\sqrt{\lambda}}{\lambda - a_0 a_l}$$

这是一个关于 λ 的超越方程, 由 SL 理论, 我们知道它一定有无穷多正根. 令该方程的解为 λ_n, 则

$$X_n(x)=\frac{\sqrt{\lambda_n}}{a_0}\cos(\sqrt{\lambda_n}x)+\sin(\sqrt{\lambda_n}x),\quad T(t)=A_n\cos(a\sqrt{\lambda_n}t)+B_n\sin(a\sqrt{\lambda_n}t)$$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos(a\sqrt{\lambda_N}t)+B_n\sin(a\sqrt{\lambda_n}t))X_n(x),\quad u(x,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,0)=\psi(x).$$

□

例 1.3.7. 使用分离变量法求解以下问题, 其中 $0\leqslant x\leqslant l, t\geqslant 0$.

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=f,\quad u(x,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,0)=\psi(x),\quad u(0,t)=0,\quad u(l,t)=0.$$

解. 得到满足边值条件的特征模态 $X_k(x)=\sin(k\pi x/l)$, 把 u,f,φ,ψ 全按这个基展开

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}T_k(t)\sin\frac{k\pi}{l}x,\quad f(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k(t)\sin\frac{k\pi}{l}x,\quad \varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k\sin\frac{k\pi}{l}x,\quad \psi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\psi_k\sin\frac{k\pi}{l}x$$

代入到相应的方程与初值条件中, 并比较系数, 可得到如下关于 $T_k(t)$ 的方程

$$T_k''(t)+a^2(\frac{k\pi}{l})^2T_k(t)=f_k(t),\quad T_k(0)=\varphi_k,\quad T_k'(0)=\psi_k$$

$$T_k(t)=\varphi_k\cos\left(\frac{ak\pi}{l}t\right)+\frac{l}{ak\pi}\psi_k\sin\left(\frac{ak\pi}{l}t\right)+\frac{l}{ak\pi}\int_0^t\sin\left(\frac{ak\pi}{l}(t-\tau)\right)f_k(\tau)\mathrm{d}\tau$$

□

例 1.3.8. 使用分离变量法求解以下问题, 其中 $0\leqslant x\leqslant l, t\geqslant 0$.

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=0,\quad u(x,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,0)=\psi(x),\quad u(0,t)=\mu_1(t),\quad u(l,t)=\mu_2(t).$$

解. 将非齐次边界转化成齐次边界, 然后可以用前面的方法求解

$$U(x,t)=u(x,t)-\left[\mu_1(t)+\frac{x}{l}\left(\mu_2(t)-\mu_1(t)\right)\right]$$

□

例 1.3.9 (P24,1-3-6)**.** 用分离变量法求下面问题的解

$$\begin{cases}u_{tt}+2bu_t=a^2u_{xx} & (1.8a)\\ u(0,t)=0 & (1.8b)\\ u(l,t)=0 & (1.8c)\\ u(x,0)=\frac{h}{l}x & (1.8d)\\ u_t(x,0)=0 & (1.8e)\end{cases}$$

解. 令

$$u(x,t)=X(x)T(t)$$

代入方程及边值条件, 得

$$\frac{T''+abT'}{a^2T}=\frac{X''}{X}=-\lambda$$
$$X(0)=X(l)=0$$

边值问题

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 & (1.9a) \\ X(0) = X(l) = 0 & (1.9b) \end{cases}$$

有特征值 $\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, k = 1, 2, \cdots$, 以及相应的特征函数

$$X_k(x) = \sin \frac{k\pi}{l} x, k = 1, 2, \cdots$$

将 λ_k 代入关于 t 的方程 $T''(t) + 2bT'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0$ 中, 得

$$T_k''(t) + 2bT_k'(t) + \left(\frac{k\pi a}{l}\right) T(t) = 0$$

该常系数线性齐次二阶 ODE 的特征方程是

$$\lambda^2 + 2b\lambda + \left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 = 0$$

解得

$$\lambda = -b \pm \sqrt{b^2 - \left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2}$$

当 $b > \frac{k\pi a}{l}$ 即 $k < \frac{bl}{\pi a}$ 时, 通解为

$$T_k(t) = \mathrm{e}^{-bt} \left(A_k \cosh \mu_k t + B_k \sinh \mu_k t\right),$$

其中 $\mu_k = \sqrt{b^2 - \left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2}$ □

1.4 非齐次方程

考虑强迫振动情形的初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t) & (1.10a) \\ u(x,0) = 0 & (1.10b) \\ u_t(x,0) = 0 & (1.10c) \end{cases}$$

由导出弦振动方程的过程可知, 自由项 $f(x,t)$ 表示时刻 t 时在位置 x 处单位质量所受的外力, 而 u_t 表示速度.

把时段 $[0,t]$（t appears here! 事实上写为 t_0 更好！）分成若干小的时段 $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$, 在每个小的时段 Δt_j 中,$f(x,t)$ 可以看作与 t 无关, 从而以 $f(x,t_j)$ 来表示. 在时段 Δt_j 中自由项所产生的速度改变量为 $f(x,t_j)\Delta t_j$. 把这个速度改变量看作是在时刻 $t = t_j$ 时的初始速度, 它所产生的震动可以由下面的齐次方程带非齐次初始条件的初值问题来描述：

$$\begin{cases} \tilde{W}_{tt} - a^2 \tilde{W}_{xx} = 0 \qquad t > t_j & (1.11a) \\ \tilde{W}(x,t_j) = 0 & (1.11b) \\ \tilde{W}_t(x,t_j) = f(x,t_j)\Delta t_j & (1.11c) \end{cases}$$

其解记为 $\tilde{W}(x,t;t_j,\Delta t_j)$. 按叠加原理, 自由项 $f(x,t)$ 所产生的总效果可以看成事无数个这种顺式作用所产生的效果的叠加. 这样, 定解问题的解 $u(x,t)$ 应表示成

$$u(x,t) = \lim_{\Delta t_j \to 0} \sum_{j=1}^{l} \tilde{W}(x,t;t_j,\Delta t_j) \tag{1.12}$$

注记. 上面的内容基本是我照抄书的, 但是课本在这里有一处容易让人发生误会的细节处理得不好. 上面我们绝不是得到了整个解 $u(x,t)$ 的全部表达式, 甚至也不是 $u(x,t)$ 在某个区间 $[0,T]$ 上的解的表达式, 而是应理解为 $u(x,t)$ 在特定的时刻 t 时的波形, 这个 t 就是我前面说写成 t_0 更好的那个 t. 原因如下：我之前说过, 达朗贝尔公式是能够描述 $t < 0$ 时的情况的, 按照我们上面的推导, 应该是每到一个时间 t_j, 都会有一个新的贡献 $\tilde{W}(x,t;t_j,\Delta t_j)$ 增添进来, 而在 $t < t_j$ 时,$\tilde{W}(x,t;t_j,\Delta t_j)$ 是不应该发挥作用的, 如若将 (1.12) 理解为对 $[0,t]$ 成立, 就不对了. 而因为达朗贝尔公式对于 $t < 0$ 是有意义的, 所以你硬要把右侧理解为是若干个函数的叠加, 然后对 $[0,t]$ 都有定义那也不是不可以, 但按这种方式得到的和函数并不是我们想要的解 $u(x,t)$, 只有一点处的值吻合罢了. 虽然说书上没把这里写清楚, 但是等到下面写出 u 的积分的表达式的时候还是很清晰的——t 不仅出现在了被积函数中, 还出现在了积分上限上, 这正意味着只有 $t_j < t$ 的 $\tilde{W}(x,t;t_j,\Delta t_j)$ 才能被允许发挥作用.

由于(1.11)为线性方程, 所以 $\tilde{W}$ 与 Δt_j 成正比, 如果记 $W(x,t;\tau)$ 为齐次方程的定解问题

$$\begin{cases} W_{tt} - a^2 W_{xx} = 0 \qquad t > \tau & (1.13a) \\ W(x,\tau) = 0 & (1.13b) \\ W_t(x,\tau) = f(x,\tau) & (1.13c) \end{cases}$$

的解, 则

$$\tilde{W}(x,t;t_j,\Delta t_j) = \Delta t_j W(x,t;t_j)$$

于是定解问题(1.10)的解可表示为

$$u(x,t) = \lim_{\Delta t_j \to 0} \sum_{j=1}^{l} W(x,t;t_j)\Delta t_j = \int_0^t W(x,t;\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1.14}$$

对每一个 τ, 为写出 $W(x,t,\tau)$ 的具体表达式, 在初值问题(1.13)中作变换 $t' = t - \tau$. 相应地,(1.13)化为

$$\begin{cases} W_{t't'} - a^2 W_{xx} = 0 \quad t' > 0 & (1.15a) \\ W(x,0) = 0 & (1.15b) \\ W_{t'} = f(x,\tau) & (1.15c) \end{cases}$$

的形式, 于是利用达朗贝尔公式, 就得其解为

$$W(x,t;\tau) = \frac{1}{2a}\int_{x-at'}^{x+at'} f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2a}\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi \tag{1.16}$$

再代入(1.14)就得到所考察的初值问题(1.10)的解为

$$u(x,t) = \frac{1}{2a}\int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau \tag{1.17}$$

例 1.4.1. 试用齐次化原理导出平面非齐次波动方程

$$u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy}) = f(x,y,t)$$

在齐次初始条件

$$\begin{cases} u(x,y,0) = 0 & (1.18a) \\ u_t(x,y,0) = 0 & (1.18b) \end{cases}$$

下的求解公式.

解. 先在这个情境下证明齐次化原理:

若 $W(x,y,t;\tau)$ 为

$$\begin{cases} W_{tt} = a^2(W_{xx} + W_{yy}) & (1.19a) \\ W(x,y,\tau;\tau) = 0 & (1.19b) \\ W_t(x,y,\tau;\tau) = f(x,y,\tau) & (1.19c) \end{cases}$$

的解, 则 $u(x,y,t) = \int_0^t W(x,y,t;\tau)\mathrm{d}\tau$ 即为

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + f(x,y,t) & (1.20a) \\ u(x,y,0) = 0 & (1.20b) \\ u_t(x,y,0) = 0 & (1.20c) \end{cases}$$

的解. 验证如下:

1. $u(x,y,0) = \int_0^0 W(x,t,t;\tau)\mathrm{d}\tau = 0$

2. $u_t(x,y,t) = W(x,y,t;t) + \int_0^t W_t(x,y,t;\tau)\mathrm{d}\tau = \int_0^t W_t(x,y,t;\tau)\mathrm{d}\tau$

   $u_t(x,y,0) = \int_0^0 W_t(x,y,t;\tau)\mathrm{d}\tau = 0$

3. $u_{tt}(x,y,t) = W_t(x,y,t;t) + \int_0^t W_{tt}(x,y,t;\tau)\mathrm{d}\tau$

   其中 $W_t(x,y,t;t) = f(x,y,t)$

   $\int_0^t W_{tt}\mathrm{d}\tau = \int_0^t a^2(W_{xx}+W_{yy})\mathrm{d}\tau = a^2(u_{xx}+u_{yy})$

   齐次化原理得证!

   由式子(**??**), 再结合时间平移, 我们有

$$W(x,y,t;\tau) = \frac{1}{2\pi a}\int_0^{a(t-\tau)}\int_0^{2\pi}\frac{f(x+r\cos\theta, y+r\sin\theta)}{\sqrt{(a(t-\tau)^2)-r^2}}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r \tag{1.21}$$

   进而

$$u(x,y,t) = \frac{1}{2\pi a}\int_0^t\int_0^{a(t-\tau)}\int_0^{2\pi}\frac{f(x+r\cos\theta, y+r\sin\theta)}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-r^2}}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r \tag{1.22}$$

□

例 1.4.2. *求解波动方程的初值问题*

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = t\sin x & (1.23\text{a}) \\ u(x,0) = 0 & (1.23\text{b}) \\ u_t(x,0) = \sin x & (1.23\text{c}) \end{cases}$$

解. 利用叠加原理, 题中初值问题可以分解为下面两个初值问题:

$$I\begin{cases} v_{tt} - v_{xx} = 0 & (1.24\text{a}) \\ v(x,0) = 0 & (1.24\text{b}) \\ v_t(x,0) = \sin x & (1.24\text{c}) \end{cases}$$

$$II\begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = t\sin x & (1.25\text{a}) \\ w(x,0) = 0 & (1.25\text{b}) \\ w_t(x,0) = 0 & (1.25\text{c}) \end{cases}$$

而且有

$$u = v + w$$

由 D'Alembert 公式,I 的解为

$$v(x,t) = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\sin\xi\mathrm{d}\xi = \sin x\sin t$$

为了解 II, 我们利用 Duhamel 原理,

$$w(x,t) = \int_0^t W(x,t;\tau)\mathrm{d}\tau$$

其中 $W(x,t;\tau)$ 时初值问题

$$\begin{cases} W_{tt} - W_{xx} = 0 & (1.26\text{a}) \\ W(x,\tau) = 0 & (1.26\text{b}) \\ W_t(x,\tau) = \tau\sin x & (1.26\text{c}) \end{cases}$$

的解. 在该初值问题中作变换 $t' = t - \tau$, 由 D'Alember 公式可得

$$W(x,t;\tau) = \frac{1}{2}\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} \tau \sin\xi \mathrm{d}\xi = \frac{\tau}{2}\left(\cos(x-t+\tau) - \cos(x+t-\tau)\right)$$

所以

$$w(x,t) = \int_0^t W(x,t;\tau)\mathrm{d}\tau = t\sin x - \sin x \sin t$$

故原初值问题的解为

$$u(x,t) = t\sin x.$$

$\square$

1.5 3 维柯西问题

考虑 3 维的齐次柯西问题

$$u_{tt}-a^2\Delta u=0,\quad u(x,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,0)=\psi(x)$$

在球坐标系下, 拉普拉斯算子的表达式为

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+\frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}=\partial_r^2 u+\frac{2}{r}\partial_r u+\frac{1}{r^2}\Delta_{S^2}u.$$

将函数 u 在半径为 r 的球面上进行积分

$$\tilde{u}(r,t)=\frac{1}{4\pi r^2}\int_{\partial B_r}u(x,t)\mathrm{d}S(x)\xlongequal{x=ry}\frac{1}{4\pi}\int_{\partial B_1}u(ry,t)\mathrm{d}S(y)$$

$$\partial_r\tilde{u}=\frac{1}{4\pi}\int_{\partial B_1}\nabla u(ry,t)\cdot y\mathrm{d}S(y)=\frac{1}{4\pi}\int_{\partial B_1}\partial_r u(ry,t)\mathrm{d}S(y)$$

所以将方程 $u_{tt}-a^2\Delta u=0$ 在半径为 r 的球面上积分得到

$$\partial_t^2\tilde{u}-a^2\partial_r^2\tilde{u}-\frac{2a^2}{r}\partial_r\tilde{u}=0$$

其中 $\Delta_{S^2}u$ 的项因为它是梯度的散度而 S^2 是无边流形所以由散度定理直接为零. 这样我们就得到一个一维的方程, 但我们还是不会解, 因为我们只会解形如 $\partial_t^2 u-a^2\partial_x^2 u=0$ 的方程. 因此我们试图通过变换把不想要的那一项搞没. 令 $v=r^{-\sigma}\tilde{u},\tilde{u}=r^\sigma v$, 则有

$$\partial_t^2\tilde{u}=r^\sigma\partial_t^2 v,\quad \partial_r\tilde{u}=\sigma r^{\sigma-1}v+r^\sigma\partial_r v,\quad \partial_r^2\tilde{u}=\sigma(\sigma-1)r^{\sigma-2}v+\sigma r^{\sigma-1}\partial_r v+\sigma r^{\sigma-1}\partial_r v+r^\sigma\partial_r^2 v$$

代入方程并整理得到

$$r^\sigma\partial_t^2 v-a^2\left[\sigma(\sigma+1)r^{\sigma-2}v+2(\sigma+1)r^{\sigma-1}\partial_r v+r^\sigma\partial_r^2 v\right]=0$$

观察到若令 $\sigma=-1$, 即 $v=r\tilde{u}$, 可同时消去 v 项和 $\partial_r v$ 项, 得到 $\partial_t^2 v-a^2\partial_r^2 v=0, r>0$. 因为 $v=r\tilde{u}$, 所以 $v(0,t)\equiv 0$, 这是一个 Dirichlet 边值的半直线问题, 根据前面的讨论该对其初值

$$v(r,0)=r\tilde{u}(r,0)=r\tilde{\varphi}(r)=:A(r),\quad v_t(r,0)=r\tilde{u}_t(r,0)=r\tilde{\psi}(r)=:B(r)$$

进行奇延拓. 然后由 D'Alembert 公式得到

$$v(r,t)=\frac{A(r+at)+A(r-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{r-at}^{r+at}B(s)\mathrm{d}s$$

$$u(0,t)=\lim_{r\to 0}\tilde{u}(r,t)=v_r(0,t)=A'(at)+\frac{B(at)}{a}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{t}{4\pi(at)^2}\int_{\partial B(0,at)}\varphi\mathrm{d}S\right)+\frac{t}{4\pi(at)^2}\int_{\partial B(0,at)}\psi\mathrm{d}S$$

一般的, 对任意的 $u(x_0,t)$, 由相同的过程或者考虑 $U(x,t)=u(x+x_0,t)$, 即可得到 Kirchhoff 公式

$$u(x,t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{4\pi a^2 t}\int_{\partial B(x_0,at)}\varphi\mathrm{d}S\right)+\frac{1}{4\pi a^2 t}\int_{\partial B(x_0,at)}\psi\mathrm{d}S$$

1.6 2 维柯西问题

考虑 2 维的齐次柯西问题

$$u_{tt}-a^2(u_{xx}+u_{yy})=0,\quad u(x,y,0)=\varphi(x,y),\quad u_t(x,y,0)=\psi(x,y)$$

想法是将二维的初值信息在 z 方向上做常值延拓, 这样得到的 3 维的齐次柯西问题

$$U_{tt}-a^2\Delta U=0,\quad U(x,y,z,0)=\varphi(x,y),\quad U_t(x,y,0)=\psi(x,y)$$

的解 U 在 z 方向上也必然是常值, $U(x,y,0,t)$ 就是 2 维问题的解. 由 Kirchhoff 公式

$$U(x,y,0,t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{4\pi a^2t}\int_{\partial B(p,at)}\varphi\mathrm{d}S\right)+\frac{1}{4\pi a^2t}\int_{\partial B(p,at)}\psi\mathrm{d}S$$

我们想将在二维球面上的积分写成它投影的二维圆盘上的积分, 只需要将二维球面使用二维圆盘进行参数化, 然后因为被积函数与 z 无关, 所以可以直接看成一个在二维圆盘上的函数的积分.

$$\int_{\partial\Sigma}\varphi\mathrm{d}S=2\int_{\Sigma^+}\varphi\mathrm{d}S,\quad \Sigma=\partial B(p,at),\quad \Omega=B(p,at)\cap\mathbb{R}^2$$

$$F^+\colon\Omega\longrightarrow\Sigma^+,\quad (x,y)\longmapsto(x,y,h(x,y)),\quad h=\sqrt{R^2-r^2},\quad r^2=|x-x_0|^2+|y-y_0|^2$$

$$F_x^+=(1,0,h_x),\quad F_y^+=(0,1,h_y),\quad g^+=I_2+\begin{pmatrix}h_x\\h_y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_x & h_y\end{pmatrix},\quad \det g^+=1+|\nabla h|^2$$

$$\int_{\Sigma^+}\varphi\mathrm{d}S=\int_\Omega\varphi(x,y,h(x,y))\sqrt{\det g^+}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_\Omega\varphi(x,y)\sqrt{1+|\nabla h|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_\Omega\varphi(x,y)\frac{R}{\sqrt{R^2-r^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$u(x_0,y_0,t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2\pi a}\int_\Omega\frac{\varphi}{\sqrt{a^2t^2-r^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)+\frac{1}{2\pi a}\int_\Omega\frac{\psi}{\sqrt{a^2t^2-r^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

例 1.6.1. 用降维法导出平面非齐次波动方程

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + f(x, y, t)$$

在齐次初始条件

$$\begin{cases} u(x, y, 0) = 0 & (1.27a) \\ u_t(x, y, 0) = 0 & (1.27b) \end{cases}$$

下的求解公式.

