样条函数与逼近论

孙天阳

中国科学技术大学数学科学学院

tysun@mail.ustc.edu.cn

2025 年 9 月 20 日

目录

Chapter 1

差商

1.1 绪论

多项式插值：Lagrange、Newton、Hermite。

P_m: 最高不超过 m 次的多项式。

Runge 现象：$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, x \in [-5, 5]$，用一个多项式插值不能很好地拟合这个函数。

1.1.1 分段插值

分段插值 $\rightarrow$ 样条：分段光滑多项式。插值方法不行，不做插值，改做逼近。

给定区间 $[a, b]$，假设 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k < x_{k+1} = b$，

$$\Big\{ I_i = [x_i, x_{i+1}), i = 0, \cdots, k$$

每一段上都可以约定多项式的次数，叫做 multi-degree spline，就是每段上最高次数不一样。我们这门课，每一段上多项式次数，给一个统一的最高值。

$$S_m(\Delta) := \Big\{ s(x) \mid s(x) \mid_{I_i} \in \mathbb{P}_m, s(x) \in C^{m-1}[a, b] \Big\}$$

以后每个结点可以指定不同的光滑次数。

$S_m(\Delta) \subset C^{m-1}[a, b]$ 线性空间（关心基函数）+ 对偶基。从计算的角度来说，具有紧支集的基函数。学过有限元的话，具有紧支集的函数 $\int_{\mathbb{R}} f(x) g(x) \mathrm{d}x$ 就很好算。

1.1.2 B 样条基函数

B 样条基函数 (B-spline)，B 是 Basic。

1.2 Lagrange 插值

问题: 给定区间 $[a,b]$ 上的函数 $f(x)$，给定互异的插值节点组 $\{x_i\}_{i=0}^m$ 使得

$$a \leqslant x_0 < x_1 < \cdots < x_m \leqslant b$$

找 $p_m(x) \in \mathbb{P}_m$ 满足插值条件 $p_m(x_i) = f(x_i), i = 0, \cdots, m$.

定理 1.2.1. *以上插值问题的解存在且唯一.*

证明. 设 $p_m(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$, 则插值条件等价于

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + \cdots + a_m x_0^m = f(x_0) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_0 + a_1 x_m + \cdots + a_m x_m^m = f(x_m) \end{cases}$$

这是一个关于 $\{a_i\}_{i=0}^m$ 的线性方程组, 解存在唯一当且仅当行列式

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^m \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^m \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_m & \cdots & x_m^m \end{vmatrix} = \prod_{i<j} (x_i - x_j) \neq 0.$$

□

上面是理论上的存在唯一性. 如果要按照上面的方法去解 $\{a_i\}_{i=0}^m$, 因为这个矩阵是非稀疏的, 我们会发现这个计算量太大. $\{1, x, \cdots, x^m\}$ 作为 $\mathbb{P}_m$ 的一组基虽然在理论上很自然, 但在计算上的效果并不好. 所以我们希望在给定插值节点组 $\{x_i\}_{i=0}^m$ 的情况下, 找到 $\mathbb{P}_m$ 的一组基 $\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^m$, 使得此时求 $p_m(x)$ 关于基的系数的方程尽可能简单, 也就是使矩阵

$$B = \begin{pmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) & \cdots & \varphi_m(x_0) \\ \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \cdots & \varphi_m(x_1) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \varphi_0(x_m) & \varphi_1(x_m) & \cdots & \varphi_m(x_m) \end{pmatrix}$$

尽可能简单. 我们能想到的最简单的矩阵就是 $B = I$, 这就是要求

$$\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}.$$

以 φ_0 为例, 这样就要求 $x_1, \cdots, x_m$ 是 φ_0 的零点, 又因为 φ_0 是一个不超过 m 次的多项式, 所以我们已经在相差一个常数倍的意义下决定了 φ_0,

$$\varphi_0(x) \sim (x - x_1) \cdots (x - x_m).$$

再结合条件 $\varphi_0(x_0) = 1$, 我们得到

$$\varphi_0(x) = \frac{(x - x_1) \cdots (x - x_m)}{(x_0 - x_1) \cdots (x_0 - x_m)}.$$

其他的 $\varphi_i(x)$ 是同理的. 这样一来,

$$p_m(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \cdots + a_m\varphi_m(x)$$

中的系数 $\{a_i\}_{i=0}^m$ 就被确定为

$$a_i = f(x_i), \quad i = 0, \cdots, m.$$

我们给这组基一个专有的记号记作 l_i, 称作 Lagrange 插值多项式, 将这种插值方式

$$p_m(x) = \sum_{i=0}^m f(x_i) l_i(x)$$

称作 **Lagrange 插值**.

命题 1.2.2.

$$\sum_{i=0}^m l_i(x) \equiv 1$$

证明. 左侧其实就是 1 的 Lagrange 插值多项式, 按插值的要求它在 $m+1$ 个点取到 1, 这大于它的次数 m, 所以只能恒为 1. □

如果引入记号

$$\omega_{m+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_m)$$

那么

$$l_i(x) = \frac{\omega_{m+1}(x)}{(x - x_i)\omega'_{m+1}(x_i)}.$$

1.3 Newton 插值

Lagrange 插值有一个缺点, 就是基函数高度依赖于节点的选择. 如果节点发生了变化, 哪怕是在原有的 m 个节点的基础上新增一个节点, 也需要重新算一遍基函数. 这就促使我们引入了 **Newton 插值**. 把握住目的是新增节点时能够复用原有的基函数, 就不难理解 Newton 插值的基函数的选择.

首先 $m=0$ 只有一个节点的时候, 很平凡的情形自然会选 $\varphi_0=1$ 作为基函数. 当 $m=1$ 也就是有两个节点的时候, 首先我们已经有了 $\varphi_0=1$, 所以矩阵长成

$$B=\begin{pmatrix}1 & \varphi_1(x_0)\\ 1 & \varphi_1(x_1)\end{pmatrix}$$

的样子, 我们为了 B 简单所以取 $\varphi_1=x-x_0$. 当 $m=2$ 时, 矩阵长成

$$B=\begin{pmatrix}1 & 0 & \varphi_2(x_0)\\ 1 & \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1)\\ 1 & \varphi_1(x_2) & \varphi_2(x_2)\end{pmatrix}$$

依旧是为了矩阵简单我们取 $\varphi_2=(x-x_0)(x-x_1)$. 这样一来, $\varphi_i(x)$ 的取法就比较清楚了

$$\varphi_0(x)=1,\quad \varphi_i(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1}),\quad i=1,2,\ldots,m.$$

根据这种取法, A 是一个下三角矩阵. 为什么不在 $\varphi_i(x)$ 前加系数来进一步简化矩阵? 因为给 $\varphi_1(x)$ 前加系数顶多把 $\varphi_1(x_1)$ 给调成 1, 不可能同时把 $\varphi_1(x_2)$ 给调成 1, 所以干脆摆烂, 这样系数还干净.

命题 1.3.1 (作业)**.** *$\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^m$ 线性无关.*

证明.

$$\lambda_0+\lambda_1(x-x_0)+\lambda_2(x-x_0)(x-x_1)+\cdots+\lambda_m(x-x_0)\cdots(x-x_{m-1})=0$$

取 $x=x_0$ 推得 $\lambda_0=0$. 再取 $x=x_1$ 得 $\lambda_1=0$. 以此类推. □

接下来我们看一下此时怎么确定

$$p_m(x)=a_0\varphi_0(x)+a_1\varphi_1(x)+\cdots+a_m\varphi_m(x)$$

中的系数. 我们有三个观察, 首先注意到有

$$p_m(x)=p_{m-1}(x)+a_m\varphi_m(x),$$

这是因为 φ_m 在 $x_0,\cdots,x_{m-1}$ 处全为零, 即 $a_m\varphi_m(x)$ 这一项对 $p_m(x)$ 在 $x_0,\cdots,x_{m-1}$ 处的值没有影响, 所以除去这部分就是插值前 m 个节点的插值多项式. 从这里看出来, 采用牛顿插值, 我们不仅可以复用基函数, 在计算插入新节点后的插值多项式时还可以复用之前的插值多项式. 另一个观察是 a_m 就是 p_m 中 x^m 前的系数, 由插值多项式的存在唯一性, 我们可以利用 Lagrange 插值

$$p_m(x)=\sum_{i=0}^m f(x_i)l_i(x)$$

来计算 a_m. 直接可以从上式与 $l_i(x)$ 的定义读出 $p_m(x)$ 的最高阶项系数就是

$$a_m=\sum_{i=0}^m f(x_i)\frac{1}{\prod_{j\neq i}(x_i-x_j)}.$$

第三个观察是我们可以递归地计算出 a_i, 首先在 $x = x_0$ 处取值可以计算出

$$a_0 = f(x_0) =: [x_0]f$$

然后在 $x = x_1$ 处取值得到

$$[x_1]f = [x_0]f + a_1(x_1 - x_0) \Longrightarrow a_1 = \frac{[x_1]f - [x_0]f}{x_1 - x_0} =: [x_0, x_1]f$$

然后在 $x = x_2$ 处取值得到

$$[x_2]f = [x_0]f + [x_0, x_1]f \cdot (x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_1)(x_2 - x_0)$$

$$[x_2]f - [x_1]f + [x_1]f - [x_0]f = [x_0, x_1]f \cdot (x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_1)(x_2 - x_0)$$

$$[x_1, x_2]f \cdot (x_2 - x_1) + [x_0, x_1]f \cdot (x_1 - x_0) = [x_0, x_1]f \cdot (x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_1)(x_2 - x_0)$$

$$[x_1, x_2]f \cdot (x_2 - x_1) - [x_0, x_1]f \cdot (x_2 - x_1) = a_2(x_2 - x_1)(x_2 - x_0)$$

$$a_2 = \frac{[x_1, x_2]f - [x_0, x_1]f}{x_2 - x_0} =: [x_0, x_1, x_2]f$$

然后在 $x = x_3$ 处取值, 移项并合并产生更高阶项, 得到

$$\begin{aligned} &[x_2, x_3]f \cdot (x_3 - x_2) + [x_1, x_2]f \cdot (x_2 - x_1) + [x_0, x_1]f \cdot (x_1 - x_0) \\ =&[x_0, x_1]f \cdot (x_3 - x_0) + [x_0, x_1, x_2]f \cdot (x_3 - x_1)(x_3 - x_0) + a_3(x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_3 - x_0) \end{aligned}$$

移项并插入中间项得到

$$\begin{aligned} &[x_2, x_3]f \cdot (x_3 - x_2) - [x_1, x_2]f \cdot (x_3 - x_2) + [x_1, x_2]f \cdot (x_3 - x_1) - [x_0, x_1]f \cdot (x_3 - x_1) \\ =&[x_0, x_1, x_2]f \cdot (x_3 - x_1)(x_3 - x_0) + a_3(x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_3 - x_0) \end{aligned}$$

合并产生更高阶项得到

$$\begin{aligned} &[x_1, x_2, x_3]f \cdot (x_3 - x_2)(x_3 - x_1) + [x_0, x_1, x_2]f \cdot (x_3 - x_1)(x_2 - x_0) \\ =& [x_0, x_1, x_2]f \cdot (x_3 - x_1)(x_3 - x_0) + a_3(x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_3 - x_0) \end{aligned}$$

移项得到

$$[x_1, x_2, x_3]f \cdot (x_3 - x_2)(x_3 - x_1) - [x_0, x_1, x_2]f \cdot (x_3 - x_2)(x_3 - x_1) = a_3(x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_3 - x_0)$$

$$\Longrightarrow a_3 = \frac{[x_1, x_2, x_3]f - [x_0, x_1, x_2]f}{x_3 - x_0} =: [x_0, x_1, x_2, x_3]f$$

一般的, 在 $x = x_m$ 处取值得到

$$[x_m]f = [x_0]f + [x_0, x_1]f \cdot (x_m - x_0) + \cdots + a_m(x_m - x_{m-1}) \cdots (x_m - x_0)$$

接下来我们将归纳证明, 将式子右侧的前 k 项挪到式子左侧, 会得到

$$\sum_{i=1}^{m-k+1} [x_{m-i+2-k}, \cdots, x_{m-i+1}]f \cdot (x_m - x_{m-i}) \cdots (x_m - x_{m-i+2-k}) - [x_{m-i+1-k}, \cdots, x_{m-i}]f \cdot (x_m - x_{m-i}) \cdots (x_m - x_{m-i+2-k})$$

当 $k=1$ 时, 这就是

$$\sum_{i=1}^{m}[x_{m-i+1}]f-[x_{m-i}]f=[x_m]f-[x_{m-1}]f+[x_{m-1}]f-[x_{m-2}]f+\cdots+[x_1]f-[x_0]f$$

这是显然的, 假设上式对 k 成立, 下证对 $k+1$ 成立, 对 k 的式子变形并移项得

$$=\sum_{i=1}^{m-k+1}[x_{m-i+1-k},\cdots,x_{m-i+1}]f\cdot(x_m-x_{m-i})\cdots(x_m-x_{m-i+2-k})(x_{m-i+1}-x_{m-i+1-k})-[x_0,\cdots,x_k]f\cdot(x_m-x_{k-1})\cdots(x_m-x_0)$$

要证这玩意等于

$$\sum_{i=1}^{m-k}[x_{m-i+1-k},\cdots,x_{m-i+1}]f\cdot(x_m-x_{m-i})\cdots(x_m-x_{m-i+1-k})-[x_{m-i-k},\cdots,x_{m-i}]f\cdot(x_m-x_{m-i})\cdots(x_m-x_{m-i+1-k})$$

首先可以看到含 $[x_{m-k},\cdots,x_m]$ 的项是一样的, 接下来就是证

$$\begin{aligned}&-[x_{m-j-k},\cdots,x_{m-j}]f\cdot(x_m-x_{m-j})\cdots(x_m-x_{m-j+1-k})+[x_{m-j-k},\cdots,x_{m-j}]f\cdot(x_m-x_{m-j-1})\cdots(x_m-x_{m-j-k})\\=&[x_{m-j-k},\cdots,x_{m-j}]f\cdot(x_m-x_{m-j-1})\cdots(x_m-x_{m-j+1-k})(x_{m-j}-x_{m-j-k})\end{aligned}$$

