

偏微分方程数值解

孙天阳

中国科学技术大学数学科学学院

`tysun@mail.ustc.edu.cn`

2024 年 10 月 21 日

目录

目录	1
1 Fourier 级数和三角插值	2
2 模型方程-对流方程	3
2.1 对流方程的初值问题	3
2.2 对流方程的初值问题的有限差分方法——二层/单步格式	4
2.2.1 方程的离散格式	4
2.3 FTCS 格式	5
2.3.1 稳定性	6
2.4 人工黏性	7
2.5 CTCS 格式	10
2.6 带源项的 PDE 初值问题	12
2.7 FTBS 格式	13
2.8 迎风格式与 CFL 条件	14
2.9 BTCS 格式	15
2.10 截断误差	17
2.11 整体误差	18
2.12 基于 PDE 的积分形式的有限差分格式的构造	19
2.13 变系数对流方程	21
3 扩散方程	22
3.1 常系数扩散方程初值问题	22
3.2 待定系数法构造高阶逼近	23
3.3 变系数扩散方程	24
3.3.1 非守恒型扩散方程	24
3.3.2 守恒型扩散方程	25
4 偏微分方程初值问题的适定性	26

Chapter 1

Fourier 级数和三角插值

Chapter 2

模型方程-对流方程

2.1 对流方程的初值问题

考虑常系数的对流方程的初值问题

$$\begin{cases} u_t = u_x, & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & -\infty < x < \infty \end{cases}$$

其中 $f(x)$ 是一个光滑的 2π 周期的周期函数.

初值是一个谐波

一般情况的初值

对流方程初值问题的解的特性

解的特征线为直线，并且解沿着这些特征线保持不变，初值沿着特征线以有限速度传播。

2.2 对流方程的初值问题的有限差分方法——二层/单步格式

由于本问题是 2π 周期的, 所以将区域 $[0, 2\pi]$ 用 $J+1$ 个节点 x_j 均匀剖分, 即

$$x_j = j \cdot h, \quad j = 0, 1, \dots, J, \quad h = \frac{2\pi}{J}.$$

时间同样均匀剖分, 取时间步长为 Δt , 即

$$t_n = n \cdot \Delta t, \quad n = 0, 1, \dots, N.$$

将解 $u(x, t)$ 在 (x, t) 平面上的格点 $P = (x_j, t_n)$ 处的值记为 $u_j^n = u(x_j, t_n)$, 将近似值记为 $v_j^n \simeq u_j^n$. 由于 u 是 2π 周期的, 所以我们可以期待 v 也是 2π 周期的, 即 $v_j^n = v_{j+J}^n$.

2.2.1 方程的离散格式

显式格式: 由已知层的函数值直接得到未知层的函数值、隐式格式、多步格式

2.3 FTCS 格式

使用前差近似 u_t , 使用中心差近似 u_x , 并对空间使用记号 D_0 , 得到

$$u_t(x_j, t_n) \simeq \frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t}, \quad u_x(x_j, t_n) \simeq \frac{v_{j+1}^n - v_{j-1}^n}{2h} = D_0 v_j^n$$

代入对流方程并整理得到

$$u_t = u_x \implies v_j^{n+1} = v_j^n + \frac{\Delta t}{2h}(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n) = v_j^n + \Delta t D_0 v_j^n = (1 + \Delta t D_0) v_j^n =: Q v_j^n$$

此处我们用符号 Q 来记算子 $1 + \Delta t D_0$. 另外边值条件为

$$u(x, 0) = f(x) \implies v_j^0 = f(x_j) =: f_j, \quad j = 0, \dots, J.$$

初值是一个谐波

设

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} \implies v_j^0 = f(x_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x_j} =: \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{v}^0(\omega) e^{i\omega x_j}.$$

根据 FTCS 格式计算有

$$\begin{aligned} v_j^1 &= v_j^0 + \frac{\Delta t}{2h}(v_{j+1}^0 - v_{j-1}^0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{v}^0(\omega) \left(e^{i\omega x_j} + \frac{\Delta t}{2h} e^{i\omega x_{j+1}} - \frac{\Delta t}{2h} e^{i\omega x_{j-1}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{v}^0(\omega) e^{i\omega x_j} \left(1 + \frac{\Delta t}{2h} e^{i\omega h} - \frac{\Delta t}{2h} e^{-i\omega h} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{v}^0(\omega) e^{i\omega x_j} (1 + i r \sin \xi) \end{aligned}$$

