微分几何

孙天阳

中国科学技术大学数学科学学院

tysun@mail.ustc.edu.cn

2024 年 4 月 18 日

目录

Chapter 1

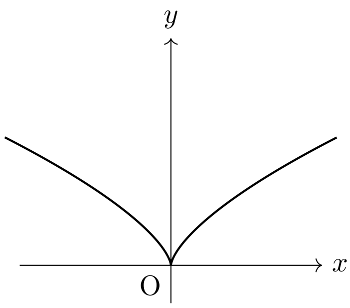
$\mathbb{R}^3$ 中的曲线论

1 曲线的概念

或许你已经在数学分析中学过, 我们认为曲线是一个映射 $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$, 而不是映射的像集 $\gamma(I)$, 虽然后者更符合我们日常中提到曲线时的意思. 我们只研究光滑正则曲线,

定义 1.1. *称光滑曲线 $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ 是正则的, 如果对任意 $t \in I$ 有 $\gamma'(t) \neq 0$. 即 γ 是一个浸入.*

正则性排除了两种情况, 第一种是 $\gamma(t) = (t^3, t^3)$, 本身是一条直线, 但选择了一个不好的参数化. 第二种是 $\gamma(t) = (t^3, t^2)$, 几何本身就有奇性, 不是找一个好的参数化能解决的.



定义 1.2. *光滑正则曲线的重新参数化.*

重新参数化是一个等价关系!

例 1.1. $\mathbf{r}_1(t) = (t^3, t^3, t^3), \mathbf{r}_2(t) = (t, t, t)$.

例 1.2. 半立方抛物线, $\mathbf{r}(t) = (t^3, t^2, 0)$。

定义 1.3. *弧长参数*

2 平面曲线

例 2.1. 曲率为常数的曲线：

(1) $k(s) = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{r}(s)$ 是直线；

(2) $k(s) = a \neq 0 \Longleftrightarrow (r)(s)$ 是半径为 $\left|\dfrac{1}{a}\right|$ 的圆周。

Gauss 映射

例 2.2. 求平面曲线 $\mathbf{r}(t) = (t, \sin t)$ 的曲率。

注记. 解本题时需注意参数不一定是弧长参数，但也不必先弧长参数化再做题，利用复合函数求导的法则，对弧长参数 s 求导就是先对 t 求导再乘上 t 对 s 求导，期中 t 对 s 求导是 s 对 t 求导的倒数，而 s 对 t 求导是 $\mathbf{r}$ 对 t 求导的模长. 须知，不管是在得到切向量还是在得到曲率向量，求导都是对弧长参数 s 求导。

证明. $\mathbf{T} = \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s} = \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}$ □

3 E^3 的曲线

当考虑空间曲线时，法向不能被唯一决定. 但由切向量模长恒为 1 推得曲率向量落在法平面中，若曲率向量的模长不为零，则令曲率向量的单位化为主法向量，此时曲率就是曲率向量的模长（因此曲率大于零)。

注记. 需要注意，平面曲线情形下曲率是可以为负的，曲率的正负反映了曲线的弯曲方向.

定义 3.1. 从法向量，密切平面，从切平面

以上都是建立在 $\dot{\mathbf{T}}(s) \neq 0$ 的前提上的，当然，一点不为零便有局部不为零，而目前我们只关心局部的理论.

推导 Frenet 标架的运动方程.

用 $\mathbf{r}$ 相对于弧长参数 s 的各阶导数来表达曲率和挠率.

例 3.1. 圆柱螺线.

例 3.2. $\mathbf{r}(s)$ 落在某平面上当且仅当 $\tau \equiv 0$.

$\mathbf{r}(s)$ 的近似曲线。

一般参数下，曲率和挠率的计算.

例 3.3. 如果曲线的所有法平面过定点，则曲线必是球面曲线。

证明. 不妨设原点是定点，那么 $\mathbf{r}(s)$ 为该点的法向量，

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{T}(s) \cdot \mathbf{r}(s) \equiv 0 \\
\Longleftrightarrow &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\mathbf{r}(s), \mathbf{r}s) \equiv 0 \\
\Longleftrightarrow &|\mathbf{r}(s)| \equiv c.
\end{aligned}
$$

□

例 3.4. 切向量与固定方向成定角的非直线曲线称为一般螺线. 证明：非直线曲线是一般螺线的充要条件是其挠率与曲率之比是常数。

4 曲线论基本定理

Chapter 2

曲面的局部理论

1 曲面的表示

定义 1.1. $\mathbb{R}^3$ 中的一个曲面是指 $\mathbb{R}^3$ 中的一个 2-维嵌入子流形.

定义 1.2. 称 $\Sigma \subset E^3$ 为正则曲面，如果存在 $\mathbf{r} : D \to \Sigma$，其中 $D \subset E^2 = \{(u, v)\}$ 是区域，满足

(1) $\mathbf{r}$ 光滑，即具有各阶连续偏导数；

(2) $\mathbf{r}$ 是双射；

(3) $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ 恒不为零，即雅可比矩阵的秩恒为 2.

例 1.1. 图

例 1.2. $F(x, y, z) = c$.

2 法曲率

设 $M \subset \mathbb{R}^3$ 是一个 2-维嵌入子流形, 嵌入映射

$$\iota \colon M \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

自然诱导了每点 $p \in M$ 处的单射

$$\iota_{p,*} \colon T_pM \longrightarrow T_p\mathbb{R}^3$$

设 $g = \mathrm{d}x^1 \otimes \mathrm{d}x^1 + \mathrm{d}x^2 \otimes \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}x^3 \otimes \mathrm{d}x^3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的标准黎曼度量.

定义 2.1. *$p \in M$ 处的一个法向量是指 $T_p\mathbb{R}^3$ 中在 g 下与 T_pM 垂直的一个非零元素.*

在 $T_p\mathbb{R}^3$ 与 $\mathbb{R}^3$ 的标准等同下, p 处的法向量 N_p 可视作 $\mathbb{R}^3$ 中的一个向量, 考虑经过点 p 并且和 N_p 平行的一个平面 P, 记 $C := P \cap M$.

平面 P 是某个线性泛函 $f(x, y, z)$ 的零点集. 设 $\bar{f} \colon M \to \mathbb{R}$ 是 f 在 M 上的限制, 则 $C = \bar{f}^{-1}(0)$. 证明 p 是 $\bar{f}$ 的正则点, 即 $\bar{f}_{*,p} \colon T_pM \to T_0\mathbb{R}$ 是满射. 因此 C 在 p 的一个邻域附近是一个一维的正则子流形.

3 曲面的第一基本形式

4 曲面的第二基本形式

5 Weingarten 变换

6 主曲率与 Gauss 曲率

命题 6.1. *Euler* 公式

定义 6.1. 主曲率，*Gauss* 曲率，平均曲率

定义 6.2. 脐点，全脐点曲面

例 6.1. 全平点曲面为平面或平面的一部分.

定义 6.3. 渐进方向，渐进曲线

定义 6.4. 曲率线

命题 6.2. 非脐点曲面上必有曲率线网

证明. 曲率线所满足的微分方程是

$$(EM-FL)\left(\frac{\mathrm{d}u^1}{\mathrm{d}t}\right)^2+(EN-LG)\frac{\mathrm{d}u^1}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}t}+(FN-GM)\left(\frac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}t}\right)^2=0.$$

由于非脐点，所以 $EM-FL, EN-LG, FN-GM$ 不同时为零. □

曲面的局部形状
Gauss 曲率的几何解释
第三基本形式

7 曲面的一些例子

7.1 直纹面

定义 7.1. 直纹面

命题 7.1. 设 $\mathbf{r}(u,v)=\mathbf{a}(u)+v\mathbf{b}(u)$ 是直纹面，则以下三条等价：

(1) *Gauss* 曲率恒为零；

(2) $(\mathbf{a}',b,\mathbf{b}')\equiv 0$；

(3) 沿着直母线，直纹面的法向量不变，即 $\mathbf{n}(u,v_1)=\mathbf{n}(u,v_2)(v_1\neq v_2)$.

定义 7.2. 可展曲面

命题 7.2. 直纹面 为可展曲面的充要条件是

证明. □

注记.

命题 7.3. 非脐点处，$K\equiv 0 \Longleftrightarrow \Sigma$ 是可展曲面.

证明. 局部取曲率线网 balabala □

证明. 补充证明 □

可展曲面的分类

命题 7.4. 可展曲面的分类

证明. □

例 7.1. 曲面上的曲线 C 为曲率线的充要条件是 C 上每点曲面法线所生成的曲面 $\tilde{\Sigma}$ 为可展曲面.

证明. □

曲率线的计算

balabala

7.2 旋转曲面

7.3 全脐点曲面

- 利用偏导数的交换性可证明主曲率 k 是常数.

8 习题 3

16. 求曲面 $F(x, y, z) = 0$ 的第二基本形式.

证明. 不妨设在 (x_0, y_0, z_0) 点处，有 $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. 则由隐函数定理知，局部上 $z = z(x, y)$，且

$$z_x = -\frac{F_x(x, y, z(x, y))}{F_z(x, y, z(x, y))}, z_y = -\frac{F_y(x, y, z(x, y))}{F_z(x, y, z(x, y))}.$$

□

26. 设 P 是曲面 S 上的一点. 证明：当 P 不是脐点时，S 的主曲率 k_1, k_2 是 P 附近的光滑函数；当 P 是脐点时，主曲率是 P 附近的连续函数.

Chapter 3

曲面论基本定理

1 活动标架

- 对应于向量丛的 frame. 我们这里向量丛是 $\Sigma \times \mathbb{R}^3$ 这个平凡丛.

设 $\vec{x}_1(u,v), \vec{x}_2(u,v), \vec{x}_3(u,v)$ 为 $\Sigma : \vec{r} = \vec{r}(u,v)$ 上处处线性无关的向量场，称 $\{\vec{r}(u,v); \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$ 为曲面上的活动标架. 通过研究曲面上的任意标架场来研究曲面与标架无关的几何性质，是现代微分几何的一个基本方法.