解. 唉！首先要用齐次化原理推导三维非齐次波动方程在齐次初始条件下的求解公式. 在这里我们不加验证地给出如下结果：若 $W(x, y, z, t; \tau)$ 是

$$\begin{cases} W_{tt} = a^2(W_{xx} + W_{yy} + W_{zz}) & (1.28a) \\ W(x, y, z, t; \tau) = 0 & (1.28b) \\ W_t(x, y, z, t; \tau) = f(x, y, z, \tau) & (1.28c) \end{cases}$$

的解, 那么 $u(x, y, z, t) = \int_0^t W(x, y, z, t; \tau)\mathrm{d}\tau$ 就是

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + f(x, y, z, t) & (1.29a) \\ u(x, y, z, 0) = 0 & (1.29b) \\ u_t(x, y, z, 0) = 0 & (1.29c) \end{cases}$$

的解.

根据泊松公式, 有

$$w(x, y, z, t; \tau) = \frac{1}{4\pi a^2(t-\tau)} \iint_{\partial B(p, a(t-\tau))} f(\xi, \eta, \zeta, \tau)\mathrm{d}S \tag{1.30}$$

因此

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^t \frac{1}{t-\tau} \iint_{\partial B(p, a(t-\tau))} f(\xi, \eta, \zeta, \tau)\mathrm{d}S\mathrm{d}\tau \tag{1.31}$$

由于 u 与 z 无关,f 与 ζ 无关, 所以我们有

$$u(x, y, t) = \frac{2}{4\pi a^2} \int_0^t \frac{1}{t-\tau} \iint_{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2 \leqslant a^2(t-\tau)^2} f(\xi, \eta, \tau) \frac{a(t-\tau)}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - (\xi-x)^2 - (\eta-y)^2}}\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\tau \tag{1.32}$$

$$= \frac{1}{2\pi a} \int_0^t \iint_{r^2 \leqslant a^2(t-\tau)^2} \frac{f(x + r\cos\theta, y + r\sin\theta, \tau)}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - r^2}} r\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\tau \tag{1.33}$$

$$= \frac{1}{2\pi a} \int_0^t \int_0^{a(t-\tau)} \int_0^{2\pi} \frac{f(x + r\cos\theta, y + r\sin\theta, \tau)}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - r^2}} r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\tau \tag{1.34}$$

□

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - a^2 \Delta u = f & (1.35a) \\ u(x, 0) = \varphi & (1.35b) \\ \partial_t u(x, 0) = \psi(x) & (1.35c) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - a^2 \Delta u = f & (1.36a) \\ u(x,0) = 0 & (1.36b) \\ \partial_t u(x,0) = 0 & (1.36c) \end{cases}$$

令

$$u(x,t) = \int_0^t W(x,t,\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1.37}$$

其中

$$\begin{cases} \partial_t^2 W - a^2 \Delta W = - & (1.38a) \\ & (1.38b) \end{cases}$$

令 $\tilde{t} = t - \tau$,$\tilde{W}(x,\tilde{t}) = W(x,\tilde{t}+\tau)$

$$\begin{cases} \partial_t^2 \tilde{W} - a^2 \Delta \tilde{W} = 0 & (1.39a) \\ \tilde{W}(x,0) = 0 & (1.39b) \\ \partial_{\tilde{t}} \tilde{W}(x,0) = f(x,\tau) & (1.39c) \end{cases}$$

$$\tilde{W}(x,\tilde{t}) = \frac{1}{4\pi a^2 \tilde{t}} \int_{\partial B(x_0,at)} f(\sigma,\tau)\mathrm{d}\sigma \tag{1.40}$$

$$W(x,t) = \tilde{W}(x,t-\tau) = \frac{1}{4\pi a^2 (t-\tau)} \int_{\partial B(x_0,at)} f(\sigma,\tau)\mathrm{d}\sigma \tag{1.41}$$

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^t \frac{1}{t-\tau} \int_{\partial B(x_0,at)} f(\sigma,\tau)\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\tau \tag{1.42}$$

$$\frac{1}{4\pi} \int_{B(x_0,at)} \frac{f(\sigma,\tau)}{t-\tau}\mathrm{d}V \tag{1.43}$$

1.7 衰减估计

仅在 $a=1$ 的情况下进行讨论.

$$u(x,t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{4\pi t}\int_{\partial B(x,t)}\varphi(\sigma)\mathrm{d}\sigma\right)+\frac{1}{4\pi t}\int_{\partial B(x,t)}\psi(\sigma)\mathrm{d}\sigma$$

命题 1.7.1.

$$|u(x,t)|\leqslant\frac{C}{t}\tag{1.44}$$

证明. 我们断言, 要想证明上述命题, 只需要证明

$$|u(0,1)|\leqslant C\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla\psi(x)|\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^3}|\psi(x)|\mathrm{d}x\right)\tag{1.45}$$

下面分两步走, 第一步在假定(1.45)正确的前提下推导(1.44), 第二步证明(1.45)

1. 令

   $$v(x,t;\lambda,x_0)=u\left(\frac{x+x_0}{\lambda},\frac{t}{\lambda}\right)$$

   特别地有

   $$v(0,1)=u\left(\frac{x_0}{\lambda},\frac{1}{\lambda}\right)$$

   v 满足

   $$\begin{cases}v_{tt}-a^2\Delta v=0\\ v(x,0)=u\left(\dfrac{x+x_0}{\lambda},0\right)=\varphi\left(\dfrac{x+x_0}{\lambda}\right)=0\\ v_t(x,0)=\dfrac{1}{\lambda}\psi\left(\dfrac{x+x_0}{\lambda}\right)\end{cases}$$

   由(1.45)有,

   $$\begin{aligned}|v(0,1)|&\leqslant C\left(\int_{\mathbb{R}^3}\left|\frac{1}{\lambda}\nabla\psi\left(\frac{x+x_0}{\lambda}\right)\right|\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{\lambda}\left|\psi(x)\right|\mathrm{d}x\right)\\&=C\left(\int_{\mathbb{R}^3}\left|\frac{1}{\lambda^2}(\nabla\psi)\left(\frac{x+x_0}{\lambda}\right)\right|\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{\lambda}\left|\psi(x)\right|\mathrm{d}x\right)\\&\xlongequal{y=\frac{x+x_0}{\lambda}}C\left(\lambda\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla\psi(y)|\mathrm{d}y+\lambda^2\int_{\mathbb{R}^3}|\psi(y)|\mathrm{d}y\right)\end{aligned}$$

   取 $\lambda=\dfrac{1}{t_0},x_0=\dfrac{y_0}{t_0}$
   由任意性得证.

2. $$u(0,1)=\frac{1}{4\pi}\int_{\partial B(0,1)}\psi(x)\mathrm{d}S(x)$$

   接下来做一些虽然错误但具有启发性的计算, 我们的目的是将上面关于 ψ 的曲面积分写成关于 ψ 和 $\nabla\psi$ 的体积分, 我们的工具是散度定理.

   $$\int_{B(0,1)}\mathrm{div}\left(\psi(x)\frac{\vec{x}}{|x|}\right)\mathrm{d}x=\int_{\partial B(0,1)}\psi(x)\frac{\vec{x}}{|x|}\cdot\vec{x}\mathrm{d}S(x)=\int_{\partial B(0,1)}\psi(x)\mathrm{d}S(x)$$

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{B(0,1)} \operatorname{div}\left(\psi(x)\frac{\vec{x}}{|x|}\right)\mathrm{d}x\right| &\leqslant \int_{B(0,1)} \left|\nabla\psi(x)\cdot\frac{\vec{x}}{|x|}\right| + \left|\left(\nabla\cdot\frac{\vec{x}}{|x|}\right)\psi(x)\right|\mathrm{d}x \\
&= \int_{B(0,1)} \left|\nabla\psi(x)\cdot\frac{\vec{x}}{|x|}\right| + \left|\frac{n-1}{|x|}\psi(x)\right|\mathrm{d}x \\
&\leqslant C\int_{B(0,1)} |\nabla\psi(x)| + |\psi(x)|\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

上面的计算存在的问题是

(a) $\dfrac{\vec{x}}{|x|}$ 在原点处是没有定义的；

(b) $\dfrac{n-1}{|x|}$ 在原点附近是爆掉.

该如何补救呢？这需要我们认识到 $\dfrac{\vec{x}}{|x|}$ 在上面的计算中究竟发挥了怎样的作用. 我们实际上只利用了, 在 $\partial B(0,1)$ 上 $\psi(x)\dfrac{\vec{x}}{|x|}$ 与单位外法向 $\vec{x}$ 的点乘正是 $\psi(x)$. 我们希望在保留这点好处的同时, 摒弃掉 $\dfrac{\vec{x}}{|x|}$ 在原点附近的不好.

我们还需要认识到, 散度定理其实是一件非常神奇的事情, 它告诉我们, 只要两个向量场在有界区域的边界附近的值一致, 那么不管它们在区域内部的值多么不同, 它们的散度在整个区域内部的积分的值都相等. 这种只依赖于边界附近的值的特性, 促使我们选择一个函数, 它在 $\partial B(0,1)$ 附近和 $\dfrac{\vec{x}}{|x|}$ 取值完全相同, 并且在内部尤其原点处比 $\dfrac{\vec{x}}{|x|}$ 温和得多. 用这样的函数代替 $\dfrac{\vec{x}}{|x|}$ 进行上面的计算, 我们就继承了好的地方, 摒弃了坏的地方.

令 $\chi(\rho) \in C^\infty((\frac{1}{2},2)), \xi \equiv 1 \quad near \quad \rho = 1$

$$
\begin{aligned}
&\int_{|x|\leqslant 1} \operatorname{div}\left(\chi(x)\psi(x)\frac{x}{|x|}\right)\mathrm{d}x \\
=&\int_{S^2} \chi(x)\psi(x)\frac{x}{|x|}\cdot x\mathrm{d}S \\
=&\int_{S^2} \psi(x)\mathrm{d}S
\end{aligned}
\tag{1.46}
$$

故

$$
\begin{aligned}
|u(0,1)| &\leqslant \frac{1}{4\pi}\int_{|x|\leqslant 1} |\operatorname{div}\left(\chi(x)\psi(x)\frac{x}{|x|}\right)|\mathrm{d}x \\
&\leqslant C\left(\int |\psi(x)|\mathrm{d}x + \int |\nabla\psi(x)|\mathrm{d}x\right)
\end{aligned}
\tag{1.47}
$$

□

$$
u = \frac{1}{2\pi a}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^{at}\int_0^{2\pi} \frac{\varphi(x+r\cos\theta, y+r\sin\theta)}{\sqrt{a^2t^2-r^2}} r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r + \int_0^{at}\int_0^{2\pi} \frac{\psi(x+r\cos\theta, y+r\sin\theta)}{\sqrt{a^2t^2-r^2}} r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\right]
$$

由于 φ, ψ 都具有紧支集, 那么对于任意的 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, 存在 $R_{(x_0,y_0)}$, 使得 $\mathrm{supp}\varphi \subset B(x_0, y_0, R_{(x_0,y_0)}), \mathrm{supp}\psi$
$B(x_0, y_0, R_{(x_0,y_0)})$

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_0^{at}\int_0^{2\pi}\frac{\psi(x_0+r\cos\theta,y_0+r\sin\theta)}{\sqrt{a^2t^2-r^2}}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\right| \\
&\xlongequal{at\geqslant R(x_0,y_0)\text{时}}\left|\int_0^{R(x_0,y_0)}\int_0^{2\pi}\frac{\psi(x_0+r\cos\theta,y_0+r\sin\theta)}{\sqrt{a^2t^2-r^2}}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\right| \\
&\leqslant\int_0^{R(x_0,y_0)}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\psi(x_0+r\cos\theta,y_0+r\sin\theta)}{\sqrt{a^2t^2-r^2}}r\right|\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r \\
&\leqslant\int_0^{R(x_0,y_0)}\int_0^{2\pi}M\frac{r}{\sqrt{a^2t^2-r^2}}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r \\
&=2\pi M\int_0^{R(x_0,y_0)}\frac{r}{\sqrt{a^2t^2-r^2}}\mathrm{d}r \\
&\leqslant 2\pi M\int_0^{R(x_0,y_0)}\frac{R(x_0,y_0)}{\sqrt{a^2t^2-R^2(x_0,y_0)}}\mathrm{d}r \\
&=\frac{2\pi MR^2(x_0,y_0)}{\sqrt{a^2t^2-R^2(x_0,y_0)}} \\
&\sim\frac{1}{t}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^{at}\int_0^{2\pi}\frac{\varphi(x_0+r\cos\theta,y_0+r\sin\theta)}{\sqrt{a^2t^2-r^2}}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\right| \\
&\xlongequal{at\geqslant R(x_0,y_0)\text{时}}\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^{R(x_0,y_0)}\int_0^{2\pi}\frac{\varphi(x_0+r\cos\theta,y_0+r\sin\theta)}{\sqrt{a^2t^2-r^2}}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\right| \\
&=\left|\int_0^{R(x_0,y_0)}\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{\varphi(x_0+r\cos\theta,y_0+r\sin\theta)}{(a^2t^2-r^2)^{\frac{3}{2}}}2a^2tr\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\right| \\
&\leqslant a^2\int_0^{R(x_0,y_0)}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\varphi(x_0+r\cos\theta,y_0+r\sin\theta)}{(a^2t^2-r^2)^{\frac{3}{2}}}tr\right|\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r \\
&\leqslant a^2\int_0^{R(x_0,y_0)}\int_0^{2\pi}M\frac{tr}{(a^2t^2-r^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r \\
&=2\pi Ma^2\int_0^{R(x_0,y_0)}\frac{tr}{(a^2t^2-r^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}r \\
&\leqslant 2\pi Ma^2\int_0^{R(x_0,y_0)}\frac{tR(x_0,y_0)}{(a^2t^2-R^2(x_0,y_0))^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}r \\
&=\frac{2\pi Ma^2R^2(x_0,y_0)t}{(a^2t^2-R^2(x_0,y_0))^{\frac{3}{2}}} \\
&\sim\frac{1}{t^2}
\end{aligned}
$$

注记. 上面的估计是逐点的，不是一致的，可以证明以 $t^{-\frac{1}{2}}$ 的速度一致地衰减.

1.8 能量方法

考虑齐次的波动方程 $u_{tt}-\Delta u=0$, 两边同乘 u_t 得到 $u_t u_{tt}-u_t\Delta u=0$, 整理得到

$$u_t u_{tt}=\frac{1}{2}\partial_t u_t^2,\quad u_t\Delta u=\sum_{i=1}^{3}u_t u_{x_i x_i}=\sum_{i=1}^{3}[\partial_{x_i}(u_t u_{x_i})-u_{x_i t}u_{x_i}]=\sum_{i=1}^{3}[\partial_{x_i}(u_t u_{x_i})-\frac{1}{2}\partial_t u_{x_i}^2]$$

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{2}\partial_t u_{x_i}^2=\frac{1}{2}\partial_t\sum_{i=1}^{3}u_{x_i}^2=\frac{1}{2}\partial_t|\nabla u|^2,\quad \sum_{i=1}^{3}\partial_{x_i}(u_t u_{x_i})=\mathrm{div}(u_t u_{x_1},u_t u_{x_2},u_t u_{x_3})=\mathrm{div}(u_t\nabla u)$$

则有

$$\partial_t\left(\frac{1}{2}u_t^2+\frac{1}{2}|\nabla u|^2\right)-\mathrm{div}(u_t\nabla u)=0$$

记能量密度

$$e_u=\frac{1}{2}u_t^2+\frac{1}{2}|\nabla u|^2$$

$$\partial_t e_u-\mathrm{div}(u_t\nabla u)=0 \tag{1.48}$$

Case1:$\mathbb{R}^3$

将(1.48)在 $\mathbb{R}^3$ 上进行积分, 得到

$$\int_{\mathbb{R}^3}\partial_t e_u\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{div}(u_t\nabla u)\mathrm{d}x=0$$

$$\partial_t\int_{\mathbb{R}^3}e(u)\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{div}(u_t\nabla u)\mathrm{d}x=0 \tag{1.49}$$

由散度定理

$$\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{div}\left(u_t\nabla u\right)\mathrm{d}x=\int_{\emptyset}u_t\left(\nabla u\cdot\vec{n}\right)\mathrm{d}S=0$$

因此有

$$\partial_t\int_{\mathbb{R}^3}e(u)\mathrm{d}x=0 \tag{1.50}$$

记

$$E(t)=\int_{\mathbb{R}^3}e(u)\mathrm{d}x \tag{1.51}$$

则由(1.50)有

$$E(t)=E(0)=\int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{1}{2}\psi^2+\frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2\right)\mathrm{d}x \tag{1.52}$$

Case2:Ω

$$\begin{cases} u_{tt}-\Delta u=0 & (1.53\text{a})\\ u(x,0)=\varphi(x) & (1.53\text{b})\\ u_t(x,0)=\psi(x) & (1.53\text{c})\\ u(x,t)\Big|_{\partial\Omega,\forall t}=0 & (1.53\text{d})\end{cases}$$

将(1.48)在 Ω 上进行积分, 得到

$$\int_\Omega \partial_t e_u \mathrm{d}x - \int_\Omega \mathrm{div}(u_t \nabla u)\mathrm{d}x = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega e_u \mathrm{d}x - \int_\Omega \mathrm{div}(u_t \nabla u)\mathrm{d}x = 0$$

记

$$E_u(t) = \int_\Omega e_u(x,t)\mathrm{d}x$$

由散度定理得

$$\int_\Omega \mathrm{div}(u_t \nabla u)\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} u_t(\nabla u \cdot \vec{n})\mathrm{d}S$$

由已知条件,$u(x,t)\Big|_{\partial\Omega,\forall t} = 0$, 也就是任意选定 $x_0 \in \partial\Omega$,$u(x_0,t)$ 在 t 的方向上取值恒为常值 0, 因此关于 t 求偏导当然为零, 即 $u_t(x,t)\Big|_{\partial\Omega,\forall t} = 0$. 又由于 $\nabla u \cdot \vec{n}$ 是有界量, 所以上式为零, 进而

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_u(t) = 0$$

因此

$$E_u(t) = E_u(0) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2}\psi^2 + \frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2\right)\mathrm{d}x$$

注记. 稍微总结一下上面两种情况就是, 当非齐次项为零的时候, 如果我们考虑 $\mathbb{R}^3$ 内的能量, 那么它是守恒的; 如果我们考虑某个开集 Ω 内的能量, 若 $u(x,t)$ 限制在 $\partial\Omega$ 上恒为零, 那么能量也是守恒的.

利用能量守恒定律证明解的唯一性

定理 1.8.1. *波动方程初边值问题*

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = f \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x) \\ u\big|_{\partial\Omega\times[0,+\infty)} = 0 \end{cases}$$

的解存在则唯一.