这里我们使用了记号

$$r := \frac{\Delta t}{h}, \quad \xi := \omega h.$$

根据以上的计算我们可以发现, 如果初值 f 也就是 v^0 是一个频率为 ω 的谐波, 那么根据 FTCS 格式计算出的下一个时间层 v^1 也是一个频率为 ω 的谐波, 并且二者之间的振幅的关系为

$$\hat{v}^1(\omega) = \hat{v}^0(\omega)(1 + i r \sin \xi).$$

容易看出这个计算对任意 n 都对, 所以我们有关系

$$\hat{v}^{n+1}(\omega) = \hat{Q} \hat{v}^n(\omega) = \dots = \hat{Q}^{n+1} \hat{v}^0(\omega), \quad \hat{Q} := 1 + i r \sin \xi.$$

称复数 \hat{Q} 为算子 Q 的符号, 也称为格式 FTCS 的放大因子. 差分方程的解即为

$$v_j^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{v}^n(\omega) e^{i\omega x_j} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (1 + i \frac{\Delta t}{h} \sin(\omega h))^n \hat{f}(\omega) e^{i\omega x_j}.$$

前面的经验告诉我们解析解是

$$u_j^n = u(x_j, t_n) = f(x_j + t_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x_j} e^{i\omega t_n}.$$

我们自然要研究当 Δt 和 h 趋于 0 时数值解 v_j^n 是否会收敛到解析解 u_j^n .

$$\begin{aligned} (1 + i \frac{\Delta t}{h} \sin(\omega h))^n &= (1 + i \frac{\Delta t}{h} \omega h + i \frac{\Delta t}{h} O(\omega^3 h^3))^n = (1 + i \omega \Delta t + O(\omega^3 \Delta t h^2))^n \\ &= (e^{i\omega \Delta t} + O(\omega^2 \Delta t^2 + \omega^3 \Delta t h^2))^n = e^{i\omega t_n} (1 + O(\omega^2 \Delta t^2 + \omega^3 \Delta t h^2))^n = e^{i\omega t_n} (1 + n O(\omega^2 \Delta t^2 + \omega^3 \Delta t h^2)) \\ &= e^{i\omega t_n} (1 + t_n O(\omega^2 \Delta t + \omega^3 h^2)) \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0, h \rightarrow 0} e^{i\omega t_n} \end{aligned}$$

一般情况的初值

小扰动

$$\hat{f}(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \neq \frac{J}{4} \\ \varepsilon, & \omega = \frac{J}{4} \end{cases}$$

2.3.1 稳定性

在实际计算中, 误差是不可避免的.

定义 2.3.1. 考虑一种数值方法, 若满足:

$$\lim_{\Delta t, h \rightarrow 0} \sup_{0 \leq t_n \leq T} |\hat{Q}^n| \leq K(T)$$

则称该方法是稳定的.

2.4 人工黏性

物理上的黏性, 也就是耗散性, 对应于数学上的偶数阶导数, 奇数阶导数对应于物理上的色散.

$$u_t = u_x + \sigma h u_{xx}$$

当 $h \rightarrow 0$ 时, 上述方程趋近于 $u_t = u_x$. 对 u_{xx} 用两个一阶的差分算子去近似

$$\begin{aligned} \frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} &= \frac{v_{j+1}^n - v_{j-1}^n}{2h} + \sigma h \frac{v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n}{h^2} = D_0 v_j^n + \sigma h D_+ D_- v_j^n \\ v_j^{n+1} &= v_j^n + \frac{\Delta t}{2h} (v_{j+1}^n - v_{j-1}^n) + \sigma \frac{\Delta t}{h} (v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n) = (1 + \Delta t D_0 + \sigma h \Delta t D_+ D_-) v_j^n \end{aligned}$$