通常 $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ 取为切向量场.

称 $\{\vec{r}(u,v); \vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{n}\}$ 为自然标架.

例 1.1. 设 $\vec{r}(s)$ 为 E_3 中的弧长参数曲线，$\{\vec{r}(s); e_1, e_2, e_3\}$

2 自然标架下的基本公式

设 $\Sigma : \vec{r} = \vec{r}(u_1, u_2), \vec{r_\alpha} = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u_\alpha}, I = g_{\alpha\beta}\mathrm{d}u^\alpha \otimes \mathrm{d}u^\beta, II = b_{\alpha\beta}\mathrm{d}u^\alpha \mathrm{d}u^\beta$, 其中 $g_{\alpha\beta} = \vec{r}_\alpha \cdot \vec{r}_\beta, b_{\alpha\beta} = \vec{r}_{\alpha\beta} \cdot \vec{n}$.

回忆

$$\begin{pmatrix} \vec{n}_1 \\ \vec{n}_2 \end{pmatrix} = -W \begin{pmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \end{pmatrix} = -\left(b_{\alpha\gamma}\right)\left(g^{\gamma\beta}\right)\begin{pmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \end{pmatrix} = -\left(b_\alpha{}^\beta\right)\begin{pmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \end{pmatrix}$$

Weingarten 公式可写作

$$\vec{n}_\alpha = -b_\alpha{}^\beta \vec{r}_\beta$$

或

$$\mathrm{d}\vec{n} = \vec{n_\alpha}\mathrm{d}u^\alpha = -b_\alpha{}^\beta \vec{r}_\beta \mathrm{d}u^\alpha$$

下面考虑自然标架 $\{\vec{r}; \vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{n}\}$，我们希望得到

$$\vec{r}_{\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma \vec{r}_\gamma + b_{\alpha\beta}\vec{n},$$

其中 $\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}$ 称作第二类 Christoffel 符号，它满足

命题 2.1.

(1) $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = \Gamma^\gamma_{\beta\alpha}$

(2) $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = \dfrac{1}{2}g^{\gamma\delta}\left(\dfrac{\partial g_{\delta\beta}}{\partial u^\alpha} + \dfrac{\partial g_{\alpha\delta}}{\partial u_\beta} - \dfrac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\delta}\right)$

证明.

(1) 由 $\vec{r}_{\alpha\beta} = \vec{r}_{\beta\alpha}$ 显然.

(2)

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\alpha\beta}{}^\delta g_{\gamma\delta} &= \vec{r}_{\alpha\beta} \cdot \vec{r}_\delta \\
&= \frac{\partial}{\partial u^\beta}\left(\vec{r}_\alpha \cdot \vec{r}_\delta\right) - \vec{r_\alpha} \cdot \vec{r}_{\delta\beta} \\
&= \frac{\partial g_{\alpha\delta}}{\partial u_\beta} - \vec{r}_\alpha \cdot \frac{\partial \vec{r}_\beta}{\partial u^\delta} \\
&= \frac{\partial g_{\alpha\delta}}{\partial u_\beta} - \frac{\partial}{\partial u^\delta}\left(\vec{r}_\alpha \cdot \vec{r}_\beta\right) + \vec{r}_{\alpha\delta} \cdot \vec{r}_\beta \\
&= \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\beta} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\delta} + \frac{\partial g_{\delta\beta}}{\partial u^\alpha} - \vec{r}_\delta \cdot \vec{r}_{\beta\alpha}
\end{aligned}$$

□

设曲面 $\Sigma:\mathbf{r}=\mathbf{r}(u^1,u^2)$，自然标架 $\left\{\mathbf{r}(u^1,u^2);\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\mathbf{n}\right\}$，上一节中我们导出了运动方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^\alpha}=\mathbf{r}_\alpha & (3.1a)\\ \dfrac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial u^\beta}=\Gamma_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma}\mathbf{r}_\gamma+b_{\alpha\beta}\mathbf{n} & (3.1b)\\ \mathbf{n}_\alpha=-b_\alpha^{\ \beta}\mathbf{r}_\beta & (3.1c)\end{cases}$$

现在问：

- 给定如何的 $g_{\alpha\beta}(u^1,u^2)$ 和 $b_{\alpha\beta}(u^1,u^2)$，上述一阶偏微分方程组有解。
- 若有界，得到的解是否是我们想要的几何对象？即 $\mathbf{r}(u^1,u^2)$ 是否代表正则曲面？其第一、第二基本形式是否是 $g_{\alpha\beta}$ 和 $b_{\alpha\beta}$？

本节中我们回答第一个问题。

偏微分方程的理论告诉我们，该方程组有解当且仅当满足如下的可积性条件：

$$\mathbf{r}_{\alpha\beta}=\mathbf{r}_{\beta\alpha}$$

$$\mathbf{r}_{\alpha\beta\gamma}=\mathbf{r}_{\alpha\gamma\beta}$$

$$\mathbf{n}_{\alpha\beta}=\mathbf{n}_{\beta\alpha}$$

其必要性是显然的，充分性是令人惊讶的，我们在这里承认它。

下面分几步：

- 通过计算 $\mathbf{r}_{\alpha\beta\gamma}=\mathbf{r}_{\alpha\gamma\beta}$，将式子表示为 $\mathbf{r}_\delta$ 和 $\mathbf{n}$，令前面系数为零分别得到 Gauss 方程和 Codazzi 方程。
- 通过计算 $\mathbf{n}_{\alpha\beta}=\mathbf{n}_{\beta\alpha}$，发现得到一个与 Codazzi 方程等价的方程和一个平凡方程。
- 问：两个方程组独立的方程各自有几个？
  - 引进 Riemann 记号
  - 得到 Gauss 绝妙定理（这是一个副产品）
  - 断言 Riemann 记号满足的性质，在承认性质的基础上推得 Gauss 方程组实际上只有一个独立方程
  - 引入共变导数，证明 Reimann 记号满足的性质。
  - 证明 Codazzi 方程组只有两个独立方程。

3 曲面的存在唯一性定理

定理 3.1. 设 $\Sigma, \tilde{\Sigma}$ 定义于同一参数区域 D，如果对应点处有相同的第一、第二基本形式，则存在一刚体运动 τ 使得 $\Sigma = \tau(\tilde{\Sigma})$.

证明. 固定一点 $P = (u_0^1, u_0^2) \in D$，必存在一个刚体运动 τ 使得

$$\tau(\{\tilde{\mathbf{r}}(P); \tilde{\mathbf{r}}_1(P), \tilde{\mathbf{r}}_2(P), \tilde{\mathbf{n}}(P)\}) = \{\mathbf{r}(P); \mathbf{r}_1(P), \mathbf{r}_2(P), \mathbf{n}(P)\},$$

这是因为 $g_{\alpha\beta}(P) = \tilde{g}_{\alpha\beta}(P)$.

因为刚体运动不改变第一、第二基本形式，所以 Σ 与 $\tau(\tilde{\Sigma})$ 的对应点仍有相同的第一、第二基本形式.

现在 Σ 与 $\tau(\tilde{\Sigma})$ 满足相同的运动方程，有相同的初值，从而由偏微分方程组解的唯一性，知 $\Sigma = \tau(\tilde{\Sigma})$. □

例 3.1. 证明：Σ 没有脐点，且 $K \equiv 0$，则 Σ 是可展曲面.

证明. 仅需证明 Σ 为直纹面。

设 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 分别为主曲率 $k_1 \equiv 0$，$k_2 \neq 0$ 对应的主方向，则

$$\omega_1^3 = k_1\omega^1 \equiv 0, \quad \omega_2^3 = k_2\omega^2$$

$$\mathrm{d}\omega_1^3 = \omega_1^2 \wedge \omega_2^3 = k_2\omega_1^2 \wedge \omega^2$$

$$k_2 \neq 0 \Longrightarrow \omega_1^2 \wedge \omega^2 = 0 \Longleftrightarrow \omega_1^2 = f\omega^2$$

考虑 Pfaff 方程 $\omega^2 = 0$，它决定的向量场就是 $\mathbf{e}_1$.

设 $\mathbf{r}(t)$ 为 $\omega^2 = 0$ 的任意一条积分曲线，

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\omega\mathbf{e}_1 + \omega^2\mathbf{e}_2}{\mathrm{d}t} = \frac{\omega^1}{\mathrm{d}t}\mathbf{e}_1 + \frac{\omega^2}{\mathrm{d}t}\mathbf{e}_2 = \frac{\omega^1}{\mathrm{d}t}\mathbf{e}_1$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_1}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{e}_1(u^1(t), u^2(t)) \\ &= \frac{\omega_1^2\mathbf{e}_2 + \omega_1^3\mathbf{e}_3}{\mathrm{d}t} \\ &= \omega_1^2(\mathbf{r}'(t))\mathbf{e}_1 + \omega_1^3(\mathbf{r}'(t))\mathbf{e}_3 \\ &= 0 + 0 = 0.\end{aligned}$$

前一项为零是因为 $\omega_1^2(\mathbf{r}'(t)) = f\omega^2(\mathbf{r}'(t)) = 0$，后一项为零是因为 $\omega_1^3 = k_1\omega^1 \equiv 0$.