即证

$$-(x_m-x_{m-j})\cdots(x_m-x_{m-j+1-k})+(x_m-x_{m-j-1})\cdots(x_m-x_{m-j-k})=(x_m-x_{m-j-1})\cdots(x_m-x_{m-j+1-k})(x_{m-j}-x_{m-j-k})$$

消去公因式, 即证

$$-(x_m-x_{m-j})+(x_m-x_{m-j-k})=x_{m-j}-x_{m-j-k}$$

这是显然的. 最后还需要额外验证

$$-[x_0,\cdots,x_k]f\cdot(x_m-x_k)\cdots(x_m-x_1)=[x_0,\cdots,x_k]f\cdot(x_m-x_{k-1})\cdots(x_m-x_1)(x_k-x_0)-[x_0,\cdots,x_k]f\cdot(x_m-x_{k-1})\cdots(x_m-x_0)$$

即证

$$-(x_m-x_k)\cdots(x_m-x_1)=(x_m-x_{k-1})\cdots(x_m-x_1)(x_k-x_0)-(x_m-x_{k-1})\cdots(x_m-x_0)$$

消去公因式, 即证

$$-(x_m-x_k)=(x_k-x_0)-(x_m-x_0),$$

这是显然的. 所以当 $k=m$ 时我们得到

$$[x_1,\cdots,x_m]f\cdot(x_m-x_{m-1})\cdots(x_m-x_1)-[x_0,\cdots,x_{m-1}]f\cdot(x_m-x_{m-1})\cdots(x_m-x_1)=a_m(x_m-x_{m-1})\cdots(x_m-x_1)(x_m-x_0)$$

$$\Longrightarrow a_m=\frac{[x_1,\cdots,x_m]f-[x_0,\cdots,x_{m-1}]f}{x_m-x_0}$$

定义 1.3.2. 设 $\{x_i\}_{i=0}^m$ 是 $[a,b]$ 中互异的 $m+1$ 个节点, f 是定义在 $[a,b]$ 上的函数. 定义

$$[x_0,\cdots,x_m]f:=\frac{[x_1,\cdots,x_m]f-[x_0,\cdots,x_{m-1}]f}{x_m-x_0}=\sum_{i=0}^m f(x_i)\frac{1}{\prod_{j\neq i}(x_i-x_j)}=\frac{D\begin{pmatrix}x_0&x_1&\cdots&x_{m-1}&x_m\\1&x&\cdots&x^{m-1}&f\end{pmatrix}}{D\begin{pmatrix}x_0&x_1&\cdots&x_{m-1}&x_m\\1&x&\cdots&x^{m-1}&x^m\end{pmatrix}}$$

命题 1.3.3. 设 $\sigma\in S_{m+1}$ 是一个全排列, 则 $[x_0,\cdots,x_m]f=[x_{\sigma(0)},\cdots,x_{\sigma(m)}]f$.

证明. 从差商是 Lagrange 插值多项式的首项系数的定义来看是显然的. □

命题 1.3.4. 从差商是 Lagrange 插值多项式的首项系数的定义验证递归定义成立.

证明.

$$[x_1,\ldots,x_m]f-[x_0,\ldots,x_{m-1}]f=\sum_{i=1}^{m}f(x_i)\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{m}\frac{1}{x_i-x_k}-\sum_{i=0}^{m-1}f(x_i)\prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{m-1}\frac{1}{x_i-x_k}$$

$$=f(x_m)\prod_{k=1}^{m-1}\frac{1}{x_m-x_k}-f(x_0)\prod_{k=1}^{m-1}\frac{1}{x_0-x_k}+\sum_{i=1}^{m-1}f(x_i)\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{m-1}\frac{1}{x_i-x_k}\left(\frac{1}{x_i-x_m}-\frac{1}{x_i-x_0}\right)$$

$$=f(x_m)\prod_{k=1}^{m-1}\frac{1}{x_m-x_k}-f(x_0)\prod_{k=1}^{m-1}\frac{1}{x_0-x_k}+\sum_{i=1}^{m-1}f(x_i)\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{m-1}\frac{1}{x_i-x_k}\frac{x_m-x_0}{(x_i-x_m)(x_i-x_0)}$$

$$=(x_m-x_0)\left[f(x_m)\prod_{k=0}^{m-1}\frac{1}{x_m-x_k}+f(x_0)\prod_{k=1}^{m}\frac{1}{x_0-x_k}+\sum_{i=1}^{m-1}f(x_i)\prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{m}\frac{1}{x_i-x_k}\right]$$

□

命题 1.3.5. 设 $f\in C^m[a,b]$, 则存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$[x_0,x_1,\cdots,x_m]f=\frac{f^{(m)}(\xi)}{m!}$$

证明. 令 $e(x)=f(x)-P_m(x)$, 则它是以 $\{x_i\}_{i=0}^m$ 为零点的函数, 由 Rolle 中值定理, 存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $e^{(m)}(\xi)=0$, 而 $P_m^{(m)}(\xi)=m![x_0,\cdots,x_m]f=f^{(m)}(\xi)$. □

例 1.3.6 (作业)**.** 计算 $f=x^n$ 的各阶差商.

$$[x_0,\cdots,x_m]f=\begin{cases}0 & m>n\\ 1 & m=n\\ ? & m<n\end{cases}$$

1.4 误差估计

1.5 Hermite 插值

设

$$a \leqslant x_1 < x_2 < \cdots < x_r \leqslant b$$

为插值节点, 对节点 x_i, 给定 $l_i \geqslant 1$ 个实数

$$y_i^{(k)} = f^{(k)}(x_i), \quad k = 0, \cdots, l_i - 1$$

记 $\sum_{i=1}^r l_i = m+1$. Hermite 问题: 寻找一个 m 次多项式 $H_m(x) \in \mathbb{P}_m$ 满足插值条件

$$H_m^{(k)}(x_i) = y_i^{(k)}, \quad k = 0, \cdots, l_i - 1, \quad i = 1, \cdots, r.$$

定理 1.5.1. *满足上述插值条件的多项式 $H_m(x) \in \mathbb{P}_m$ 存在且唯一.*

假设 $\{u_i(x)\}_{i=0}^m$ 是 $\mathbb{P}_m$ 的一组基, 设 $H_m(x) = \sum_{i=0}^m c_i u_i(x)$, 代入 Hermite 插值条件有

$$\begin{cases} c_0 u_0(x_1) + c_1 u_1(x_1) + \cdots + c_m u_m(x_1) = f(x_1) \\ c_0 u_0^{(1)}(x_1) + c_1 u_1^{(1)}(x_1) + \cdots + c_m u_m^{(1)}(x_1) = f^{(1)}(x_1) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_0 u_0^{(l_1-1)}(x_1) + c_1 u_1^{(l_1-1)}(x_1) + \cdots + c_m u_m^{(l_1-1)}(x_1) = f^{(l_1-1)}(x_1) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

则关于 $\{c_i\}_{i=0}^m$ 的系数矩阵为

$$B = \begin{bmatrix} u_0(x_1) & u_1(x_1) & \cdots & u_m(x_1) \\ Du_0(x_1) & Du_1(x_1) & \cdots & Du_m(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D^{l_1-1}u_0(x_1) & D^{l_1-1}u_1(x_1) & \cdots & D^{l_1-1}u_m(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_0(x_r) & u_1(x_r) & \cdots & u_m(x_r) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D^{l_r-1}u_0(x_r) & D^{l_r-1}u_1(x_r) & \cdots & D^{l_r-1}u_m(x_r) \end{bmatrix}$$

证明一. B 可逆 $\Leftrightarrow Bx = 0$ 只有零解, 即满足齐次 Hermite 插值条件的只有零解. 数零点个数. □

证明二. 根据尽可能简化矩阵 B 的思路, 选取

$$u_0(x) = 1, u_1(x) = x - x_1, \cdots, u_{l_1-1} = (x-x_1)^{l_1-1}, u_{l_1} = (x-x_1)^{l_1}, \cdots, u_m(x) = (x-x_1)^{l_1} \cdots (x-x_r)^{l_r-1}$$

□

定义 1.5.2. *给定节点*

$$t_1 \leqslant t_2 \leqslant \cdots \leqslant t_{m+1} = \underbrace{x_1 = \cdots = x_1}_{l_1} < \underbrace{x_2 = \cdots = x_2}_{l_2} < \cdots < \underbrace{x_r = \cdots = x_r}_{l_r}$$

定义函数 $f(x)$ 在 $t_1, \cdots, t_{m+1}$ 处的差商为满足 Hermite 插值条件

$$H_m^{(k)}(x_i) = f^{(k)}(x_i), \quad k = 0, \cdots, l_i - 1, \quad i = 1, \cdots, r.$$

的插值多项式 $H_m(x)$ 的首项系数, 记作 $[t_1, \cdots, t_{m+1}]f$.

定理 1.5.3 (Cramer 法则)**.**

$$[t_1,\cdots,t_{m+1}]f = D\begin{pmatrix} t_1 & \cdots & t_m & t_{m+1} \\ 1 & \cdots & x^{m-1} & f \end{pmatrix} \Big/ D\begin{pmatrix} t_1 & \cdots & t_m & t_{m+1} \\ 1 & \cdots & x^{m-1} & x^m \end{pmatrix}$$

命题 1.5.4. 将出现在上式分母中的行列式称作带重节点的 Vandermonde 行列式, 证明

$$V(t_1,\cdots,t_m) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant r}(x_i - x_j)^{l_i l_j}\prod_{i=1}^{r}\prod_{k=1}^{l_i-1}k!$$

证明. □

定理 1.5.5.

$$[t_1,\cdots,t_{m+1}]f = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{l_i}\alpha_{ij}D^{j-1}f(x_i)$$

推论 1.5.6.

定理 1.5.7. 如果 $t_1 < t_{m+1}$, 那么

$$[t_1,\cdots,t_{m+1}]f = \frac{[t_2,\cdots,t_{m+1}]f - [t_1,\cdots,t_m]f}{t_{m+1} - t_1}$$

如果 $t_1 = \cdots = t_{m+1}$, 那么

$$[t_1,\cdots,t_{m+1}]f = \frac{1}{m!}D^{(m)}f(t_1)$$

证明. □

推论 1.5.8. 若 $D^m f(x) = 0$, 则 $[t_1,\cdots,t_{m+1}]f = 0$

1.6 差商的性质

命题 1.6.1 (Leibniz 公式)**.** 对光滑函数 f, g, 有

$$[t_1, \cdots, t_{m+1}](f \cdot g) = \sum_{i=1}^{m+1} [t_1, \cdots, t_i]f \cdot [t_i, \cdots, t_{m+1}]g$$

证明一. 设 p, q 是 f, g 满足 $t_1, \cdots, t_{m+1}$ 作为插值条件的 Hermite 插值问题的解.

$$p = \sum_{i=1}^{m} (x - t_1) \cdots (x - t_i)[t_1, \cdots, t_i]f$$

$$q = \sum_{i=1}^{m} (x - t_{i+1}) \cdots (x - t_{m+1})[t_i, \cdots, t_{m+1}]g$$

□

证明二. 当 $m = 0$ 时,

$$[t_1](f \cdot g) = (f \cdot g)(t_1) = f(t_1) \cdot g(t_1) = [t_1]f \cdot [t_1]g$$

假设对 m 个插值节点成立, 下面推对 $m+1$ 个插值节点成立.

(1) 当 $t_1 = \cdots = t_{m+1}$,

$$[t_1, \cdots, t_{m+1}](f \cdot g) = \frac{D^m}{m!}(f \cdot g)(t_1)$$

$$LHS = \sum_{i}^{m+1} \frac{D^{(i-1)}f}{(i-1)!}(t_1) \cdot \frac{D^{m+1-i}g}{(m+1-i)!}(t_1) = \frac{1}{m!}\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} D^i f(t_1) \cdot D^{m-i}g(t_1) = \frac{D^m f \cdot g(t_1)}{m!}$$

(2) 若 $t_1 < t_{m+1}$

$$[t_1, \cdots, t_{m+1}](f \cdot g) = \frac{[t_2, \cdots, t_{m+1}](f \cdot g) - [t_1, \cdots, t_m](f \cdot g)}{t_{m+1} - t_1}$$

$$= \frac{\sum_{i=2}^{m+1} [t_2, \cdots, t_i]f \cdot [t_i, \cdots, t_{m+1}]g - \sum_{i=1}^{m} [t_1, \cdots, t_i]f \cdot [t_i, \cdots, t_m]g}{t_{m+1} - t_1}$$

看分子

$$\sum_{i=2}^{m+1} \left((t_i - t_1)[t_1, \cdots, t_i]f + [t_1, \cdots, t_{i-1}]f\right)[t_i, \cdots, t_{m+1}]g - \sum_{i=1}^{m} [t_1, \cdots, t_i]\left(-(t_{m+1} - t_i)[t_i, t_{i+1}, \cdots, t_{m+1}]g +\right.$$

注意

$$\sum_{i=2}^{m+1} [t_1, \cdots, t_{i-1}]f \cdot [t_i, \cdots, t_{m+1}]g = \sum_{i=1}^{m} [t_1, \cdots, t_i]f \cdot [t_{i+1}, \cdots, t_{m+1}]g$$

从而上式为

$$\sum_{i=2}^{m+1} (t_i - t_1)[t_1, \cdots, t_i]f \cdot [t_i, \cdots, t_{m+1}]g + \sum_{i=1}^{m} (t_{m+1} - t_i)[t_1, \cdots, t_i]f \cdot [t_i, \cdots, t_{m+1}]g$$

$$= \sum_{i=1}^{m+1} [t_1, \cdots, t_i]f \cdot [t_i, \cdots, t_{m+1}]g(t_{m+1} - t_1)$$

□

推论 1.6.2.

$$[t_1,\cdots,t_{m+1}](x-t_{m+1})f=[t_1,\cdots,t_m]f$$

命题 1.6.3. 当 $\varepsilon_i\to 0$ 时, 若 $\{t_{i,\varepsilon_i}\}_{i=1}^{n+1}$ 是 $[t_1,t_n]$ 的某个分割，则

$$\{t_i\}_{i=1}^{n+1}\to\{t_i\}_{i=1}^{n+1}$$

对光滑函数 f 有:

$$\lim_{\epsilon_i\to 0}\sum_{i=1}^{n+1}f(t_i,\xi_i)\Delta t_i=\int_{t_1}^{t_n}f(t)\,dt$$

证明. 只需（真的吗?）针对节点 t_i, 做扰动 ε. 设原插值节点为

$$t_1\leqslant\cdots\leqslant t_{i-1}<t_i=t_{i+1}=\cdots=t_{i+l-1}<t_{i+l}\leqslant\cdots\leqslant t_{m+1}$$

做扰动 ε 后

$$t_1\leqslant\cdots\leqslant t_{i-1}<t_{i+1}=\cdots=t_{i+l-1}<t_i+\varepsilon<t_{i+l}\leqslant\cdots\leqslant t_{m+1}$$

$$[t_1,\cdots,t_i+\varepsilon,t_{i+1},\cdots,t_{m+1}]f=\frac{D}{D}$$

□

命题 1.6.4.

$$\frac{\partial}{\partial t_i}[t_1,\cdots,t_{m+1}]f=[t_1,\cdots,t_{i-1},t_i,t_i,t_{i+1},\cdots,t_{m+1}]f$$

证明.

$$\frac{\partial}{\partial}[]f=$$

□

命题 1.6.5.