初值是一个谐波

前半部分的计算在此前已经熟悉, 只需要类似计算后半部分

$$\begin{aligned} v_{j+1}^0 - 2v_j^0 + v_{j-1}^0 &= v_j^0 (e^{i\omega h} - 2 + e^{-i\omega h}) = v_j^0 (\cos \omega h + i \sin \omega h + \cos \omega h - i \sin \omega h - 2) = -4v_j^0 \sin^2 \frac{\omega h}{2} \\ v_j^1 &= v_j^0 \left(1 + ir \sin \xi - 4\sigma r \sin^2 \frac{\xi}{2} \right) \implies \hat{v}^{n+1} = \hat{Q} \hat{v}^n, \hat{Q} = 1 + ir \sin \xi - 4\sigma r \sin^2 \frac{\xi}{2}, r = \frac{\Delta t}{h}, \xi = \omega h \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\hat{Q}|^2 &= (1 - 4\sigma r \sin^2 \frac{\xi}{2})^2 + r^2 \sin^2 \xi \\ &= 1 - 8\sigma r \sin^2 \frac{\xi}{2} + 16\sigma^2 r^2 \sin^4 \frac{\xi}{2} + r^2 \sin^2 \xi \\ &= 1 - 8\sigma r \sin^2 \frac{\xi}{2} + 16\sigma^2 r^2 \sin^4 \frac{\xi}{2} + 4r^2 \sin^2 \frac{\xi}{2} (1 - \sin^2 \frac{\xi}{2}) \\ &= (16\sigma^2 r^2 - 4r^2) \sin^4 \frac{\xi}{2} + (4r^2 - 8\sigma r) \sin^2 \frac{\xi}{2} + 1 \\ |\hat{Q}|^2 - 1 &= (16\sigma^2 r^2 - 4r^2) \sin^4 \frac{\xi}{2} + (4r^2 - 8\sigma r) \sin^2 \frac{\xi}{2} \\ &= 4r \sin^2 \frac{\xi}{2} [(4\sigma^2 r - r) \sin^2 \frac{\xi}{2} + r - 2\sigma] \end{aligned}$$

如果我们要求 $|\hat{Q}|^2 - 1 \leq 0$, 即要求

$$(4\sigma^2 r - r) \sin^2 \frac{\xi}{2} + r - 2\sigma \leq 0$$

将上式看作关于 $\sin^2 \frac{\xi}{2} \in [0, 1]$ 的一次函数, 只需要对端点处的值加以限制, 等价于

$$r - 2\sigma \leq 0, \quad 4\sigma^2 r - 2\sigma \leq 0$$

所以我们得到

$$|\hat{Q}|^2 - 1 \leq 0 \iff r \leq 2\sigma, \quad 2\sigma r \leq 1.$$

下面我们讨论两种特殊情况

- 若 $2\sigma \leq 1$ 即要求 $16\sigma^2 \leq 4$, 则当 $4r^2 - 8\sigma r \leq 0$ 即 $r \leq 2\sigma$ 时, $|\hat{Q}|^2 \leq 1$ 成立.
- 若 $2\sigma \geq 1$, 将 $\sin^4 \frac{\xi}{2}$ 放缩成为 $\sin^2 \frac{\xi}{2}$ 得到此时 $|\hat{Q}|^2 \leq 1$ 的一个充分条件是 $2\sigma r \leq 1$.

Lax-Friedrich 格式

$$\sigma = \frac{h}{2\Delta t} = \frac{1}{2r}, \quad r = \frac{\Delta t}{h}$$

Lax-Wendroff 格式

假设:

离散方程:

$$v_j^{n+1} = \frac{1}{2}(v_{j-1}^n + v_{j+1}^n) + \Delta t D_0 v_j^n$$

简化后的离散方程可以写为:

$$v_j^{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)(v_{j-1}^n + v_{j+1}^n) + \Delta t D_0 v_j^n + \frac{h^2}{2} D_+ D_- v_j^n$$

这是关于 **Lax-Friedrich** 数值格式的公式, 常用于解决双曲型偏微分方程。

如果有更多的补充或问题, 请随时告诉我!