证明. 设 u_1, u_2 是两个解, 令 $w = u_1 - u_2$, 则

$$\begin{cases} w_{tt} - \Delta w = 0 \\ w(x,0) = 0 \\ w_t(x,0) = 0 \\ w(x,t)\Big|_{\partial\Omega,\forall t} = 0 \end{cases}$$

由能量守恒定律, 有

$$E_w(t) = E_w(0) = 0$$

这推出

$$w_t = 0, w_{x_i} = 0$$

所以有

$$w(x,t) = w(x,0) = 0$$

即

$$u_1 \equiv u_2.$$

□

$E_u(t)$ 的估计

考虑非齐次的波方程

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = f & (1.54a) \\ u(x,0) = \varphi(x) & (1.54b) \\ u_t(x,0) = \psi(x) & (1.54c) \\ u\big|_{\partial\Omega\times[0,+\infty)} = 0 & (1.54d) \end{cases}$$

在(1.54a)两边同乘 u_t, 可得

$$\partial_t\left(\frac{1}{2}u_t^2 + \frac{1}{2}|\nabla u|^2\right) - \mathrm{div}(u_t\nabla u) = fu_t$$

将上式在 Ω 上积分, 得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_u(t) = \int_\Omega fu_t\mathrm{d}x \leqslant \int_\Omega \frac{1}{2}\left(f^2 + u_t^2\right)\mathrm{d}x \leqslant E_u(t) + \frac{1}{2}\int_\Omega f^2(x,t)\mathrm{d}x$$

即

$$E_u'(t) - E_u(t) \leqslant \frac{1}{2}\int_\Omega f^2(x,t)\mathrm{d}x$$

左右同乘 e^{-t}, 得到

$$\left(E_u(t)\mathrm{e}^{-t}\right)' \leqslant \left(\frac{1}{2}\int_\Omega f^2(x,t)\mathrm{d}x\right)\mathrm{e}^{-t}$$

两边从 0 到 t 积分得,

$$E_u(t)\mathrm{e}^{-t} - E_u(0) \leqslant \int_0^t\left(\frac{1}{2}\int_\Omega f^2(x,s)\mathrm{d}x\right)\mathrm{e}^{-s}\mathrm{d}s$$

移项整理得

$$\begin{aligned} E_u(t) \leqslant& \mathrm{e}^t\left[E_u(0) + \int_0^t\left(\frac{1}{2}\int_\Omega f^2(x,s)\mathrm{d}x\right)\mathrm{e}^{-s}\mathrm{d}s\right] \\ \leqslant& \mathrm{e}^t\left[E_u(0) + \int_0^t\left(\frac{1}{2}\int_\Omega f^2(x,s)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}s\right] \qquad \mathrm{e}^{-s} < 1, 0 < s < t \\ \leqslant& \mathrm{e}^T\left[E_u(0) + \int_0^T\left(\frac{1}{2}\int_\Omega f^2(x,s)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}s\right] \\ =& \mathrm{e}^T\left(E_u(0) + \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega f^2(x,s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s\right) \\ =& \mathrm{e}^T\left(E_u(0) + \frac{1}{2}\|f\|^2_{L^2(\Omega\times[0,T])}\right) \\ \leqslant& \mathrm{e}^T\left(E_u(0) + \|f\|^2_{L^2(\Omega\times[0,T])}\right) \end{aligned}$$

$\int_\Omega u^2 \mathrm{d}x$ 的估计

设

$$E_0(t)=\int_\Omega u^2 \mathrm{d}x$$

则

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_0(t)=&\int_\Omega 2uu_t \mathrm{d}x\\ \leqslant&\int_\Omega u^2\mathrm{d}x+\int_\Omega u_t^2\mathrm{d}x\\ \leqslant&E_0(t)+E_u(t)\\ \leqslant&E_0(t)+\mathrm{e}^T\left(E_u(0)+\|f\|^2_{L^2(\Omega\times[0,T])}\right)\end{aligned}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_0(t)-E_0(t)\leqslant \mathrm{e}^T\left(E_u(0)+\|f\|^2_{L^2(\Omega\times[0,T])}\right)$$

注意到上式右侧已经是一个与 t 无关的常数, 记为 C.

两侧同乘 e^{-t}, 得到

$$\left(E_0(t)\mathrm{e}^{-t}\right)'\leqslant C\mathrm{e}^{-t}$$

从 0 到 t 进行积分, 得

$$E_0(t)\mathrm{e}^{-t}-E_0(0)\leqslant C\int_0^t \mathrm{e}^{-s}\mathrm{d}s$$

移项整理得

$$\begin{aligned}E_0(t)\leqslant&\mathrm{e}^t\left(E_0(0)+C\int_0^t \mathrm{e}^{-s}\mathrm{d}s\right)\\ \leqslant&\mathrm{e}^t\left(E_0(0)+C\right)\\ \leqslant&\mathrm{e}^T\left[E_0(0)+\mathrm{e}^T\left(E(u(0))+\|f\|^2_{L^2(\Omega\times[0,T])}\right)\right]\\ \leqslant&\mathrm{e}^{2T}\left(E_0(0)+E(u(0))+\|f\|^2_{L^2(\Omega\times[0,T])}\right)\end{aligned}$$

利用能量估计证明解的稳定性

定理 1.8.2. *波动方程(**??**)的解 $u(x,t)$ 在下述意义下关于初值 φ,ψ 和非齐次项 f 是稳定的.*

对 $\forall\varepsilon>0$,$\exists\eta>0$, 只要 $\varphi_1,\varphi_2,\psi_1,\psi_2,f_1,f_2$ 满足

$$\|\varphi_1-\varphi_2\|_{L^2(\Omega)}\leqslant\eta,\|\psi_1-\psi_2\|_{L^2(\Omega)}\leqslant\eta$$

$$\|\nabla\varphi_1-\nabla\varphi_2\|\leqslant\eta,\|f_1-f_2\|_{L^2((0,T)\times\Omega)}\leqslant\eta$$

则以 φ_1,ψ_1 为初值,f_1 为非齐次项的解 u_1 和以 φ_2,ψ_2 为初值,f_2 为非齐次项的解 u_2 的差在 $0\leqslant t\leqslant T$ 上满足

$$\|u_1-u_2\|_{L^2(\Omega)}\leqslant\varepsilon,\|\nabla u_1-\nabla u_2\|_{L^2(\Omega)}\leqslant\varepsilon$$

$$\|\partial_t u_1-\partial_t u_2\|_{L^2(\Omega)}\leqslant\varepsilon$$

证明. 令 $w = u_1 - u_2$, 则

$$\begin{cases} w_{tt} - \Delta w = f_1 - f_2 & (1.55a) \\ w(x,0) = \varphi_1 - \varphi_2 & (1.55b) \\ \partial_t w(x,0) = \psi_1(x) - \psi_2(x) & (1.55c) \\ w(x,0)|_{\partial\Omega} = 0 & (1.55d) \end{cases}$$

由能量估计,

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega w^2 \mathrm{d}x + \int_\Omega \frac{1}{2}w_t^2 + \frac{1}{2}|\nabla w|^2 \mathrm{d}x \\
\leqslant & C_T \left(\int_\Omega w^2(x,0)\mathrm{d}x + \int_\Omega \frac{1}{2}w_t^2(x,0) + \frac{1}{2}|\nabla w(x,0)|^2 \mathrm{d}x + \|f\|^2_{L^2(\Omega\times[0,T])} \right) \\
= & C_T \left(\int_\Omega (\varphi_1 - \varphi_2)^2 \mathrm{d}x + \int \left(\frac{1}{2}(\psi_1 - \psi_2)^2 + \frac{1}{2}|\nabla\varphi_1 - \nabla\varphi_2|^2 \right) \mathrm{d}x + \|f_1 - f_2\|^2_{L^2(\Omega\times[0,T])} \right) \\
\leqslant & C_T \left(\eta^2 + \frac{1}{2}\eta^2 + \frac{1}{2}\eta^2 + \eta^2 \right) \\
\leqslant & \varepsilon
\end{aligned}$$

□

接下来要做的事情用一句话概括就是, 初态具有的能量等于末态具有的能量加上过程中流失的能量. 恕在下暂时画不出来锥台的图. 我们记锥台的底面为 B, 锥台的顶为 T, 锥台的侧面为 K.

$$u_{tt} - \Delta u = 0$$

$$u_t u_{tt} - u_t \Delta u = 0$$

将上式在锥台内进行体积分, 注意, 锥台是三维空间加上一维时间总共四维空间中的一个几何体.

$$\int_{\text{锥台}} u_t u_{tt} - u_t \Delta u \mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0$$

如前变形得

$$\int_{\text{锥台}} \partial_t e(u) - \operatorname{div}(u_t \nabla u)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0$$

$$\int_{\text{锥台}} \operatorname{div}_{t,x}(e(u), -u_t\nabla u) = 0$$

由散度定理得

$$\int_{B\cup T\cup K} (e(u), -u_t\nabla u)\cdot \vec{n}\mathrm{d}S = 0$$

易知 B 的单位外法向是 $(-1,0,0,0)$,T 的单位外法向是 $(1,0,0,0)$, 所以有

$$\int_B -e(u)(x,0)\mathrm{d}x + \int_T e(u)(x,t)\mathrm{d}x + \int_K (e(u), -u_t\nabla u)\cdot\vec{n}\mathrm{d}S = 0$$

侧面的表达式为

$$\varphi(x,t) = -|t-t_0|^2 + |x-x_0|^2$$

那么单位外法向为

$$\vec{n}=\frac{\nabla_{x,t}\varphi}{|\nabla_{x,t}\varphi|}=\pm\left(-\frac{t-t_0}{\sqrt{2}|t-t_0|},\frac{x-x_0}{\sqrt{2}|x-x_0|}\right)$$

所以有

$$\int_B -e(u)(x,0)\mathrm{d}x+\int_T e(u)(x,t)\mathrm{d}x+\frac{1}{\sqrt{2}}\int_K e(u)+(-u_t\nabla u)\cdot\frac{x-x_0}{|x-x_0|}\mathrm{d}S=0$$

而

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{2}}\int_K e(u)+(-u_t\nabla u)\cdot\frac{x-x_0}{|x-x_0|}\mathrm{d}S\\
=&\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_K u_t^2+|\nabla u|^2-2u_t\nabla u\cdot\frac{x-x_0}{|x-x_0|}\mathrm{d}S\\
=&\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_K\left(u_t-\frac{x-x_0}{|x-x_0|}\cdot\nabla u\right)^2+\left(|\nabla u|^2-(\frac{x-x_0}{|x-x_0|}\cdot\nabla u)^2\right)\mathrm{d}S\\
\geqslant&0
\end{aligned}$$

记

$$Flux(0,t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_K e(u)+(-u_t\nabla u)\cdot\frac{x-x_0}{|x-x_0|}\mathrm{d}S$$

则有

$$\frac{1}{2}\int_B\left(u_t^2+|\nabla u|^2\right)(0)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_T\left(u_t^2+|\nabla u|^2\right)(t)\mathrm{d}x+Flux(0,t)$$

1.9 习题

1. 解方程

(1)

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & t > 0, x > 0 \quad (1.56a) \\ u(x,0) = x & x \geqslant 0 \quad (1.56b) \\ u_t(x,0) = 0 & x \geqslant 0 \quad (1.56c) \\ u(0,t) = t^2 & t \geqslant 0 \quad (1.56d) \end{cases}$$

解. 将初值条件延拓为 $u(x,0) = \Phi(x), u_t(x,0) = \Psi(x)$, 由达朗贝尔公式,

$$u(x,t) = \frac{\Phi(x+at) + \Phi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \Psi(s)\mathrm{d}s$$

$$u(0,t) = \frac{\Phi(at) + \Phi(-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{-at}^{at} \Psi(s)\mathrm{d}s = t^2, t \geqslant 0$$

不妨对 $\Psi(x)$ 作零延拓, 此时上式变为

$$\Phi(-at) = 2t^2 - at, t \geqslant 0$$

因此当 $x < 0$ 时, 令

$$\Phi(x) = \frac{2}{a^2}x^2 + x$$

所以最后结果为

$$u(x,t) = \begin{cases} x & x \geqslant at \\ \dfrac{1}{a^2}x^2 + \left(1 - \dfrac{2t}{a}\right)x + t^2 & x < at \end{cases}$$

□

(2)

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 2xt & t > 0, x \in \mathbb{R} \quad (1.57a) \\ u(x,0) = x^2 & x \in \mathbb{R} \quad (1.57b) \\ u_t(x,0) = \sin 2x & x \in \mathbb{R} \quad (1.57c) \end{cases}$$

解. 拆成两个方程

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 & t > 0, x \in \mathbb{R} \quad (1.58a) \\ u(x,0) = x^2 & x \in \mathbb{R} \quad (1.58b) \\ u_t(x,0) = \sin 2x & x \in \mathbb{R} \quad (1.58c) \end{cases}$$

由达朗贝尔公式,

$$u(x,t) = \frac{(x-at)^2 + (x+at)^2}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \sin 2s\mathrm{d}s = x^2 + a^2t^2 + \frac{1}{2a}\sin 2x \sin 2at$$

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 2xt & t > 0, x \in \mathbb{R} \quad (1.59a) \\ u(x,0) = 0 & x \in \mathbb{R} \quad (1.59b) \\ u_t(x,0) = 0 & x \in \mathbb{R} \quad (1.59c) \end{cases}$$

由齐次化原理, 考虑

$$\begin{cases} W_{tt} - a^2 W_{xx} = 0 \quad t > \tau, x \in \mathbb{R} & (1.60a) \\ W(x,\tau) = 0 & (1.60b) \\ W_t(x,\tau) = 2x\tau & (1.60c) \end{cases}$$

解得

$$W(x,t;\tau) = \frac{1}{2a}\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} 2s\tau \mathrm{d}s = -2x\tau^2 + 2xt\tau$$

那么

$$u(x,t) = \int_0^t W(x,t;\tau)\mathrm{d}\tau = \frac{1}{3}xt^3$$

所以最终结果为

$$u(x,t) = \frac{1}{3}xt^3 + x^2 + a^2t^2 + \frac{1}{2a}\sin 2x \sin 2at$$

□

2. 求解三维波方程

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u \qquad t > 0, x \in \mathbb{R}^3 - \{0\} & (1.61a) \\ u(x,0) = 0 & (1.61b) \\ u_t(x,0) = 0 & (1.61c) \\ \lim\limits_{r\to 0} 4\pi r^2 u_r(r,t) = g(t) & (1.61d) \end{cases}$$

的轴对称解 $u = u(r,t)$, 其中 g 满足 $g(0) = g'(0) = g''(0) = 0$.

3. 设 a, b, h, l 为正常数, 并且 $b < l$. 用分离变量法求如下初边值问题的形式解 $u = u(x,t)$

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} \qquad t > 0, 0 < x < l & (1.62a) \\ u(x,0) = \begin{cases} \frac{h}{b}x & 0 \leqslant x \leqslant b \\ \frac{h}{l-b}(l-x) & b \leqslant x \leqslant l \end{cases} & (1.62b) \\ u_t(x,0) = 0 \qquad 0 < x < l & (1.62c) \\ u(0,t) = 0 & (1.62d) \\ u(l,t) = 0 & (1.62e) \end{cases}$$

证明. 设有非平凡解

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

代入得

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t)$$
$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

考虑

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = 0 \\ X(l) = 0 \end{cases}$$

当 $\lambda < 0$ 时, 通解为

$$X(x) = C_1 \mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 \mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

代入初值条件解得 $C_1 = C_2 = 0$, 这是平凡解.
当 $\lambda = 0$ 时, 通解为

$$X(x) = C_1 x + C_2$$

代入初值条件解得 $C_1 = C_2 = 0$, 这是平凡解.
当 $\lambda > 0$ 时, 通解为

$$X(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x$$

代入初值条件解得 $C_1 = 0, \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, k = 1, 2, \cdots$
得到一组基

$$X_k(x) = \sin\frac{k\pi}{l}x, k = 1, 2, \cdots$$

将得到的 λ_k 代入到 $T''(t) + a^2\lambda T(t) = 0$ 中, 得

$$T''(t) + a^2\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 T(t) = 0$$

解得

$$T_k(t) = A_k \cos\frac{ak\pi}{l}t + B_k \sin\frac{ak\pi}{l}t$$

构造

$$U(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x)T_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin\frac{k\pi}{l}x\left(A_k\cos\frac{ak\pi}{l}t + B_k\sin\frac{ak\pi}{l}t\right)$$

代入初值条件有

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\frac{k\pi}{l}x = \begin{cases} \frac{h}{b}x & 0 \leqslant x \leqslant b \\ \frac{h}{l-b}(l-x) & b \leqslant x \leqslant l \end{cases}$$

$$B_k = 0, k = 1, 2, \cdots$$

□

4. 设 $u = u(x,t)$ 是如下初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = f_x(x) & t > 0, 0 < x < 1 \\ u(x,0) = h(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \\ u(0,t) = 0 \\ u(1,t) = 0 \end{cases}$$

的光滑解, 其中 f, g, h 都是光滑函数且满足 $h(0) = h(1) = 0$.

1. 证明

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1 \left(u_x^2 + u_t^2\right)\mathrm{d}x = 2\int_0^1 f_x(x)u_t \mathrm{d}x$$

证明.

$$u_t u_{tt} - u_t u_{xx} = f_x(x) u_t$$

对 x 在 $[0,1]$ 上积分, 得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1 (u_t)^2 \mathrm{d}x - \int_0^1 u_t u_{xx} \mathrm{d}x = \int_0^1 f_x(x) u_t \mathrm{d}x$$

分部积分, 得

$$\int_0^1 u_t u_{xx} \mathrm{d}x = (u_t u_x)\Big|_0^1 - \int_0^1 u_{tx} u_x \mathrm{d}x$$

□

6. 设 $u = u(x,t)$ 为三维波方程

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u & t > 0, x \in \mathbb{R}^3 \\ u(x,0) = f & \\ u_t(x,0) = g & x \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

的解, 其中 $f, g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$. 定义

$$K(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |u_t(x,t)|^2 \mathrm{d}x, t > 0$$

$$P(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla_x u(x,t)|^2 \mathrm{d}x, t > 0$$

证明:

1. $K(t) + P(t)$ 是关于 $t > 0$ 的常值函数.

   证明. 在 $u_{tt} - \Delta u = 0$ 两侧同乘 u_t, 得到

$$u_t \frac{\partial u_t}{\partial t} - u_t \Delta u = \frac{1}{2}\partial_t (u_t)^2 - u_t \Delta u = 0$$

   在 $\mathbb{R}^3$ 上积分, 得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^3} |u_t|^2 \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^3} u_t \Delta u \mathrm{d}x = 0$$

   分部积分, 得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^3} |u_t|^2 \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^3} \nabla u_t \cdot \nabla u \mathrm{d}x = 0$$

   而

$$\nabla u_t \cdot \nabla u = \sum_{i=1}^n u_{tx_i} u_{x_i} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}\partial_t (u_{x_i})^2 = \frac{1}{2}\partial_t |\nabla u|^2$$

   因此上式变为

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^3} |u_t|^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x = 0$$

   得证! □

2.

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T K(t)\mathrm{d}t = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T P(t)\mathrm{d}t$$

命题 1.9.1 (L^2 Hardy 不等式)**.**

$$\left\|\frac{u(x)}{x}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leqslant \frac{2}{n-2}\|\nabla u(x)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \quad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

证明. 即证

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)|^2}{|x|^2}\mathrm{d}x \leqslant \left(\frac{2}{n-2}\right)^2 \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^2 \mathrm{d}x, \quad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

定义

$$Su(x) = \frac{xu(x)}{|x|^2}, \quad Au(x) = \nabla u(x),$$

即证

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Su(x)|^2 \mathrm{d}x \leqslant C \int_{\mathbb{R}^n} |Au(x)|^2 \mathrm{d}x,$$

对于待定常数 $k \in \mathbb{R}$, 考虑

$$0 \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |Su + kAu|^2 \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} |Su|^2 \mathrm{d}x + k^2 \int_{\mathbb{R}^n} |Au|^2 \mathrm{d}x + 2k \int_{\mathbb{R}^n} Su \cdot Au \mathrm{d}x$$

最后一项

$$\int_{\mathbb{R}^n} Su \cdot Au \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{x}{|x|^2} \cdot u \nabla u = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{x}{|x|^2} \cdot \nabla \left(\frac{u^2}{2}\right) \mathrm{d}x,$$

因为

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \frac{x_i}{|x|^2} = \frac{|x|^2 - 2x_i^2}{|x|^4} \Longrightarrow \nabla \cdot \frac{x}{|x|^2} = \frac{n-2}{|x|^2},$$

由分部积分得

$$\int_{\mathbb{R}^n} Su \cdot Au \mathrm{d}x = -\frac{n-2}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |Su|^2 \mathrm{d}x.$$

带入得

$$0 \leqslant k^2 \int_{\mathbb{R}^n} |Au|^2 \mathrm{d}x + (1 - (n-2)k) \int_{\mathbb{R}^n} |Su|^2 \mathrm{d}x, \quad \forall\, k \in \mathbb{R}.$$

右侧是一个关于 k 的二次函数, 当

$$k = \left((n-2) \int_{\mathbb{R}^n} |Su|^2 \mathrm{d}x\right) \Big/ \left(2 \int_{\mathbb{R}^n} |Au|^2 \mathrm{d}x\right)$$

时取到最小值, 代入并整理得

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Su|^2 \mathrm{d}x \leqslant \left(\frac{2}{n-2}\right)^2 \int_{\mathbb{R}^n} |Au|^2 \mathrm{d}x.$$

□

Chapter 2 扩散方程

2.1 初边值问题

例 2.1.1. 用分离变量法求解如下的初边值问题, 其中 $h > 0$ 为常数,

$$u_t - a^2 u_{xx} = 0, \quad t > 0, 0 < x < l, \quad u(x,0) = \varphi(x), \quad u(0,t) = 0, \quad (u_x + hu)(l,t) = 0.$$

证明.

$$u(x,t) = X(x)T(t) \Longrightarrow XT' = a^2 X''T \Longrightarrow \frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$$
$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X'(l) + hX(l) = 0$$

1. 当 $\lambda \leqslant 0$ 时, 只有平凡解 $X \equiv 0$.