证明. □

例 1.6.6. 求 $H_3(x)$ 满足 $H_3(1)=1,H_3'(1)=2,H_3(2)=2,H_4'(2)=3.$

解.

i	右	左	(右, 左)		
1	1	$1'$	(右 $=2$)		
2	1	$1'$	(右 $=1$)		
3	2	$2'$	(右 $=$)		
4	2	$2'$			

□

例 1.6.7.

Chapter 2

B 样条的性质

2.1 样条空间

定义 2.1.1. 设 $[a,b]$ 给定, 有分割 $\Delta=\{x_i\}_{i=1}^k$ 满足

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_k<x_{k+1}=b$$

将 $[a,b]$ 分为 $k+1$ 个小区间 $I_i:=[x_i,x_{i+1})(i=0,1,\cdots,k-1),I_k:=[x_k,x_{k+1}]$. 我们关心在每个区间上都是一个不超过 m 次的多项式的分片函数, 在节点 $x_i,1\leqslant i\leqslant k$ 处以指定的光滑程度 μ_i 连接

$$s(x)\big|_{I_i}=:s_i(x)\in\mathbb{P}_m(I_i),i=0,\cdots,k,D^js_{i-1}(x_i)=D^js_i(x_i),i=1,\cdots,k,j=0,\cdots,\mu_i$$

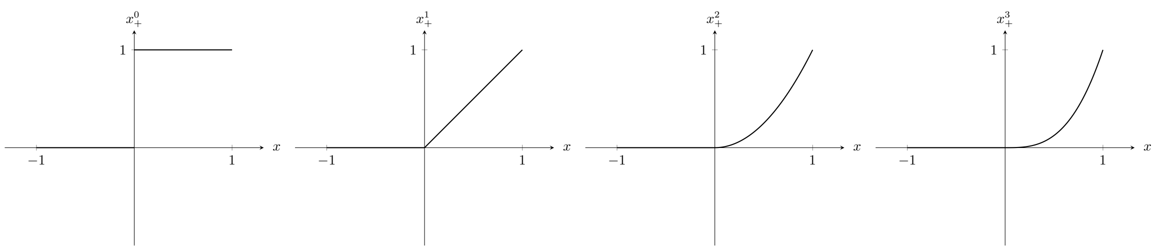
μ_i 的取值范围从 -1 到 m, 值越大光滑程度越高. -1 意味着允许完全断开, 0 意味着连续, m 意味着这两片上的多项式其实是同一个多项式. 记函数全体为 $S_m^{\vec{\mu}}(\Delta)$, 称为 m 次 $\vec{\mu}$ 阶光滑样条空间.

我们接下来的任务就是给出 $S_m^{\vec{\mu}}(\Delta)$ 一组好用的基. 首先考虑区间中只有一个内部节点 x_1 的情况, 根据定义, 样条函数 $s(x)$ 在 $[a,x_1)$ 上是某个多项式 $s_0(x)\in\mathbb{P}_m$ 的限制, 而在 $[x_1,b]$ 上是另一个多项式 $s_1(x)\in\mathbb{P}_m$ 的限制. 我们可以把 $s(x)$ 想象成 $s_0(x)$ 加上了一个在 x_1 点启动的多项式变化,

$$s(x)=s_0(x),\quad x<x_1,\quad s(x)=s_0(x)+(s_1(x)-s_0(x))=s_1(x),\quad x\geqslant x_1$$

关键在于如何表示这个变化量, 它在 $x<x_1$ 时为零, 在 $x\geqslant x_1$ 时是 $s_1(x)-s_0(x)$ 是某个次数不超过 m 的多项式. 这就促使我们引入截断幂函数的工具,

$$(x-x_i)_+^j:=\begin{cases}(x-x_i)^j & x\geqslant x_i\\ 0 & x<x_i\end{cases},\quad j\geqslant 0$$



任何一个在 $x \geqslant x_1$ 处生效的不超过 m 次的多项式变化 $\Delta(x)$, 都可以由截断幂函数线性表示

$$\Delta(x) = \sum_{j=0}^{m} c_j (x - x_1)_+^j$$

接下来我们考虑进光滑度的约束. 容易看出 $(x - x_1)_+^j$ 的光滑度是 $j - 1$, 因此, 为了达到 μ_1 水平的光滑度, 必须从 $(x - x_1)_+^{\mu_1 + 1}$ 开始考虑, 一直到最高阶光滑度的 $(x - x_1)_+^m$, 一共是 $m - \mu_1$ 个函数.

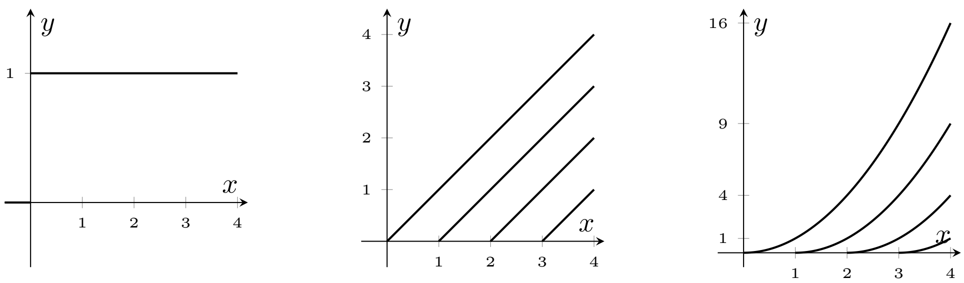
定理 2.1.2.

$$\dim S_m^{\mu}(\Delta) = m + 1 + \sum_{i=1}^{k} (m - \mu_i)$$

例 2.1.3. 考虑 $m = 2$, Δ: $a = 0 < 1 < 2 < 3 < 4 = b$, $\vec{\mu} = (0, 0, 0)$

$$\operatorname{span}\left\{(x-0)_+^0, (x-0)_+^1, (x-0)_+^2, (x-1)_+^1, (x-1)_+^2, (x-2)_+^1, (x-2)_+^2, (x-3)_+^1, (x-3)_+^2\right\}.$$

这里为了统一形式, 将 $1, x, x^2$ 这三个基也写成了截断幂函数的形式, 因为我们只关心 $x \geqslant 0$, 所以可以这么做. 值得注意的是, 也可以选择在比 0 小的任何一个位置截断. 还需要注意, $\vec{\mu}$ 中并不包含在 $x = 0$ 处的光滑度的信息, 实际上 $x = 0$ 处也不需要考虑光滑度, 所以是从 $(x - 0)_+^0$ 开始的.



好的，我们来总结一下。

尽管截断幂函数基是从样条空间的定义中非常自然、直接地推导出来的，但在实际应用中，它却很少被直接使用。这主要是因为它存在以下三个严重的缺点，尤其是在计算和设计领域。

—

截断幂函数基的三个主要缺点

1. 严重的数值不稳定性 (Severe Numerical Instability)

这是截断幂函数基最致命的理论和计算缺陷。

* ** 问题所在 **：当 x 的值增大时，所有的基函数——无论是全局的 x^m 还是局部的 $(x-x_i)_+^m$——它们的形状会变得越来越相似。例如，当 x 远大于 x_i 和 x_j 时，$(x-x_i)^m$ 和 $(x-x_j)^m$ 的曲线形态几乎与 x^m 无法区分。* ** 导致的后果 **：这会使得基函数之间存在近似的 ** 线性相关性 **。当我们将这些基函数作为列来构建一个矩阵（例如，为了求解插值或逼近问题中的系数）时，这个矩阵会是 ** 病态的 (ill-conditioned)**。* ** 实际影响 **：一个病态的矩阵对于计算机求解来说是“灾难性”的。它意味着输入数据（如插值点的位置）的微小扰动或计算过程中的微小舍入误差，都会被急剧放大，导致求出的样条系数出现巨大的、不可预测的错误。最终得到的曲线可能与预期完全不符，甚至出现剧烈振荡。

2. 非局部支撑性 (Non-local Support)

这个缺点使得它在交互式几何设计中非常不便。

* ** 问题所在 **：基函数 $(x-x_i)_+^m$ 虽然在 $x<x_i$ 时为零（具有一定的“局部性”），但一旦在 $x=x_i$ 处被“激活”，它的影响力会一直持续到区间的终点 b。它的支撑区间是 $[x_i,b]$，这是一个“半无限”或“单边”的支撑。* ** 导致的后果 **：这破坏了 ** 局部控制 (Local Control)** 的重要原则。如果你想通过调整系数 c_i 来修改曲线在节点 x_i 附近的形状，这个修改会像涟漪一样，** 不可避免地影响到 x_i 之后的所有曲线部分 **。* ** 实际影响 **：对于一个设计师来说，这是无法接受的。他们希望“我只动这里，就只影响这里的一小块”。而使用截断幂函数基，就像拉动一条长绳的一端，整条绳子都会跟着动，无法实现精准的局部雕琢。

3. 几何意义不直观 (Unintuitive Geometric Meaning)

* ** 问题所在 **：样条函数的系数 c_i 与最终曲线的几何形状之间没有直接、可预测的联系。* ** 导致的后果 **：给定一组系数 $\{c_0,c_1,\dots\}$，你很难通过观察这些数值来大致想象出曲线的模样。反之，看到一条曲线，也很难猜出它的系数大概是多少。这些系数不像 B 样条的“控制点”那样，形成一个可以直观把握的“控制多边形”。* ** 实际影响 **：这使得通过直接操纵系数来设计曲线变得非常困难，几乎是在“盲调”。

总结

正是由于截断幂函数基的 ** 数值病态 **、** 全局影响 ** 和 ** 几何不直观 ** 这三大缺陷，使得它在理论上虽然清晰，但在实践中却举步维艰。

可以说，整个 B 样条理论的出现，其核心动机就是为了克服上述所有缺点。B 样条基通过其巧妙的递推定义，完美地实现了 ** 数值稳定性 **、** 严格的局部支撑性 ** 和 ** 直观的几何控制 **，从而成为了计算机图形学、CAD 和数值计算中表示样条函数的黄金标准。

定义 2.1.4. 由 $D^{\mu_i}s_{i-1}(x_i) = D^{\mu_i}s_i(x_i)$ 产生的代数条件

$$s_i(x) = s_{i-1}(x) + c_i(x)(x - x_i)^{\mu_i+1}$$

其中 $c_i(x)$ 称为 $x = x_i$ 处的光滑余因子.

推论 2.1.5. 考虑 $\mu = (-1, \cdots, -1)$

命题 2.1.6. $f(x) = (x - x_i)_+^r$ 在 $x = x_i$ 处是 C^{r-1} 连续的.

例 2.1.7. $m = 1$, $[a, b] = [0, 5], \Delta = \{1, 2, 3, 4\}, \mu = (0, 0, 0, 0)$, 基函数为

$$(x - 0)$$

这个其实就是因为，在同一段区间上，几个线性相关，所以从理论上我们肯定有能力找到几个参数使得叠加起来是 0

就其实这些东西无关是因为起点不一样，每个人负责提供一小段上的

$(x - x_i)_+^t$ 与 $(x - x_j)_+^t$

当 $x > x_j$ 时,$\deg[(x - x_i)_+^t - (x - x_j)_+^t] = t - 1$

求导, 指对 x 求导, 感觉像求导一样.