FTCS

$$v_j^{n+1} = v_j^n + \Delta t D_0 v_j^n$$

Lax-Friedrich 格式实际上就是将 FTCS 中的 v_j^n 修正为 $\frac{v_{j+1}^n + v_{j-1}^n}{2}$

$$= \frac{2u_j^n + 2\frac{1}{2!}u_{xx}h^2}{2} = u_j^n + \frac{h^2}{2}u_{xx}$$

所以看出来加了一个粘性

这个新的格式的 \hat{Q}

要 $|\hat{Q}| \leq 1$

推出来 $r \leq 1$

从第八张图片无法自动提取文字, 但我将基于图片中的内容手动整理公式。

图片展示的是 **格式**, 一种二阶精度的有限差分方法, 适用于双曲型偏微分方程。

Lax-Wendroff 格式:

假设:

$$\sigma = \frac{1}{2}\lambda = \frac{\Delta t}{2h}$$

离散方程为:

$$v_j^{n+1} = v_j^n + \Delta t D_0 v_j^n + \frac{\Delta t^2}{2} D_+ D_- v_j^n$$

这是 Lax-Wendroff 格式的主要公式, 其中 D_0 和 $D_+ D_-$ 分别代表差分算子, 能够提供二阶时间精度。

如果你需要进一步的说明或讨论其他内容, 请告诉我!

由于第十张图片的文字识别结果不完整, 我将根据图片中的内容手动整理。

定理 2.4.1. 在有限时间区域 $0 \leq t \leq T$, 考虑 $\Delta t, h \rightarrow 0$ 时, 差分近似:

$$v_j^{n+1} = Q v_j^n, \quad Q = \sum_{\mu=-r}^s A_\mu(\Delta t, h) E^\mu, \quad v_j^0 = f_j$$

假设:

(a) 初值 f 是 (分片连续) 可展开为 *Fourier* 级数 ($f \in L^2$) 且其三角插值收敛于 f 。

(b) 差分近似是稳定的, 即存在常数 K_s , 使得对于所有的 Δt 和 h 有:

$$\sup_{0 \leq t_n \leq T} |Q^n| \leq K_s$$

(c) 差分近似是相容的, 即对于每个固定的 ω , 有:

$$\lim_{\Delta t, h \rightarrow 0} \sup_{\xi} |\hat{Q}^n(\xi) - e^{-i\omega t_n}| = 0$$

则: 差分近似解的三角插值收敛于微分方程的解, 即:

$$\lim_{\Delta t, h \rightarrow 0} \sup_{0 \leq t_n \leq T} \|u(\cdot, t_n) - \psi_N(\cdot, t_n)\| = 0$$

其中 $u(\cdot, t_n)$ 的表达式为:

$$u(\cdot, t_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} e^{i\omega x_j + t_n \hat{v}_n(\omega)} f(\omega)$$

差分近似解的三角插值为:

$$\psi_N = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\omega=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} e^{i\omega x_j} \hat{v}_n(\omega) f(\omega)$$

证明.

□

证明: 设:

$$\sum_{\omega=-\infty}^{\infty} |f(\omega)|^2 = \|f\|^2$$

取常数 M , 使得 $0 < M < \frac{N}{2}$, 则证明过程可以从这里展开。

这段内容涉及到了傅里叶级数展开和差分解的逼近分析。如果需要进一步详细解释或扩展内容, 请告诉我!

2.5 CTCS 格式

使用中心差近似 u_t , 使用中心差近似 u_x , 得到

$$u_t(x_j, t_n) \simeq \frac{v_j^{n+1} - v_j^{n-1}}{2\Delta t}, \quad u_x(x_j, t_n) \simeq \frac{v_{j+1}^n - v_{j-1}^n}{2h} = D_0 v_j^n$$

代入对流方程并整理得到

$$u_t = u_x \implies v_j^{n+1} = v_j^{n-1} + \frac{\Delta t}{h}(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n) = v_j^{n-1} + r(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n)$$

初值是一个谐波

$$\hat{v}^{n+1}(\omega) = \hat{v}^{n-1}(\omega) + 2ir \sin \xi \hat{v}^n(\omega)$$

这是一个数列的递推公式, 出现了相邻的三项, 系数均为与 n 无关的常数. 考虑特征方程

$$z^2 - 2ir \sin \xi z - 1 = 0$$

当 $0 < r < 1$ 时, 有两个不同的解

$$z_1 = ir \sin \xi + \sqrt{1 - r^2 \sin^2 \xi}, \quad z_2 = ir \sin \xi - \sqrt{1 - r^2 \sin^2 \xi}$$