从而沿积分曲线 $\mathbf{e}_1$ 保持不变，所以 Σ 是直纹面。 □

4 外微分形式

4.1 外代数

k 重线性映射

设 V 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的 m 维线性空间，V^* 记为其对偶空间，$V^* = \{\theta \mid \theta\colon V \to \mathbb{R}\text{线性映射}\}$，$V^{**} = V$。

- 设 $\{e_i\}$ 为 V 的一组基，考虑 V^* 上的 m 个向量 $w^1, \cdots, w^m$ 使得 $w^j(e_i) = \delta_i^j$。容易证明 $\{w^i\}$ 是 V^* 的一组基，也称为 $\{e_i\}$ 的对偶基。

- k 重线性映射。$f\colon V_1 \times \cdots \times V_k \to W$，这里 $V_1, \cdots, V_k, W$ 均为向量空间，满足

  $$f(x_1, \cdots, x_{i-1}, \lambda x_i + \mu y_i, \cdots, x_k) = \lambda f(x_1, \cdots, x_k) + \mu f(x_1, \cdots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \cdots, x_k).$$

  $\mathscr{L}(V_1, \cdots, V_k; W) = \{f \mid f\colon V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_k \to W\text{为}k\text{重线性映射}\}$，可自然地定义加法和数乘，构成线性空间。

  $(*)$ 举例子说明，$\operatorname{Im} f \subset W$，但不一定是线性空间。

外乘法

定义一个运算“$\wedge$”$: V \times V \to W$

(1) “$\wedge$”为双线性映射

(2) $W = L(\operatorname{Im}“\wedge”)$

(3) 反对称性。$\xi^1“\wedge”\xi^2 = -\xi^2“\wedge”\xi^1$，$\forall \xi^1, \xi^2 \in V$。

(4) 对于任意向量空间 $\overline{W}$ 和反对称双线性映射 $f\colon V \times V \to \overline{W}$，都存在线性映射 $f^*\colon W \to \overline{W}$ 使得 $f = f^* \circ “\wedge”$。

$$\begin{tikzcd}
\wedge^2 V & \\
V \times V \arrow[u, dashed, "\wedge"] \arrow[r, "“\wedge”"] \arrow[d, "f"'] & W \arrow[ul, dashed] \arrow[dl, "f^*"] \\
\overline{W} &
\end{tikzcd}$$

$(*)(4)$ 中 f^* 是由 f 唯一决定的：$f = f_i^* \circ “\wedge”, i = 1, 2$，

$$f_1^*(\xi_1“\wedge”\xi_2) = f(\xi_1, \xi_2) = f_2^*(\xi_1“\wedge”\xi_2) \overset{W=L(\operatorname{Im}“\wedge”)}{\Longrightarrow} f_1^* = f_2^*$$

$\star$ 满足上述条件的运算“$\wedge$”和 W 在同构意义下是唯一的。
具体构造

(a) $\wedge^2 V = \{\theta \in \mathscr{L}(V^*, V^*; \mathbb{R}) \mid \theta\text{为反对称的}\}$

定义

$$\wedge : V \times V \to \wedge^2 V$$

$$(\xi^1,\xi^2)\mapsto\xi^1\wedge\xi^2,\quad \xi^1\wedge\xi^2(x_1,x_2)=\det(\xi^\alpha(x_\beta)),\forall\, x_1,x_2\in V^*$$

容易验证：(1) 双线性；(3) 反对称性

(2) $\wedge^2V=L(\mathrm{Im}(\wedge))$，但通常 $\wedge^2V\neq\mathrm{Im}(\wedge)$

证明. 设 $\{\sigma^\alpha\}_{\alpha=1}^m$ 为 V 的一组基，$\{e_\beta\}_{\beta=1}^m$ 为 V^* 中其对偶基，即 $e_\beta(\sigma^\alpha)=\delta_\beta{}^\alpha$

$L(\mathrm{Im}(\wedge))=\left\{\sigma^\alpha\wedge\sigma^\beta\text{张成的线性空间},\alpha<\beta\right\}$，其中个数为 $\dfrac{1}{2}m(m-1)$

- $\sigma^\alpha\wedge\sigma^\beta$,$\alpha<\beta$ 为线性无关
- $\sigma\in\wedge^2V,\theta=\displaystyle\sum_{\alpha<\beta}\theta(e_\alpha,e_\beta)\sigma^\alpha\wedge\sigma^\beta$

所以 $\wedge^2(V)=L(\mathrm{Im}(\wedge))$。 □

(4) $f\colon V\times V\to\overline{W}$，令 $f^*:\wedge^2V\to\overline{W}$，$f^*(\xi\wedge\eta)=f(\xi,\eta)$。

(b) 唯一性

根据定义，必存在线性映射

$$I\colon W\to\wedge^2(V)$$
$$\xi^1``\wedge"\xi^2\mapsto\xi^1\wedge\xi^2\quad \wedge=I\circ``\wedge"$$
$$I'\colon\ \wedge^2(V)\to W,\quad ``\wedge"=I'\circ\wedge$$

所以

$$\left.\begin{array}{c}\wedge=I\circ I'\circ\wedge\\ ``\wedge"=I'\circ I\circ``\wedge"\end{array}\right\}\Longrightarrow\begin{cases}I\circ I'=Id_{\wedge^2(V)}\\ I'\circ I=Id_W\end{cases}$$

由此我们可定义

$$\wedge:V\times V\to\wedge^2V$$
$$\xi^1,\xi^2\mapsto\xi^1\wedge\xi^2$$

⋆ 进一步可定义多重外积（k 重外积）。$\xi^1,\cdots,\xi^2\in V$

$$\xi^1\wedge\cdots\wedge\xi^k\in\wedge^kV=\left\{\theta\in\mathscr{L}(\overbrace{V^*,\cdots,V^*}^{k};\mathbb{R}),\theta\text{为反对称}k\text{重线性映射}\right\}$$

定义

$$\xi^1\wedge\cdots\wedge\xi^K(x_1,\cdots,x_k)=\det(\xi^\alpha(x_\beta))$$

容易验证

(1) $\xi^1\wedge\cdots\wedge(\lambda\xi^i+\mu\eta^i)\wedge\cdots\wedge\xi^k=\lambda\xi^1\wedge\cdots\wedge\xi^i\wedge\cdots\xi^k+\mu\xi^1\wedge\cdots\wedge\xi^{i-1}\wedge\eta^i\wedge\xi^{i+1}\wedge\cdots\wedge\xi^k$

(2) $\xi^1\wedge\cdots\wedge\xi^i\wedge\cdots\wedge\xi^j\wedge\cdots\wedge\xi^k=-\xi^1\wedge\cdots\wedge\xi^j\wedge\cdots\wedge\xi^i\wedge\cdots\wedge\xi^k$

(3) $i\neq j,\xi^i=\xi^j$，则必有 $\xi^1\wedge\cdots\wedge\xi^k=0$

(4)

外代数 Grassmann 代数

$$G(V)=\wedge^0V\oplus\wedge^1V\oplus\cdots\oplus\wedge^kV\oplus\cdots\oplus\wedge^mV=\bigoplus_{k=1}^{m}\wedge^kV,\text{也记为}\wedge(V),\dim(\wedge(V))=\sum_{k=1}^{m}C_m^k=2^m$$

运算外积

$$\wedge:\wedge^kV\times\wedge^lV\to\wedge^{k+l}V$$
$$(\sigma^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge\sigma^{\alpha_k})\wedge(\sigma^{\beta_1}\wedge\cdots\wedge\sigma^{\beta_l})=\sigma^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge\sigma^{\alpha_k}\wedge\sigma^{\beta_1}\wedge\cdots\wedge\sigma^{\beta_k}\in\wedge^{k+l}V$$

$(*)$ 容易验证 $\varphi\in\wedge^kV,\psi\in\wedge^lV$,$\varphi\wedge\psi=(-1)^{kl}\psi\wedge\varphi$（反交换律）

$\{G(V),\wedge\}$ 称为 V 上的外代数或 Grassmann 代数

4.2 外微分形式

欧式空间 E^m，取定一组基 $\{e_1,\cdots,e_m\}$，等同于 $\mathbb{R}^m=\big\{(u^1,\cdots,u^m)\mid u^\alpha\in\mathbb{R},1\leqslant\alpha\leqslant m\big\}$，这里 u^α 为坐标函数，每点处有 m 个独立的微分 $\mathrm{d}u^1,\cdots,\mathrm{d}u^m$，生成数域 $\mathbb{R}$ 上的向量空间记为 Lu。

等同 $Lu\cong(E^m)^*$，$\mathrm{d}u^i(e_j)=\delta^i_j$.

考虑 $V=Lu$ 上的外代数，$\wedge(Lu)=\bigoplus\limits_{k=0}^{m}\wedge^k(Lu)$

每个 k 重元素，具有如下形式 $\sum\limits_{1\leqslant\alpha_1<\cdots<\alpha_k\leqslant m}a_{\alpha_1\cdots\alpha_k}\mathrm{d}u^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}u^{\alpha_k}\in\mathscr{L}(\overbrace{E^m,\cdots,E^m}^{k};\mathbb{R})$

或 $\sum\limits_{1\leqslant\alpha_1,\cdots,\alpha_k\leqslant m}\tilde a_{\alpha_1\cdots\alpha_k}\mathrm{d}u^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}u^{\alpha_k}$，其中 $\tilde a_{\alpha_{\tau(1)}\cdots\alpha_{\tau(k)}}=(-1)^{sgn\tau}\cdot\dfrac{1}{k!}a_{\alpha_1\cdots\alpha_k}$

$\tilde a_{\alpha_1\cdots\alpha_k}$ 关于指标反交换。

k 次外微分形式（k 形式）

设 $U\subset\mathbb{R}^m$ 为一开区域

定义 4.1. *U 上的一个 k 次外微分形式，即对每点 $u\in U$ 确定 $\wedge^k(Lu)$ 中的一个元素使其在 U 上连续可微地变化，通常表示为*

$$\begin{aligned}\omega(u)&=\sum_{1\leqslant\alpha_1<\cdots<\alpha_k\leqslant m}a_{\alpha_1\cdots\alpha_k}\mathrm{d}u^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}u^{\alpha_k}\\&=\tilde a_{\alpha_1\cdots\alpha_k}(u)\mathrm{d}u^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}u^{\alpha_k}\quad(\textit{Einstein}\text{ 求和约定})\end{aligned}$$