考虑 $[0, 1](x - 1)_+^1$

格式很像差商

$[x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+p+1}](x - t)_+^p$ 与 $S_m^\mu(\Delta)$

2.2 基本性质

定义 2.2.1. 给定重节点序列 $t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_{n+m+1}$, 对于 $i = 1, 2, \cdots, n$, 定义第 i 个 B 样条函数

$$B_{i,m,t}(x) = (t_{i+m+1} - t_i)[t_i, t_{i+1}, \cdots, t_{i+m+1}](t-x)_+^m$$

命题 2.2.2.

$$B_{i,m,t}(x) = (-1)^{m+1}(t_{i+m+1} - t_i)[t_i, t_{i+1}, \cdots, t_{i+m+1}](x-t)_+^m$$

证明. 将 x 视作参数, 考察关于 t 的函数 $(t-x)_+^m$ 和 $(-1)^{m+1}(x-t)_+^m$,

$$(t-x)_+^m = \begin{cases} (t-x)^m & t > x \\ 0 & t < x \end{cases}, \quad (-1)^{m+1}(x-t)_+^m = \begin{cases} 0 & t > x \\ -(t-x)^m & t < x \end{cases}$$

所以二者之差是 $(t-x)^m$, 一个关于 t 的 m 次多项式, 它的 $m+1$ 阶差商为 0. □

命题 2.2.3. 当 $m = 0$ 时, 给定重节点序列 $t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_n$, 第 i 个 B 样条函数为

$$B_{i,t}(x) = (t_{i+1} - t_i)[t_i, t_{i+1}](t-x)_+^0 = [t_{i+1}](t-x)_+^0 - [t_i](t-x)_+^0 = 1, \quad t_i < x \leqslant t_{i+1}.$$

命题 2.2.4. 假设 $t_i < t_{i+1} = \cdots = t_{i+m+1}$, 则

$$B_{i,m}(x) = \left(\frac{x - t_i}{t_{i+m+1} - t_i}\right)^m, \quad t_i \leqslant x < t_{i+m+1}.$$

证明. □

命题 2.2.5. 令 $t_i \leqslant \cdots \leqslant t_{i+m+1} = x_1 \cdots x_1 < \cdots < x_r \cdots x_r$, 则

$$B_{i,m,t} = \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{l} \alpha_{jk}(x_i - x)_+^{m-k+1}, j = 1, \cdots, r, k = 0, \cdots, m - l_j$$

命题 2.2.6 (局部性)**.**

$$B_{i,m}(x) = \begin{cases} 0 & x \notin (t_i, t_{i+m+1}] \\ > 0 & x \in (t_i, t_{i+m+1}] \end{cases}$$

证明. 当 $x > t_{i+m+1}$ 时, 关于 t 的函数 $(t-x)_+^m$ 在 $[t_i, t_{i+m+1}]$ 上恒为 0, 所以 $B_{i,m}(x) = 0$.

当 $x < t_i$ 时, $(t-x)_+^m$ 在 $[t_i, t_{i+m+1}]$ 上就是 m 次多项式 $(t-x)^m$, 所以 $B_{i,m}(x) = 0$. □

推论 2.2.7. 对于 $[t_i, t_{i+1}]$, 仅有 $m+1$ 个非零 B 样条.

命题 2.2.8 (de Boor-Cox 递推公式)**.** 给定重节点序列 $t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_{n+m+1}$, 则

$$B_{i,m}(x) = \frac{x - t_i}{t_{i+m} - t_i} B_{i,m-1}(x) + \frac{t_{i+m+1} - x}{t_{i+m+1} - t_{i+1}} B_{i+1,m-1}(x)$$

证明.

$$\begin{aligned} \frac{B_{i,m,t}(x)}{t_{i+m+1} - t_i} &= [t_i, \cdots, t_{i+m+1}](t-x)_+^m \\ &= [t_i, \cdots, t_{i+m+1}](t-x)(t-x)_+^{m-1} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= [t_i]g(t) \cdot [t_i, \cdots, t_{i+m+1}]h(t) + [t_i, t_{i+1}]g(t) \cdot [t_{i+1}, \cdots, t_{i+m+1}]h(t) \\
&= (t_i - x)[t_i, \cdots, t_{i+m+1}]h(t) + [t_{i+1}, \cdots, t_{i+m+1}]h(t) \\
&= (t_i - x)\frac{[t_{i+1}, \cdots, t_{i+m+1}]h(t) - [t_1, \cdots, t_{i+m}]h(t)}{t_{i+m+1} - t_i} + [t_{i+1}, \cdots, t_{i+m+1}]h(t) \\
B_{i,m,t}(x) &= (t_i - x)([t_{i+1}, \cdots, t_{i+m+1}]h(t) - [t_1, \cdots, t_{i+m}]h(t)) + (t_{i+m+1} - t_i)[t_{i+1}, \cdots, t_{i+m+1}]h(t) \\
&= (t_{i+m+1} - t_i)[t_{i+1}, \cdots, t_{i+m+1}]h(t) + (x - t_i)[t_i, \cdots, t_{i+m}]h(t) \\
&= \frac{t_{i+m+1} - x}{t_{i+m+1} - t_{i+1}} B_{i+1,m-1}(x) + \frac{x - t_i}{t_{i+m} - t_i} B_{i,m-1}(x)
\end{aligned}
$$

□

2.3 B 样条的分析性质

命题 2.3.1. 对于 $m \geqslant 1$,

$$D_+ B_{i,m}(x) = m\left(\frac{B_{i,m-1}(x)}{t_{i+m}-t_i} - \frac{B_{i+1,m-1}(x)}{t_{i+m+1}-t_{i+1}}\right).$$

证明.

$$\begin{aligned} B_{i,m}(x) &= (t_{i+m+1}-t_i)[t_i,\cdots,t_{i+m+1}](t-x)_+^m \\ &= [t_{i+1},\cdots,t_{i+m+1}](t-x)_+^m - [t_i,\cdots,t_{i+m}](t-x)_+^m \\ D_+ B_{i,m}(x) &= m(-[t_{i+1},\cdots,t_{i+m+1}](t-x)_+^{m-1} + [t_i,\cdots,t_{i+m}](t-x)_+^{m-1}) \end{aligned}$$

□

命题 2.3.2. 对于 $m \geqslant 1$,

$$D_+^r B_{i,m}(x) = \frac{m}{m-r}\left(\frac{x-t_i}{t_{i+m}-t_i} D^r B_{i,m-1}(x) + \frac{t_{i+m+1}-x}{t_{i+m+1}-t_{i+1}} D^r B_{i+1,m-1}(x)\right)$$

证明. $r=1$ 的时候似乎也没有退化到上一个式子 □

命题 2.3.3.

$$\int_{t_i}^{t_{i+m+1}} B_{i,m}(x)\mathrm{d}x = \frac{t_{i+m+1}-t_i}{m+1}.$$

证明.

$$0 = \int_{t_i}^{t_{i+m+2}} D_+ B_{i,m+1}(x)\mathrm{d}x = \frac{m+1}{t_{i+m+1}-t_i}\int_{t_i}^{t_{i+m+1}} B_{i,m}(x)\mathrm{d}x - \frac{m+1}{t_{i+m+2}-t_{i+1}}\int_{t_{i+1}}^{t_{i+m+2}} B_{i+1,m}(x)\mathrm{d}x$$

记

$$J_i = \frac{m+1}{t_{i+m+1}-t_i}\int_{t_i}^{t_{i+m+1}} B_{i,m}(x)\mathrm{d}x,$$

则上式等价于 $J_i = J_{i+1}$. 构造 $\{s_i\}$ 满足

$$s_1 = \cdots = s_{m+1} = a, \quad s_{m+2} = t_i, \quad \cdots, \quad s_{m+2+j} = t_{i+j}, \quad \cdots, \quad s_{m+2+m+1} = t_{i+m+1}$$

则有

$$J_1 = \frac{m+1}{s_{m+2}-s_1}\int_{s_1}^{s_{m+2}} \frac{(s_{m+2}-x)^m}{(s_{m+2}-s_1)^m}\mathrm{d}x = 1.$$

□

命题 2.3.4. 对 $B_{i,m}(x)$ 考察端点处的连续性, 以 t_i 为例

(1) $(-1)^{k+m-\alpha_i} D_+^k B_{i,m}(t_i) = 0, k = 0,1,\cdots,m-\alpha_i$

(2) $(-1)^{k+m-\alpha_i} D_+^k B_{i,m}(t_i) > 0, k = m-\alpha_i+1,\cdots,m$

2.4 B 样条的代数性质

考虑节点 $t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_{n+m+1}$, 考虑 B 样条基函数 $B_{1,m}, \cdots, B_{n,m}$.

$$B_{i,m}(x) = [t_{i+1}, \cdots, t_{i+m+1}](t-x)_+^m - [t_i, \cdots, t_{i+m}](t-x)_+^m$$

令 $P_i^x(t) \in \mathbb{P}_m$ 是关于函数 $f(t) = (t-x)_+^m$ 插值于 $t_i, \cdots, t_{i+m}$ 这 $m+1$ 个点的插值多项式, 那么 $P_{i+1}^x(t) - P_i^x(t)$ 是以 $t_{i+1}, \cdots, t_{i+m}$ 为零点的多项式, 那么

$$P_{i+1}^x(t) - P_i^x(t) = c(t-t_{i+1}) \cdots (t-t_{i+m})$$

根据差商的定义, 常数 c 其实就是 $B_{i,m}(x)$, 所以我们得到

$$P_{i+1}^x(t) - P_i^x(t) = B_{i,m}(x)(t-t_{i+1}) \cdots (t-t_{i+m}) =: B_{i,m}(x)\rho_{i,m}(t), \quad i = 1, \cdots, n$$

对 i 从 1 到 n 求和得到

$$P_{n+1}^x(t) - P_1^x(t) = \sum_{i=1}^n B_{i,m}(x)\rho_{i,m}(t).$$

分析 $P_{n+1}^x(t)$, 它与 $f(t) = (t-x)_+^m$ 在 $t_{n+1}, \cdots, t_{n+1+m}$ 处一致, 而当 $x < t_{n+1}$ 时, $(t-x)_+^m$ 在 $[t_{n+1}, t_{n+1+m}]$ 就是 $(t-x)^m$, 所以此时 $P_{n+1}^x(t) = (t-x)^m$. 再分析 $P_1^x(t)$, 它与 $f(t) = (t-x)_+^m$ 在 $t_1, \cdots, t_{m+1}$ 处一致, 而当 $x > t_{m+1}$ 时, $(t-x)_+^m$ 在 $[t_1, t_{m+1}]$ 就是 0, 所以此时 $P_1^x(t) = 0$.

定理 2.4.1 (Marsden 等式)**.** *任意* $x \in [t_{m+1}, t_{n+1}]$, *任意* $y \in \mathbb{R}$, *有*

$$(y-x)^m = \sum_{i=1}^n \rho_{i,m}(y)B_{i,m}(x).$$

注记. $[t_{m+1}, t_{n+1}]$ 是 $B_{1,m}, \cdots, B_{n,m}$ 能撑满的最大区间, 可以这样记忆 Marsden 等式成立的区间.

推论 2.4.2. *任意* $x \in [t_{m+1}, t_{n+1}]$, *任意* $0 \leqslant r \leqslant m$, *有*

$$x^r = \sum_{i=1}^n c_{i,r}B_{i,m}(x), \quad c_{i,r} = \frac{(m-r)!r!}{m!}\mathrm{Sym}_r(t_{i+1}, \cdots, t_{i+m}).$$

证明. 对 Marsden 等式两边关于 y 求 $m-r$ 次导, 再令 $y=0$, 整理得到

$$x^r = \sum_{i=1}^n (-1)^r \frac{r!}{m!} D_y^{m-r}\rho_{i,m}(0)B_{i,m}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{(m-r)!r!}{m!}\mathrm{Sym}_r(t_{i+1}, \cdots, t_{i+m})B_{i,m}(x).$$

□

推论 2.4.3. *任意* $x \in [t_\mu, t_{\mu+1}]$, *任意* $0 \leqslant r \leqslant m$, *有*

$$x^r = \sum_{i=\mu-m}^{\mu} c_{i,r}B_{i,m}(x).$$

推论 2.4.4 (单位剖分性)**.**

$$1 = \sum_{i=\mu-m}^{\mu} B_{i,m}(x), \quad x \in [t_\mu, t_{\mu+1}].$$

定理 2.4.5 (Curry-Schoenberg)**.** *1*

参考资料 Marsden's identity

2.5 等距节点 B 样条

定义 2.5.1. 取 $t=[0,1,\cdots,m+1]$, 记 $N^m(x)=B_{0,t,m}(x)$.

定义 2.5.2. 当 $t_{i+1}-t_i=h$ 时, 称 $B_{i,m}(x)$ 为等距节点 B 样条.

命题 2.5.3. 设 $t=(t_i,\cdots,t_{i+m+1}),t'=(t_i+y,\cdots,t_{i+m+1}+y)$, 则 $B_{i,t',m}=B_{i,t,m}(x-y)$.

证明. □

引理 2.5.4.

$$[at_i,\cdots,at_{i+m+1}]f(t)=\frac{1}{a^{m+1}}[t_i,\cdots,t_{i+m+1}]f(at)$$

推论 2.5.5. 设 $t''=(at_i+b,\cdots,at_{i+m+1}+b)$, 则

$$B_{t'',m}(x)=\frac{1}{a}B_{t,m}(\frac{x-b}{a}).$$

命题 2.5.6.

$$N^m(x)=\frac{x}{m}N^{m-1}(x)+\frac{m+1-x}{m}N^{m-1}(x)$$

命题 2.5.7.

$$\int_0^{m+1}N^m(x)\mathrm{d}x=1$$

命题 2.5.8.

$$N^m(x)=N^m(m+1-x)$$

命题 2.5.9.

$$D_+N^m(x)=N^{m-1}(x)-N^{m-1}(x-1)$$

命题 2.5.10.

$$N^m(x)=\frac{1}{m!}\sum_{i=0}^{m+1}(-1)^{m+1-i}\binom{m+1}{i}(i-x)_+^m$$

命题 2.5.11.

$$\Delta_h^r f(t)=r!h^r[t,t+h,\cdots,t+rh]f(t)$$

Chapter 3

B 样条的相关算法

3.1 de Boor 算法

考虑 B 样条函数 $s(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i B_{i,m}(x)$, 求 $s(x), s'(x)$ 在一点 $x = x_0$ 处的函数值. 设 $x_0 \in [t_\mu, t_{\mu+1}]$, 则在这个区间上非零的 B 样条基函数为 $B_{\mu-m,m}$ 到 $B_{\mu,m}$ 一共 $m+1$ 个, 则

$$
\begin{aligned}
s(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i B_{i,m}(x) &= \sum_{i=\mu-m}^{\mu} c_i B_{i,m}(x) \\
&= \sum_{i=\mu-m}^{\mu} c_i \left(\frac{x-t_i}{t_{i+m}-t_i} B_{i,m-1}(x) + \frac{t_{i+m+1}-x}{t_{i+m+1}-t_{i+1}} B_{i+1,m-1}(x) \right) \\
&= \sum_{i=\mu-m+1}^{\mu} \left(\frac{t_{i+m}-x}{t_{i+m}-t_i} c_{i-1} + \frac{x-t_i}{t_{i+m}-t_i} c_i \right) B_{i,m-1}(x)
\end{aligned}
$$

注意 $B_{\mu-m,m-1}$ 和 $B_{\mu+1,m-1}$ 在 $[t_\mu, t_{\mu+1}]$ 上为零. 记 c_i 为 $c_i^{[0]}$, 则我们有如下 de Boor 算法

$$
c_i^{[r]} = \frac{t_{i+m+1-r}-x}{t_{i+m+1-r}-t_i} c_{i-1}^{[r-1]} + \frac{x-t_i}{t_{i+m+1-r}-t_i} c_{i-1}^{[r-1]}
$$

例 3.1.1.