由特征方程的理论知

$$\hat{v}^n(\omega) = \sigma_1 z_1^n + \sigma_2 z_2^n$$

其中 σ_1, σ_2 是与 n 无关的常数, 代入 $n = 0, 1$ 的初值条件来得到. 但我们发现我们只知道

$$\hat{v}^0(\omega) = \hat{f}(\omega)$$

而 $\hat{v}^1(\omega)$ 的值不能由 CTCS 的递推关系得到. 实践中我们通过单步格式如 FTCS 来得到 $\hat{v}^1(\omega)$ 的值

$$\hat{v}^1(\omega) = (1 + ir \sin \xi) \hat{f}(\omega)$$

这样我们就得到了关于 σ_1, σ_2 的线性方程组

$$\begin{cases} \sigma_1 + \sigma_2 = \hat{f}(\omega) \\ \sigma_1 z_1 + \sigma_2 z_2 = (1 + ir \sin \xi) \hat{f}(\omega) \end{cases}$$

将 $r = \Delta t/h$ 取为常值, 当 $\xi = \omega h \ll 1$ 的时候

$$ir \sin \xi = ir \xi + ir O(\xi^3) = i\omega \Delta t + O(\omega^3 \Delta t^3).$$

$$\sqrt{1 - r^2 \sin^2 \xi} = 1 - \frac{1}{2} r^2 \sin^2 \xi + O(r^4 \sin^4 \xi) = 1 - \frac{1}{2} r^2 (\xi^2 + O(\xi^4)) + O(r^4 \xi^4)$$

$$z_1 = 1 + i\omega \Delta t - \frac{1}{2} \omega^2 \Delta t^2 + O(\omega^3 \Delta t^3) = e^{i\omega \Delta t(1 + O(\omega^2 \Delta t^2))}, \quad z_2 = -e^{-i\omega \Delta t(1 + O(\omega^2 \Delta t^2))}$$

在不近似的情况下直接解线性方程组, 得到

$$\begin{cases} \sigma_1 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{1 - r^2 \sin^2 \xi}} \right) \hat{f}(\omega) \\ \sigma_2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{1 - r^2 \sin^2 \xi}} \right) \hat{f}(\omega) \end{cases}$$

所以只需要估计

$$\frac{1}{\sqrt{1-r^2 \sin^2 \xi}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} r^2 \sin^2 \xi + O(r^4 \sin^4 \xi)} = 1 + \frac{1}{2} r^2 \sin^2 \xi + O(r^4 \sin^4 \xi)$$

$$\sigma_1 = (1 + \frac{1}{4} r^2 \xi^2 + O(r^2 \xi^4)) \hat{f}(\omega) = (1 + \frac{1}{4} \omega^2 \Delta t^2 + O(\omega^4 \Delta t^4)) \hat{f}(\omega), \quad \sigma_2 = (-\frac{1}{4} \omega^2 \Delta t^2 + O(\omega^4 \Delta t^4)) \hat{f}(\omega)$$

这样一来

$$\hat{v}^n(\omega) = \hat{f}(\omega)(1 + O(\omega^2 \Delta t^2)) e^{i\omega t_n(1+O(\omega^2 \Delta t^2))} + (-1)^n \hat{f}(\omega) O(\omega^2 \Delta t^2) e^{-i\omega t_n(1+O(\omega^2 \Delta t^2))}$$

可以看到前半部分当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时收敛于准确解 $\hat{u}^n(\omega) = \hat{f}(\omega) e^{i\omega t_n}$, 后半部分是模长不依赖于 t_n 且随着 Δt 的减小而减小的振荡, 我们称这部分为寄生解.