2. 当 $\lambda > 0$ 时,

$$X(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x.$$

利用边界条件 $X(0) = 0$, 得 $A = 0$. 于是由第二个边界条件得到

$$B(\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l + h\sin\sqrt{\lambda}l) = 0.$$

为使 $X(x)$ 为非平凡解,λ 应满足

$$\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l + h\sin\sqrt{\lambda}l = 0,$$

即 λ 应是下述超越方程的正根：

$$\tan\sqrt{\lambda}l = -\frac{\sqrt{\lambda}}{h}.$$

令 $v = \sqrt{\lambda}l$, 则上式变为

$$\tan v = -\frac{v}{lh}.$$

作图知, 该方程有可列无穷多个正根 $v_k > 0 (k = 1, 2, \cdots)$, 满足 $(k - \frac{1}{2})\pi < v_k < k\pi$. 因此存在着无穷多个固有值

$$\lambda_k = \left(\frac{v_k}{l}\right)^2, k = 1, 2, \cdots$$

及相应的固有函数

$$X_k(x) = B_k \sin\sqrt{\lambda_k}x = B_k \sin\frac{v_k}{l}x, k = 1, 2, \cdots$$

把 $\lambda=\lambda_k$ 代入到关于 T 的方程, 可解得

$$T_k(t)=C_k\mathrm{e}^{-a^2\lambda_k t}, k=1,2,\cdots$$

构造级数形式的解

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}A_k\mathrm{e}^{-a^2\lambda_k t}\sin\sqrt{\lambda_k}x.$$

下面来决定常数 A_k, 使得它满足初值条件

$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}A_k\sin\sqrt{\lambda_k}x.$$

为确定系数 A_k, 须先证明固有函数系 $\{X_k\}=\left\{\sin\sqrt{\lambda_k}x\right\}$ 在 $[0,l]$ 上正交. 设固有函数 X_n 和 X_m 分别对应于不同的固有值 λ_n 和 λ_m, 即

$$X_n''+\lambda_n X_n=0, X_m''+\lambda_m X_m=0.$$

以 X_m 和 X_n 分别乘上面第一式和第二式, 得到

$$X_mX_n''+\lambda_nX_mX_n=0,$$

$$X_nX_m''+\lambda_mX_mX_n=0.$$

两式相减后在 $[0,l]$ 上积分, 有

$$\int_0^l X_mX_n''-X_nX_m''\mathrm{d}x+(\lambda_n-\lambda_m)\int_0^l X_nX_m\mathrm{d}x=0.$$

结合边界条件, 有

$$\int_0^l X_mX_n''-X_nX_m''\mathrm{d}x=\left.(X_nX_m'-X_mX_n')\right|_0^l=0.$$

因此

$$(\lambda_n-\lambda_m)\int_0^l X_nX_m\mathrm{d}x=0.$$

由于 $\lambda_n\neq\lambda_m$, 我们得到固有函数系的正交性

$$\int_0^l X_nX_m\mathrm{d}x=\int_0^l\sin\sqrt{\lambda_n}x\sin\sqrt{\lambda_m}x\mathrm{d}x=0, n\neq m.$$

记

$$\begin{aligned}
M_k&=\int_0^l\sin^2\sqrt{\lambda_k}x\mathrm{d}x\\
&=\int_0^l\frac{1-\cos 2\sqrt{\lambda_k}x}{2}\mathrm{d}x\\
&=\frac{l}{2}-\frac{\sin 2\sqrt{\lambda_k}l}{4\sqrt{\lambda_k}}\\
&=\frac{l}{2}-\frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}}\frac{\sin\sqrt{\lambda_k}\cos\sqrt{\lambda_k}}{\sin^2\sqrt{\lambda_k}+\cos^2\sqrt{\lambda_k}}\\
&=\frac{l}{2}-\frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}}\frac{\tan\sqrt{\lambda_k}l}{1+\tan^2\sqrt{\lambda_k}l}
\end{aligned}$$

$$= \frac{l}{2} - \frac{-\dfrac{v_k}{lh}}{2\dfrac{v_k}{l}\left(1+\dfrac{v_k^2}{l^2h^2}\right)}$$
$$= \frac{l}{2} + \frac{h}{2(h^2+\lambda_k)}$$

于是

$$A_k = \frac{1}{M_k}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\sqrt{\lambda_k}\xi\mathrm{d}\xi.$$

得到形式解

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{M_k}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\sqrt{\lambda_k}\xi\mathrm{d}\xi\cdot\mathrm{e}^{-a^2\lambda_k t}\sin\sqrt{\lambda_k}x.$$

□

例 2.1.2 (dim=1)**.**

$$\begin{cases} u_t = a^2u_{xx} + f(x,t) & 0<x<l, t>0 \quad (2.1a)\\ u(x,0)=\varphi(x) & 0\leqslant x\leqslant l \quad (2.1b)\\ u_x(0,t)=0 & \quad (2.1c)\\ u_x(l,t)=0 & \quad (2.1d)\end{cases}$$

注记. x 的取值范围的等号与不等号, 貌似还有点讲究.

解. 考虑对应的齐次方程

$$u_t = a^2u_{xx} \tag{2.2}$$

设

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{2.3}$$

代入方程(2.2), 得到

$$X(x)T'(t) = a^2X''(x)T(t) \tag{2.4}$$
$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \tag{2.5}$$

先考虑

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 \quad (2.6a)\\ X'(0)=0 \quad (2.6b)\\ X'(l)=0 \quad (2.6c)\end{cases}$$

当 $\lambda=0$ 时, 解得

$$X(x) = C_1x + C_2 \tag{2.7}$$

代入初值(2.6b)和(2.6c), 得

$$X(x) = C \tag{2.8}$$

当 $\lambda>0$ 时, 解得

$$X(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x \tag{2.9}$$

则

$$X'(x) = -A\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x + B\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x \tag{2.10}$$

代入初值(2.6b)和(2.6c), 得

$$X'(0) = B\sqrt{\lambda} = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$X'(l) = -A\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}l = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}l = k\pi \Rightarrow \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, k = 1, 2\cdots$$

将上述两种情况合并, 我们得到固有函数系

$$X_k(x) = \cos\frac{k\pi}{l}x, k = 0, 1, 2\cdots \tag{2.11}$$

将 $u(x,t), f(x,t), \varphi(x)$ 在这组完备正交基下分解, 得到

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(t)\cos\frac{k\pi}{l}x \tag{2.12}$$

$$f(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t)\cos\frac{k\pi}{l}x \tag{2.13}$$

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k\cos\frac{k\pi}{l}x \tag{2.14}$$

其中

$$f_k(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_0^l f(x,t)\mathrm{d}x & k = 0 \quad (2.15\text{a}) \\ \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l f(x,t)\cos\frac{k\pi}{l}x\mathrm{d}x & k > 0 \quad (2.15\text{b}) \end{cases}$$

$$\varphi_k = \begin{cases} \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_0^l \varphi(x)\mathrm{d}x & k = 0 \quad (2.16\text{a}) \\ \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l \varphi(x)\cos\frac{k\pi}{l}x\mathrm{d}x & k > 0 \quad (2.16\text{b}) \end{cases}$$

带入到方程(2.1a)和(2.1b)得到

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} g_k'(t)\cos\frac{k\pi}{l}x + \sum_{k=0}^{\infty} a^2 g_k(t)\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\cos\frac{k\pi}{l}x = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t)\cos\frac{k\pi}{l}x & (2.17\text{a}) \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} g_k(0)\cos\frac{k\pi}{l}x = \sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k\cos\frac{k\pi}{l}x & (2.17\text{b}) \end{cases}$$

对应系数相等, 有

$$\begin{cases} g_k'(t) + \left(\dfrac{k\pi a}{l}\right)^2 g_k(t) = f_k(t) & (2.18\text{a}) \\ g_k(0) = \varphi_k & (2.18\text{b}) \end{cases}$$

解得

$$g_k(t) = \exp\left(-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t\right)\varphi_k + \int_0^t \exp\left(-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2(t-s)\right)f_k(s)\mathrm{d}s \tag{2.19}$$

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(t)\cos\frac{k\pi}{l}x \tag{2.20}$$

□

例 2.1.3 (圆形域上的热传导方程)**.**

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u & (2.21a) \\ u(x,0) = \varphi(x) & (2.21b) \\ u(x,t)\big|_{\partial\Omega} = 0 & (2.21c) \end{cases}$$

其中 $\Omega = \left\{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 < 1\right\}$,$u$ 定义在 $\overline{\Omega}$ 上.

解. 令

$$u(\mathbf{x}, t) = X(\mathbf{x})T(t) \tag{2.22}$$

则

$$X(\mathbf{x})T'(t) = \Delta X(\mathbf{x})T(t) \tag{2.23}$$

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{\Delta X}{X} = -\lambda \tag{2.24}$$

先考虑

$$\begin{cases} \Delta X + \lambda X = 0 & (2.25a) \\ X(x)\big|_{|\mathbf{x}|=1} = 0 & (2.25b) \end{cases}$$

用极坐标 (r, θ), 得到

$$\partial_r^2 X + \frac{1}{r}\partial_r X + \frac{1}{r^2}\partial_\theta^2 X + \lambda X = 0 \tag{2.26}$$

令

$$X(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta) \tag{2.27}$$

则

$$R''\Theta + \frac{1}{r}R'\Theta + \frac{1}{r^2}R\Theta'' + \lambda R\Theta = 0 \tag{2.28}$$

式子两边同除 $R(r)\Theta(\theta)$, 整理得

$$\frac{r^2 R'' + rR' + \lambda r^2 R}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta} = \mu \tag{2.29}$$

先考虑

$$\begin{cases} \Theta'' + \mu\Theta = 0 & (2.30a) \\ \Theta(\theta) = \Theta(\theta + 2\pi) & (2.30b) \end{cases}$$

当 $\mu < 0$ 时, 易验证无法满足条件(2.30b).
当 $\mu = 0$ 时, 可写出通解为

$$\Theta(\theta) = C_1\theta + C_2 \tag{2.31}$$

要想以 2π 为周期,Θ 只能是常值函数 C.
当 $\mu > 0$ 时, 可写出通解为

$$\Theta(\theta) = A\cos\sqrt{\mu}\theta + B\sin\sqrt{\mu}\theta \tag{2.32}$$

要想让 Θ 以 2π 为周期,2π 必须是它的最小正周期 $\dfrac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$ 的正整数倍.
所以 $\mu = 1^2, 2^2, \cdots$

再转到

$$r^2R'' + rR' + (\lambda r^2 - \mu)R = 0 \tag{2.33}$$

现在它是

$$r^2R'' + rR' + (\lambda r^2 - n^2)R = 0 \tag{2.34}$$

为了将它变为贝塞尔方程, 作变量代换

$$r = c^{-1}\rho \tag{2.35}$$

则

$$R_r = cR_\rho, R_{rr} = c^2R_{\rho\rho} \tag{2.36}$$

代入得

$$\rho^2R'' + \rho R' + \left(\frac{\lambda\rho^2}{c^2} - n^2\right)R = 0 \tag{2.37}$$

取 $c = \sqrt{\lambda}$, 得到

$$\rho^2R'' + \rho R' + \left(\rho^2 - n^2\right)R = 0 \tag{2.38}$$

$$\begin{cases} \rho^2\tilde{R}'' + \rho\tilde{R}' + (\rho^2 - n^2)\tilde{R} = 0 & (2.39\text{a}) \\ \tilde{R}(\sqrt{\lambda}) = 0 & (2.39\text{b}) \end{cases}$$

$$\tilde{R}(\rho) = J_n(\rho)$$

由贝塞尔函数理论, 我们知道 $J_n(\rho)$ 有无穷多个非负简单零点 $\mu_1^n, \mu_2^n \cdots$, 所以 $\sqrt{\lambda} = \mu_m^n, \lambda_m = (\mu_m^n)^2$

$$R(r) = \tilde{R}(\rho) = J_n(\mu_m^n r)$$

再转到

$$T'(t) + (\mu_m^n)^2T(t) = 0 \tag{2.40}$$

解得

$$T(t) = \exp\left(-(\mu_m^n)^2t\right) \tag{2.41}$$

设

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\exp\left(-(\mu_m^n)^2t\right)J_n(\mu_m^n r)(A_m^n\cos n\theta + B_m^n\sin n\theta) \tag{2.42}$$

带入到初值条件(2.21b), 得到

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}J_n(\mu_m^n r)(A_m^n\cos n\theta + B_m^n\sin n\theta) = \varphi(x) \tag{2.43}$$

“计算”得,

$$A_m^n = \varphi_m^n, B_m^n = \psi_m^n \tag{2.44}$$

注记. 理论上能够进行这样的计算的原因是

1. $\cos n\theta, \sin n\theta$ 是 $L^2(0, 2\pi)$ 中的完备正交系.

2.

$$\int_0^1 xJ_n(\mu_m^n x)J_n(\mu_k^n x)\mathrm{d}x = \delta_{mk}$$

□

例 2.1.4. 用分离变量法求解热传导方程的初边值问题:

$$
\begin{cases}
u_t = u_{xx} & t > 0, 0 < x < 1 \quad (2.45a)\\
u(x,0) = \begin{cases} x & 0 < x \leqslant \dfrac{1}{2} \\ 1-x & \dfrac{1}{2} < x < 1 \end{cases} & \quad (2.45b)\\
u(0,t) = u(1,t) = 0 & t > 0 \quad (2.45c)
\end{cases}
$$

证明. 第一步, 看是否是有限区间, 若是有限区间, 则可以考虑用分离变量法求解.

第二步, 看边值类型.

设

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

则有

$$X(x)T'(t) = X''(x)T(t)$$
$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

考虑

$$
\begin{cases}
X''(x) + \lambda X(x) = 0 & (2.46a)\\
X(0) = 0 & (2.46b)\\
X(l) = 0 & (2.46c)
\end{cases}
$$

解得非平凡解

$$X_k(x) = \sin k\pi x, \lambda = k^2\pi^2, k = 1, 2, \cdots$$

再考虑

$$T'(t) + \lambda T(t) = 0$$

解得

$$T_k(t) = \mathrm{e}^{-k^2\pi^2 t}$$

因此可设

$$U(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \mathrm{e}^{-k^2\pi^2 t} \sin k\pi x$$

由初值条件有

$$U(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin k\pi x = \varphi(x)$$

□

例 2.1.5 (P56,2-2-6)**.** 半径为 a 的半圆形平板, 其表面绝热, 在板的圆周边界上保持常温 u_0, 而在直径边界上保持常温 u_1, 求圆板稳恒状态的温度分布.

证明. □

2.2 柯西问题

本笔记采用的 Fourier 变换的系数约定是

$$\hat{f}(\xi)=\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{d}x,\quad f(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(\xi)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{d}\xi$$

考虑扩散方程的柯西问题

$$u_t(x,t)-a^2\Delta u(x,t)=f(x,t),\quad u(x,0)=\varphi(x)$$

关于 x 作 Fourier 变换, 得到其频率为 ξ 的 Fourier 系数满足的方程

$$\hat{u}_t(\xi,t)+4\pi^2a^2|\xi|^2\hat{u}(\xi,t)=\hat{f}(\xi,t),\quad \hat{u}(\xi,0)=\hat{\varphi}(\xi)$$

方程的左右同乘 $\exp(4\pi^2a^2|\xi|^2t)$, 得到

$$\left(\hat{u}(\xi,t)\exp(4\pi^2a^2|\xi|^2t)\right)'=\exp(4\pi^2a^2|\xi|^2t)\hat{f}(\xi,t)$$

从 0 到 t 进行积分, 得到

$$\hat{u}(\xi,t)\exp(4\pi^2a^2|\xi|^2t)-\hat{u}(\xi,0)=\int_0^t\exp(4\pi^2a^2|\xi|^2\tau)\hat{f}(\xi,\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$\hat{u}(\xi,t)=\exp\left(-4\pi^2a^2|\xi|^2t\right)\hat{\varphi}(\xi)+\int_0^t\exp\left(-4\pi^2a^2|\xi|^2(t-\tau)\right)\hat{f}(\xi,\tau)\mathrm{d}\tau$$

作 Fourier 逆变换, 得到

$$u(x,t)=\mathscr{F}^{-1}\left(\exp\left(-4\pi^2a^2|\xi|^2t\right)\right)*\varphi(x)+\int_0^t\mathscr{F}^{-1}\left(\exp\left(-4\pi^2a^2|\xi|^2(t-\tau)\right)\right)*f(x,\tau)\mathrm{d}\tau$$

为了求解 $\mathscr{F}^{-1}\left(\exp\left(-4\pi^2a^2|\xi|^2t\right)\right)$, 我们有如下观察,

$$\mathrm{e}^{-\pi|x|^2}\to\mathrm{e}^{-\pi|\xi|^2},\quad \mathrm{e}^{-\pi|\delta x|^2}\to\delta^{-n}\mathrm{e}^{-\pi|\delta^{-1}\xi|^2},\quad \delta^n\mathrm{e}^{-\pi|\delta x|^2}\to\mathrm{e}^{-\pi|\delta^{-1}\xi|^2}$$

$$\delta^{-2}=4\pi a^2t\Longrightarrow\frac{1}{(4\pi a^2t)^{\frac{n}{2}}}\exp\left(-\frac{|x|^2}{4a^2t}\right)\to\exp\left(-4\pi^2a^2|\xi|^2t\right)$$

$$u(x,t)=\frac{1}{(4\pi a^2t)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4a^2t}\right)\varphi(y)\mathrm{d}y+\int_0^t\frac{1}{(4\pi a^2(t-\tau))^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4a^2(t-\tau)}\right)f(y,\tau)\mathrm{d}y\mathrm{d}\tau$$

$$f\equiv0\Longrightarrow u(x,t)=\left(K_t*\varphi\right)(x),\quad K_t(x)=\frac{1}{(4\pi a^2t)^{\frac{n}{2}}}\exp\left(-\frac{|x|^2}{4a^2t}\right)$$

称 $K_t(x)$ 为扩散方程的基本解. 若 φ 具有紧支集, 并且在它的支集上大于零. 那么由上式可以看到, 对任意的 $t>0,x\in\mathbb{R}^n$, 都有 $u(x,t)>0$, 这意味着热的无限传播速度.

例 2.2.1. 设 $\varphi(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中具有紧支集的光滑函数, 考虑热方程初值问题

$$u_t - \Delta u = u, \quad x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \quad u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

(1) 用 Fourier 变换求解以上初值问题的解 $u(x,t)$.