命题 3.1.2.

$$
s'(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i B'_{i,m}(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i m\,() = \sum_{i=2}^{n} m \left(\frac{c_i - c_{i-1}}{t_{i+m}-t_i} \right) B_{i,m-1}(x)
$$

3.2 节点插入算法

问题: 考虑 $t=(t_1,\cdots,t_{n+m+1})$ 对应 n 个 B 样条基 $B_{1,t},\cdots,B_{n,t}$, 在区间 $[t_\mu,t_{\mu+1})$ 内插入一个新节点 z, 得到 $\tau=(\tau_1,\cdots,\tau_{n+m+2})=(t_1,\cdots,t_\mu,z,t_{\mu+1},\cdots,t_{n+m+1})$, 对应 $n+1$ 个 B 样条基 $B_{1,\tau},\cdots,B_{n+1,\tau}$, 看 $\{B_{1,t},\cdots,B_{n,t}\}$ 与 $\{B_{1,\tau},\cdots,B_{n+1,\tau}\}$ 之间的关系.

引理 3.2.1. $S_m^t\subset S_m^\tau$.

证明. 任取 $s(x)\in S_m^t$

(1) $z\neq t_\mu$.

(2) $z=t_\mu$. 设 $s(x)$ 在 t_μ 处光滑性为 p_i, 则 $s(x)\in C^{p_i}\subset C^{p_{i-1}}$.

□

因为 $z\in[t_\mu,t_{\mu+1})$, 有一个简单的观察

$$\begin{cases}B_{i,t}=B_{i,\tau}, & i=1,\cdots,\mu-m-1\\ B_{i,t}=B_{i+1,\tau}, & i=\mu+1,\cdots,n\end{cases}$$

引理 3.2.2.

$$[x_0,\cdots,x_k]f=\frac{z-x_0}{x_k-x_0}[x_0,\cdots,x_{k-1},z]f+\frac{x_k-z}{x_k-x_0}[x_1,\cdots,x_k,z]f$$

证明.

$$\begin{aligned}[x_0,\cdots,x_k]f&=\frac{[x_1,\cdots,x_k]f-[x_0,\cdots,x_{k-1}]f}{x_k-x_0}\\ &=\frac{[x_1,\cdots,x_{k-1},z]f-[x_0,\cdots,x_{k-1}]f+[x_1,\cdots,x_k]f-[x_1,\cdots,x_{k-1},z]f}{x_k-x_0}\\ &=\frac{(z-x_0)[x_0,\cdots,x_{k-1},z]f+(x_k-z)[x_1,\cdots,x_k,z]f}{x_k-x_0}\end{aligned}$$

□

定理 3.2.3.

$$\begin{cases}B_{\mu-m,t}(x)=B_{\mu-m,\tau}(x)+\dfrac{t_{\mu+1}-z}{t_{\mu+1}-t_{\mu-m+1}}B_{\mu-m+1,\tau}(x)\\ B_{i,t}(x)=\dfrac{z-t_i}{t_{i+m}-t_i}B_{i,\tau}(x)+\dfrac{t_{i+m+1}-z}{t_{i+m+1}-t_{i+1}}B_{i+1,\tau}(x)\\ B_{\mu,t}(x)=\dfrac{z-t_\mu}{t_{\mu+m}-t_\mu}B_{\mu,\tau}(x)+B_{\mu+1,\tau}(x)\end{cases}$$

$$s(x)=\sum_{i=1}^{n}c_iB_{i,t}(x)=\sum_{i}^{n+1}b_iB_{i,\tau}(x)$$

定理 3.2.4 (Boehm 算法)**.**

$$b_i=\begin{cases}c_i & 1\leqslant i\leqslant\mu-m\\ \frac{t_{i+m}-z}{t_{i+m}-t_i}c_{i-1}+\frac{z-t_i}{t_{i+m}-t_i}c_i & \mu-m+1\leqslant i\leqslant\mu\\ c_{i-1} & \mu+1\leqslant i\leqslant n+1\end{cases}$$

例 3.2.5.

3.3 开花算法

定理 3.3.1. 对于任一 n 次多项式 $F(x)$, 存在唯一的映射 f 满足

(1) f 是对称的.

(2) f 关于每个变量是仿射的.

(3) $f(u,\cdots,u)=F(u)$

此时称 f 是 F 的开花多项式.

3.4 层次 B 样条

Chapter 4

样条插值与逼近

4.1 变差减缩性

定义 4.1.1 (强符号改变)**.** 令 $c=(c_i)_{i=1}^n\in\mathbb{R}^n$, 定义 $S^-(c)\colon c\to\mathbb{R}$ 表示 c 中元素的符号改变次数.

例 4.1.2.

$$S^-(1,-2)=1,\quad S^-(1,0,-1,3,2)=2.$$

引理 4.1.3. 令 $s(x)=\sum_{i=1}^n c_iB_{i,t}(x)=\sum_{i=1}^{n+1}b_iB_{i,\tau}(x)$, 其中 τ 是由 t 插入一个节点得到. 则

$$S^-(b)\leqslant S^-(c),$$

其中 $b=(b_i)_{i=1}^{n+1},c=(c_i)_{i=1}^n$.

证明. 由 Boehm 算法

$$b_i=(1-\alpha_i)c_{i-1}+\alpha_ic_i,\quad i=1,2,\cdots,n+1,\quad 0\leqslant\alpha_i\leqslant1,\quad c_0=c_{n+1}=0$$

那么 b_i 至少与 c_{i-1} 和 c_i 中一个符号相同, 所以

$$S^-(c)=S^-(b_1,c_1,b_2,c_2,b_3,\cdots,b_n,c_n,b_{n+1})\geqslant S^-(b).$$

□

推论 4.1.4. 令 $s(x)=\sum_{i=1}^n B_{i,t}(x)=\sum_{i=1}^k b_iB_{i,\tau}(x)$, 其中 τ 是由 t 插入 $k-n$ 个节点得到. 则

$$S^-(b)\leqslant S^-(c).$$

定理 4.1.5 (VDP)**.** 令 $s(x)=\sum_{i=1}^n c_iB_{i,t}(x),x\in I$, 则 $S^-(s(x))\leqslant S^-(c),c=(c_i)_{i=1}^n$

定义 4.1.6. 定义 $r=S^-(f(x))$ 为 $f(x)$ 在 I 上的符号改变数, 如果存在 $r+1$ 个数 $x_1<x_2<\cdots<x_{r+1}\in I$ 满足

$$S^-(f(x_1),\cdots,f(x_{r+1}))=r$$

且这样的 r 是最大的.

证明. 令 $r = S^-(s(x))$ 且 $(x_i)_{i=1}^{r+1}$ 为 $r+1$ 个递增的数满足

$$S^-(s(x_1), \cdots, s(x_{r+1})) = r$$

于是可以在 t 中插入节点 $x_i, i = 1, 2, \cdots, r+1$ 使得 x_i 的重数达到 m(m 为样条次数), 记新的节点向量为 τ. 对于每个点 x_i 而言, 仅有一个 B 样条基函数 $B_{j_i,\tau}(x)$ 在 x_i 处为 1, 于是 $s(x_i) = b_{j_i}$.

从而

$$S^{[}(s(x_1), \cdots, s(x_{r+1})) = S^-(b_{j_1}, \cdots, b_{j_{r+1}}) \leqslant S^-(b) \leqslant S^-(c)$$

$\square$

定理 4.1.7 (VDP, 平面样条曲线). 令 $s(x) = \sum_{i=1}^n c_i B_{i,t}(x), x \in I, c_i \in \mathbb{R}^2$, 令 L 是任一条 $\mathbb{R}^2$ 中的直线, 则

$$S\text{穿过}L\text{的次数} \leqslant \text{控制多边形穿过}L\text{的次数}$$

证明. 假设直线为 $L = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid p \cdot n - a = 0\}$,$n \in \mathbb{R}^2$ 为单位法向量,$a \in \mathbb{R}$ 为常数, 令 $\sigma(x) = s(x) \cdot n - a$ 是一个数值函数, 于是 $S^-(\sigma(x))$ 表示 s 穿过 L 的次数.

由于 $\sum_{i=1}^n B_{i,t}(x) \equiv 1$, 从而 $\sigma(x)$ 可以写为 $\sigma(x) = \sum_{i=1}^n \gamma_i B_{i,\tau}(x)$, 其中 $\gamma_i = c_i \cdot n - a$ 并且 $S^-(\gamma)$ 表示控制多边形穿过 L 的次数, 其中 $\gamma = (\gamma_1, \cdots, \gamma_n)$ $\square$

4.2 一般样条插值

问题: 给定插值节点 $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$, 对于给定的次数 m, 选取节点向量为 $t = (t_1, \cdots, t_{n+m+1})$, 决定 n 个 B 样条 $\{B_{i,m}(x)\}_{i=1}^n$, 问插值问题是否存在唯一解. 记

$$A = \begin{pmatrix} B_{1,m}(x_1) & \cdots & B_{n,m}(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{1,m}(x_n) & \cdots & B_{n,m}(x_n) \end{pmatrix}.$$

设 $x_1 < \cdots < x_n$, 则我们有如下定理

定理 4.2.1 (Schoenberg-Whitney)**.** *A 可逆当且仅当对任意 $1 \leqslant i \leqslant n$ 有 $B_{i,m}(x_i) \geqslant 0$.*

证明. 先证必要性. 假设对某个 p 有 $B_{p,m}(x_p) = 0$, 则 $x_p < t_p$ 或 $x_p > t_{p+m+1}$. 不妨设 $x_p < t_p$, 则对任意 $1 \leqslant i \leqslant p$ 和 $p \leqslant j \leqslant n$ 有 $B_j(x_i) = 0$, 则 $|A| = 0$.

下证充分性. 首先假设 $[x_i, x_{i+1}]$ 中至少有 $\vec{t}$ 中 $m+1$ 个节点. 于是 $x_i \in \operatorname{supp} B_i$ 当且仅当对于 $i \neq p$ 有 $B_i(x_p) = 0$. 此时 A 为一个对角阵, 所以 $|A| \neq 0$. 下面讨论一般情况, 若对一些 i, 在 $[x_i, x_{i+1}]$ 中只有少于 $m+1$ 个 $\vec{t}$ 中的节点（假设为 q 个）结论成立, 下证 $[x_i, x_{i+1}]$ 中有 $q-1$ 个 $\vec{t}$ 中节点成立, 考虑在 $\vec{t}$ 中插入节点 z, 使 $\vec{t}$ 变为 $\vec{\tau}$, 矩阵变为 $\tilde{A}$, 由节点插入算法知, A 中的第 $i-m$ 列可由 $\tilde{A}$ 中的相关列线性表示,$|A| = \sum_{i=j-m}^{j} v_i |\tilde{A}|$, 其中 $|\tilde{A}| \neq 0$, 用节点插入算法说明 v_i 中至少有一个大于 0 即可. $\square$

4.3 样条插值与自然样条

Review: 引入样条是由于 Runge 现象, 导致需要用分片多项式空间取代多项式空间做拟合, 而 Runge 现象中, 若用分片多项式逼近会得到一个: 以插值节点作为分段点的分片多项式, 故此时应当考虑何时一个样条空间维数等于内部节点个数.

问题: 给定插值节点 $(x_i, y_i), i = 1, 2, \cdots, n$, 定义 m 次样条空间 $S_m^t(\Delta), \Delta = \{x_1, \cdots, x_n\}$, 问何时 $\dim S_m^t(\Delta) = n$. 事实上, 此时 $S_m^t(\Delta)$ 是一个在节点 x_i 处 C^{m-1} 的光滑样条空间, 由维数公式 $S_m^t(\Delta) = m + 1 + n > n$, 所以需要添加一些限制, 我们引入如下自然样条的概念

定义 4.3.1.

$$NS_{2m-1}^t(\Delta) := \left\{ s(x) \in S_{2m-1}^t(\Delta) | s(x)\big|_{[x_0,x_1]} = s_0(x) \in \mathbb{P}_{m-1}, s(x)\big|_{[x_{n-1},x_n]} = s_{n-1}(x) \in \mathbb{P}_{m-1} \right\}$$

为自然样条空间, 其中的样条为自然样条.