2.6 带源项的 PDE 初值问题

$$\begin{cases} u_t = u_x - au, & a > 0 \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}$$

只考虑 $\omega = 0, a\Delta t \ll 1$

$$z_1 = -a\Delta t + \sqrt{1 + (a\Delta)^2}$$

然后继续求 σ_1, σ_2

2.7 FTBS 格式

2.8 迎风格式与 CFL 条件

$a < 0$ 时 $x - at = \text{常数}$, $a < 0$ 时迎风格式 $FTFS$ 格式

$$v_j^{n+1} = v_j^n - ar(v_{j+1}^n - v_j^n)$$

$a > 0$ 时迎风格式 $FTBS$ 格式

写到一起

2.9 BTCS 格式

使用后差近似 u_t , 使用中心差近似 u_x , 得到

$$u_t(x_j, t_n) \simeq \frac{v_j^n - v_j^{n-1}}{\Delta t}, \quad u_x(x_j, t_n) \simeq \frac{v_{j+1}^n - v_{j-1}^n}{2h}$$

代入对流方程并整理得到

$$u_t = u_x \implies v_j^n = v_j^{n-1} + \frac{\Delta t}{2h}(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n)$$

我们习惯已知层用 n , 未知层用 $n+1$, 所以改写一下得到

$$v_j^{n+1} = v_j^n + \frac{\Delta t}{2h}(v_{j+1}^{n+1} - v_{j-1}^{n+1})$$

这是一个隐式格式而不是显式格式, 类似于 $y = f(x)$ 与 $g(x, y) = 0$ 所确定的函数关系的区别.

$$-\frac{\Delta t}{2h}v_{j+1}^{n+1} + v_j^{n+1} + \frac{\Delta t}{2h}v_{j-1}^{n+1} = v_j^n$$

每两层之间的求解是一个线性方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{\Delta t}{2h} & 0 & \cdots & 0 & \frac{\Delta t}{2h} \\ \frac{\Delta t}{2h} & 1 & -\frac{\Delta t}{2h} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{\Delta t}{2h} & 1 & -\frac{\Delta t}{2h} \\ -\frac{\Delta t}{2h} & 0 & \cdots & 0 & \frac{\Delta t}{2h} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0^{n+1} \\ v_1^{n+1} \\ \vdots \\ v_N^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0^n \\ v_1^n \\ \vdots \\ v_N^n \end{pmatrix}$$

下面我们来计算放大因子

$$\hat{v}^{n+1}(\omega) = \hat{v}^n(\omega) + \frac{\Delta t}{2h}(e^{i\omega h} - e^{-i\omega h})\hat{v}^{n+1}(\omega) \implies \hat{v}^{n+1}(\omega) = \frac{1}{1 - ir \sin \xi} \hat{v}^n(\omega)$$

$$\hat{Q} = \frac{1}{1 - ir \sin \xi} \implies |\hat{Q}|^2 = \frac{1}{1 + r^2 \sin^2 \xi} \leq 1$$

所以 BTCS 格式是无条件稳定的.

Crank-Nicolson 格式

思想是将方程分成两部分, 每部分用不同的格式来近似, 这里我们一半用 FTCS 一半用 BTCS

$$\begin{aligned} \frac{v_j^n - v_j^{n-1}}{\Delta t} &\simeq u_t = u_x = \frac{1}{2}u_x + \frac{1}{2}u_x \simeq \frac{1}{2}\frac{v_{j+1}^n - v_{j-1}^n}{2h} + \frac{1}{2}\frac{v_{j+1}^{n+1} - v_{j-1}^{n+1}}{2h} \\ \implies (I - \frac{\Delta t}{2}D_0)v_j^{n+1} &= (I + \frac{\Delta t}{2}D_0)v_j^n \implies \hat{Q} = \frac{2 + ir \sin \xi}{2 - ir \sin \xi}, \quad |\hat{Q}| = 1 \end{aligned}$$

该格式也是无条件稳定的, 且对所有的频率 ω , 放大因子 \hat{Q} 的模长不变.

θ -方法

Crank-Nicolson 格式的直接推广, 将系数 $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{2}$ 替换为 $1 - \theta$ 和 θ , 其中 $0 \leq \theta \leq 1$.