1 形式也称为 U 上的 Pfaff 形式

$\star$ 线性无关行（处处）

设 $\omega^\gamma=a^\gamma_\alpha\mathrm{d}u^\alpha,1\leqslant\gamma\leqslant p,1\leqslant\alpha\leqslant m$ 为 U 上的 p 个 1 形式。

如果 $p\times m$ 矩阵 (a^γ_α) 地秩在 U 的每点都为 p，则称这 p 个形式 $\{\omega^\gamma\}$ 是线性独立的，等价地，$\sum\limits_{i=1}^{p}f_i\omega^i\equiv0$ 则必有 $f_i\equiv0,\forall\ i=1,\cdots,p$。

命题 4.1. *$\omega^1,\cdots,\omega^p p$ 个 1 形式是线性独立的充要条件为 $\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^p\neq0$.*

证明. $\omega^1\wedge\omega^p=\sum\limits_{1\leqslant\alpha_1<\cdots<\alpha_p\leqslant m}\begin{vmatrix}a^1_{\alpha_1}&\cdots&a^1_{\alpha_p}\\\vdots&&\vdots\\a^p_{\alpha_1}&\cdots&a^p_{\alpha_p}\end{vmatrix}\mathrm{d}u^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}u^{\alpha_p}$，必有一个 p 阶子式非零。 □

引理 4.1 (Cartan 引理)**.** 设 $\{\omega^\gamma,\varphi^\gamma\}_{1\leqslant\gamma\leqslant p\leqslant m}$ 是 $2p$ 个 1 形式，其中 $\{\omega^\gamma\}_{\gamma=1}^p$ 是线性独立的，则 $\sum\limits_{\gamma=1}^p\varphi^\gamma\wedge\omega^\gamma=0$ 成立的充要条件是 φ^γ 可表示为

$$\varphi^\gamma=c_s^\gamma,1\leqslant r,s\leqslant p,\text{其中}c_s^\gamma=c_\gamma^s.$$

证明. 充分性. 反交换律 $\sum\limits_{k=1}^p\varphi^\gamma\wedge\omega^\gamma=c_s^\gamma\omega^s\wedge\omega^\gamma=c_\gamma^s\omega^s\wedge\omega^\gamma=-c_\gamma^s\omega^\gamma\wedge\omega^s=-\sum\limits_{s=1}^p\varphi^s\wedge\omega^s.$

必要性. 每一点 $u\in U$ 处，$\{\omega^\gamma\}_{\gamma=1}^p$ 扩张成 Lu 的一组基，

则 $\varphi^\gamma=\sum\limits_{s=1}^p c_s^\gamma\omega^s+\sum\limits_{\lambda=p+1}^m c_\lambda^\gamma\omega^\lambda$，代入已知条件，

$$\begin{aligned}\sum_{\gamma=1}^p\varphi^\gamma\wedge\omega^\gamma&=\sum_{r,s=1}^p c_s^\gamma\omega^s\wedge\omega^\gamma+\sum_{\gamma=1}^p\sum_{\lambda=p+1}^m c_\lambda^\gamma\omega^\lambda\wedge\omega^\gamma\\&=\sum_{1\leqslant s<\gamma\leqslant p}(c_s^\gamma-c_\gamma^s)\omega^s\wedge\omega^\gamma+\sum_{\gamma=1}^p\sum_{\gamma=p+1}^m c_\lambda^\gamma\omega^\lambda\wedge\omega\gamma\end{aligned}$$

所以 $c_s^\gamma=c_\gamma^s,c_\lambda^\gamma=0,1\leqslant\gamma,s\leqslant p,p+1\leqslant\gamma\leqslant m.$ □

推论 4.1 ($p=1$)**.** ω 是非零 1 形式，则 1 形式 φ 与 ω 相差一函数因子的充要条件是 $\varphi\wedge\omega=0$.

引理 4.2. 设 $\omega^\gamma(1\leqslant\gamma\leqslant p)$ 是 p 个线性独立的 1 形式，Ω 是 2 形式，那么要使

$$\Omega\equiv0\mod(\omega^1,\cdots,\omega^p)$$

的充要条件是存在 p 个 1 形式 $\{\varphi^\gamma\}$ 使得 $\Omega=\sum\limits_{\gamma=1}^p\omega^\gamma\wedge\varphi^\gamma.$

证明. 充分性显然。

必要性，补充 $m-p$ 个形式 $\omega^{p+1},\cdots\omega^m$；每点处 $\{\omega^\alpha\}_{\alpha=1}^m$ 为 Lu 的基。

$$\begin{aligned}\Omega&=\sum_{1\leqslant\gamma<s\leqslant p}c_{\gamma s}\omega^\gamma\wedge\omega^s+\sum_{\gamma=1}^p\sum_{\lambda=p+1}^m c_{\gamma\lambda}\omega^\gamma\wedge\omega^\lambda+\sum_{p+1\leqslant\alpha<\beta\leqslant m}c_{\alpha\beta}\omega^\alpha\wedge\omega^\beta\\&=\sum_{\gamma=1}^p\omega^\gamma\wedge\left(\sum_{s=1}^p a_{\gamma s}\omega^s+\sum_{\lambda=p+1}^m c_{\gamma\lambda}\omega^\lambda\right)\end{aligned}$$

□

4.3 外微分

$\wedge^k(U)$ 表示 $U\subset\mathbb{R}^m$ 上 k 形式的全体，$\wedge(U)=\bigoplus\limits_{k=0}^m\wedge^k(U)$。

定义：d: $\wedge^k(U)\to\wedge^{k+1}(U)$。设 $\omega\in\wedge^k(U),\omega=a_{\alpha_1\cdots\alpha_k}(u)\mathrm{d}u^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}u^{\alpha^k}$

$\mathrm{d}\omega=\mathrm{d}a_{\alpha_1\cdots\alpha_k}\wedge\mathrm{d}u^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}u^{\alpha_k}=\dfrac{\partial a_{\alpha_1\cdots\alpha_k}}{\partial u^\beta}\mathrm{d}u^\beta\wedge\mathrm{d}u^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}u^{\alpha_k}\in\wedge^{k+1}(U)$

$\omega\in\wedge^0(U)=C^\infty(U)$，外微分即普通微分，$\omega\in\wedge^m(U)$，则 $\mathrm{d}\omega=0.$

d: $\wedge(U)\to\wedge(U)$。

命题 4.2. 外微分算子 d 具有如下性质：

(1) 设 φ, ψ 为两个外微分形式，则 $\mathrm{d}(\varphi \pm \psi) = \mathrm{d}\varphi \pm \mathrm{d}\psi$

(2) 如果 $\omega \in \wedge^k(U), \varphi \in \wedge^l(U)$，$d(\omega \wedge \varphi) = \mathrm{d}\omega \wedge \varphi + (-1)^k \omega \wedge \mathrm{d}\varphi$

引理 4.3 (Poincare 引理). 任何外微分形式的两次外微分为零，即 $d^2 = 0$。

对于一个外微分形式 ω，如果 $\mathrm{d}\omega = 0$，则称 ω 为闭形式
恰当形式即存在 $\theta \in \wedge(U)$，使得 $\mathrm{d}\theta = \omega$
恰当形式必为闭形式，反之不成立，例如 $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ 上的 1 形式

$$\omega = -\frac{v}{u^2+v^2}\mathrm{d}u + \frac{u}{u^2+v^2}\mathrm{d}v.$$

极坐标 $\begin{cases} u = \cos\theta\rho \\ v = \sin\theta\rho \end{cases}$ $,\omega = \mathrm{d}\theta$，这里 θ 在 $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ 中不光滑，$\int_{S^1} \omega = 2\pi$
如果存在 $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ 光滑函数使得 $\omega = \mathrm{d}g$，$\int_{S^1} \omega = \int_{S^1} \mathrm{d}g = 0.$
但闭形式局部恰当。

5 幺正活动标架

正则曲面 Σ，$\mathbf{r}=\mathbf{r}(u^1,u^2)$，$\forall p\in\Sigma$，$\mathrm{d}u^\alpha: T_p\Sigma\to\mathbb{R}$，$\mathrm{d}u^\alpha(\mathbf{r}_\alpha)=\dfrac{\partial u^\alpha}{\partial u^\beta}=\delta^\alpha_\beta$

1 形式 $\omega=a_\alpha\mathrm{d}u^\alpha$

2 形式 $f\mathrm{d}u^1\wedge\mathrm{d}u^2$

令 $\omega^\beta=a^\beta_\alpha\mathrm{d}u^\alpha$，$\omega^1\wedge\omega^2=\det(a^\beta_\alpha)\mathrm{d}u^1\wedge\mathrm{d}u^2$

$\omega^1\wedge\omega^2=0\Longleftrightarrow\det(a^\beta_\alpha)=0\overset{Cartan\text{引理}}{\Longleftrightarrow}\omega^1$ 与 ω^2 只相差一个函数因子，$\omega^1\neq 0,\omega^2=f\omega^1$

ω^1,ω^2 线性无关 $\Longleftrightarrow\omega^1\wedge\omega^2\neq 0$。

取 Σ 上幺正活动标架 $\{\mathbf{r};\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$（右手系），$\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\in T_p\Sigma$

$$\begin{pmatrix}\mathbf{r}_1\\ \mathbf{r}_2\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1\\ \mathbf{e}_2\end{pmatrix},A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\ a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$$

已知 $\{\mathrm{d}u^\alpha\}$ 为 $\{\mathbf{r}_\alpha\}$ 的对偶基，令 $\{\omega^\alpha\}^2_{\alpha=1}$ 为 $\{\mathbf{e}_\alpha\}^2_{\alpha=1}$ 的对偶基

令 $\begin{pmatrix}\mathrm{d}u^1&\mathrm{d}u^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\omega^1&\omega^2\end{pmatrix}B$

$\begin{pmatrix}\mathbf{r}_1\\ \mathbf{r}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{d}u^1&\mathrm{d}u^2\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1\\ \mathbf{e}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega^1&\omega^2\end{pmatrix}B$，所以 $AB=Id_{2\times2}$, 即 $B=A^{-1}$.