即一个 $2m-1$ 次样条通过某些额外限制让第一段和最后一段均为 $n-1$ 次多项式. 显然 $NS_{2m-1}^t(\Delta) \subset S_{2m-1}^t(\Delta)$. 下面看 $\dim NS_{2m-1}^t(\Delta)$. 直接的想法是首尾两端做了 $2m$ 个限制导致 $\dim NS_{2m-1} = n$. 可惜情况更复杂. 上述直接代入消去首尾的做法没有考虑到光滑余因子将首尾两端多项式联系起来, 即 $s(x) \in NS_{2m-1}^t(\Delta)$

$$s(x) = p_0(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i (x - x_i)_+^{2m-1}, \quad x \in [a, b], p_0(x) \in \mathbb{P}_{m-1}.$$

$$s_{n-1}(x) = s(x)\big|_{[x_{n-1},x_n]} = p_0(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i (x - x_i)^{2m-1} \in \mathbb{P}_{m-1},$$

故 $s_{n-1}(x) \in \mathbb{P}_{m-1}$ 等价于 m 次以上单项的系数为 0. 而

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} c_i (x - x_i)^{2m-1} &= \sum_{i=1}^{n} c_i \sum_{j=0}^{2m-1} \binom{2m-1}{j} x^j (-x_i)^{2m-1-j} \\
&= \sum_{j=0}^{2m-1} \binom{2m-1}{j} x^j \sum_{i=1}^{n} c_i (-x_i)^{2m-1-j} \\
&= \sum_{j=0}^{2m-1} (-1)^j \binom{2m-1}{j} x^j \sum_{i=1}^{n} c_i x_i^{2m-1-j}
\end{aligned}$$

由上述 $x^m, x^{m+1}, \ldots, x^{2m-1}$ 系数均为 0, 有

定理 4.3.2. $s(x) \in NS_{2m-1}^t(\Delta)$ 当且仅当存在 $P_0(x) \in \mathbb{P}_{\gtrdot - \not\lessdot}$ 及满足线性约束 $\sum_{i=1}^n c_i x_i^k = 0, k = 0, 1, \cdots, m-1$ 的常数 $c_i \in \mathbb{R}$ 使得 $s(x) = p_0(x) + \sum_{i=1}^n c_i (x - x_i)_+^{2m-1}, x \in [a, b]$.

考虑 $\sum_{i=1}^n c_i x_i^k = 0, k = 0, 1, \cdots, m-1.$, 等价于

$$B = \begin{bmatrix} x_1^0 & x_2^0 & \cdots & x_n^0 \\ x_1^1 & x_2^1 & \cdots & x_n^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{m-1} & x_2^{m-1} & \cdots & x_n^{m-1} \end{bmatrix}_{m \times n} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix}_{n \times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{m \times 1}.$$

其中 $\operatorname{rank} B = \min(m, n)$.

定理 4.3.3. $\dim \mathcal{N}S^t_{2m-1}(\Delta)=\max(m,n)$.

证明.

$$\dim NS^t_{2m-1}(\Delta)=m+n-\min(m,n)=\max(m,n).$$

□

例 4.3.4. $\Delta=\{x_1\}, a=x_0<x_1<x_2=b, 2m-1$ 次自然样条. 于是 $n=1$,

$$s(x)=p_0(x)+c_1(x-x_1)_+^{2m-1},\quad p_0(x)\in\mathbb{P}_{m-1}$$

所以 $\dim NS_{2m-1}(\Delta)=m$.

问题: 设 $1\leqslant m\leqslant n$. 给定区间 $[a,b]$, 剖分 $\{x_1,\cdots,x_n\}$. 寻找 $N(x)\in NS^t_{2m-1}(\Delta)$, 插值 (x_i,y_i) 使得 $N(x_i)=y_i, i=1,2,\cdots,n$.

定理 4.3.5. 上述插值问题解存在唯一.

证明. 证明相应的齐次插值问题解为 0 即可. 即设 $\overline{N}(x)\in NS^t_{2m-1}(\Delta)$ 满足 $\overline{N}(x_i)=0, i=1,2,\cdots,n$, 下证 $\overline{N}(x)\equiv 0$. 考虑 $\overline{N}(x)\in\mathbb{P}_{m-1}$, 其中 $x\in[a,x_1]$ 或 $[x_n,b]$, 推出 $\overline{N}^{(m)}(a)=\overline{N}^{(m)}(b)=0$. 考虑

$$\begin{aligned}\sigma(\overline{N})&=\int_a^b(\overline{N}^{(m)}(x))^2\mathrm{d}x=\int_a^b\overline{N}^{(m)}(x)\mathrm{d}(\overline{N}^{(m-1)}(x))\\&=\overline{N}^{(m)}(x)\overline{N}^{(m-1)}(x)\big|_a^b-\int_a^b\overline{N}^{(m-1)}(x)\mathrm{d}\overline{N}^{(m)}(x)\\&=\overline{N}^{(m)}(b)\overline{N}^{(m-1)}(b)-\overline{N}^{(m)}(a)\overline{N}^{(m-1)}(a)-\int_a^b\overline{N}^{(m-1)}(x)\overline{N}^{(m+1)}(x)\mathrm{d}x\\&=\sum_{r=0}^{m-1}(-1)^r\left(\overline{N}^{(m-r-1)}(b)\overline{N}^{(m+r)}(b)-\overline{N}^{(m-r-1)}(a)\overline{N}^{(m+r)}(a)\right)+(-1)^n\int_a^b\overline{N}(x)\overline{N}^{(2m)}(x)\mathrm{d}x\\&=0\end{aligned}$$

所以 $\overline{N}^{(m)}(x)\equiv 0$, 所以 $\overline{N}(x)\in\mathbb{P}_{m-1}$, 又 $\overline{N}(x_i)=0, i=1,2,\cdots,n$, 且 $m\leqslant n$, 知 $\overline{N}(x)\equiv 0$. □

定理 4.3.6. 设 $N(x)$ 是满足插值条件 $N(x_i)=y_i$ 的自然样条, 那么, 对任何满足插值条件 $f(x_i)=y_i$ 的函数 $f(x)\in C^m[a,b]$ 必有

$$\int_a^b[N^{(m)}(x)]^2\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b[f^{(m)}(x)]^2\mathrm{d}x$$

等号成立当且仅当 $f(x)\equiv N(x)$.

证明. 由自然样条的定义知,$N^{(m)}(x)\equiv 0, x\in[x_0,x_1]\cup[x_{n-1},x_n]$, 故

$$\int_a^b[N^{(m)}(x)]^2\mathrm{d}x=\int_{x_1}^{x_n}[N^{(m)}(x)]^2\mathrm{d}x$$

若能证明

$$\int_{x_1}^{x_n}[N^{(m)}(x)]^2\mathrm{d}x\leqslant\int_{x_1}^{x_n}[f^{(m)}(x)]^2\mathrm{d}x$$

就能证明原命题, 显然有

$$\int_{x_1}^{x_n}[f^{(m)}(x)]^2\mathrm{d}x=\int_{x_1}^{x_n}\left([f^{(m)}(x)-N^{(m)}(x)]+N^{(m)}(x)\right)^2\mathrm{d}x$$

$$= \int_{x_1}^{x_n} [N^{(m)}(x)]^2 \mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_n} [f^{(m)}(x) - N^{(m)}(x)]^2 \mathrm{d}x + 2\int_{x_1}^{x_n} N^{(m)}(x)[f^{(m)}(x) - N^{(m)}(x)]\mathrm{d}x$$

由分部积分得到

$$2\int_{x_1}^{x_n} N^{(m)}(x)[f^{(m)}(x) - N^{(m)}(x)]\mathrm{d}x = 2(-1)^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}\int_{x_j}^{x_{j+1}} N^{(2m-1)}(x)[f'(x) - N'(x)]\mathrm{d}x$$

而 $N^{(2m-1)}(x)$ 在 $[x_j, x_{j+1}]$ 内为常数, 故上式为

$$2(-1)^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} c_j \int_{x_j}^{x_{j+1}} N^{(2m-1)}(x)[f'(x) - N'(x)]\mathrm{d}x = (f(x) - N(x))\Big|_{x_j}^{x_{j+1}} = 0$$

故

$$\int_{x_1}^{x_n} [f^{(m)}(x)]^2 \mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_n} [N^{(m)}(x)]^2 \mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_n} [f^{(m)}(x) - N^{(m)}(x)]^2 \mathrm{d}x$$

结论成立. 最后, 等号成立当且仅当 $f^{(m)}(x) - N^{(m)}(x) \equiv 0, x \in [x_1, x_n]$, 从而 $f(x) - N(x_{\in}\mathbb{P}_{m-1}$, 由插值条件知 $f(x) - N(x)$ 在 $x_1, \cdots, x_n$ 处为 0, 故由 $n \geqslant m$ 知 $f(x) - N(x) \equiv 0$, 即等号成立当且仅当 $f(x) = N(x)$. $\square$

自然样条一个不好的地方在于规定 $s_0(x), s_n(x) \in \mathbb{P}_{m-1}$, 在数据拟合上不一定好, 例如 m 取 1, 即分片线性插值, 由 $s_0(x) \in \mathbb{P}_0, s_n(x) \in \mathbb{P}_{\nless}$ 知在两端为常数, 并不能很好的反映整个插值曲线的形状. 事实上, 我们希望 $s_0(x), s_n(x) \in \mathbb{P}_{2m-1}$, 仅仅加上 $2m$ 个约束即可.

4.4 三次样条插值

考察一个基本的插值空间

$$E(f) := \left\{ s(x) \in C^2[a,b] | s(x_i) = f(x_i), i = 1, 2, \cdots, n \right\}$$

考察 $S_3^t(\Delta)$, 其中 $\Delta = \{x_1, \cdots, x_n\}, t = \{a, \cdots, a, x_1, \cdots, x_n, b, \cdots, b\}$. 因为 $\dim S_3^t(\Delta) = n + 4$, 所以需要增加 4 个插值条件才能使得解可能唯一. 下面在边界区间加限制 (不是直接规定为 $\mathbb{P}_{m-1}$ 而是加 $2m$ 个约束)

(1) 硬性规定: 插值边界:$s(x_0) = s(a) = f(a), s(x_{n+1}) = s(b) = f(b)$

(2) 额外规定: 想保留自然样条好的性质, 从证明中发现本质利用 $N^{(m)}(a) = N^{(m)}(b) = 0$, 从而引入自然边界 $s''(a) = s''(b) = 0$.

下面考察空间

$$S_{3,N}^t(\Delta) := \left\{ s(x) \in S_3^t(\Delta) | s''(a) = s''(b) = 0, s(a) = y_0, s(b) = y_{n+1} \right\}$$

显然 $S_{3,N}^t$ 不再是一个线性空间 (或者, 将 $S_3^t(\Delta)$ 看作线性空间, 将 $s''(a) = s''(b) = 0$ 看作额外的插值条件)! 这样一来不能像前面那样提插值问题, 即希望线性空间维数等于插值点的个数, 但 $S_{3,N}^t(\Delta)$ 很好的模拟 $NS_3^t(\Delta)$ 的构造. 故我们对于 $S_{3,N}^t(\Delta)$ 仅针对插值问题提问.

问题: 满足插值条件 $s(x_i) = y_i, i = 1, 2, \cdots, n$ 的函数 $s(x) \in S_{3,N}^t(\Delta)$ 是否存在唯一.

我们讲另一边界

$$S_{3,H}^t(\Delta) = \left\{ s(x) \in S_3^t(\Delta) | s'(a) = f'(a), s'(b) = f'(b), s(a) = f(a), s(b) = f(b) \right\}$$

相应的插值问题为满足 $s(x_i) = y_i, i = 1, 2, \cdots, n$ 的函数 $s(x) \in S_{3,H}^t(\Delta)$ 是否存在唯一.

下面说明自然边界条件插值问题解存在唯一, 由于自然边界条件的空间 $S_{3,N}^t(\Delta)$ 模拟 $NS_3^t(\Delta)$ 这个线性空间, 从而也满足“三次自然样条函数插值的最光滑性”, 即

定理 4.4.1. 设 $s(x) \in S_{3,N}^t(x)$ 是满足插值条件 $s(x_i) = y_i, i = 1, 2, \cdots, n$ 的解, 则

$$\int_a^b s''(x)^2 \mathrm{d}x \leqslant \int_a^b h''(x)^2 \mathrm{d}x, \forall h(x) \in E_N(h)$$

其中

$$E_H(h) := \{h \in E(h) | h(a) = f(a), h(b) = f(b), h''(a) = h''(b) = 0\}$$

且等号成立当且仅当 $h = s$.

证明. 同自然样条相应的定理, 事实上只需要关注

$$\begin{aligned}
\int_a^b s''(x)(h''(x) - s''(x))\mathrm{d}x &= (h'(x) - s'(x))s''(x)\Big|_a^b - \int_a^b (h'(x) - s'(x))s'''(x)\mathrm{d}x \\
&= 0 - \int_a^b s'''(x)(h'(x) - s'(x))\mathrm{d}x \\
&= \sum_{j=0}^n \int_{x_j}^{x_{j+1}} s'''(x)(h'(x) - s'(x))\mathrm{d}x \\
&= \sum_{j=0}^n c_j \int_{x_j}^{x_{j+1}} (h'(x) - s'(x))\mathrm{d}x = 0.
\end{aligned}$$

□

定理 4.4.2 (自然边界 3 次样条插值解的存在唯一性)**.** 插值问题 $s(x) \in S^t_{3,N}(\Delta)$ 存在唯一.