(2) 若 $\varphi(x)$ 的 Fourier 变换在球 $B_R(0)$ 内取值为零, 证明

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leqslant \mathrm{e}^{(1-4\pi^2R^2)t}\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

证明. (1) 对方程和初值使用 Fourier 变换, 得到

$$\hat{u}_t(\xi,t) = (1-4\pi^2|\xi|^2)\hat{u}(\xi,t), \quad \hat{u}(\xi,0) = \hat{\varphi}(\xi).$$

$$\hat{u}(\xi,t) = \mathrm{e}^t\mathrm{e}^{-4\pi^2|\xi|^2t}\hat{\varphi}(\xi), \quad u(x,t) = \mathrm{e}^t\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(y)\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\mathrm{e}^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\mathrm{d}y$$

(2) 根据 Fourier 变换的定义的选取不同, $B_R(0)$ 的物理意义会不同, 导致最后公式中的系数不同

$$\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\hat{u}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n}|\hat{u}(\xi,t)|^2\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^n}|\hat{\varphi}(\xi)\mathrm{e}^{(1-4\pi^2|\xi|^2)t}|^2\mathrm{d}\xi$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n}|\hat{\varphi}(\xi)|^2\mathrm{e}^{2(1-4\pi^2|\xi|^)2t}\mathrm{d}\xi = \int_{|\xi|\geqslant R}|\hat{\varphi}(\xi)|^2\mathrm{e}^{2(1-4\pi^2|\xi|^2)t}\mathrm{d}\xi \leqslant \int_{|\xi|\geqslant R}|\hat{\varphi}(\xi)|^2\mathrm{e}^{2(1-4\pi^2R^2)t}\mathrm{d}\xi$$

$$= \mathrm{e}^{2(1-4\pi^2R^2)t}\int_{|\xi|\geqslant R}|\hat{\varphi}(\xi)|^2\mathrm{d}\xi = \mathrm{e}^{2(1-4\pi^2R^2)t}\int_{\mathbb{R}^n}|\hat{\varphi}(\xi)|^2\mathrm{d}\xi = \mathrm{e}^{2(1-4\pi^2R^2)t}\|\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

□

2.3 衰减估计

假设 $f\equiv 0$, 可以由 Poisson 公式直接得到扩散方程的解的一致的衰减估计

$$|u(x,t)|\leqslant \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4a^2t}\right)|\varphi(y)|\mathrm{d}y\leqslant \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}|\varphi(y)|\mathrm{d}y.$$

例 2.3.1. 设 $\varphi(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中具有紧支集的光滑函数, 考虑热方程初值问题

$$u_t-\Delta u+u=0,\quad x\in\mathbb{R}^n,t>0,\quad u(x,0)=\varphi(x),\quad x\in\mathbb{R}^n.$$

是否存在正整数 N 及常数 $c>0$, 使得 $\lim\limits_{t\to+\infty}t^N|u(x,t)|=c$?

证明. 做变换 $u(x,t)=\mathrm{e}^{-t}v(x,t)$, 会发现 $v(x,t)$ 满足标准热方程, 而指数比任意多项式衰减快. $\square$

例 2.3.2. 用 Fourier 变换方法求解 Schrödinger 方程的解, 其中 $u(x,t)$ 是一个取值为复数的函数

$$\mathrm{i}u_t+\Delta u=0,\quad x\in\mathbb{R}^n,t>0,\quad u(x,0)=f(x)$$

并回答 Schrödinger 方程是否具有有限传播速度, 并估计 $t\to+\infty$ 时 $u(x,t)$ 的行为.

证明. 对方程和初值使用 Fourier 变换, 得到

$$\mathrm{i}\hat{u}_t(\xi,t)=4\pi^2|\xi|^2\hat{u}(\xi,t),\quad \hat{u}(\xi,0)=\hat{f}(\xi)\Longrightarrow \hat{u}(\xi,t)=\hat{f}(\xi)\mathrm{e}^{-4\pi^2\mathrm{i}|\xi|^2t}$$

$$u(x,t)=\int_{\mathbb{R}^n}f(y)S_t(x-y)\mathrm{d}y=\frac{1}{(4\pi\mathrm{i}t)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}f(y)\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}|x-y|^2}{4t}}\mathrm{d}y$$

可以看到 Schrödinger 的传播速度是无限的. 我们从 L^2 范数和逐点性质两方面来分析 $u(x,t)$

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^2}^2=\|\hat{u}(\cdot,t)\|_{L^2}^2=\int_{\mathbb{R}^n}|\hat{f}(\xi)\mathrm{e}^{-4\pi^2\mathrm{i}|\xi|^2t}|^2\mathrm{d}\xi=\int_{\mathbb{R}^n}|\hat{f}(\xi)|^2\mathrm{d}\xi=\|f\|_{L^2}^2.$$

这表明解的总范数在演化过程中是守恒的, 在量子力学中这代表总概率守恒.

$$|u(x,t)|\leqslant\frac{1}{(4\pi\mathrm{i}t)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}|f(y)||\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}|x-y|^2}{4t}}|\mathrm{d}y=\frac{1}{(4\pi\mathrm{i}t)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}|f(y)|\mathrm{d}y\sim\frac{1}{t^{n/2}}.$$

$\square$

2.4 极值原理

扩散方程的极值原理是说, 如果物体的边界温度及其初始温度都不超过某值 M, 而且物体内部没有热源, 则这物体内就不可能产生大于 M 的温度. 定义

$$R_T=\{(x,t):\alpha\leqslant x\leqslant\beta,0\leqslant t\leqslant T\},\quad \Gamma_T=[\alpha,\beta]\times\{t=0\}\cup\{x=\alpha\}\times[0,T]\cup\{x=\beta\}\times[0,T]$$

定理 2.4.1. 设 u 在 R_T 上连续且在其内部满足扩散方程, 则 u 在抛物边界 Γ_T 达到最值.

证明. 只证最大值的情形, 假设 u 不能在 Γ_T 上达到最大值. 则 $m:=\max\limits_{\Gamma_T}u<M:=\max\limits_{R_T}u$. 设 $u(x,t)$ 在点 $(x_0,t_0)\in R_T^\circ$ 达到最大值, 则在该点处有

$$u_t(x_0,t_0)\geqslant 0,\quad u_x(x_0,t_0)=0,\quad u_{xx}(x_0,t_0)\leqslant 0.$$

注记. 在这里我们没能导出矛盾. 没能导出矛盾的原因是, 虽然 u 在内部取到最大值要求了 $u_t-a^2u_{xx}\big|_{(x_0,t_0)}\geqslant 0$, 但是由于 u 满足扩散方程, 有 $u_t-a^2u_{xx}\big|_{(x_0,t_0)}=0$, 大于等于零和等于零并不矛盾. 这让我们想到, 如果给 u 增添一个修正项, 使得新得到的函数仍不在 Γ_T 上取到最大值, 但不再满足扩散方程, 最好有 $v_t-a^2v_{xx}<0$, 这样我们就能够导出矛盾. 我们能这样做的原因是边界上的最大值严格小于内部的最大值, 因此它们之间有一段差, 这段差就允许了我们的操作. 增添一个什么样的修正项好呢? 首先越简单越好. 增添一个关于 x 的一阶项肯定是不行的, 求两次导之后就没了, 还是满足扩散方程; 考虑构造关于 x 的两阶项, 对于两阶项, 它恒正或恒负, 正的求两次导后还正, 负的求两次导后还负, 按照我们的要求, 我们应该希望它求两次导后还正, 这样减去后就负了. 接下来还要希望加上这项后, 仍能有边界上的最大值小于内部的最大值, 重申一遍, 我们能这样做的原因是边界上的最大值严格小于内部的最大值, 因此它们之间有一段差, 这段差就允许了我们的操作. 你要是想加一个开口向上的二次项, 那肯定对称轴那里值没动, 离对称轴越远值涨的越多. 那么, 边界点增加的值肯定比内部点增加的值更多, 但没关系, 由于我们是一个有限区间, 所以边界到对称轴的距离是有界的, 大不了就是区间长度, 我们总可以通过调整二次项前面的系数, 将边界上增加的值压低到小于 M 与 m 的差, 这样就保证了增添这一项之后仍然在内部取到最大值. 有一点需要注意, 之前的最大值点在加上修正项之后不一定仍是最大值点, 但是这没有关系. 其实我只需要知道存在非 Γ_T 中的点大于 Γ_T 上的所有点就好了, 这样就说明了能在内部取到最大值.

令

$$v=u+\frac{M-m}{4L^2}(x-x_0)^2,\quad L=\beta-\alpha.$$

在抛物边界 Γ_T 上,

$$v(x,t)<m+\frac{M-m}{4}=\frac{M+3m}{4}<M$$

而在之前的最大值点处有 $v(x_0,t_0)=M$, 虽然不能确定 (x_0,t_0) 是否依旧是最大值点, 但一定有

$$\max_{\Gamma_T}v(x,t)<v(x_0,t_0)\leqslant\max_{R_T}v$$

所以可以断定 v 在内部或上边界取得矩形上的最大值. 设 v 在 (x_1,t_1) 达到最大值, 则有

$$v_t(x_1,t_1)\geqslant 0,v_{xx}(x_1,t_1)\leqslant 0\Longrightarrow\big(v_t-a^2v_{xx}\big)\big|_{(x_1,t_1)}\geqslant 0$$

但

$$v_t-a^2v_{xx}=u_t-a^2u_{xx}-a^2\frac{M-m}{2L^2}=-a^2\frac{M-m}{2L^2}<0.$$

□

定理 2.4.2 (Dirichlet 边值, 唯一性和稳定性)**.** 热传导方程的初边值问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f & 0 < x < l \\ u(x,0) = \varphi(x) & 0 < x < l \\ u(0,t) = \mu_1(t) \\ u(l,t) = \mu_2(t) \end{cases}$$

在区域 R_T 上解是唯一的, 而且连续依赖于在 Γ_T 上给定的初、边值条件.

证明.

1. 唯一性

   如果 u_1, u_2 是两个不同的解, 令 $w = u_1 - u_2$, 则 w 满足的方程是

$$\begin{cases} w_t - w_{xx} = 0 & 0 \leqslant x \leqslant l \\ w(x,0) = 0 & 0 \leqslant x \leqslant l \\ w(0,t) = 0 & 0 \leqslant t \leqslant T \\ w(l,t) = 0 & 0 \leqslant t \leqslant T \end{cases}$$

   在 $R_T = [0,l] \times [0,T]$ 上用极值原理, 可得 $w(x,t)$ 在 R_T 上的最大值和最小值都在抛物边界上取到.

   由于 $w\big|_{\Gamma_T} = 0$, 所以 w 在 R_T 上恒为零.

2. 稳定性

   如果 $\max\limits_{0 \leqslant x \leqslant l} |\varphi(x)| + \max\limits_{0 \leqslant t \leqslant T} (|\mu_1(t)| + |\mu_2(t)|) < \varepsilon$, 则由极值原理,

$$\max_{R_T} u(x,t) = \max_{\Gamma_T} u(x,t) < \varepsilon$$

   类似

$$\min_{R_T} u(x,t) > -\varepsilon$$
$$|u(x,t)| < \varepsilon, \forall (x,t) \in R_T$$

□

定理 2.4.3 (Robin 边值, 唯一性和稳定性)**.** 热传导方程的初边值问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u(0,t) = \mu_1(t) \\ (u_x + hu)(l,t) = \mu_2(t) & h > 0 \end{cases}$$

在区域 R_T 上解是唯一的, 而且连续依赖于在 Γ_T 上给定的初、边值条件.

证明.

1. 唯一性

   只要证明

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 \\ u(x,0) = 0 \\ u(0,t) = 0 \\ (u_x + hu)(l,t) = 0 \end{cases}$$

   只有零解.

   设存在非零解 u 在 R_T 上能达到正的最大值或负的最小值, 若不然, 最大值非正且最小值非负, 这迫使 u 就是零解.

   不失一般性, 我们假设它能达到正的最大值, 由极值原理, 这个正的最大值能够在抛物边界 Γ_T 上达到.

   由于在 $\{x=0\}\times[0,T]\cup[0,l]\times\{t=0\}$ 上 $u\equiv 0$, 所以这个最大值只能在某点 $(l,t_0)\in\{x=l\}\times[0,T]$ 处达到, 因此

$$u_x(l,t_0) \geqslant 0.$$

   但这就推出 $(u_x+hu)(l,t_0)>0$, 与 $(u_x+hu)(l,t_0)=0$ 矛盾！ 5

2. 稳定性

   设 u 在 R_T 上达到正的最大值, 则存在 $(x_0,t_0)\in\Gamma_T$ 使得 u 在 (x_0,t_0) 的值就是 u 在 R_T 上的最大值.

   (a) $(x_0,t_0)\in\{x=0\}\times[0,T]\cup[0,l]\times\{t=0\}$, 则 $M=\max\left\{\max\limits_{0\leqslant x\leqslant L}\varphi(x), \max\limits_{0\leqslant t\leqslant T}\mu_1(t)\right\}$

   (b) $(x_0,t_0)\in\{x=l\}\times[0,T]$ 则 $u_x(x_0,t_0)\geqslant 0$, 故 $hu(x_0,t_0)\leqslant\mu_2(t)$ 故 $u(x,t)\leqslant u(x_0,t_0)\leqslant \dfrac{1}{h}\max\limits_{0\leqslant t\leqslant T}\mu_2(t)$

$$\forall (x,t)\in R_T, u(x,t)\leqslant \max\left\{\max_{0\leqslant x\leqslant L}\varphi(x), \max_{0\leqslant t\leqslant T}\mu_1(t), \max_{0\leqslant t\leqslant T}\frac{\mu_2(t)}{h}\right\}$$

□

定理 2.4.4 (唯一性和稳定性,Neumann 边值)**.** 热传导方程的初边值问题

$$\begin{cases} u_t - a^2u_{xx} = f \quad 0<x<l, h>0 & (2.47a) \\ u(x,0) = \varphi(x) \quad 0<x<l & (2.47b) \\ u(0,t) = \mu_1(t) & (2.47c) \\ u_x(l,t) = \mu_2(t) & (2.47d) \end{cases}$$

证明.

1. 唯一性

只要证明

$$
\begin{cases}
u_t - a^2 u_{xx} = 0 \quad 0 < x < l, h > 0 & (2.48a)\\
u(x,0) = 0 \qquad\quad 0 < x < l & (2.48b)\\
u(0,t) = 0 & (2.48c)\\
u_x(l,t) = 0 & (2.48d)
\end{cases}
$$

只有零解.

令 $\tilde{u}(x,t) = w(x)u(x,t)$, 其中 $w(x) = l + 1 - x$ 则

$$
\begin{aligned}
u &= \frac{\tilde{u}}{w}\\
u_t &= \frac{\tilde{u}_t}{w}\\
u_x &= \frac{\tilde{u}_x}{w} - \frac{w_x\tilde{u}}{w^2} = \frac{\tilde{u}_x}{w} + \frac{\tilde{u}}{w^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u_x(l,t) &= \tilde{u}_x + \tilde{u} = 0\\
u_{xx} &= \frac{\tilde{u}_{xx}}{w} + \frac{2\tilde{u}_x}{w} + 2\frac{\tilde{u}}{w^3}\\
\frac{\tilde{u}_t}{w} - a^2\left(\frac{\tilde{u}_{xx}}{w} + \frac{2\tilde{u}_x}{w^2} + 2\frac{\tilde{u}}{w^3}\right) &= 0\\
\tilde{u}_t - a^2\tilde{u}_{xx} &= \frac{2a^2}{w}\tilde{u}_x + \frac{2a^2}{w^2}\tilde{u} \qquad (2.49)
\end{aligned}
$$

注记. 要用证明极值原理的过程

令

$$v = \mathrm{e}^{-\lambda t}\tilde{u}, \tilde{u} = e^{\lambda t}v$$

代入得

$$e^{\lambda t}(\lambda v + v_t) - a^2 e^{\lambda t} v_{xx} = \frac{2a^2 e^{\lambda t} v_x}{w} + \frac{2a^2 e^{\lambda t} v}{w^2} \qquad (2.50)$$

整理得

$$
\begin{cases}
v_t - a^2 v_{xx} = \dfrac{2a^2}{w} v_x + (\dfrac{2a^2}{w^2} - \lambda)v & (2.51a)\\
v(x,0) = 0 & (2.51b)\\
v(0,t) = 0 & (2.51c)\\
(v + v_x)(l,t) = 0 & (2.51d)
\end{cases}
$$

断言, 如果 v 在 (x_0,t_0) 达到 R_T 上的正的最大值, 那么 $(x_0,t_0) \in \Gamma_T$
下证断言. 若不然, 设 v 在 $(x_0,t_0) \in R_T^\circ$ 达到最大值.
取 $\lambda > 2a^2$, 则 $\dfrac{2a^2}{(l+1-x)^2} \leqslant 2a^2 < \lambda$, 于是

$$-a^2 v_{xx} = \left(\frac{2a^2}{w^2} - \lambda\right) v(x_0,t_0) < 0$$

矛盾！断言得证.

如果 $(x_0,t_0)\in[0,l]\times\{t=0\}\cup\{x=0\}\times[0,T]$

若 $(x_0,t_0)\in\{x=l\}\times[0,T]$,$v_x(x_0,t_0)\geqslant 0\Rightarrow(v_x+v)(x_0,t_0)>0$, 矛盾.

类似可证

$$\min_{R_T} v=0$$

故 $v\equiv 0$,$\tilde{u}\equiv 0$,$u\equiv 0$ □

定理 2.4.5. 柯西问题

$$\begin{cases} u_t-a^2u_{xx}=f & -\infty<x<\infty \\ u(x,0)=\varphi(x) \end{cases}$$

在有界函数类中解是唯一的, 而且连续依赖于初值条件.

证明.

1. 唯一性

   只要证明

$$\begin{cases} u_t-a^2u_{xx}=0 & -\infty<x<\infty \\ u(x,0)=0 \\ |u(x,t)|\leqslant 2B,\forall(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,T] \end{cases}$$

   只有零解.

   $\forall(x_0,t_0)\in\mathbb{R}\times[0,T]$, 要证 $u(x_0,t_0)=0$ $\forall L>0$, 令 $R_{t_0}=[x_0-L,x_0+L]\times[0,t_0]$

   构造 v 是(**??**)的解. 且 $v|_{\Gamma_{t_0}}\geqslant u|_{\Gamma_{t_0}}$

   观察到可以直接写出一个解

$$a^2t+\frac{x^2}{2}$$

   进而有

$$v(x,t)=C\left(a^2t+\frac{(x-x_0)^2}{2}\right)$$

   也是解

   则

$$v(x,0)=C\frac{(x-x_0)^2}{2}\geqslant 0\Rightarrow C>0$$

$$v(x_0-l,t)=C(a^2t+\frac{L^2}{2})\geqslant 2B$$

   $C\dfrac{L^2}{2}\geqslant 2B$ 取 $v(x,t)=\dfrac{4B}{L^2}\left(a^2t+\dfrac{(x-x_0)^2}{2}\right)$ 于是,$v-u$ 也是方程的解并且 $(v-u)|_{\Gamma_{t_0}}\geqslant 0$

   在 R_{t_0} 上对 $v-u$ 用极值原理, 可得

$$\min_{R_{t_0}}=\min_{\Gamma_{t_0}}(v-u)\geqslant 0$$

   故 $v\geqslant u\text{in } R_{t_0}$

   类似地, 对 $v+u$ 再用一次上述过程, 可知

$$\min_{R_{t_0}}(v+u)=\min_{\Gamma_{t_0}}(v+u)\geqslant 0$$

故 $u \geqslant -v$

因此 $|u(x,t)| \leqslant v(x,t)$

取 (x,t) 就是 (x_0,t_0), 则

$$|u(x_0,t_0)| \leqslant \frac{4B}{L^2}a^2t_0 \leqslant \frac{4Ba^2T}{L^2}, \forall L > 0$$

再让 $L \to \infty$, 则 $u(x_0,t_0) = 0$ 由任意性,

$$u \equiv 0$$

2. 稳定性

取

$$v(x,t) = \frac{4B}{L^2}\left(a^2t + \frac{(x-x_0)^2}{2}\right) + \varepsilon$$

□

例 2.4.6 (谷超豪第三版 P67,3)**.** 导出初边值问题

$$\begin{cases} u_t - a^2u_{xx} = f \\ u(0,t) = \mu_1(t) \\ (u_x + hu)(l,t) = \mu_2(t) \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

的解 $u(x,t)$ 在 $R_T : \{0 \leqslant t \leqslant T, 0 \leqslant x \leqslant l\}$ 中满足的估计.

$$u(x,t) \leqslant \mathrm{e}^{\lambda T}\max\left(0, \max_{0\leqslant x\leqslant l}\varphi(x), \max_{0\leqslant t\leqslant T}\left(\mathrm{e}^{-\lambda t}\mu_1(t), \frac{1}{h}\mathrm{e}^{-\lambda t}\mu_2(t)\right), \frac{1}{\lambda}\max_{R_T}(\mathrm{e}^{-\lambda t}f)\right),$$

其中 $\lambda > 0$ 为任意正常数.

证明. 根据提示, 作变换 $v = \mathrm{e}^{-\lambda t}u$, 即 $u = \mathrm{e}^{\lambda t}v$.

v 是初边值问题

$$\begin{cases} v_t - a^2v_{xx} = \mathrm{e}^{-\lambda t}f - \lambda v \\ v(0,t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}\mu_1(t) \\ (v_x + hv)(l,t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}\mu_2(t) \\ v(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

的解.