所以 $\begin{pmatrix}\omega^1,\omega^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{d}u^1&\mathrm{d}u^2\end{pmatrix}A$

$\omega^1\wedge\omega^2=\det A\mathrm{d}u^1\wedge\mathrm{d}u^2$

所以 $\mathrm{d}\mathbf{r}=\begin{pmatrix}\mathrm{d}u^1&\mathrm{d}u^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{r}_1\\ \mathbf{r}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\omega^1&\omega^2\end{pmatrix}A^{-1}A\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1\\ \mathbf{e}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\omega^1&\omega^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1\\ \mathbf{e}_2\end{pmatrix}=\omega^\alpha\mathbf{e}_\alpha$

所以 $I=\mathrm{d}\mathbf{r}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}=\begin{pmatrix}\omega^1&\omega^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1\\ \mathbf{e}_2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1&\mathbf{e}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega^1\\ \omega^2\end{pmatrix}=\omega^1\cdot\omega^1+\omega^2\cdot\omega^2$

第一基本形式与幺正标架选取无关，第二基本形式与同向幺正标架选取无关

幺正标架的运动方程

$\mathrm{d}\mathbf{e}_i=\omega^j_i\mathbf{e}_j,\alpha=1,2;1\leqslant i,j\leqslant 3$

由 $\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j=\delta_{ij}\Longrightarrow\mathrm{d}\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j+\mathbf{e}_i\cdot\mathrm{d}\mathbf{e}_j=0\Longrightarrow\omega^j_i+\omega^i_j=0.$

其中 ω^j_i 中最多只有三个独立的 1 形式 $\omega^2_1,\omega^3_1,\omega^3_2$

运动方程 $\begin{cases}\mathrm{d}\mathbf{r}=\omega^\alpha\mathbf{e}_\alpha\\ \mathrm{d}\mathbf{e}_i=\omega^j_i\mathbf{e}_j,\omega^j_i+\omega^i_j=0,\alpha=1,2;1\leqslant i,j\leqslant 3\end{cases}$

对上式两边求外微分 $0=\mathrm{d}(\mathrm{d}\mathbf{r})=\mathrm{d}(\omega^\alpha\mathbf{e}_\alpha)=\mathrm{d}\omega^\alpha\mathbf{e}_\alpha-\omega^\alpha\wedge\mathrm{d}\mathbf{e}_\alpha=\mathrm{d}\omega^\alpha\mathbf{e}_\alpha-\omega^\beta\wedge\omega^j_\beta\mathbf{e}_j$

$\mathrm{d}\omega^\alpha=\omega^\beta\wedge\omega^\alpha_\beta$,$\omega^\beta\wedge\omega^3_\beta=0$ 自然成立，由第二基本形式的对称性。

$0=\mathrm{d}(\mathrm{d}\mathbf{e}_i)=\mathrm{d}(\omega^j_i\mathbf{e}_j)=\mathrm{d}\omega^j_i\mathbf{e}_j-\omega^k_i\wedge\mathrm{d}\mathbf{e}_k=(\mathrm{d}\omega^j_i-\omega^k_i\wedge\omega^j_k)\mathbf{e}_j=0$

结构方程 $\begin{cases}\mathrm{d}\omega^\alpha=\omega^\beta\wedge\omega^\alpha_\beta\\ \mathrm{d}\omega^j_i=\omega^k_i\wedge\omega^j_k\end{cases}$

幺正标架 Weingarten 变换的表示 $\begin{pmatrix}\mathbf{r}_1\\ \mathbf{r}_2\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1\\ \mathbf{e}_2\end{pmatrix},\mathbf{n}=\mathbf{e}_3$

$\begin{pmatrix}\omega^1&\omega^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{d}u^1&\mathrm{d}u^2\end{pmatrix}A,I=\begin{pmatrix}\mathrm{d}u^1&\mathrm{d}u^2\end{pmatrix}(g_{\alpha\beta})\begin{pmatrix}\mathrm{d}u^1\\ \mathrm{d}u^2\end{pmatrix}=\mathrm{d}\mathbf{r}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}=\begin{pmatrix}\omega^1&\omega^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega^1\\ \omega^2\end{pmatrix}=$
$\begin{pmatrix}\mathrm{d}u^1&\mathrm{d}u^2\end{pmatrix}AA^T\begin{pmatrix}\mathrm{d}u^1\\ \mathrm{d}u^2\end{pmatrix}$

所以 $(g_{\alpha\beta})=AA^T$

令 $\begin{pmatrix}\omega_1^3\\ \omega_2^3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_{11} & h_{12}\\ h_{21} & h_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega^1\\ \omega^2\end{pmatrix}, II=\begin{pmatrix}\mathrm{d}u^1 & \mathrm{d}u^2\end{pmatrix}(b_{\alpha\beta})\begin{pmatrix}\mathrm{d}u^1\\ \mathrm{d}u^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\omega^1 & \omega^2\end{pmatrix}(h_{\alpha\beta})\begin{pmatrix}\omega^1\\ \omega^2\end{pmatrix}$

所以 $(b_{\alpha\beta})=A(h_{\alpha\beta})A^T$ 或 $(h_{\alpha\beta})=A^{-1}(b_{\alpha\beta})(A^{-1})^T$

$(b_{\alpha\beta})$ 对称 $\Longrightarrow(h_{\alpha\beta})$ 对称

$\det(h_{\alpha\beta})=\det(A^{-1}(b_{\alpha\beta})(A^{-1})^T)=\det(b_{\alpha\beta})\det((AA^T)^{-1})=\dfrac{\det(b_{\alpha\beta})}{\det(g_{\alpha\beta})}=K$

$tr(h_{\alpha\beta})=tr((b_{\alpha\beta})(AA^T)^{-1})=tr((b_{\alpha\beta})(g_{\alpha\beta})^{-1})=2H$

Weingarten 变换 $\mathcal{W}:T_p\Sigma\to T_p\Sigma$

$$\mathcal{W}\begin{pmatrix}\mathbf{r}_1\\ \mathbf{r}_2\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}\mathbf{n}_1\\ \mathbf{n}_2\end{pmatrix}=(b_{\alpha\beta})(g_{\alpha\beta})^{-1}\begin{pmatrix}\mathbf{r}_1\\ \mathbf{r}_2\end{pmatrix}$$

在基 $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\}$ 下，

$$\mathcal{W}\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1\\ \mathbf{e}_2\end{pmatrix}=\mathcal{W}(A^{-1}\begin{pmatrix}\mathbf{r}_1\\ \mathbf{r}_2\end{pmatrix})=A^{-1}\mathcal{W}\begin{pmatrix}\mathbf{r}_1\\ \mathbf{r}_2\end{pmatrix}=A^{-1}(b_{\alpha\beta})(g_{\alpha\beta})^{-1}A\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1\\ \mathbf{e}_2\end{pmatrix}=A^{-1}(b_{\alpha\beta})(A^{-1})^T\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1\\ \mathbf{e}_2\end{pmatrix}=(h_{\alpha\beta})\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1\\ \mathbf{e}_2\end{pmatrix}$$

$\mathcal{W}$ 在 $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\}$ 下的系数矩阵即为 $(h_{\alpha\beta})$

主曲面没有脐点时，可取 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2$ 为曲面的主方向，

$$\mathcal{W}(\mathbf{e}_\alpha)=k_\alpha\mathbf{e}_\alpha$$

此时 $(h_{\alpha\beta})=\begin{pmatrix}k_1 & 0\\ 0 & k_2\end{pmatrix}$，即 $\omega_1^3=k_1\omega^1,\omega_2^3=k_2\omega^2$，$II=k_1(\omega^1)^2+k_2(\omega^2)^2$

6 曲面的结构方程 (幺正)

- $\mathbf{r}$ 视作嵌入 $\Sigma \to \mathbb{R}^3$. 但这样的映射又可视作平凡丛的截面，所以认为 $\mathbf{r} \in \Gamma(\Sigma, \Sigma \times \mathbb{R}^3)$

$$\mathrm{d}\mathbf{e}_3 = \omega_3^1\mathbf{e}_1 + \omega_3^2\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix}\omega_3^1 & \omega_3^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1\\ \mathbf{e}_2\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\mathbf{n} &= \begin{pmatrix}\mathrm{d}u^1 & \mathrm{d}u^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{n}_1\\ \mathbf{n}_2\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\mathrm{d}u^1 & \mathrm{d}u^2\end{pmatrix}(-b_{\alpha\beta})(g^{\alpha\beta})\begin{pmatrix}\mathbf{r}_1\\ \mathbf{r}_2\end{pmatrix}\\
&= -\begin{pmatrix}\omega^1 & \omega^2\end{pmatrix}A^{-1}(b_{\alpha\beta})(A^{-1})^TA^{-1}A\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1\\ \mathbf{e}_2\end{pmatrix}\\
&=: -\begin{pmatrix}\omega^1 & \omega^2\end{pmatrix}(h_{\alpha\beta})\begin{pmatrix}\mathbf{r}_1\\ \mathbf{r}_2\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}\omega_1^3 & \omega_2^3\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\omega^1 & \omega^2\end{pmatrix}A^{-1}(b_{\alpha\beta})(A^{-1})^T
\end{aligned}$$

6.1 title

设 $\Sigma : \mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2)$，幺正标架 $\{\mathbf{r}; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$，其中 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 为切向。上一节中我们得到了曲面的运动方程

$$\begin{cases}\mathrm{d}\mathbf{r} = \omega^\alpha\mathbf{e}_\alpha, & \alpha = 1,2\\ \mathrm{d}\mathbf{e}_i = \omega_i^j\mathbf{e}_j, \omega_i^j + \omega_j^i = 0, & 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 3\end{cases}$$