证明. $s(x) \in S^t_{3,N}(\Delta) \subset S^t_3(\Delta)$, 故 $s(x)$ 可表示为 B 样条基的线性组合,$s(x) = \sum_{i=1}^{m+4} c_i B_{i,3}(x)$ 自然边界条件为

$$\sum_{j=1}^{m+4} c_j B''_{j,3}(x_i) = 0, \quad i = 0, m+1$$

插值条件为

$$\sum_{j=1}^{m+4} c_j B_{j,3}(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \cdots, m, m+1$$

由齐次原理, 我们只需证明: 满足齐次插值条件 $s(x_i) = 0$ 的 $s(x) \in S^t_{3,N}(\Delta)$ 只有零解即可. 首先,$h(x) = 0$ 满足 $h(x) \in E_N(h)$ 带有齐次插值条件 $h(x_i) = 0, i = 0, 1, \cdots, n+1$. 而根据定理知

$$\int_a^b s''(x)^2 \mathrm{d}x \leqslant \int_a^b h''(x)^2 \mathrm{d}x$$

对任意 $h \in E_N(h)$, 从而取 $h = 0$

$$\Longrightarrow \int_a^b s''(x)^2 \mathrm{d}x \leqslant 0 \Longrightarrow \int_a^b s''(x) \mathrm{d}x = \int_a^b h''(x) \mathrm{d}x$$

由不等式取等号条件知 $s(x) = h(x) = 0$. □

如何求解三次样条插值？只需求解

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m+4} c_j B_{j,3}(x_i) = f(x_i), & i = 0, 1, \cdots, m+1 \\ \sum_{j=1}^{m+4} c_j B''_{j,3}(x_i) = 0, & i = 0, m+1 \end{cases}$$

$t = (x_0, x_0, x_0, x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, x_{n+1}, x_{n+1}, x_{n+1})$

例 4.4.3. 对于 x_0, 仅 $B_{1,3}(x)$ 在 $x = x_0$ 处非零. 对于 x_1 仅 $B_{2,3}(x), B_{3,3}(x), B_{4,3}(x)$ 在 $x = x_1$ 处非零, 最终得到

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 & 0 & \cdots & 0 & \beta_1 \\ \beta_2 & \alpha_2 & \gamma_2 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \beta_3 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \gamma_{m+2} & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \beta_{m+3} & \alpha_{m+3} & \gamma_{m+3} \\ \gamma_{m+4} & 0 & \cdots & 0 & \beta_{m+4} & \alpha_{m+4} \end{pmatrix}$$

4.5 样条逼近

问题: 给定 p 个数据点 $(x_i, y_i), i = 1, 2, \cdots, p$, 用样条函数 $g(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i B_{i,m,t}(x), n \leqslant p$ 估计最小二乘逼近. 其中 m, t 适当选取. 找 $c_1, \cdots, c_n$ 使得

$$\min \sum_{i=1}^{p} (g(x_i) - y_i)^2 \Longleftrightarrow \min \sum_{i=1}^{p} (\sum_{j=1}^{n} c_j B_j(x_i) - y_i)^2$$

记 $E = \sum_{i=1}^{p} (\sum_{j=1}^{n} c_j B_j(x_i) - y_i)^2$, 则 $E \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 可看作关于 $c_1, \cdots, c_n$ 的二次函数. 因为

$$\frac{\partial E}{\partial c_k} = 2 \sum_{i=1}^{p} B_k(x_i) (\sum_{j=1}^{n} c_j B_j(x_i) - y_i)$$

$$\frac{\partial E}{\partial c_k} = 0 \Longleftrightarrow \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{p} B_k(x_i) B_j(x_i)) c_j = \sum_{i=1}^{p} B_k(x_i) y_i, \quad k = 1, 2, \cdots, n$$

即正规方程. 记

$$A = [B_j(x_i)]_{i=1,\cdots,p; j=1,\cdots,n} = \begin{pmatrix} B_1(x_1) & \cdots & B_n(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_1(x_p) & \cdots & B_n(x_p) \end{pmatrix}_{p \times n}$$

令 $c = (c_1, \cdots, c_n)^T, y = (y_1, \cdots, y_p)^T$, 则上式方程变为 $(A^T A) c = A^T y$. 于是最小二乘解的存在唯一性等价于 $A^T A$ 的奇异性, 而 $|A^T A| \neq 0$ 当且仅当 $rankA = n$.

另一方面,$\frac{\partial^2 E}{\partial c_k \partial c_l} = 2 \sum_{i=1}^{p} B_k(x_i) B_l(x_i) = 2A^T A \geqslant 0$ 半正定. 因此, 当 $A^T A$ 正定时,E 严格凸, 从而法方程 $(A^T A) c = A^T y$ 的解 c 可以保证取极小. 注意到 Schoenberg-Whitney 定理告诉我们 $rankA = n$ 当且仅当 A 列满秩当且仅当存在 $(x_l, \cdots, x_p)$ 的一个子列 $(x_{k_1}, \cdots, x_{k_n})$ 使得 $B_i(x_{k_i}) > 0, i = 1, \cdots, n$. 从而对于最小二乘逼近问题, 我们有

定理 4.5.1 (解的存在唯一性). *若存在 $(x_1, \cdots, x_p)$ 的一个子列记为 $x_{k_1}, \cdots, x_{k_n}$ 满足 $B_i(x_{k_i}) > 0, i = 1, 2, \cdots, n$ 那么存在唯一的 c 极小化 E 并且是正规方程 $(A^T A) c = A^T y$ 的解.*

4.6 拟插值方法

前面介绍的“求解”方法均为“整体”方法, 即找 $f(x)$ 的近似解, 包括插值、最小二乘法. 整体的含义是 B 样条的组合系数 $\{c_i\}_{i=1}^n$ 取决于所有初始数据 $\{(x_i,y_i)\}_{i=1}^n$, 比如三次样条插值和最小二乘逼近均通过解整体上的一个线性方程组求解. 而局部方法是指, 对于某一项特定的 $B_{i,m}(x)$, 其系数 c_i 由对应 $\operatorname{supp} B_{i,m}(x)$ 附近的若干数据点 $\{(x_i,y_i)\}$ 确定, 比如分片线性插值. 下面我们介绍一种最为一般化的局部求近似解的方法, 称为拟插值方法, 灵活、简单, 后面讲样条逼近的估计也会用到.

求近似解的方法: 给定次数 m, 节点 $t=(t_1,\cdots,t_{n+m+1})$, 找系数 $\{c_i\}_{i=1}^n$ 使得 $s(x)=\sum_{i=1}^n c_iB_{i,m}(x)$ 逼近或插值（统称近似）数据点. 为了对特定的 j 计算 c_j, 由于 c_j 关联基函数 $B_{j,m}(x)$, 于是在 $\operatorname{supp} B_{j,m}(x)=[t_j,t_{j+m+1}]$ 中选择一个区间（或若干个）, 例如选择 $I=[t_\mu,t_{\mu+1}]\subset[t_j,t_{j+m+1}]$. 记 f 在 I 上的表达式为 $f\big|_I$, 如果在此区间上用某种近似方法得到 $f\big|_I$ 的近似 $s\big|_I=\sum_{i=\mu-m}^{\mu} b_iB_{i,m}(x)$, 于是对应 $B_{j,m}(x)$ 的系数为 b_j, 那么整体上令 $c_j=b_j$, 即为拟插值方法. 注意: 拟插值有很大的灵活性, 例如 $[t_\mu,t_{\mu+1}]=I$ 的选取有 $m+1$ 种, 还可以选择多个.

另一方面, 对于一些好的拟插值, 我们希望它们能原来 f 在 I 上如果是一个样条或多项式, $y\big|_I$ 能重产生原来的 $f\big|_I$, 即 $s\big|_I=f\big|_I$, 重现 f 本身, 而不是另一个近似样条.

定义 4.6.1. *考察 $span\{B_{i,m}(x)\}_{i=1}^n$,$f$ 定义在 $[t_1,t_{n+m+1}]$ 上的近似逼近,*

(1) *选取子区间 $I=[t_\mu,t_\nu]\subset[t_1,t_{n+m+1}]$, 并且 $I\cap(t_j,t_{j+m+1})\neq\varnothing$.*

(2) *选取局部近似算子 P_I, 并且确定一个 $f\big|_I$ 的选取, 即 $s\big|_I=P_If\big|_I=\sum_{i=\mu-m}^{\nu-1} b_iB_{i,m}(x)$*

(3) *令 $c_j=b_j$, 于是 $Pf:=\sum_{j=1}^n c_jB_{j,m}(x)$ 为 f 的一个拟插值.*

引理 4.6.2 (局部再生产生整体再生)**.** *若上述 (2) 中所有局部近似算子 P_I 保证 $P_If\big|_I=f\big|_I,\forall I,\forall f\in S_m^t(\Delta)\big|_I$, 那么对任意 $f\in S_m^t(\Delta)$ 有 $P_If=f$.*

证明. 设 $f=\sum_{i=1}^n b_iB_{i,m}(x)$, 则 $f\big|_I=\sum_{i=\mu-m}^{\nu-1} b_iB_{i,m}(x)$. 设 $P_If=\sum_{i=\mu-m}^{\nu-1} b_i'B_{i,m}(x)$, 由重产生条件,$P_If=f\big|_I$, 所以 $\sum_{i=\mu-m}^{\nu-1} b_i'B_{i,m}(x)=\sum_{i=\mu-m}^{\nu-1} b_iB_{i,m}(x)$, 于是, 由 $\{B_{i,m}(x)\}_{i=\mu-m}^{\nu-1}$ 的先行独立性得到 $b_i=b_i',i=\mu-m,\cdots,\nu-1$, 由 (3) 知对于任意确定的 j 有 $c_j=b_j=b_j'$, 从而 $Pf=\sum_{i=1}^n c_iB_{i,m}(x)=\sum_{i=1}^n b_iB_{i,m}(x)=f$. □

例 4.6.3 (分片线性插值作为拟插值)**.** *考虑 $S_1^t(\Delta)$ 且 $I=[t_j,t_{j+1}]$. 于是在 I 上仅有 $S_1^t(\Delta)$ 中两个非空基 $B_{j-1}(x),B_j(x)$. 局部逼近方式采用局部线性插值, 即 $P_If(x)=f(t_j)B_{j-1}(x)+f(t_{j+1})B_j(x)$. 此时 $P_If(t_j)=f(t_j),P_If(t_{j+1})=f(t_{j+1})$, 从而 $c_j=f(t_{j+1})$. 故整体拟插值为*

$$(Pf)(x)=\sum_{j=1}^n f(t_{j+1})B_j(x).$$

例 4.6.4 (三点二次插值)**.** *考虑 $S_2^t(\Delta)$, 由于 $B_j(x)$ 的支集为 $[t_j,t_{j+3}]$, 取 $I=[t_{j+1},t_{j+2}]$, 我们希望 P_I 可以重现二次多项式, 故而在 $[t_{j+1},t_{j+2}]$ 中选取三个不同点来确定该二次多项式, 例如 $x_{j,0}=t_{j+1},x_{j,1}=(t_{j+1}+t_{j+2})/2,x_{j,2}=t_{j+2}$, 于是 $P_If(x_{j,k})=f(x_{j,k}),k=0,1,2$ 当且仅当 $\sum_{i=j-1}^{j+1} b_iB_i(x_{j,k})=f(x_{j,k}),k=0,1,2$. 求得*

$$b_j=\frac{1}{2}\left(-f(t_{j+1})+4f(\frac{t_{j+1}+t_{j+2}}{2})-f(t_{j+2})\right).$$

注意 b_j 只有在 $t_{j+1} < t_{j+2}$ 时才能得到三个互异点, 而 $t = (t_1 = t_2 = t_3 < t_4 < \cdots < t_{n+1} = t_{n+2} = t_{n+3})$, 对于 $j \neq 1, n, c_j = b_j$, 而 $j = 1, n$ 时由基导致的插值性质, 知 $P_I f = \sum_{i=1}^{n} c_i B_{i,m}(x)$, 由 $c_1 = f(t_1), c_n = f(t_n + 1)$.

拟插值通过求解局部线性方程避免了整体方法求整体线性方程, 这种近似方法非常适用于实事求解数据. 下面从一般角度看拟插值, 事实上, 我们得到的拟插值为 $Pf = \sum_{i=1}^{n}(\lambda_i f)B_{i,m}(x)$, 这里 $\lambda_i(f)$ 为一个线性泛函. 即定义拟插值为 $Pf = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(f)B_{i,m}(x)$, 上面取局部插值时,$\lambda_i$ 事实上为某些 f 的点泛函的线性组合, 这些定义导致 P 本身为一个线性算子, 即拟插值算子为线性算子.

一般插值用作拟插值:λ_j 由对应 $B_{j,m}(x)$ 支集中 $r+1$ 个不同点确定, 即 $t_j \leqslant x_{j,0} < x_{j,1} < \cdots < x_{j,r} \leqslant t_{j+m+1}$. 考虑拟插值 $P_r f = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{j,r}(f)B_{j,m}(x)$. 引入 r 是表示局部由 $r+1$ 个条件来确定 λ_j,$\lambda_{j,r}(f) = \sum_{k=0}^{r} \omega_{j,k} f(x_{j,k})$.

定理 4.6.5. 若 $\omega_{j,k}$ 是下列多项式

$$P_{j,k}(x) = \prod_{s=0, s\neq k}^{r} \frac{x - x_{j,s}}{x_{j,k} - x_{j,s}}$$

用 B 样条表示对第 j 个 B 样条系数, 那么 $P_r f = f$ 对任意 $f \in \mathbb{P}_r$. 若 $r = m$ 且所有 $(x_{j,k})_{k=0}^{r}$ 在一个子区间 $[t_{l_j}, t_{l_{j+1}}]$ 内, 那么 $P_r f = f$ 对任意 $f \in S_m^t(\Delta)$.

证明. 由于 $P_{j,k}(x_{j,i}) = \delta_{k,i}, k, i = 0, \cdots, r$. 从而 $P_r^I f = \sum_{k=0}^{r} P_{j,k}(x) f(x_{j,k})$ 满足插值条件 $P_r^I f(x_{j,r}) = f(x_{j,r})$. □

例 4.6.6 (3 点 2 次插值)**.** 令 $a = t_{j+1}, b = \frac{t_{j+1}+t_{j+2}}{2}, c = t_{j+2}$, 则

$$s\big|_I = \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} f(a) + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} f(b) + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} f(c).$$

满足插值条件 $s\big|_I(a) = f(a), s\big|_I(b) = f(b), s\big|_I(c) = f(c)$. 事实上, 我们希望 $s\big|_I = P_I f = \sum_{i=j-1}^{j+1} B_{i,m}(x)$, 于是只需求对应 B_j 的系数即可.

$$\begin{cases} 1 = B_{j-1} + B_j + B_{j+1} \\ x = \frac{t_j + t_{j+1}}{2} B_{j-1} + \frac{t_{j+1}+t_{j+2}}{2} B_j + \frac{t_{j+2}+t_{j+3}}{2} B_{j+1} \\ x^2 = t_j t_{j+1} B_{j-1} + t_{j+1} t_{j+2} B_j + t_{j+2} t_{j+3} B_{j+1} \end{cases}$$

令 γ_j 为 $\gamma_j(x) = \frac{t_{j+1}+t_{j+2}}{2}, \gamma_j(1) = 1, \gamma_j(x^2) = t_{j+1}t_{j+2}$, 得到

$$\gamma_j(\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}) = \frac{ac - b^2}{(a-b)(a-c)} = -\frac{1}{2}$$

同理, 第 2 项为 2, 第 1 项为 $-\frac{1}{2}$, 于是

$$\lambda_j(f) = \gamma_j(s\big|_I) = -\frac{1}{2} f(t_{j+1}) + 2f(\frac{t_{j+1}t_{j+2}}{2}) - \frac{1}{2} f(t_{j+2})$$

Chapter 5

最佳一致逼近

5.1 赋范线性空间的最佳逼近

推论 5.1.1. 设 $M \subset X$ 为 X 的有限维子空间, 则对任意 $x \in X$ 有 $B_M(f) \neq \varnothing$.