下证

$$v(x,t) \leqslant \max\left(0, \max_{0\leqslant x\leqslant l}\varphi(x), \max_{0\leqslant t\leqslant T}\left(\mathrm{e}^{-\lambda t}\mu_1(t), \frac{1}{h}\mathrm{e}^{-\lambda t}\mu_2(t)\right), \frac{1}{\lambda}\max_{R_T}(\mathrm{e}^{-\lambda t}f)\right).$$

设 v 在矩形 R_T 上的某点 (x_0,y_0) 处达到矩形上的最大值.

若 $v(x_0,t_0) \leqslant 0$, 那么已经成立 $v(x,t) \leqslant 0$.

下面在 $v(x_0,t_0) > 0$ 的前提下讨论 (x_0,t_0) 的位置.

1. 当 $(x_0,t_0)\in[0,l]\times\{t=0\}$
$$v(x_0,t_0)=\max_{0\leqslant x\leqslant l}\varphi(x)$$
$$v(x,t)\leqslant v(x_0,t_0)=\max_{0\leqslant x\leqslant l}\varphi(x),\forall\ (x,t)\in R_T$$

2. 当 $(x_0,t_0)\in\{x=0\}\times[0,T]$
$$v(x_0,t_0)=\max_{0\leqslant t\leqslant T}\mathrm{e}^{-\lambda t}\mu_1(t)$$
$$v(x,t)\leqslant v(x_0,t_0)=\max_{0\leqslant t\leqslant T}\mathrm{e}^{-\lambda t}\mu_1(t),\forall\ (x,t)\in R_T$$

3. 当 $(x_0,t_0)\in\{x=l\}\times[0,T]$, 有
$$v_x(l,t_0)\geqslant 0$$
又对任意 $(x,t)\in\{x=l\}\times[0,T]$, 有
$$(v_x+hv)(l,t)\leqslant\max_{0\leqslant t\leqslant T}\mathrm{e}^{-\lambda t}\mu_2(t)$$
所以有
$$v(l,t_0)\leqslant\frac{1}{h}\max_{0\leqslant t\leqslant T}\mathrm{e}^{-\lambda t}\mu_2(t)$$
$$v(x,t)\leqslant v(l,t_0)\leqslant\frac{1}{h}\max_{0\leqslant t\leqslant T}\mathrm{e}^{-\lambda t}\mu_2(t)$$

4. 当 $(x_0,t_0)\in R_T^{\circ}\cup[0,l]\times\{t=T\}$
有
$$v_t(x_0,t_0)\geqslant 0,v_{xx}(x_0,t_0)\leqslant 0$$
$$(\mathrm{e}^{-\lambda t}f-\lambda v)(x_0,t_0)=(v_t-a^2v_{xx})(x_0,t_0)\geqslant 0$$
$$v(x,t)\leqslant v(x_0,t_0)\leqslant\left(\frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda t}f\right)(x_0,t_0)\leqslant\frac{1}{\lambda}\max_{R_T}\mathrm{e}^{-\lambda t}f$$

命题得证! □

注记. 这道题目和我们之前证明唯一性与稳定性都不一样, 因为不管是唯一性还是稳定性, 你考虑的函数所满足的方程的非齐次项都为零, 这样我们才能够使用极值原理（事实上,$f<0$ 也可以）. 所以我们这里绝不是用极值原理来证明.

首先, 暂不考虑提示给的变换, 我们直接看看能做些什么. 放眼望去, 有关 $\varphi(x),\mu_1(t),\mu_2(t)$ 的估计都是我们熟悉的, 在有极值原理的时候, 我们知道一定在抛物边界上取到最大值, 然后用这三个东西控一下就好了; 然而, 今天我们没有极值原理, 这就意味着最大值还有可能出现在矩形的内部或矩形的上边那条边, 这种情况该怎么控呢? 这正是本题非常值得我们学习的地方, 通过作一个变换 $u=\mathrm{e}^{\lambda t}v$, 给满足的方程凭空增添出一项 λv, 这样我们就希望建立起 v 与 f 的关系, 毕竟他们已经出现在了同一个等式中.

我们再来看一下 $u(x,t)$ 的上界估计, 当 λ 很小的时候, 虽然此时前几项的值都很小, 但是 $\dfrac{1}{\lambda}\max\limits_{R_T}(\mathrm{e}^{-\lambda t}f)$ 的值会炸掉; 当 λ 很大时, 虽然 $\dfrac{1}{\lambda}\max\limits_{R_T}(\mathrm{e}^{-\lambda t}f)$ 的值变小的, 但是前面的值又炸了, 而我们总是取这几项之中的最大值的, 这意味着我们必须找一个合适的 λ 来获得比较优的估计.

2.5 能量方法

考虑齐次的初边值问题

$$u_t - \Delta u = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T), \quad u(x,0) = 0, \quad u(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega$$

在方程两侧同乘 u, 得到 $uu_t - u\Delta u = 0$. 变形得到

$$uu_t = \frac{1}{2}\partial_t u^2, \quad u\Delta u = \sum_{i=1}^n uu_{x_i x_i} = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}(uu_{x_i}) - \sum_{i=1}^n u_{x_i}u_{x_i} = \mathrm{div}(u\nabla u) - |\nabla u|^2$$

$$uu_t - u\Delta u = \frac{1}{2}\partial_t u^2 - \mathrm{div}(u\nabla u) + |\nabla u|^2 = 0 \Longrightarrow \frac{1}{2}\partial_t \int_\Omega u^2 \mathrm{d}x - \int_\Omega \mathrm{div}(u\nabla u)\mathrm{d}x + \int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x = 0$$

$$\int_\Omega \mathrm{div}(u\nabla u)\mathrm{d} = \int_{\partial\Omega} u\nabla u \cdot \vec{n}\mathrm{d}S = 0 \Longrightarrow \frac{1}{2}\partial_t \int_\Omega u^2 \mathrm{d}x + \int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x = 0$$

$$E(t) := \frac{1}{2}\int_\Omega u^2(x,t)\mathrm{d}x \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x \Longrightarrow E(t) \leqslant E(0) = 0 \Longrightarrow u \equiv 0.$$

2.6 倒向唯一性

$$E(u)=\int_\Omega |u|^2\mathrm{d}x$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(t)=-2\int_\Omega |\nabla u|^2\mathrm{d}x$$

定理 2.6.1 (倒向唯一性)**.** 设 $u_1,u_2\in C^2(\Omega\times[0,T])$ 是方程

$$\begin{cases} u_t-\Delta u=0 & (2.52\text{a})\\ u(x,t)\big|_{\partial\Omega}=g(x,t)\quad 0\leqslant t\leqslant T & (2.52\text{b})\end{cases}$$

且 $u_1\equiv u_2$ 对于 $(x,y)\in\Omega\times t=T$, 则 $u_1\equiv u_2$ 对于 $(x,y)\in\Omega\times t=0$

证明. 只要证明

$$\begin{cases} u_t-\Delta u=0 & (2.53\text{a})\\ u(x,t)\big|_{\partial\Omega}=0 & (2.53\text{b})\\ u(x,T)=0 & (2.53\text{c})\end{cases}$$

则 $u(x,0)\equiv 0$.

令 $E(t)=\displaystyle\int |u|^2\mathrm{d}x$

则 $E'(t)=2\displaystyle\int uu_t\mathrm{d}x=2\int u\Delta u\mathrm{d}x=-2\int|\nabla u|^2\mathrm{d}x$

$$u\Delta u=\operatorname{div}(u\nabla u)-|\nabla u|^2$$

$$E(T)-E(0)=-2\int_0^T\int|\nabla u|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

$$E''(t)=-4\int\nabla u\nabla u_t\mathrm{d}x=4\int\Delta u u_t\mathrm{d}x=4\int|\Delta u|^2\mathrm{d}x$$

$$E'(t)=2\int u\Delta u\mathrm{d}x\leqslant 2\left(\int u^2\mathrm{d}x\right)^2\left(\int|\Delta u|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$E'(t)^2\leqslant E(t)E''(t)$$

要证 $E(t)\equiv 0,\forall t\in[0,T)$

否则, 存在 $[T_1,T_2]\subset[0,T]$, 使得 $t\in[T_1,T_2)$,$E(t)>0$ 但 $E(T_2)=0$

$$\frac{E'(t)}{E(t)}\leqslant\frac{E''(t)}{E'(t)}$$

令 $f(t)=\log E(t)$, 则 $f'(t)=\dfrac{E'(t)}{E(t)}$,$f''(t)=\dfrac{E''(t)}{E(t)}-\dfrac{E'(t)^2}{E(t)^2}=\dfrac{E''(t)E(t)-E'(t)^2}{E(t)^2}\geqslant 0$

故 $f(t)$ 是凸函数, 故 $f((1-\tau)T_1+\tau T_2)\leqslant(1-\tau)f(T_1)+\tau f(T_2)$

$$E((1-\tau)T_1+\tau T_2)\leqslant E(T_1)^{1-\tau}E(T_)^\tau=0$$

所以 $E(t)\equiv 0,\forall t\in[T_1,T_2]$ □

Chapter 3 位势方程

当时间趋于无穷时, 扩散方程可能会达到稳态解, 此时扩散方程退化为泊松方程 $\Delta u = f$, 若无源则得到拉普拉斯方程 $\Delta u = 0$. 可以看到研究的主角是拉普拉斯算子 Δ.

同学们第一次接触拉普拉斯算子 Δ 可能是在学习矢量分析时, 定义了函数的梯度和向量场的散度后, 我们定义拉普拉斯算子 Δ 为函数的梯度的散度, 在欧式空间中具有表达式

$$\Delta u = \partial_1^2 u + \partial_2^2 u + \cdots + \partial_n^2 u.$$

函数 u 在某点 x 的拉普拉斯的意义是该点的值 $u(x)$ 偏离其周围邻域的平均值的程度, 这一点在教学中似乎没有得到充分强调. 从泰勒展开的角度来看

$$u(x+h) - u(x) = \sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i} h_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j + O(r^3), \quad h \in \partial B(x,r).$$

对 $h \in \partial B(x,r)$ 进行积分, 式子中出现的导数都是与 h 无关的常值. 对固定的 i 和 $i \neq j$,

$$\int_{\partial B(x,r)} h_i \ \mathrm{d}S = 0, \quad \int_{\partial B(x,r)} h_i h_j \ \mathrm{d}S = 0.$$

上面积分为零是因为被抵消掉了. 所以上述泰勒展开后的式子积分得到

$$\frac{1}{4\pi r^2} \int_{\partial B(x,r)} u(x+h) - u(x) \ \mathrm{d}S \approx \frac{1}{4\pi r^2} \frac{1}{2} \sum_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \int_{\partial B(x,r)} h_i^2 \ \mathrm{d}S$$

$$\int_{\partial B(x,r)} h_i^2 \ \mathrm{d}S = \int_{\partial B(x,r)} h_j^2 \ \mathrm{d}S = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^{3} \int_{\partial B(x,r)} h_j^2 \ \mathrm{d}S = \frac{1}{3} \times 4\pi r^2 \times r^2$$

$$\frac{1}{4\pi r^2} \int_{\partial B(x,r)} u(x+h) - u(x) \ \mathrm{d}S \approx \frac{r^2}{6} \Delta u$$

但我仍不满足, 我想在梯度的散度与函数值偏离平均值的程度这二者之间建立直观联系

$$u(y) - u(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u\big(x + t(y-x)\big) \, \mathrm{d}t = r \int_0^1 \nabla u\big(x + tr\nu\big) \cdot \nu \, \mathrm{d}t.$$

这里其实就能看出来了, 我们将 $u(y)$ 与 $u(x)$ 的差值与梯度建立了联系, 再将 $u(y)$ 在球面上积分, 所以自然会出现梯度在球面上的积分, 由散度定理, 就转化到了梯度的散度.

$$\int_{\partial B_r(x)} (u - u(x)) \, \mathrm{d}S_y = r \int_0^1 \int_{\partial B_r(x)} \nabla u\big(x + t(y-x)\big) \cdot \nu \, \mathrm{d}S_y \, \mathrm{d}t.$$

$$\int_{\partial B_r(x)} \nabla u\big(x + t(y-x)\big) \cdot \nu \, \mathrm{d}S_y = t^{-2} \int_{\partial B_{tr}(x)} \nabla u(z) \cdot \nu \, \mathrm{d}S_z, \quad z = x + t(y-x).$$

$$\int_{\partial B_{tr}(x)} \nabla u\cdot\nu\,\mathrm{d}S=\int_{B_{tr}(x)}\Delta u\,\mathrm{d}V \Longrightarrow \int_{\partial B_r(x)}(u-u(x))\,\mathrm{d}S = r\int_0^1 t^{-2}\int_{B_{tr}(x)}\Delta u\,\mathrm{d}V\,\mathrm{d}t.$$

$$\int_{B_{tr}(x)}\Delta u\,\mathrm{d}V=\Delta u(x)\,\frac{4\pi}{3}(tr)^3+o(r^3),\quad \mathrm{RHS}=r\cdot\Delta u(x)\cdot\frac{4\pi}{3}r^3\int_0^1 t^{-2}\,t^3\,dt+o(r^4)=\frac{2}{3}\pi r^4\,\Delta u(x)+o(r^4).$$

$$\frac{1}{4\pi r^2}\int_{\partial B_r(x)} u\,\mathrm{d}S=u(x)\ +\ \frac{r^2}{6}\,\Delta u(x)\ +\ o(r^2).$$

我们希望这些计算能使读者更好相信拉普拉斯算子确实是对函数值与平均值的差异的衡量. 调和函数是满足 $\Delta u=0$ 的函数, 按照我们上面对拉普拉斯算子的理解, 我们可以期待调和函数的函数值等于其邻域的平均值, 这将在接下来的第一节中给出严格的表述与证明.

最后我想提到, 在有限差分方法中, Δ 的离散格式是

$$\Delta u_{i,j}\approx\frac{u_{i+1,j}+u_{i-1,j}+u_{i,j+1}+u_{i,j-1}-4u_{i,j}}{h^2}.$$

在计算机图形学中, 我们使用拉普拉斯过滤算法对网格进行平均化使其更加光滑.

3.1 平均值性质

在本节中, 我们将定义平均值性质, 并指出 $u \in C^2(\Omega)$ 是调和函数当且仅当它满足平均值性质. 比较令人惊讶的一个结论是, 条件里其实不需要光滑性的要求, 一个满足平均值性质的连续函数可以推出它是光滑的. 最后, 我们利用平均值性质给出调和函数偏导数的估计, 并证明调和函数是解析的.

定义 3.1.1. 设 $u \in C(\Omega)$, 称 u 满足平均值性质, 如果以下等价的两个条件成立

$$u(x) = \frac{1}{4\pi r^2}\int_{\partial B(x,r)} u(y)\,\mathrm{d}S(y), \quad \forall B(x,r) \Subset \Omega. \quad u(x) = \frac{3}{4\pi r^3}\int_{B(x,r)} u(y)\,\mathrm{d}y, \quad \forall B(x,r) \Subset \Omega.$$

证明.

$$4\pi r^2 u(x) = \int_{\partial B(x,r)} u(y)\,\mathrm{d}S(y) \Longrightarrow \int_0^\rho 4\pi r^2 u(x)\mathrm{d}r = \int_0^\rho \int_{\partial B(x,r)} u(y)\,\mathrm{d}S(y)\mathrm{d}r \Longrightarrow \frac{4}{3}\pi\rho^3 u(x) = \int_{B(x,\rho)} u(y)\,\mathrm{d}y.$$

$$r^3 u(x) = \frac{3}{4\pi}\int_{B(x,r)} u(y)\,\mathrm{d}y = \frac{3}{4\pi}\int_0^r \int_{\partial B(x,\rho)} u(y)\,\mathrm{d}S(y)\mathrm{d}\rho \Longrightarrow 3r^2 u(x) = \frac{3}{4\pi}\int_{\partial B(x,r)} u(y)\,\mathrm{d}S(y).$$

□

注记. 如果不要求 $B(x,r)$ 的闭包在 Ω 中, 那上述两个积分的良定性都需要额外的保证, 特别是在球面上积分, 可能函数在球面上都没有定义. 你如果要说, 我的平均值性质, 就是保证这样的积分都能有定义, 那这也太 *subtle* 了. 所以现在要求 $B(x,r) \Subset \Omega$.

定理 3.1.2. 若 $u \in C^2(\Omega)$ 在 Ω 内调和, 则 u 满足平均值性质.

证明. 其实本章序言中得到的公式

$$\int_{\partial B_r(x)} (u - u(x))\,\mathrm{d}S = r\int_0^1 t^{-2}\int_{B_{tr}(x)} \Delta u\,\mathrm{d}V\,\mathrm{d}t$$

已经可以证明. 如果将

$$\frac{1}{4\pi r^2}\int_{\partial B_r(x)} u(y)\,\mathrm{d}S$$

视作关于 r 的函数, 该式就是直接证明了 r 和 0 时函数值相等. 另一种证明思路是关于 r 求导.

$$\frac{1}{4\pi r^2}\int_{\partial B(x,r)} u(y)\mathrm{d}S(y) = \frac{1}{4\pi r^2}\int_{\partial B(0,1)} u(x+rz)\mathrm{d}S(x+rz) = \frac{1}{4\pi}\int_{\partial B(0,1)} u(x+rz)\mathrm{d}S(z)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{1}{4\pi}\int_{\partial B(0,1)} u(x+rz)\mathrm{d}S(z)\right) = \frac{1}{4\pi}\int_{\partial B(0,1)} (\nabla u)(x+rz)\cdot z\mathrm{d}S(z) = \frac{1}{4\pi}\int_{B(0,1)} \Delta u(x+rz)\mathrm{d}z = 0$$

□

定理 3.1.3. 若 $u \in C^2(\Omega)$ 在 Ω 内满足平均值性质, 那么 u 是调和的.

证明. 在上一个定理的证明中事实上我们得到了

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{1}{4\pi r^2}\int_{\partial B(x,r)} u(y)\mathrm{d}S(y)\right) = \frac{1}{4\pi r^3}\int_{B(x,r)} \Delta u(y)\mathrm{d}y$$

若 u 满足平均值性质, 则上式左侧为零. 由 x, r 的任意性, 易从 $\Delta u(x_0) \neq 0$ 导出矛盾. □

接下来一个定理说明上一个定理中的光滑性要求其实可以去掉, 我们可以从连续性与平均值性质自动得到光滑性. 该定理的证明使用到磨光作为工具. 在分析学中, 有一个标准技术可以将一个不够光滑的函数（比如仅仅是连续的 u）变得无穷光滑, 这个技术叫做磨光或正则化. 我们通过将 u 与一个非常集中的、无穷光滑的“权重函数”（称为磨光核）进行卷积, 来得到一个“加权平均”后的新函数 u^ε. 根据卷积的性质, 这个新函数 u^ε 必然是无穷光滑的. 通常, u^ε 只是 u 的一个很好的近似, 但在我们今天的情境中, 我们将利用 u 所满足的平均值性质, 通过一系列巧妙的积分变换, 来证明 u^ε 并不仅仅是 u 的近似, 而是精确地等于 u.

定义 3.1.4. *称 $\eta\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是一个标准磨光核, 如果 $\eta \in C_c^\infty(B(0,1))$, $\int_{\mathbb{R}^3} \eta(x)\mathrm{d}x = 1$, $\eta(x) \geqslant 0$.*

在实际应用中, 我们使用的不是单个的磨光核, 而是一个由标准磨光核 η 生成的、依赖于参数 ε 的函数族 η_ε. 这个函数族的定义是

$$\eta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

其中 n 是空间维度. 这个函数族随着 $\varepsilon \to 0$ 表现出三个关键行为

1. 支撑集收缩: 函数只在半径为 ε 的小球 $B(0,\varepsilon)$ 内非零. 当 $\varepsilon \to 0$, 它的作用范围收缩到一个点.
2. 总积分保持为 1: 对于任何 $\varepsilon > 0$, 我们总是有 $\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x)dx = 1$.
3. 函数值高耸: 为了保持总积分为 1, 当支撑集缩小时, 函数在中心点的值必须 $\eta_\varepsilon(0) \to \infty$.

直观上, 这个磨光核家族 η_ε 在 $\varepsilon \to 0$ 的极限下, 表现得就像狄拉克 δ 函数. 但它的巨大优势在于, 对于任何大于零的 ε, η_ε 都是一个行为良好、可以进行任意微积分运算的光滑函数. 这正是它能够“搭建”从粗糙世界到光滑世界桥梁的原因.