此时

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} &= \mathrm{d}\mathbf{r}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = \omega^1\otimes\omega^1 + \omega^2\otimes\omega^2\\
\mathrm{II} &= -\mathrm{d}\mathbf{r}\cdot\mathrm{d}\mathbf{n} = -\begin{pmatrix}\omega^1 & \omega^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1\\ \mathbf{e}_2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_3^1\\ \omega_3^2\end{pmatrix}\\
&= -\begin{pmatrix}\omega^1 & \omega^2\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}\omega_3^1\\ \omega_3^2\end{pmatrix} = \omega^\alpha\otimes\omega_\alpha^3
\end{aligned}$$

解释：$\theta_1\otimes\theta_2(X,Y) := \theta_1(X)\theta_2(Y)$

当曲面是非脐点曲面时，可取 e_α 为主方向，此时

$$\mathcal{W}(\mathbf{e}_\alpha) = k_\alpha\mathbf{e}_\alpha, (h_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix}k_1 & 0\\ 0 & k_2\end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{II} &= \begin{pmatrix}\omega^1 & \omega^2\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}\omega_1^3\\ \omega_2^3\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\omega^1 & \omega^2\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}k_1 & 0\\ 0 & k_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega^1\\ \omega^2\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$= k_1\omega^1 \otimes \omega^1 + k_2\omega^2 \otimes \omega^2.$$

结构方程

$$\begin{aligned}0 &= \mathrm{d}(\mathrm{d}\mathbf{r}) = \mathrm{d}(\omega^\alpha \mathbf{e}_\alpha)\\ &= (\mathrm{d}\omega^\alpha)\mathrm{e}_\alpha - \omega^\alpha \wedge \mathrm{d}\mathbf{e}_\alpha\\ &= (\mathrm{d}\omega^\alpha - \omega^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha)\mathbf{e}_\alpha - \omega^\beta \wedge \omega_\beta^3 \mathbf{e}_3\end{aligned}$$

所以 $\mathrm{d}\omega^\alpha = \omega^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha, \omega^\beta \wedge \omega_\beta^3 = 0.$

$$\begin{aligned}0 &= \mathrm{d}(\mathrm{d}\mathbf{e}_i) = \mathrm{d}(\omega_i^j \mathrm{e}_j)\\ &= (\mathrm{d}\omega_i^j)\mathbf{e}_j - \omega_i^k \wedge \mathrm{d}\mathbf{e}_k\\ &= (\mathrm{d}\omega_i^j - \omega_i^k \wedge \omega_k^j)\mathbf{e}_j\end{aligned}$$

$$\begin{cases}\mathrm{d}\omega_1^2 &= \omega_1^k \wedge \omega_k^2 & (3.2\mathrm{a})\\ \mathrm{d}\omega_1^3 &= \omega_1^k \wedge \omega_k^3 & (3.2\mathrm{b})\\ \mathrm{d}\omega_2^3 &= \omega_2^k \wedge \omega_k^3 & (3.2\mathrm{c})\\ \mathrm{d}\omega^\alpha &= \omega^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha & (3.2\mathrm{d})\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega_1^2 &= \omega_1^3 \wedge \omega_3^2\\ &= -\omega_1^3 \wedge \omega_2^3\\ &= -(h_{1\alpha}\omega^\alpha) \wedge (h_{2\beta}\omega^\beta)\\ &= -(h_{1\alpha}h_{2\beta})\omega^\alpha \wedge \omega^\beta\\ &= -(h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21})\omega^1 \wedge \omega^2\\ &= -K\omega^1 \wedge \omega^2\end{aligned}$$

用幺正标架求 Gauss 曲率

$$K = -\frac{\mathrm{d}\omega_1^2}{\omega^1 \wedge \omega^2}$$

设 $\omega_1^2 = a\omega^1 + b\omega^2$，

$$\mathrm{d}\omega^1 = \omega^\beta \wedge \omega_\beta^1 = \omega^2 \wedge \omega_2^1 = \omega_1^2 \wedge \omega^2 = (a\omega^1 + b\omega^2) \wedge \omega^2 = a\omega^1 \wedge \omega^2$$

$$a = \frac{a\omega^1}{\omega^1 \wedge \omega^2}, \quad b = \frac{\mathrm{d}\omega^2}{\omega^1 \wedge \omega^2}$$

例 6.1. 设 (u, v) 是正交餐宿，$I = E\mathrm{d}u\mathrm{d}u + G\mathrm{d}v\mathrm{d}v$，

$\mathbf{e}_1 = \dfrac{\mathbf{r}_u}{\sqrt{E}}, \mathbf{e}_2 = \dfrac{\mathbf{r}_v}{\sqrt{G}}$

$\omega^1 = \sqrt{E}\mathrm{d}u, \omega^2 = \sqrt{G}\mathrm{d}v$

$\omega^1 \wedge \omega^2 = \sqrt{EG}\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v$

$\mathrm{d}\omega^1 = \mathrm{d}(\sqrt{E}\mathrm{d}u) = (\sqrt{E})_v \mathrm{d}v \wedge \mathrm{d}u$

$\mathrm{d}\omega^2 = \mathrm{d}(\sqrt{G}\mathrm{d}v) = (\sqrt{G})_u \mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v$

$\omega_1^2 = \dfrac{-(\sqrt{E})_v}{\sqrt{EG}}\sqrt{E}\mathrm{d}u + \dfrac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{EG}}\sqrt{G}\mathrm{d}v$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega_1^2 &= \left(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\right)_v \mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v + \left(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\right)_u \mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v \\
K &= -\frac{\left(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\right) + \left(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\right)}{\sqrt{EG}}
\end{aligned}
$$

不变量

(1) $\mathrm{I} = \begin{pmatrix}\omega^1 & \omega^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega^1 \\ \omega^2\end{pmatrix}$

(2) $\mathrm{d}A = \omega^1 \wedge \omega^2$

(3) $\mathrm{II} = \begin{pmatrix}\omega^1 & \omega^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_1^3 \\ \omega_2^3\end{pmatrix}$

(4) III

(5) $\mathrm{d}\sigma = \omega_1^2 \wedge \omega_2^3$

(6) $\psi = \omega^1 \otimes \omega_2^3 - \omega^2 \otimes \omega_1^3$

Chapter 4

曲面的内蕴几何

(u^1, u^2)，$I = g_{\alpha\beta}\mathrm{d}u^\alpha \otimes \mathrm{d}u^\beta$

1 曲面的等距对应

定义 1.1. 设 $\sigma : \Sigma \to \widetilde{\Sigma}$ 是双射，Σ 上任意曲线段 c 与 $\tilde{\Sigma}$ 中对应的 $\tilde{c} = \sigma(c)$ 长度相等，则称 σ 为 Σ 到 $\widetilde{\Sigma}$ 的等距变换。

设 $c : \mathbf{r}(u(t), v(t))$，$\tilde{c} : \tilde{\mathbf{r}}(u(t), v(t))$，则

$$
\begin{aligned}
L(c) = \int_a^b \left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right|\mathrm{d}t = L(\tilde{c}) = \int_a^b \left|\frac{\mathrm{d}\tilde{\mathbf{r}}}{\mathrm{d}t}\right|\mathrm{d}t \\
\Longleftrightarrow \left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right| = \left|\mathbf{r}_u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \mathbf{r}_v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right| = \left|\frac{\mathrm{d}\tilde{\mathbf{r}}}{\mathrm{d}t}\right| = \left|\tilde{\mathbf{r}_u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \tilde{\mathbf{r}}_v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right| \\
\Longleftrightarrow |\mathbf{r}_u| = |\tilde{\mathbf{r}}_u|, |\mathbf{r}_v| = |\tilde{\mathbf{r}}_v|, \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v\rangle = \langle \tilde{\mathbf{r}}_u, \tilde{\mathbf{r}_v}\rangle \\
\Longleftrightarrow \mathrm{I}(p) = \tilde{\mathrm{I}}(\sigma(p)), \forall p \in \Sigma
\end{aligned}
$$

2 曲面的协变微分

3 测地曲率与测地线

设曲面 $\Sigma : \mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2)$，曲线 $C : \mathbf{r}(s) = \mathbf{r}(u^1(s), u^2(s))$.

回忆曲率向量 $\ddot{\mathbf{r}} = k\mathbf{N}$,现在我们将它分为垂直于法向的部分 $(k\mathbf{N})^T$ 和平行于法向的部分 $(k\mathbf{N})^{\perp}$，称前者为测地曲率向量，后者为法曲率向量.

注意到 $\ddot{\mathbf{r}} \perp \mathbf{r} \Longrightarrow (k\mathbf{N})^T \perp \mathbf{T}$，因此 $(k\mathbf{N})^T \parallel \mathbf{n} \times \mathbf{T}$，其中 $\mathbf{n}$ 是曲面的法向量.

为了得到一个标量，

定义 3.1. 测地曲率 $k_g := (k\mathbf{N})^T \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{T}) = (\mathbf{n}, \dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}})$

直观上，法曲率反映了曲面的弯曲，而测地曲率反映曲线自身在曲面内的弯曲.

选取幺正标架 $\{\mathbf{r}; \tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3\}$ 使得 $\tilde{\mathbf{e}}_1 = \dot{\mathbf{r}}$.