$$\begin{aligned}
 (I - \theta \Delta t D_0) v_j^{n+1} &= (I + (1 - \theta) \Delta t D_0) v_j^n, \quad \hat{Q} = \frac{1 + ir(1 - \theta) \sin \xi}{1 - ir\theta \sin \xi} \\
 \hat{Q} &= \frac{1 + ir(1 - \theta) \sin \xi}{1 - ir\theta \sin \xi} = \frac{(1 + ir(1 - \theta) \sin \xi)(1 + ir\theta \sin \xi)}{1 + r^2 \theta^2 \sin^2 \xi} = \frac{1 - r^2 \theta(1 - \theta) \sin^2 \xi + ir \sin \xi}{1 + r^2 \theta^2 \sin^2 \xi} \\
 |\hat{Q}|^2 &= \frac{(1 - r^2 \theta(1 - \theta) \sin^2 \xi)^2 + r^2 \sin^2 \xi}{1 + 2r^2 \theta^2 \sin^2 \xi + r^4 \theta^4 \sin^4 \xi} = \frac{1 - 2r^2 \theta(1 - \theta) \sin^2 \xi + r^4 \theta^2(1 - \theta)^2 \sin^4 \xi + r^2 \sin^2 \xi}{1 + 2r^2 \theta^2 \sin^2 \xi + r^4 \theta^4 \sin^4 \xi} \\
 |\hat{Q}|^2 - 1 &= \frac{-2r^2 \theta \sin^2 \xi + r^4 \theta^2 \sin^4 \xi - 2r^4 \theta^3 \sin^4 \xi + r^2 \sin^2 \xi}{1 + 2r^2 \theta^2 \sin^2 \xi + r^4 \theta^4 \sin^4 \xi} \\
 |\hat{Q}|^2 - 1 &= \frac{r^2 \sin^2 \xi}{(1 + r^2 \theta^2 \sin^2 \xi)^2} (-2\theta + r^2 \theta^2 \sin^2 \xi - 2r^2 \theta^3 \sin^2 \xi + 1) \\
 |\hat{Q}|^2 - 1 &= \frac{r^2 \sin^2 \xi}{(1 + r^2 \theta^2 \sin^2 \xi)^2} (1 - 2\theta)(1 + r^2 \theta^2 \sin^2 \xi)
 \end{aligned}$$

当 $\theta \geq \frac{1}{2}$, 即隐式格式占据优势时, 格式为无条件稳定的.

2.10 截断误差

以 FTCS 格式为例, 此时截断误差为

$$T(x_j, t_n) = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} - (u_t(x_j, t_n) - u_x(x_j, t_n)) = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h}$$

泰勒展开, 有

$$u_j^{n+1} = u(x_j, t_{n+1}) = u(x_j, t_n) + u_t(x_j, t_n)\Delta t + \frac{1}{2}u_{tt}(x_j, t_n)\Delta t^2$$

$$u_{j+1}^n = u(x_{j+1}, t_n) = u(x_j, t_n) + u_x(x_j, t_n)h + \frac{1}{2}u_{xx}(x_j, t_n)h^2 + \frac{1}{6}u_{xxx}(x_j + \eta h, t_n)h^3$$

$$u_{j-1}^n = u(x_{j-1}, t_n) = u(x_j, t_n) - u_x(x_j, t_n)h + \frac{1}{2}u_{xx}(x_j, t_n)h^2 - \frac{1}{6}u_{xxx}(x_j + \xi h, t_n)h^3$$

代入得

$$T(x_j, t_n) = u_t(x_j, t_n) + O(\Delta t) - u_x(x_j, t_n) + O(h^2) = O(\Delta t + h^2)$$

定义 2.10.1. 若 $T_j^n = O(h^p + (\Delta t)^q)$, 则称该方法为对空间 p 阶、对时间 q 阶精度.

再以加黏性项修正的 FTCS 格式为例, 此时

$$T_j^n = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} - \sigma h \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2}$$

$$u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n = h^2 u_{xx}(x_j, t_n) + \frac{h^4}{12} u_{xxxx}(x_j, t_n) + O(h^6)$$

$$u_{j+1}^n - u_{j-1}^n = 2h u_x(x_j, t_n) + \frac{h^3}{3} u_{xxx}(x_j, t_n) + O(h^5)$$

$$u_j^{n+1} - u_j^n = \Delta t u_t(x_j, t_n) + \frac{1}{2}(\Delta t)^2 u_{tt}(x_j, t_n) + O((\Delta t)^3)$$

$$T_j^n = \frac{1}{2}\Delta t u_{tt}(x_j, t_n) + O((\Delta t)^2) - \frac{h^2}{6} u_{xxx}(x_j, t_n) + O(h^4) - \sigma h u_{xx}(x_j, t_n) - \frac{\sigma h^3}{12} u_{xxxx}(x_j, t_n) + O(h^5)$$

$$T_j^n = \frac{1}{2}\Delta t u_{tt}(x_j, t_n) - \sigma h u_{xx}(x_j, t_n) + O(h^2 + (\Delta t)^2)$$

因为

$$u_t = u_x \implies u_{tt} = u_{xt} = u_{xx}$$

所以如果 $2\sigma h = \Delta t$, 则 $T_j^n = O(h^2 + (\Delta t)^2)$, 否则 $T_j^n = O(h + \Delta t)$.