定理 3.1.5. *若 $u \in C(\Omega)$ 在 Ω 内满足平均值性质, 则 u 是光滑的.*

证明. 令 η 是一个径向的 $\eta(x) = \eta(|x|)$ 的标准磨光核, 定义 $u^\varepsilon = (u * \eta_\varepsilon)(x) = \int_\Omega \eta_\varepsilon(x-y)u(y)\mathrm{d}y$.

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega \mid \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$$

是 u^ε 的定义域. 对固定的 $x \in \Omega$ 总能找到 ε 使得 $x \in \Omega_\varepsilon$. 在此不加证明地使用 u^ε 光滑的结论.

$$\begin{aligned}
u^\varepsilon(x) &= \int_\Omega \eta_\varepsilon(x-y)u(y)\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{\varepsilon^3}\int_{B(x,\varepsilon)} \eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right)u(y)\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{\varepsilon^3}\int_0^\varepsilon \int_{\partial B(x,r)} \eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right)u(y)\mathrm{d}S(y)\mathrm{d}r \\
&= \frac{1}{\varepsilon^3}\int_0^\varepsilon \int_{\partial B(x,r)} \eta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)u(y)\mathrm{d}S(y)\mathrm{d}r \\
&= \frac{1}{\varepsilon^3}\int_0^\varepsilon \eta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)\left(\int_{\partial B(x,r)} u(y)\mathrm{d}S(y)\right)\mathrm{d}r \\
&= \frac{1}{\varepsilon^3}\int_0^\varepsilon \eta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)4\pi r^2 u(x)\mathrm{d}r \\
&= \frac{1}{\varepsilon^3}u(x)\int_0^\varepsilon 4\pi r^2\eta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)\mathrm{d}r
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\varepsilon^3} u(x) \int_0^\varepsilon \int_{\partial B(0,r)} \eta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) \mathrm{d}S \mathrm{d}r \\
&= \frac{1}{\varepsilon^3} u(x) \int_{B(0,\varepsilon)} \eta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) \mathrm{d}V \\
&= u(x)
\end{aligned}
$$

□

3.2 梯度估计

下面利用平均值公式来给出调和函数偏导数的估计, 然后以此来证明调和函数是解析函数. 由 u 调和显然有 u_{x_i} 也调和, 对 u_{x_i} 使用平均值性质

$$\begin{aligned}
|u_{x_i}(x_0)| &= \left|\frac{3}{4\pi r^3}\int_{B(x_0,r)} u_{x_i}(y)\mathrm{d}y\right| \\
&= \left|\frac{3}{4\pi r^3}\int_{\partial B(x_0,r)} u\nu_i \mathrm{d}S\right| \\
&\leqslant \frac{3}{4\pi r^3}\int_{\partial B(x_0,r)} |u|\mathrm{d}S \\
&\leqslant \frac{3}{4\pi r^3}4\pi r^2 \max_{\partial B(x_0,r)}|u| \\
&= \frac{3}{r}\max_{\partial B(x_0,r)}|u| \\
&\leqslant \frac{3}{r}\max_{\overline{B(x_0,r)}}|u|
\end{aligned}$$

上述推导需要要求 u_{x_i} 在 $\partial B(x_0,r)$ 上是连续的, 有人选择在命题条件里加上这个要求, 有人选择说 $B(x_0,r)\subset\Omega$ 然后在 $B(x_0,r/2)$ 上积分, 有人选择说 $B(x_0,r)\Subset\Omega$. 我选择最后这种做法. 如果将 u_{x_i} 替换成 ∇u, 只不过将第二行的 ν_i 相应替换成 $\vec{n}$, 其余的部分都是一样的因为 $\vec{n}$ 的模长也不超过 1.

上面最后将在 $\partial B(x_0,r)$ 上取最大值放缩到在 $\overline{B(x_0,r)}$ 上取最大值是为了得到接下来的结论时更干净方便. 由后面的极值原理我们会知道最后的不等号其实也是等号, 所以没有损失任何信息. 以上估计是对 u_{x_i} 在某点处 x_0 的估计. 我们也可以得到对 u_{x_i} 在 $B(x_0,\rho)$ 上的估计, 其中 $\rho<r$, 即

$$\max_{\overline{B(x_0,\rho)}}|u_{x_i}(x_0)| \leqslant \frac{3}{r-\rho}\max_{\overline{B(x_0,r)}}|u|.$$

我们还可以从上述对一阶偏导数的估计直接得到一个对高阶偏导数的估计, 假设我们想要得到一个 k 阶偏导数 $|D^\alpha u(x_0)|$ 的使用 $\max\limits_{\overline{B(x_0,R)}}|u|$ 的估计, 我们只需要使用 k 次一阶偏导数的估计, 每次的半径为 R_i, 并且有 $R_1+\cdots+R_k=R$, 这样我们就得到估计

$$|D^\alpha u(x_0)| \leqslant \frac{3^k}{R_1\cdots R_k}\max_{\overline{B(x_0,R)}}|u| \leqslant \frac{3^k k^k}{R^k}\max_{\overline{B(x_0,R)}}|u|.$$

以上估计并不是最优的, 我们可以使用 Poisson 核得到更优的估计.

梯度估计的一个直接推论是

推论 3.2.1. *$\mathbb{R}^3$ 上的有界调和函数是常数.*

证明.

$$|\nabla u(x_0)| \leqslant \frac{3}{r}\max_{\overline{B(x_0,r)}}|u| \leqslant \frac{3}{r}M \longrightarrow 0.$$

□

定理 3.2.2. *调和函数是解析的.*

证明. 任取 $x_0\in\Omega$. 可以选取 $R>0$ 使得 $\overline{B(x_0,2R)}\subset\Omega$. 令 $M=\max\limits_{y\in\overline{B(x_0,2R)}}|u(y)|$. 对 $x\in B(x_0,R)$,

$$u(x)=\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{|\alpha|=k}\frac{D^\alpha u(x_0)}{\alpha!}(x-x_0)^\alpha + R_N(x), \quad |R_N(x)| \le \sum_{|\alpha|=N}\frac{|(x-x_0)^\alpha|}{\alpha!}\sup_{z\in\overline{B(x_0,R)}}|D^\alpha u(z)|.$$

$$\sup_{z\in B(x_0,R)}|D^\alpha u(z)| \le \frac{n^N N^N}{R^N}\max_{y\in B(x_0,2R)}|u(y)| \le \frac{n^N N^N M}{R^N}, \quad |R_N(x)| \le \sum_{|\alpha|=N}\frac{|x-x_0|^N}{\alpha!}\frac{n^N N^N M}{R^N}$$

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)^N = \sum_{|\alpha|=N}\frac{N!}{\alpha!}x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n} \Longrightarrow n^N = \sum_{|\alpha|=N}\frac{N!}{\alpha!} \Longrightarrow \sum_{|\alpha|=N}\frac{1}{\alpha!} = \frac{n^N}{N!}$$

$$|R_N(x)| \le \frac{n^N}{N!}|x-x_0|^N\frac{n^N N^N M}{R^N} < M\cdot\left(\frac{en^2|x-x_0|}{R}\right)^N \longrightarrow 0, \quad \frac{en^2|x-x_0|}{R} < 1$$

$\square$

3.3 Harnack 不等式

定理 3.3.1. *对于 Ω 中的任意连通紧集 K, 存在常数 $C = C(\Omega, K)$, 使得对于 Ω 中非负调和函数有*

$$C^{-1}u(y) \leqslant u(x) \leqslant Cu(y), \quad \forall x, y \in K.$$

证明. 设 $R = \mathrm{dist}(K, \partial\Omega)/4$. 考虑一点 $y \in B(x, R)$, 有 $B(y, R) \subset B(x, 2R)$, 由平均值性质

$$u(x) = \frac{3}{4\pi(2R)^3}\int_{B(x,2R)} u(z)\mathrm{d}z \geqslant \frac{3}{4\pi(2R)^3}\int_{B(y,R)} u(z)\mathrm{d}z = \frac{1}{8}u(y).$$

上式中的大于等于号用到了 u 非负的条件. 用半径为 R 的开球覆盖 K, 由有限覆盖定理, 存在有限个球覆盖 K, 设个数为 N. 任取 K 中的两点 x, y, 最多经过 N 次上述过程, 便可以从 x 得到 y. □

对于一个给定的非负调和函数 u, 它在紧集 K 上能取到最大值和最小值, 进而都是有限值, 因此值与值之间一定是可以互相比较的, 这是平凡的. 而 Harnack 不等式论述的是对于任意的非负调和函数, 存在一个相同的 C, 这是不平凡的. 这种一致性使得我们可以处理调和函数序列的收敛问题.

命题 3.3.2 (三维球上的 Harnack 不等式)**.** *设 u 在 $B(x_0, R)$ 内调和, 且 $u \geqslant 0$, 则*

$$\frac{R}{R+r}\frac{R-r}{R+r}u(x_0) \leqslant u(x) \leqslant \frac{R}{R-r}\frac{R+r}{R-r}u(x_0)$$

其中 $r = |x - x_0| < R$

证明. 结合 Poisson 公式易证. □

推论 3.3.3. *若 u 是 $\mathbb{R}^3$ 上的上有界或下有界的调和函数, 则 u 是常数.*

3.4 可去奇点定理

定理 3.4.1 (可去奇点定理)**.** 设 u 在 $B(0,R)\backslash\{0\}$ 内调和且满足

$$u(x)=\begin{cases} o\left(\log|x|\right) & \dim=2 \\ o\left(\dfrac{1}{x}\right) & \dim=3 \end{cases} \text{ as } |x|\to 0,$$

则可在原点处定义 u 的值, 使得 $u\in C^2(B(0,R))$ 且 u 在 $B(0,R)$ 内调和.

证明. 只证 $n=3$ 的情形.

令 v 满足

$$\begin{cases} \Delta v=0 & \text{in } B(0,R) \quad (3.1a) \\ v=u & \text{on } \partial B(0,R) \quad (3.1b) \end{cases}$$

v 的存在性是由球上的泊松公式保证的.

v 的有界性是由极值原理保证的

注记. 我认为这里有一个有助于加深对该定理理解的观察是, 即使 u 在原点处的值爆掉了, 不满足定理的条件, 我也总可以找出这样一个 v, 使得它在边界处的值与 u 相同, 并且在球内是调和的.

另一个观察是,v 满足的方程的解事实上是唯一的, 但是这并不能使我们直接说明 $u\equiv v$, 因为 u 满足的方程实际上是

$$\Delta u=0 \text{ in } B(0,R)\backslash\{0\},$$

但我们要证明的是 v 在 $B(0,R)\backslash\{0\}$ 上恒等于 u, 如果确实如此, 我们就可以把 v 在 0 处的值定义为 u 在 0 处的值.

这就给我一个冲动去挖掉原点处的一个半径任意小的一个闭球, 如果我能证明在挖掉之后的区域内解是唯一的, 我就能证明 $u\equiv v$ on $B(0,R)\backslash\{0\}$.

但我们遇到的困难是, 我们不知道 u 与 v 在 $\partial B(0,\delta)$ 上的取值的情况, 如果我们知道他俩在 $\partial B(0,\delta)$ 上相等, 那就直接可以用极值原理证出来了. 但是! 我要是知道他俩在 $\partial B(0,\delta)$ 上相等, 其中的 δ 还有任意性, 那我还证个锤子啊! 所以是不必去幻想知道 u 与 v 在 $\partial B(0,\delta)$ 上相等了.

此外, 你有理由相信 u 在原点附近满足的阶数的条件在讨论 $\partial B(0,\delta)$ 上的情况时会发挥重要的作用.

要证两个东西恒等, 自然要考虑它们的差. 令 $w=v-u$, 它满足

$$\begin{cases} \Delta w=0 & \text{in } B(0,R)\backslash\{0\} \quad (3.2a) \\ w=0 & \text{on } \partial B(0,R) \quad (3.2b) \end{cases}$$

还是那句话, 我要证明的是在 $B(0,R)\backslash\{0\}$ 上 $w\equiv 0$, 我的手段是在 $B(0,R)\backslash B(0,\delta)$ 上运用极值原理, 我的困境是我不清楚 w 在 $\partial B(0,\delta)$ 上的情况, 我能借助的条件是 u 在原点处满足的估计.

以上便是现阶段我能给出的最大程度的直觉上的理解, 下面还是有一些值得学习的技术性的东西的.

设 $W(x)=\dfrac{1}{|x|}-\dfrac{1}{R}$, 则有

$$\begin{cases} \Delta w=0 & \text{in } B(0,R)\backslash\{0\} \\ w=0 & \text{on } \partial B(0,R) \end{cases},$$

$$\lim_{|x|\to 0}\frac{w(x)}{W(x)}=0,$$

也就是说, 对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 只要 $0<|x|\leqslant\delta$, 便有

$$\left|\frac{w(x)}{W(x)}\right|<\varepsilon,$$

即

$$-\varepsilon W(x)<w(x)<\varepsilon W(x), x\in B(0,\delta)\setminus\{0\}.$$

注记. 接下来要做的事就是用极值原理把上面这个不等关系推广到 $B(0,R)\setminus\{0\}$ 上. 不对不对, 上面这句话不对, 因为你看, 假使我们在 $B(0,R)\setminus\{0\}$ 上有这个不等关系, 我们也不可以令 ε 趋于 0 来得到在 $B(0,R)\setminus\{0\}$ 上 $w(x)\equiv 0$, 因为在原点附近 $W(x)$ 是爆掉的. 所以接下来要做的事就是用极值原理把上面这个不等关系推广到 $B(0,R)\setminus B(0,\delta)$ 上.

考虑 $\varepsilon W-w$, 它满足

$$\begin{cases}\Delta(\varepsilon W-w)=0 & \text{in } B(0,R)\setminus B(0,\delta)\\ \varepsilon W-w=0 & \text{on } \partial B(0,R)\\ \varepsilon W-w>0 & \text{on } \partial B(0,\delta)\end{cases}$$

由极值原理, 在 $B(0,R)\setminus B(0,\delta)$ 上有 $\varepsilon W-w\geqslant 0$.

取定 ε 后,δ 可以任意小（但不能任意大）, 因此上式在 $B(0,R)$ □

注记. 虽然这个定理叫可去奇点定理, 但实际上, 并不是说那里有一个奇点; 在这个条件下, 那里的奇点其实是不存在的. 这个定理实际上是告诉我们如果那里有一个奇点, 它的增长速率有一个下界.

3.5 极值原理

定理 3.5.1 (强极值原理)**.** 假设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 上的有界开集,$u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ 是 Ω 上的调和函数, 则

(1) $u(x)$ 在 $\bar{\Omega}$ 上的最大（小）值一定在边界 $\partial\Omega$ 上达到, 即

$$\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

(2) 如果 Ω 是连通的, 且存在 $x_0 \in \Omega$ 使得调和函数 $u(x)$ 在 x_0 点达到 $u(x)$ 在 $\bar{\Omega}$ 上的最大（小）值, 则 u 在 $\bar{\Omega}$ 上是常数.

证明. 略. □

注记. 如果只有定理 3.5.1 中结论 (1) 成立, 我们通常称之为弱极值原理.

推论 3.5.2. 用强极值原理证明方程

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u(x) = g(x) & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

经典解的唯一性.

证明. 假设有两个解 $u_1, u_2 \in C(\bar{\Omega})$, 考虑 $w = u_1 - u_2$,w 满足的方程是

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & in\ \Omega \quad (3.3a) \\ w(x) = 0 & on\ \partial\Omega \quad (3.3b) \end{cases}$$

由弱极大值原理知 $w \equiv 0\ in\ \bar{\Omega}$.

经典解的唯一性得证！ □

定理 3.5.3 (次调和函数的弱极值原理)**.** 若 $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ 是 Ω 上的次调和函数, 即

$$\Delta u \geqslant 0 \quad \text{in } \Omega,$$

则有

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\Gamma} u.$$

证明. 令 $v(x) = u(x) + \varepsilon|x|^2$, 则 $\Delta v = \Delta u + 2n\varepsilon > 0$

若 $v(x)$ 在 $x_0 \in B_1$ 内部达到最大值, 则 $\Delta v \leqslant 0$, 矛盾.

因此 v 在边界达到最大值, 即

$$\sup_{x \in B_1} v \leqslant \sup_{\partial B_1} v$$

$$\sup_{x \in B_1} u \leqslant \sup_{x \in B_1} v \leqslant \sup_{\partial B_1} v = \sup_{\partial B_1}(u + \varepsilon) = \sup_{\partial B_1} u + \varepsilon$$

令 $\varepsilon \to 0$, 则命题得证. □

定理 3.5.4 (最大模估计)**.** 设 $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ 是

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega \quad (3.4a) \\ u = \varphi & \text{on } \partial\Omega \quad (3.4b) \end{cases}$$

的解, 令 $F = \sup_{x \in \Omega} |f(x)|, \Phi = \max_{x \in \partial\Omega} |\varphi(x)|$, 则存在 $C = C(n, \Omega)$, 使得

$$\max_{\overline{\Omega}} |u| \leqslant \Phi + CF$$

注记. 我要用弱极值原理来弄它. 弱极值原理告诉我们什么呢? 如果你能在边界上控住它的值, 那你就能在整个区域上控住它的值. 那首先你要构造的这玩意, 就得能在边界上控住他,u 在边界上是谁呢? 最大是 Φ, 所以你要构造那玩意得带个 Φ. 我要用极值原理, 那拉普拉斯之后得大于等于零,u 拉普拉斯完之后是 f, 其绝对值最大是 F, 因此我想控他的话我构造的东西拉普拉斯完得带 F, 很容易想的就是我把 F 放到系数的位置, 然后你脑子里得装一些拉普拉斯完之后恒正的东西, 最好拉普拉斯完得到的还是常数, 如果得到常数不够用也要尽可能地简单, 我在拉普拉斯完恒正的东西前加一个负号, 就能得到拉普拉斯完恒负的东西. 然后你现在把你想要达成的两个目的想清楚了, 在具体构造的时候还要注意不能让两边打架,Φ 对 F 这边影响是很小的, 如果你只放一个常数 Φ 的话, 拉普拉斯一下他就没了, 但是你得考虑你 F 这边构造的项在边界上会不会变成负的东西, 最简单的是我给我构造的 F 的部分加上一个常数项来修正, 因为常数在拉普拉斯完之后就没了所以对我原来构造 F 的目的没有任何影响, 我又能靠这个常数保证 F 部分恒正, 不会给 Φ 部分拖后腿. 以上这些都是马后炮, 你让我自己去想不见得啥时候能想出来, 如果你不先给我讲个极值原理我连要用极值原理去证都想不到.

证明. 不妨设 $\Omega \subset \{x|0 \leqslant x_1 \leqslant d\}$

令 $v(x)=\Phi+\left(\mathrm{e}^{ad}-\mathrm{e}^{ax_1}\right)F$,$a>1$, 则

$$\Delta(u-v)=f+a^2\mathrm{e}^{ax_1}F \geqslant f+F \geqslant 0$$

$$(u-v)|_{\partial\Omega}=\varphi-v|_{\partial\Omega} \leqslant \varphi-\Phi \leqslant 0$$

由弱极值原理,$u-v \leqslant 0$

即 $u(x) \leqslant v(x)=\Phi+\left(\mathrm{e}^{ad}-\mathrm{e}^{ax_1}\right)F \leqslant \Phi+\left(\mathrm{e}^{ad}-1\right)F \leqslant \Phi+CF$ □

注记. 如何证明自己初步搞懂了这个证明? 你再自己写一个辅助函数出来就好了……

$$v(x)=\Phi+(d^2-x_1^2)F$$

x_1^2, 或 $|x|^2$, 就是我说的拉普拉斯完恒正还是常数的好东西, 常数它简单啊, 恒正它好啊, 不过之后我们可能会看到常数可能是有局限性的? 虽然我们可以在前面加一个 ε 变成可调大小的 $\varepsilon|x|^2$, 但是 ε 一般是用来最后趋于零的, 有时候还希望拉普拉斯完之后的东西足够大就不行了.

命题 3.5.5 (内部梯度估计)**.** 设 u 在 B_1 内调和, 则有

$$\sup_{B_{1/2}}|Du| \leqslant C\sup_{\partial B_1}|u|$$

其中 $C=C(n)$ 是依赖于维数 n 的正的常数.