$\ddot{\mathbf{r}} = \dfrac{\mathrm{d}\tilde{\mathbf{e}}_1}{\mathrm{d}s} = \dfrac{\tilde{\omega}_1^2}{\mathrm{d}s}\tilde{\mathbf{e}}_2 + \dfrac{\tilde{\omega}_1^3}{\mathrm{d}s}\tilde{\mathbf{e}}_3$

$\mathbf{k}_g = \dfrac{\tilde{\omega}_1^2}{\mathrm{d}s}\tilde{\mathbf{e}}_2$

$k_g = \mathbf{k}_g \cdot (\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{k}_g \cdot \tilde{\mathbf{e}}_2 = \dfrac{\tilde{\omega}_1^2}{\mathrm{d}s} = \tilde{\omega}_1^2(\dot{\mathbf{r}})$

$\mathbf{k}_g = \left(\dfrac{\mathrm{d}\dot{\mathbf{r}}}{\mathrm{d}s}\right)^T = \dfrac{D\dot{\mathbf{r}}}{\mathrm{d}s} = D_{\dot{\mathbf{r}}}\dot{\mathbf{r}}$

命题 3.1. 计算测地曲率的 *Liouville* 公式. 设正交曲线网 (u^1, u^2)，记 u^i 线的测地曲率为 k_{g_i}，曲线 $C : \mathbf{r}(u^1(s), u^2(s))$，设 C 与 u^1 线的夹角为 θ，即

$$\dot{\mathbf{r}} = \cos\theta\mathbf{e}_1 + \sin\theta\mathbf{e}_2,$$

其中 $\mathbf{e}_1$ 和 $\mathbf{e}_2$ 分别是 $\mathbf{r}_1$ 和 $\mathbf{r}_2$ 的单位化.

证明.

$$\begin{aligned}
k_g &= \ddot{\mathbf{r}} \cdot (\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{r}}) \\
\ddot{\mathbf{r}} &= (-\sin\theta\mathbf{e}_1 + \cos\theta\mathbf{e}_2)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} + \cos\theta\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_1}{\mathrm{d}s} + \sin\theta\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_2}{\mathrm{d}s} \\
\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{r}} &= -\sin\theta\mathbf{e}_1 + \cos\theta\mathbf{e}_2 \\
k_g &= \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} + \cos^2\theta\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_1}{\mathrm{d}s} \cdot \mathbf{e}_2 - \sin^2\theta\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_2}{\mathrm{d}s} \cdot \mathbf{e}_1 \\
\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0 &\Longrightarrow \frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_1}{\mathrm{d}s} \cdot \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1 \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_2}{\mathrm{d}s} = 0 \\
k_g &= \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} + \frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_1}{\mathrm{d}s} \cdot \mathbf{e}_2 \\
&= \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} + \mathbf{e}_2 \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\mathbf{r}_1}{\sqrt{g_{11}}}\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} + \frac{\mathbf{e}_2}{\sqrt{g_{11}}} \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_1}{\mathrm{d}s} \\
\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_1}{\mathrm{d}s} &= \mathbf{r}_{1\alpha}\frac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}s} = \Gamma_{1\alpha}^\beta\mathbf{r}_\beta\frac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}s} \\
k_g &= \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} + \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\Gamma_{1\alpha}^2\frac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}s}\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{r}_2 \\
&= \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} + \Gamma_{1\alpha}^2\frac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}s}\sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}}
\end{aligned}$$

□

定义 3.2. 曲面上的曲线如果处处测地曲率为零，则称为该曲面的测地线。

定理 3.1. 曲线为测地线的充要条件是该曲线为弧长泛函的临界点.

证明.

$$L(\lambda) = \int_a^b \left| \frac{\partial \mathbf{r}(s,\lambda)}{\partial s} \right| \mathrm{d}s$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\lambda=0} = \int_a^b \frac{\partial}{\partial \lambda} \sqrt{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \right|^2} \mathrm{d}s$$

□

4 测地坐标系

5 局部的 Gauss-Bonet 公式

设 $\Sigma \subset E^3$ 为正则曲面，$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ 为 Σ 的幺正标架，$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 为切向量。
第一基本形式 $I = \mathrm{d}s^2 = \omega^1\omega^1 + \omega^2\omega^2$
运动方程

- $\mathrm{d}\mathbf{r} = \omega^\alpha \mathbf{e}_\alpha, \alpha = 1, 2$
- $\mathrm{d}\mathbf{e}_1 = \omega_1^2 \mathbf{e}_2 + \omega_1^3 \mathbf{e}_3$
- $\mathrm{d}\mathbf{e}_2 = \omega_2^1 \mathbf{e}_1 + \omega_2^3 \mathbf{e}_3$
- $\mathrm{d}\mathbf{e}_3 = \omega_3^\alpha \mathbf{e}_\alpha$

Gauss 方程

$$\mathrm{d}\omega_1^2 = \omega_1^3 \wedge \omega_3^2 = h_{1\alpha}\omega^\alpha \wedge (-h_{2\beta}\omega^\beta) = -h_{1\alpha}h_{2\beta}\omega^\alpha \wedge \omega^\beta = -(h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21})\omega^1 \wedge \omega^2 = -K\omega^1 \wedge \omega^2$$

曲线测地曲率 $\mathbf{r}(s), \mathbf{T} = \dot{\mathbf{r}} = \cos\theta \mathbf{e}_1 + \sin\theta \mathbf{e}_2$
$k_g = \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s} \cdot (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{T}) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\cos\theta \mathbf{e}_1 + \sin\theta \mathbf{e}_2) \cdot (\cos\theta \mathbf{e}_2 - \sin\theta \mathbf{e}_1) = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} + \dfrac{\omega_1^2}{\mathrm{d}s}$
单连通区域，$\partial\Omega$ 为简单闭曲线，

$$\iint_\Omega K\mathrm{d}A = \iint_\Omega K\omega^1 \wedge \omega^2 = -\iint_\Omega \mathrm{d}\omega_1^2 = -\oint_{\partial\Omega} \omega_1^2 = -\oint_{\partial\Omega} k_g \mathrm{d}s + \oint_{\partial\Omega} \mathrm{d}\theta$$

(1) 边界光滑 $\displaystyle\oint_{\partial\Omega} \mathrm{d}\theta = 2\pi$

(2) 边界分段光滑 $\displaystyle\oint_{\partial\Omega} \mathrm{d}\theta = \sum_i \int_{C_i} \mathrm{d}\theta = 2\pi - \sum_i \theta_i$

1. $\partial\Omega$ 是光滑的闭曲线
   $\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0} = \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=1}, \theta(l) = \theta(0) + 2k\pi$，所以 $\displaystyle\int_{\partial\Omega} \mathrm{d}\theta = 2k\pi$
   $\partial\Omega$ 作光滑变形，使其落在一个等温坐标系，$\displaystyle\int_{\partial\Omega} \mathrm{d}\theta = 2k\pi$ 在光滑形变下不变
   将等温参数平面的原像记为 $\partial\tilde{\Omega}$，因为共形变换保持夹角，$\displaystyle\int_{\partial\Omega} \mathrm{d}\theta = \int_{\partial\Omega} \mathrm{d}\theta$
   $\partial\tilde{\Omega}$ 为圆周，$\displaystyle\int_{\partial\tilde{\Omega}} \mathrm{d}\theta = 2\pi$，所以 $\displaystyle\int_{\partial\Omega} \mathrm{d}\theta = 2\pi$
2. 分段光滑 $\partial\Omega = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_n$
   用光滑曲线逼近，$\partial\tilde{\Omega}$
   $\partial\tilde{\Omega} \cap \partial\Omega = \Gamma_1, \partial\tilde{\Omega} \backslash \partial\Omega = \Gamma_2$
   $2\pi = \displaystyle\int_{\partial\tilde{\Omega}} \mathrm{d}\theta = \int_{\Gamma_1} \mathrm{d}\theta + \int_{\Gamma_2} \mathrm{d}\theta$
   所以 $\displaystyle\int_{\partial\Omega} \mathrm{d}\theta + \sum_{i=1}^n \alpha_i = 2\pi$
   所以 $\displaystyle\iint_\Omega K\omega^1 \wedge \omega^2 + \oint_{\partial\Omega} k_g \mathrm{d}s = 2\pi - \sum_{i=1}^n \alpha_i$，单连通区域的 Gauss-Bonet 公式

5.1 应用

测地三角形的内角和

$$\iint_{\Omega} K\omega^1 \wedge \omega^2 + \int_{\partial\Omega} k_g \mathrm{d}s = 2\pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 - \pi$$

曲面上向量沿闭光滑曲线平移产生的角差

设 C 是光滑闭曲线，围成一单连通区域，$\mathbf{V}(s)$ 为沿 C 的平行切向量场，不妨设为单位长度，$\mathbf{V}(s) = \cos\beta\mathbf{e}_1 + \sin\beta\mathbf{e}_2$

$$0 = \frac{D\mathbf{V}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}s}(-\sin\beta\mathbf{e}_1 + \cos\beta\mathbf{e}_2) + \cos\beta\frac{\omega_1^2}{\mathrm{d}s}\mathbf{e}_2 + \sin\beta\frac{\omega_2^1}{\mathrm{d}s}\mathbf{e}_1$$

所以 $\dfrac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}s} = -\dfrac{\omega_1^2}{\mathrm{d}s}$

所以 $\oint_C \mathrm{d}\beta = \oint_C -\omega_1^2 = -\iint_{\Omega} \mathrm{d}\omega_1^2 = \iint_{\Omega} K\omega^1 \wedge \omega^2$

6 曲面上的 Laplace 算子

例 6.1. 设 Σ 为紧致曲面，假设函数 f 满足 $\Delta_\Sigma f \geqslant 0$，证明 f 必是常值函数.