定理 5.1.2. 设 $M \subset X$ 为严格凸赋范线性空间, 则对

例 5.1.3. 设 $X = \{x = (x_1, \cdots, x_n, \cdots) \mid \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}$,$\|x\| := \sup_n |x_n|$, 设

$$M = \left\{ m \in X \mid \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m_n}{2^n} = 0 \right\}$$

则 $B_M(x) = \varnothing, \forall x \in X \backslash M$

5.2 代数多项式最佳一致逼近的表征

定义 5.2.1. 对给定函数 $f(x) \in X$ 及多项式 $p(x) \in M$, 称点集

$$E^+(f-p) = \{x \mid f(x)-p(x) = \|f-p\|_\infty\}, \quad E^-(f-p) = \{x \mid f(x)-p(x) = -\|f-p\|_\infty\}$$

为 $f(x)-p(x)$ 在 $[a,b]$ 上的正负偏差点集, 称 $E(f-p) = E^+(f-p) \cup E^-(f-p)$ 为偏差点集.

命题 5.2.2. $E^+(f-p)$ 和 $E^-(f-p)$ 均为有界闭集.

引理 5.2.3. 若 $p^*(x)$ 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最佳一致逼近多项式, 则 $E^+(f-p^*) \neq \varnothing, E^-(f-p^*) \neq \varnothing$.

定义 5.2.4. 若点集 $\{x_i, i=1,2,\cdots,k \mid x_1 < x_2 < \cdots < x_k\} \subset E(f-p)$ 满足

$$f(x_j) - p(x_j) = -(f(x_{j+1}) - p(x_{j+1})),$$

则称该点集为 $f(x)-p(x)$ 在 $[a,b]$ 上的交错偏差点组.

引理 5.2.5 (最佳一致逼近刻画)**.** 设 $f(x) \in C[a,b], p^*(x) \in P_n$ 为 $f(x)$ 的最佳一致逼近多项式, 则 $f(x)-p^*(x)$ 在 $[a,b]$ 上有至少 $n+2$ 个点的交错点组.

定理 5.2.6 (Vallée Poussin)**.** 设 $f(x) \in C[a,b]$ 且 $r(x) \in P_n$, 又设存在 $a < x_0 < \cdots < x_{n+1} < b$ 使得对所有 $i = 0,1,\cdots,n$ 有 $f(x_i) - r(x_i)$ 与 $f(x_{i+1}) - r(x_{i+1})$ 异号, 那么 $dis(f,P_n) \geqslant \min_{0 \leqslant i \leqslant n+1} |f(x_i) - r(x_i)|$.

定理 5.2.7 (Chebyshev 定理)**.** 设 $X = C[a,b], M = P_n$, 则任意 $f \in X, p^* \in B_M(f) \Longleftrightarrow f - p^*$ 在 $[a,b]$ 上至少有 $n+2$ 个点的交错点组.

5.3 整体一致逼近、正线性算子定理

定理 5.3.1 (Weierstrass 第一定理)**.** 设 $f(x) \in C[a,b]$, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists$ 多项式 $P(x)$ 使得 $\|f - P\|_\infty < \varepsilon.$

5.4 最佳一致逼近的收敛阶

本节的内容可参考 Approximation Theory-Lecture 9.

固定 f, 研究 $\mathrm{dis}(f,P_n)$ 关于 n 的阶数, 发现与 $\omega_f(1/n)$ 有关. 具体思路, 研究连续函数的代数多项式的最佳一致逼近与研究周期函数的三角多项式的最佳一致逼近等价, 而给定一个周期函数可以找到它的一个卷积是三角多项式, 而我们有关于一个函数和它的卷积的一般结论. 如果函数有更高的光滑性, 我们可以得到更好的结论, 一般是通过直接的对 $\omega_f(1/n)$ 的估计或转化到对高阶导数估计.

定义 5.4.1. 设 $f(x)\in C(I)$, 定义 $\omega_f(\delta)=\sup_{|x-y|\leqslant\delta}|f(x)-f(y)|$, 称作函数的连续模.

命题 5.4.2. 函数的连续模具有如下性质

(1) 当 $\delta_1\leqslant\delta_2$ 时 $\omega_f(\delta_1)\leqslant\omega_f(\delta_2)$.

(2) $\omega_f(\delta_1+\delta_2)\leqslant\omega_f(\delta_1)+\omega_f(\delta_2)$. 从而 $\omega_f(n\delta)\leqslant n\omega_f(\delta)$.

(3) $\lim_{\delta\to 0}\omega_f(\delta)=0\iff f$ 是一致连续的.

(4) 对任意 $\lambda>0$, 有 $\omega_f(\lambda\delta)\leqslant(\lambda+1)\omega_f(\delta)$.

(5) f 是 α-阶 Hölder 连续的 $\iff$ 存在常数 $M>0$ 使得对任意 $\delta>0$ 有 $\omega_f(\delta)\leqslant M\delta^\alpha$.

证明.

(2) 对任意 $|x-y|\leqslant\delta_1+\delta_2$, 可以找到 z 使得 $|x-z|\leqslant\delta_1$ 且 $|z-y|\leqslant\delta_2$,

$$|f(x)-f(y)|\leqslant|f(x)-f(z)|+|f(z)-f(y)|\leqslant\omega_f(\delta_1)+\omega_f(\delta_2).$$

右侧是与 x,y 无关的常数, 对左侧关于 $|x-y|\leqslant\delta$ 取上确界即可.

(3)

$$\begin{aligned}\lim_{\delta\to 0}\omega_f(\delta)=0&\iff\forall\varepsilon>0,\exists\eta>0,\forall\delta<\eta,\omega_f(\delta)<\varepsilon\\&\iff\forall\varepsilon>0,\exists\eta>0,\forall|x-y|<\eta,|f(x)-f(y)|<\varepsilon\iff f\text{ 一致连续.}\end{aligned}$$

(4)

$$\omega_f(\lambda\delta)\leqslant\omega_f((\lfloor\lambda\rfloor+1)\delta)\leqslant(\lfloor\lambda\rfloor+1)\omega_f(\delta)\leqslant(\lambda+1)\omega_f(\delta).$$

(5) 假设 f 是 α-阶 Hölder 连续的, 那么 $\sup_{x\neq y}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}$ 是有限数, 记为 M, 则对任意 $x\neq y$ 有 $|f(x)-f(y)|\leqslant M|x-y|^\alpha$, 则对任意 $|x-y|\leqslant\delta$ 有 $|f(x)-f(y)|\leqslant M\delta^\alpha$, 即 $\omega_f(\delta)\leqslant M\delta^\alpha$.

假设存在常数 $M>0$ 使得对任意 $\delta>0$ 有 $\omega_f(\delta)\leqslant M\delta^\alpha$, 那么

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}\leqslant\frac{\omega_f(|x-y|)}{|x-y|^\alpha}\leqslant M\Longrightarrow f\text{ 是 }\alpha\text{-阶 Hölder 连续的.}$$

□

引理 5.4.3. 令 $K_n(t)$ 满足 $\int_{-\pi}^{\pi}K_n(t)\mathrm{d}t=1$ 和 $K_n(t)=K_n(-t)$ 且存在不依赖于 n 的常数 C 使得

$$\int_0^\pi|K_n(t)|\mathrm{d}t\leqslant C,\qquad\int_0^\pi nt|K_n(t)|\mathrm{d}t\leqslant C.$$

定义 $L_n^f(x)=\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)K_n(t)\mathrm{d}t$, 那么 $\|f-L_n^f\|_\infty\leqslant C\omega_f(1/n)$.

Chapter 6

最佳平方逼近

6.1 内积空间的最佳逼近

定理 6.1.1. 设 X 为内积空间, $M \subset X$ 为有限维子空间, 则 $\#B_M(f) = 1$.

定理 6.1.2. φ^* 是 f 的最佳逼近元当且仅当 $(f - \varphi^*, \varphi) = 0, \forall \varphi \in M$.

6.2 最佳平方逼近

6.3 正交多项式

Chapter 7

习题

7.1 第二周作业

7.2 第三周作业

7.3 第四周作业

7.4 第五周作业

1. 请尝试利用差商作为插值多项式的首项系数的定义, 证明

$$[t_1, \cdots, t_r]f = [t_1, \cdots, t_r, t_{r+1}](t - t_{r+1})f.$$

证明. 设 $r-1$ 次多项式 $p(t)$ 是于 $[t_1, \cdots, t_r]$ 对函数 f 进行插值的插值多项式, 断言 r 次多项式 $(t-t_{r+1})p(t)$ 是于 $[t_1, \cdots, t_r, t_{r+1}]$ 对函数 $(t-t_{r+1})f$ 进行插值的插值多项式. 我们在 t_1 处进行比较, 假设 t_1 在原始的节点中出现 l 次, 下面讨论 t_{r+1} 是否是 t_1.

- $t_{r+1} \neq t_1$. 只需比较函数与插值多项式在 t_1 处从 C^0 到 C^{l-1} 阶是否一致

$$\begin{aligned}
C_0 &: (t_1 - t_{r+1})f(t_1) = (t_1 - t_{r+1})p(t_1) \\
C_1 &: f(t_1) + (t_1 - t_{r+1})f'(t_1) = p(t_1) + (t_1 - t_{r+1})p'(t_1) \\
C_{l-1} &: (l-1)f^{(l-2)}(t_1) + (t_1 - t_{r+1})f^{(l-1)}(t_1) = (l-1)p^{(l-2)}(t_1) + (t_1 - t_{r+1})p^{(l-1)}(t_1)
\end{aligned}$$

- $t_{r+1} = t_1$. 需要比较函数与插值多项式在 t_1 处从 C^0 到 C^l 阶是否一致

$$\begin{aligned}
C_0 &: 0 = 0 \\
C_1 &: f(t_1) = p(t_1) \\
C_{l-1} &: (l-1)f^{(l-2)}(t_1) = (l-1)p^{(l-2)}(t_1) \\
C_l &: lf^{(l-1)}(t_1) = lp^{(l-1)}(t_1)
\end{aligned}$$

□

7.5 第六周作业

9.6. 证明

$$[t_i, t_{i+1}, \cdots, t_{i+m}](t-x)_+^{m-1} = (-1)^m [t_i, t_{i+1}, \cdots, t_{i+m}](x-t)_+^{m-1}.$$

证明.

$$(t-x)_+^{m-1} - (-1)^m (x-t)_+^{m-1} = (t-x)^{m-1}((t-x)_+^0 + (x-t)_+^0) = (t-x)^{m-1}.$$

□

7.6 第七周作业

7.7 第八周作业

7.8 第九周作业

10.2 考虑节点序列 $\{t_i\}_{i=1}^{6} = \{1,2,3,5,6,8\}$, 令 $B_{i,3}(x)$ 为 3 次 B 样条, $i=1,2$, 令 $s(x) = 4B_{1,3}(x) + 6B_{2,3}(x)$. 求 $s(x)$ 在区间 $[2,3]$ 上的 Bézier 表示, 计算 $s(2), s(2.5), s'(3)$ 的值.

解. 为了利用开花理论计算 Bézier 表示的系数, 我们需要引入额外的节点将 $B_{i,3}(x)$ 扩充为 $[2,3]$ 上的一组基, 为此在 1 的左侧额外插入两个节点, 这里我们考虑节点序列 $\{1,1,1,2,3,5,6,8\}$, 有条件

$$f(1,1,2)=0, \quad f(1,2,3)=0, \quad f(2,3,5)=4, \quad f(3,5,6)=6.$$

$s(x)$ 在区间 $[2,3]$ 上的 Bézier 表示是

$$f(2,2,2)(3-x)^3 + f(2,2,3)3(3-x)^2(x-2) + f(2,3,3)3(3-x)(x-2)^2 + f(3,3,3)(x-2)^3.$$

其中系数由开花多项式的性质计算如下

$$\begin{aligned}
f(2,2,3) &= \frac{3}{4}f(1,2,3) + \frac{1}{4}f(2,3,5) = 1, \\
f(2,3,3) &= \frac{1}{2}f(1,2,3) + \frac{1}{2}f(2,3,5) = 2, \\
f(3,3,5) &= \frac{3}{4}f(2,3,5) + \frac{1}{4}f(3,5,6) = \frac{9}{2}, \\
f(3,3,3) &= \frac{2}{3}f(2,3,3) + \frac{1}{3}f(3,3,5) = \frac{17}{6}, \\
f(1,2,2) &= \frac{1}{2}f(1,1,2) + \frac{1}{2}f(1,2,3) = 0, \\
f(2,2,2) &= \frac{1}{2}f(1,2,2) + \frac{1}{2}f(2,2,3) = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

由开花算法知 $s(2) = f(2,2,2) = 1/2$. 而 $s(2.5)$ 可以由 $[2,3]$ 上的 Bézier 表示直接计算得到

$$s(2.5) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^3} + 3 \times \frac{1}{2^3} + 2 \times 3 \times \frac{1}{2^3} + \frac{17}{6} \times \frac{1}{2^3} = \frac{37}{24}.$$

$s'(3)$ 也可以由 $[2,3]$ 上的 Bézier 表示求导直接得到

$$s'(3) = -3 \times f(2,3,3) + 3 \times f(3,3,3) = \frac{5}{2}.$$

□

7.9 第十周作业

7.10 第十一周作业

7.11 第十二周作业

7.12 第十三周作业

7.13 第十四周作业

7.14 第十五周作业