证明.

$$\partial_1(fg)=f_1g+fg_1$$

$$\partial_1^2(fg)=f_{11}g+2f_1g_1+fg_{11}$$

$$\Delta(fg)=(\Delta f)g+2\nabla f\cdot\nabla g+f(\Delta g)$$

$$\Delta(\varphi|Du|^2)=(\Delta\varphi)|Du|^2+2\sum_{i=1}^n\left(\partial_i\varphi\right)\left(\partial_i|Du|^2\right)+\varphi(\Delta|Du|^2)$$

$$|Du|^2 = u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2$$

$$\partial_i |Du|^2 = 2u_1 u_{1i} + 2u_2 u_{2i} + \cdots + 2u_n u_{ni} = 2\sum_{j=1}^{n} u_j u_{ji}$$

$$\Delta(|Du|^2) = \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i^2 \left(\partial_j u\right)^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i \left(2\partial_j u \partial_i \partial_j u\right)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} ()$$

□

引理 3.5.6 (Harnack 不等式)**.** 设 u 是 B_1 上的非负调和函数, 则存在 $C = C(n)$, 使得

$$\sup_{B_{\frac{1}{2}}} |D \log u| \leqslant C$$

推论 3.5.7. 设 u 是 B_1 上的非负调和函数, 则存在 C 使得

$$u(x_1) \leqslant u(x_2), \forall x_1, x_2 \in B_{\frac{1}{2}}$$

证明. 设 $u > 0\ in\ B_1$,

$$|\log u(x_1) - \log u(x_2)| =$$

□

命题 3.5.8 (Hopf 引理)**.** 设 $u \in C^2(B_R) \cap C(\bar{B}_R)$ 是 B_R 上的次调和函数. 若存在 $x_0 \in \partial B_R$ 使得 $u(x)$ 在 x_0 点达到在 $\bar{B}_R$ 上的最大值, 且当 $x \in B_R$ 时, 有 $u(x) < u(x_0)$, 则

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x_0) > 0$$

注记. Hopf 的证明中用到的辅助函数比证明最大模估计用到的辅助函数是要更难想的, 因为我们对这个辅助函数提的要求不一样, 最大模估计是要用弱极值原理, 因此要去控制住边界处的值, 要去控制拉普拉斯; 这里我们依旧要用到弱极值原理, 那这两个东西依然是要考虑的,Hopf 的证明难在它还有另一个要考虑的地方. 回过头来看,Hopf 的证明实际上是说, 如果我满足了定理的条件, 那我能给它塞进去一个大于零 $-\varepsilon\dfrac{\partial v}{\partial n}$, 其中 v 是我们的辅助函数,

唉,εv 的拉普拉斯必须要大于零,$-\varepsilon\nabla v$ 必须指向外侧, 实际上 ε 取正取负是无所谓的, 我只要相应地在 v 前填一个负号就好了. 不妨令 ε 是大于零的吧, 那也就是说 Δv 要大于等于零,∇v 必须要指向内, 这是构造的难点. 于是我们去看我们脑子里的那些辅助函数, 首先想的是 $|x|^2$, 它的拉普拉斯是正常数 $2n$, 这很好; 但是它的梯度是 $2\vec{x}$, 指向外, 这就不行了, 并且我们发现似乎并不能通过给他那里放个系数使得拉普拉斯不改变正负而梯度换个指向. 接下来考虑 $\mathrm{e}^{a|x|^2}$, 我们会发现它好极了, 它的梯度是 $2a\mathrm{e}^{a|x|^2}\vec{x}$, 其中 $\mathrm{e}^{a|x|^2}$ 是一个恒正的东西, 我们只要让 $a < 0$, 就可以保证梯度朝里指. 此时我们屏住呼吸去看拉普拉斯,$a < 0$ 的时候是否能让拉普拉斯恒正呢? 似乎也还不错, 只要 a 的绝对值足够大二次方项是能干掉一次项的, 但令人心碎的是, 在原点处, 二次项系数为零, 拉普拉斯恒负. 唉, 看来这条路也行不通, 如果是我的话可能就去继续想新的辅助函数了, 但是前辈们在此处做了一个思路的转折, 我认为这个思路的转折是很难想到的——既然 0 点处不好, 那我干脆挖掉它好了, 然后我再论证 w 在内部的那个球面上也是小于零的. 写到这里我认识到了 ε 的作用, 其实是无所谓 ε 的, 如果仅仅是要求梯度朝里和除去原点处拉普拉斯恒正. 那么 ε 到底在哪里发挥作用

呢？我们先来看最终构造的那个辅助函数 $v = \mathrm{e}^{-a|x|^2} - \mathrm{e}^{-aR^2}$, 常数项抛掉不看, 这个东西离原点越远, 它的值越小, 而我们的 u, 是在边界上取到了最大值, 球内是严格小于的, 那谁给你的自信, 加上一个离原点越远的地方值越小的 v 之后, 还能够保持在边界上取最大值的性质呢？正是在 v 前面乘的这个 ε, 靠这个 ε, 我就可以把 v 搞得任意小, 也多亏了 u 在内部的值严格小于 u 的最大值, 这样就给了我们一个空间可以把 εv 给他塞进去.

证明. 根据引理的假设,$\frac{\partial}{-}$ 令 $v(x) = \mathrm{e}^{-\alpha|x|^2} - \mathrm{e}^{-x}$, 则 $v > 0$, 且

$$\Delta v =$$

□

总假设是有界的, 称 Ω 满足内切球条件如果对于它边界上的任意一点可做一个球包含在 Ω 里面且与 Ω 的边界在 Ω 相切, 满足内切球性质.

定理 3.5.9. 设 Ω 具有内切球性质, 弱 $u \in C(\bar{\Omega})$ 不恒为常数且调和, 在 $x_0 \in \Omega$ 取得最大值, 则 $\dfrac{\partial u}{\partial n}(x_0) > 0$

在这一小节我们将讨论比位势方程更为一般的方程

$$\mathcal{L}u = -\Delta u + c(x)u = f(x), x \in \Omega. \tag{3.5}$$

在下面的讨论中 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 上的有界开集.

当我们考虑方程(3.5)的极值原理时, 我们需要假定

$$c(x) \geqslant 0, x \in \Omega.$$

此条件在极值原理的证明中非常重要.

首先我们证明以下一个较强的结论.

定理 3.5.10. 假设 $c(x) \geqslant 0, f(x) < 0$,$u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ 满足方程(3.5). 显然 u 在 $\bar{\Omega}$ 上的最大值要么是负的, 要么是非负的. 如果 u 在 $\bar{\Omega}$ 上的最大值是非负的, 那么不可能在 Ω 上达到, 一定是在 $\partial\Omega$ 上达到.

证明. 假设 $u(x)$ 在点 $x_0 \in \Omega$ 达到最大值, 则由多元微积分的知识知,$u(x)$ 在 x_0 的梯度向量 $Du(x_0) = 0$,Hessian 矩阵 $D^2u(x_0)$ 是非正定的. 对 Hessian 矩阵 $D^2u(x_0)$ 求迹得到

$$\Delta u(x_0) = \mathrm{tr}(D^2u(x_0)) \leqslant 0.$$

因而,

$$\mathcal{L}u(x_0) = -\Delta u(x_0) + c(x_0)u(x_0) = f(x_0) \geqslant 0$$

这与定理的假设 $f(x_0) < 0$ 矛盾. 上面已经用到了 $c(x) \geqslant 0, u(x_0) \geqslant 0$. □

3.6 基本解的导出

定义 3.6.1. 调和方程的基本解 $\Phi(x)$ 是满足 $-\Delta\Phi=\delta_0$ 的分布, 即

$$\int_{\mathbb{R}^n}(-\Delta\Phi)(x)\phi(x)\,dx=\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(x)(-\Delta\phi)(x)\,dx=\phi(0),\quad \forall\phi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

命题 3.6.2. 设 $f\in C_c(\mathbb{R}^n)$, 那么 $u(x)=(\Phi*f)(x):=\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(x-y)f(y)\,dy$ 是 $-\Delta u=f$ 的一个解.

证明.

$$-\Delta u(x)=-\Delta_x\left(\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(x-y)f(y)\,dy\right)=\int_{\mathbb{R}^n}(-\Delta_x\Phi(x-y))f(y)\,dy=\int_{\mathbb{R}^n}\delta_0(x-y)f(y)\,dy=f(x)$$

□

不管是拉普拉斯算子 Δ 还是狄拉克函数 δ_0 都是空间旋转不变的, 因此我们有理由相信基本解也是空间旋转不变的, 即它是一个径向函数 $u(x)=v(r),r=|x|=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$. 经简单计算有

$$\frac{\partial r}{\partial x_i}=\frac{x_i}{r},\quad u_{x_i}=v'(r)\frac{x_i}{r},\quad u_{x_ix_i}=v''(r)\frac{x_i^2}{r^2}+v'(r)\left(\frac{1}{r}-\frac{x_i^2}{r^3}\right)$$

因此 u 满足 Laplace 方程当且仅当 v 满足

$$v''(r)+\frac{n-1}{r}v'(r)=0\Longrightarrow\left(r^{n-1}v'(r)\right)'=0\Longrightarrow v'(r)=\frac{C}{r^{n-1}}\Longrightarrow\begin{cases}v(r)=C_1\log r+C_2 & n=2\\ v(r)=C_1\dfrac{1}{r}+C_2 & n=3\end{cases}$$

出于某种原因, 我们将系数确定为

$$\Phi(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2\pi}\log|x| & n=2\\ \dfrac{1}{4\pi|x|} & n=3\end{cases}\tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}\Delta u(x)&=\int_{B(0,\varepsilon)}\Phi(y)\Delta_xf(x-y)\mathrm{d}y+\int_{\mathbb{R}^n-B(0,\varepsilon)}\Phi(y)\Delta_xf(x-y)\mathrm{d}y\\&=:I_\varepsilon+J_\varepsilon\end{aligned}\tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}|I_\varepsilon|&=|\int_{B(0,\varepsilon)}\Phi(y)\Delta_xf(x-y)\mathrm{d}y|\\&\leqslant\int_{B(0,\varepsilon)}|\Phi(y)||\Delta_xf(x-y)|\mathrm{d}y\end{aligned}\tag{3.8}$$

下面对 $|\Delta_xf(x-y)|$ 进行估计.

$$\begin{aligned}\frac{|\Delta_xf(x-y)|}{\|D^2f\|}&\leqslant\frac{|f_{x_1x_1}(x-y)+f_{x_2x_2}(x-y)+f_{x_3x_3}(x-y)|}{\sqrt{\sum_{i,j=1}^n|f_{x_ix_j}(x-y)|^2}}\\&\leqslant\frac{|f_{x_1x_1}(x-y)|+|f_{x_2x_2}(x-y)|+|f_{x_3x_3}(x-y)|}{\sqrt{|f_{x_1x_1}(x-y)|^2+|f_{x_2x_2}(x-y)|^2+|f_{x_3x_3}(x-y)|^2}}\\&\leqslant\sqrt{3}\end{aligned}$$

所以有

$$|I_\varepsilon| \leqslant \sqrt{3}\left\|D^2 f\right\| \int_{B(0,\varepsilon)} |\Phi(y)| \mathrm{d}y$$

当 $n=2$ 时, 有

$$\begin{aligned}
\int_{B(0,\varepsilon)} |\Phi(y)| \mathrm{d}y &= \frac{1}{2\pi} \int_{B(0,\varepsilon)} |\log|y|| \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\varepsilon} r|\log r| \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\varepsilon} -r\log r \mathrm{d}r \\
&= -\left(\frac{1}{2}x^2 \log x - \frac{1}{4}x^2\right)\Big|_0^{\varepsilon} \\
&= -\frac{1}{2}\varepsilon^2 \log\varepsilon + \frac{1}{4}\varepsilon^2 \\
&\leqslant C\varepsilon^2 |\log\varepsilon|
\end{aligned}$$

当 $n=3$ 时, 有

$$\begin{aligned}
\int_{B(0,\varepsilon)} |\Phi(y)| \mathrm{d}y &= \frac{1}{4\pi} \int_{B(0,\varepsilon)} \frac{1}{|y|} \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} \int_0^{\varepsilon} \frac{1}{r} r^2 \mathrm{d}r \mathrm{d}\sigma \\
&= \frac{1}{2}\varepsilon^2
\end{aligned}$$

总而言之,

$$I_\varepsilon \to 0, \text{when } \varepsilon \to 0$$

个人认为上面这步实际上是在验证反常可积.

对于 J_ε, 由于奇性的部分已经被我们挖掉了, 所以可以放心大胆地用分部积分把求导放到 $\Phi(y)$ 身上了.

$$\begin{aligned}
J_\varepsilon &= \int_{\mathbb{R}^n - B(0,\varepsilon)} \Phi(y) \Delta_x f(x-y) \mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^n - B(0,\varepsilon)} \Phi(y) \Delta_y f(x-y) \mathrm{d}y \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n - B(0,\varepsilon)} D\Phi(y) \cdot D_y f(x-y) \mathrm{d}y + \int_{\partial B(0,\varepsilon)} \Phi(y) \frac{\partial f}{\partial n}(x-y) \mathrm{d}S(y) \\
&=: K_\varepsilon + L_\varepsilon
\end{aligned}$$

其中 n 表示 $\partial B(0,\varepsilon)$ 的指向**内部**的单位法向量.

$$\begin{aligned}
|L_\varepsilon| &= |\int_{\partial B(0,\varepsilon)} \Phi(y) \frac{\partial f}{\partial n}(x-y) \mathrm{d}S(y)| \\
&\leqslant \int_{\partial B(0,\varepsilon)} |\Phi(y)| |\frac{\partial f}{\partial n}(x-y)| \mathrm{d}y
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\partial B(0,\varepsilon)} |\Phi(y)||Df\cdot n|\mathrm{d}y \\
&\leqslant \int_{\partial B(0,\varepsilon)} |\Phi(y)||Df|\mathrm{d}y \\
&\leqslant \|Df\| \int_{\partial B(0,\varepsilon)} |\Phi(y)|\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

其中 $|\Phi(y)|$ 在 $\partial B(0,\varepsilon)$ 上是常值函数, 当 $n=2$ 时,

$$\int_{\partial B(0,\varepsilon)} |\Phi(y)|\mathrm{d}y = \int_{\partial B(0,\varepsilon)} \frac{1}{2\pi}\log\varepsilon\mathrm{d}y = \varepsilon\log\varepsilon$$

当 $n=3$ 时,

$$\int_{\partial B(0,\varepsilon)} |\Phi(y)|\mathrm{d}y = \int_{\partial B(0,\varepsilon)} \frac{1}{4\pi\varepsilon}\mathrm{d}y = \varepsilon$$

因此有

$$L_\varepsilon \to 0, \text{when } \varepsilon\to 0$$

我们继续对 K_ε 进行分部积分, 得到

$$
\begin{aligned}
K_\varepsilon &= \int_{\mathbb{R}^n - B(0,\varepsilon)} \Delta\Phi(y) f(x-y)\mathrm{d}y - \int_{\partial B(0,\varepsilon)} \frac{\partial\Phi}{\partial n}(y) f(x-y)\mathrm{d}S(y) \\
&= -\int_{\partial B(0,\varepsilon)} \frac{\partial\Phi}{\partial n}(y) f(x-y)\mathrm{d}S(y)
\end{aligned}
$$

当 $n=2$ 时,

$$\Phi_{x_i}(x) = -\frac{1}{2\pi}\frac{1}{|x|}\frac{x_i}{|x|}$$

$$D\Phi(x) = -\frac{1}{2\pi}\frac{x}{|x|^2}$$

$$n = -\frac{x}{|x|}$$

$$D\Phi(x)\cdot n = \frac{1}{2\pi|x|}$$

$$K_\varepsilon = -\frac{1}{2\pi\varepsilon}\int_{\partial B(0,\varepsilon)} f(x-y)\mathrm{d}S(y) \to -f(x) \text{ as } \varepsilon\to 0$$

当 $n=3$ 时,

$$\Phi_{x_i}(x) = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x|^2}\frac{x_i}{|x|}$$

$$D\Phi(x) = -\frac{1}{4\pi}\frac{x}{|x|^3}$$

$$n = -\frac{x}{|x|}$$

$$D\Phi(x)\cdot n = \frac{1}{4\pi|x|^2}$$

$$K_\varepsilon = -\frac{1}{4\pi\varepsilon^2}\int_{\partial B(0,\varepsilon)} f(x-y)\mathrm{d}S(y) \to -f(x) \text{ as } \varepsilon\to 0$$

综上所述, 有

$$-\Delta u(x) = f(x)$$

3.7 Green 函数法

本节要求解有界区域上 Poisson 方程的 Dirichlet 问题

$$-\Delta u = f, \quad x \in \Omega, \quad u = g, \quad x \in \partial\Omega$$

我们希望得到一个含 f 和 g 的表达式可以计算出解 u. 对 $u(y)$ 和 $\Phi(x-y)$ 使用 Green 第二公式,

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \Phi(y-x)\frac{\partial u}{\partial n}(y) - u(y)\frac{\partial \Phi}{\partial n}(y-x)\mathrm{d}S(y) - \int_{\Omega} \Phi(y-x)\Delta u(y)\mathrm{d}y.$$

严格来说 Φ 不符合使用 Green 第二公式的条件, 所以正确做法是挖掉奇点再分析半径趋于零的极限. 上式中唯一不知道的信息是 u 在边界上的法向导数. 为了克服这一困难, 我们想要构造一个函数 $G(x,y)$ 来替换掉 $\Phi(y-x)$, 准确说是在其基础上做修改 $G(x,y) = \Phi(y-x) - \phi^x(y)$, 满足 $G(x,y)$ 在 $y \in \partial\Omega$ 上取值为零且 $\phi^x(y)$ 在 Ω 中调和. 如果能找到这样的 $G(x,y)$ 那便有

$$u(x) = -\int_{\partial\Omega} u(y)\frac{\partial G}{\partial n_y}(x,y)\mathrm{d}S(y) - \int_{\Omega} G(x,y)\Delta u(y)\mathrm{d}y = \int_{\Omega} G(x,y)f(y)\mathrm{d}y - \int_{\partial\Omega} g\frac{\partial G}{\partial n_y}(x,y)\mathrm{d}S(y).$$

定理 3.7.1.

$$G(x,y) = G(y,x)$$

证明. 令 $v(z) = G(x,z), w(z) = G(y,z)$, 我们要证明 $w(x) = v(y)$.

在 $U - [B(x,\varepsilon) \cup B(y,\varepsilon)]$ 上对 $w(z), v(z)$ 用 Green 第二公式, 得到

$$\int_{U_\varepsilon} w\Delta v - v\Delta w \mathrm{d}x = \int_{\partial U_\varepsilon} w\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial w}{\partial n}\mathrm{d}S$$

由于 $\Delta v = 0(z \neq x), \Delta w = 0(z \neq y), w = v = 0$ on ∂U, 所以

$$\int_{\partial B(x,\varepsilon)} \frac{\partial v}{\partial n}w - \frac{\partial w}{\partial n}v\mathrm{d}S(z) = \int_{\partial B(y,\varepsilon)} \frac{\partial w}{\partial n}v - \frac{\partial v}{\partial n}w\mathrm{d}S(z)$$

对于左边这部分,w 是好函数, 而 v 会爆掉, 而 $v(z)$ 又其实分为两部分 $\Phi(z-x)$ 和 $\phi^x(z)$, 会导致 $v(z)$ 在 x 处爆掉的其实是 $\Phi(z-x)$ 这部分, 但爆掉的这部分又是我们熟悉的东西, 因此我们分而治之.

$$\begin{aligned}
\int_{\partial B(x,\varepsilon)} \frac{\partial v}{\partial n}w - \frac{\partial w}{\partial n}v\mathrm{d}S(z) &= \int_{\partial B(x,\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial n}\left(\Phi(z-x) - \phi^x(z)\right)w - \frac{\partial w}{\partial n}(\Phi(z-x) - \phi^x(z))\mathrm{d}S(z) \\
&= \int_{\partial B(x,\varepsilon)} \frac{\partial \Phi(z-x)}{\partial n}w - \frac{\partial w}{\partial n}\Phi(z-x)\mathrm{d}S(z) \\
&= w(x)
\end{aligned}$$

同样的方法可以计算出右侧的值为 $v(y)$, 得证. □

半空间

三维球

二维圆