证明.

$$\int_\Sigma f\,\mathrm{div}(\nabla f)\mathrm{d}A = \int_\Sigma f\Delta_\Sigma f\mathrm{d}A \geqslant 0$$
$$\int_\Sigma f\,\mathrm{div}(\nabla f)\mathrm{d}A = \int_\Sigma \mathrm{div}(f\nabla f) - |\nabla f|^2\mathrm{d}A$$

□

$$\int_\Omega \langle DL(Du), D\varphi\rangle = 0, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \tag{$*$}$$

在$*$中，我们

Part I

整体微分几何选讲

Chapter 5

平面曲线的整体性质

1 平面的闭曲线

2 平面的凸曲线

Chapter 6

曲面的若干整体性质

1 曲面的整体描述

- 曲面片，$\Sigma = \mathbf{r}(U)$，$\mathbf{r}: U \to E^3$，$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2)$

  (1) $\mathbf{r}(u) \in C^k$

  (2) $\mathbf{r}$ 是一同胚，即 U 和 $\mathbf{r}(U)$ 同胚

  (3) $\mathbf{r}$ 正则，即 $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1} \wedge \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^2} \neq 0.$

- E^3 中 C^k 阶曲面 Σ，即存在一列 C^k 阶曲面片 $\Sigma_\alpha, \{\mathbf{r}_\alpha : U_\alpha \to E\}_\alpha, \alpha \in A$ 使得

  (1) $\Sigma = \cup_{\alpha \in A} \Sigma_\alpha$. 每个曲面片 Σ_α 称为 Σ 的坐标邻域，$(u^1_\alpha, u^2, \alpha)$ 称为局部坐标，$(\Sigma_\alpha, (u^1_\alpha, u^2_\alpha))$ 称为一个局部坐标系，$\left\{(\Sigma_\alpha, (u^1_\alpha, u^2_\alpha))\right\}_{\alpha \in A}$ 称为 Σ 的坐标图册.

  (2) $\forall\ \alpha, \beta \in \Lambda$，当 $\Sigma_\alpha \cap \Sigma_\beta \neq \varnothing$ 时，$\mathbf{r}_\beta^{-1} \circ \mathbf{r}_\alpha$ 仍是 C^k 映射，称为坐标转换函数（映射）.

注记. 曲面片本身就是曲面.

例 1.1. 圆柱面，球面，二次锥面.

注记. 连通性：不连通可考虑其连通分支.

$\Sigma = \cup \Sigma_\alpha \subset E^3$，由 E^3 的欧式内积自然诱导每个 Σ_α 上的第一基本形式.

在 $\Sigma_\alpha \cap \Sigma_\beta$ 上，由假设坐标转换函数是光滑的，故 $\Sigma_\alpha, \Sigma_\beta$ 的第一基本形式是一致的，因此在 Σ 上有整体的第一基本形式

内蕴几何量，如测地曲率、Gauss 曲率均可在整个曲面 Σ 上定义.

可定向，曲面 Σ 有一个坐标图册 $\{\Sigma_\alpha, \mathbf{r}_\alpha\}$，每个 Σ_α 取定向即指定法向 $\mathbf{n}_\alpha$ 使 $\mathbf{n}_\alpha = \mathbf{n}_\beta$ 在 $\Sigma_\alpha \cap \Sigma_\beta$ 上（等价地，所有坐标变换 $\mathbf{r}_\beta^{-1} \circ \mathbf{r}_\alpha$ 地 Jacobi 行列式为正，$\deg(\dfrac{\partial(u^1_\beta, u^2_\beta)}{\partial(u^1_\alpha, u^2_\alpha)}) > 0$）

定理 1.1. *设 Σ 是 E^3 中的紧致曲面，则在 Σ 上必有一点 p_0，它的 Gauss 曲率 $K(p_0) > 0$.*

证明. 考虑函数 $f : \Sigma \to \mathbb{R}, p \mapsto \mathbf{r}(p) \cdot \mathbf{r}(p)$.

由 Σ 紧致无边，存在内点 p_0 使得 f 取到最大值.

取 p_0 附近的局部坐标系 (u^1, u^2).

- $\mathrm{d}f(p_0) = 2\mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}(p_0) = 0 \Longrightarrow \exists\ \lambda > 0$ s.t. $\mathbf{r}(p_0) = \lambda \mathbf{n}(p_0)$.
- $0 \geqslant \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} \right)(p_0) = 2(\mathbf{r}_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\beta)(p_0) = 2(\lambda b_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta})(p_0)$

$\square$

2 Gauss-Bonet 公式

2.1 曲面的三角剖分

2.2 整体的 Gauss-Bonet 公式

定理 2.1. 设 D 为曲面 Σ 上由分段光滑曲线所围成的区域，则

$$\int_D K\mathrm{d}A + \int_{\partial D} k_g \mathrm{d}S + \sum \alpha_i = 2\pi\chi(D)$$

2.3 Gauss-Bonet 定理的应用

Poincare 指标定理

Jacobi 定理

3 紧致曲面的高斯映射

3.1 紧致曲面的绝对全曲率

3.2 空间曲线的全曲率

4 凸曲面

4.1 凸曲面

定义 4.1. E^3 中的曲面 Σ 称为凸的，如果其位于每点切平面的一侧.

命题 4.1. 设 Σ 为凸曲面，则 $K \geqslant 0$.

证明. 对任意 $p_0 \in \Sigma$，考虑 $f(p) = (\mathbf{r}(p) - \mathbf{r}(p_0)) \cdot \mathbf{n}(p_0)$，其中 $\mathbf{n}(p_0)$ 是 p_0 处的单位外法向量.

由凸曲面定义，$f(p) \leqslant 0$，并且在 p_0 处取到最大值.

因此 $0 \geqslant \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^\alpha \partial u^\beta}(p_0)\right) = (\mathbf{r}_{\alpha\beta}(p_0) \cdot \mathbf{n}(p_0))$，即第二基本形式负定，因此 $K \geqslant 0$. □

定理 4.1. 设 Σ 为 E^3 中的紧致曲面，若 Σ 的 *Gauss* 曲率处处为正，则 Σ 为凸曲面.

证明. □

4.2 积分公式

4.3 球面的判断

4.4 卵形面的刚性定理

4.5 凸曲面的 Minkowski 问题

附录 A

联络

1　矢量丛上的联络

定义 1.1. 矢量丛上的联络是一个映射

$$D : \Gamma(E) \to \Gamma(T^*M \otimes E),$$

它满足下列条件:

(1) $D(s_1 + s_2) = D(s_1) + D(s_2), \forall\ s_1, s_2 \in \Gamma(E)$.

(2) $D(\alpha s) = \mathrm{d}\alpha \otimes s + \alpha Ds, \forall\ s \in \Gamma(E), \alpha \in C^\infty(M)$.

等价地，矢量丛上的联络是一个映射:

$$\begin{aligned} D : \Gamma(TM) \times \Gamma(E) &\to \Gamma(E), \\ (\ X \quad , \quad Y\ ) &\mapsto D_X Y \end{aligned}$$

它满足下列条件:

(1) 关于 X 是 $C^\infty(M)$ 线性的

(2) 关于 Y 是 $\mathbb{R}$ 线性的

(3) $D_X(fY) = (Xf)Y + fD_X Y$.

附录 B

一些总结

1

- ω_1^2 只依赖于第一基本形式，但它依赖于标架的选取，不是几何量.
- 克里斯托弗符号是内蕴量，但不是张量
  - “不是张量”不是说它不可能是某个整体定义的量的分量.

在局部上，联络是由一组一次微分式给出的. 设 U 是 M 上的一个坐标域，

联络方阵在局部标架场改变时的变换公式

2 算子的局部性

3 我会算什么

- 本人习惯用下标代表行指标，用上标代表列指标.
- 给定两个坐标邻域，我会直接写出两个自然标架场之间的变换公式，也就是雅可比.
- 矩阵值的 1-形式，和，有一个矩阵，它的每个元素都是普通的 1-形式，是同一回事.
- 矩阵乘法是列指标与行指标的求和.
- 矩阵值的 1-形式的相关运算
  - 外微分：就是对每个分量做外微分
  - 张量积：如 $DS = \omega \otimes S$. 运算规律是矩阵乘法，元素与元素之间的运算是张量积.
  - 外积：如 $\Omega = \mathrm{d}\omega - \omega \wedge \omega$. 运算规律是矩阵乘法，元素之间的运算是外积.
    * 非常值得警醒的是，由于矩阵的非交换性，此时矩阵值形式的外积也是非交换的.
  - 数乘：如 $\omega' = \mathrm{d}A \cdot A^{-1} + A \cdot \omega \cdot A^{-1}$. 运算规律是矩阵乘法，元素之间的运算是数乘.
  - 给定两个标架间的过渡矩阵，我会算联络矩阵的变换规律

$$
\begin{aligned}
S' &= A \cdot S \\
DS' &= D(A \cdot S) \\
&= \mathrm{d}A \otimes S + A \cdot DS \\
&= \mathrm{d}A \otimes (A^{-1} \cdot S') + A \cdot (\omega \otimes S) \\
&= (\mathrm{d}A \cdot A^{-1}) \otimes S' + (A \cdot \omega) \otimes (A^{-1} \cdot S') \\
&= (\mathrm{d}A \cdot A^{-1} + A \cdot \omega \cdot A^{-1}) \otimes S' \\
\omega' &= \mathrm{d}A \cdot A^{-1} + A \cdot \omega \cdot A^{-1} \\
\omega' \cdot A &= \mathrm{d}A + A \cdot \omega \\
\mathrm{d}\omega' \cdot A - \omega' \wedge \mathrm{d}A &= \mathrm{d}A \wedge \omega + A \cdot \mathrm{d}\omega \\
\mathrm{d}\omega' \cdot A - \omega' \wedge (\omega' \cdot A - A \cdot \omega) &= (\omega' \cdot A - A \cdot \omega) \wedge \omega + A \cdot \mathrm{d}\omega \\
(\mathrm{d}\omega' - \omega' \wedge \omega')A &= A(\mathrm{d}\omega - \omega \wedge \omega)
\end{aligned}
$$

附录 C

活动标架法

现在考虑 N 维欧式空间 $\mathbb{R}^N$ 的刚体运动群 $E(N)$.

附录 D

复习课

1 title

粗体
斜体
粗斜体