2.11 整体误差

2.12 基于 PDE 的积分形式的有限差分格式的构造

用节点

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{J-1} < x_J = 1$$

将 $[0, 1]$ 均匀分成 J 个小区域, 用节点

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{N-1} < t_N = T$$

将 $[0, T]$ 均匀分成 N 个小区域.

取控制体 $\Omega_j^n = [t_n, t_{n+1}] \times [x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}]$

在 Ω_j^n 上对函数 $u_t + au_x$ 进行积分, 得到

$$\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} u^{n+1}(x) - u^n(x) dx + a \int_{t_n}^{t_{n+1}} u_{j+\frac{1}{2}}(t) - u_{j-\frac{1}{2}}(t) dt = 0$$

到此是精确成立的. 用不同的数值积分公式对上述方程中的积分做近似, 得到不同的有限差分格式. 对于第一个积分, 因为积分区间中有一个整节点, 所以用中点公式

$$\int_{x_{-1}}^{x_1} f(x) dx = \Delta x \cdot f(x_0) + \frac{(\Delta x)^3}{24} f''(\xi), \quad x_0 = \frac{x_{-1} + x_1}{2}, \xi \in (x_{-1}, x_1)$$

应用到我们这个具体的式子上就是

$$\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} u^{n+1}(x) - u^n(x) dx = h(u_j^{n+1} - u_j^n) + \frac{h^3}{24}(u_{xx}^{n+1} - u_{xx}^n)(\xi), \quad \xi \in (x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}})$$

对于第二个积分, 如果希望最后是显式, 就要只包含一个与时间相关的端点, 所以我们使用

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)f(a) + \frac{1}{4}(b-a)^2 f'(\xi), \quad \xi \in (a, b)$$

应用到我们这个具体的式子上就是

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} (u_{j+\frac{1}{2}}(t) - u_{j-\frac{1}{2}}(t)) dt = \Delta t(u_{j+\frac{1}{2}}^n - u_{j-\frac{1}{2}}^n) + \frac{1}{4}\Delta t^2(u_{j+\frac{1}{2}} - u_{j-\frac{1}{2}})_t(\eta), \quad \eta \in (t_n, t_{n+1})$$

将两个式子合并到一起, 整理得到

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{a}{h}(u_{j+\frac{1}{2}}^n - u_{j-\frac{1}{2}}^n) + \frac{a\Delta t}{4h}(u_{j+\frac{1}{2}} - u_{j-\frac{1}{2}})_t(\eta) + \frac{h^2}{24\Delta t}(u_{xx}^{n+1} - u_{xx}^n)(\xi) = 0$$

上式中还是出现了函数 u 在半格点处的值, 因为我们希望将整格点处的值作为需要求解的量, 所以

$$\begin{aligned} u_j^n &= u_{j+\frac{1}{2}}^n - \frac{h}{2}u_x^n(x_{j+\frac{1}{2}}) + \frac{h^2}{8}u_{xx}^n(x_{j+\frac{1}{2}}) - \frac{h^3}{48}u_{xxx}^n(x_{j+\frac{1}{2}}) + O(h^4), \\ u_{j+1}^n &= u_{j+\frac{1}{2}}^n + \frac{h}{2}u_x^n(x_{j+\frac{1}{2}}) + \frac{h^2}{8}u_{xx}^n(x_{j+\frac{1}{2}}) + \frac{h^3}{48}u_{xxx}^n(x_{j+\frac{1}{2}}) + O(h^4), \\ u_{j+\frac{1}{2}}^n &= \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_j^n) - \frac{h^2}{4}u_{xx}^n(x_{j+\frac{1}{2}}) + O(h^4), \quad u_{j-\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2}(u_j^n + u_{j-1}^n) - \frac{h^2}{4}u_{xx}^n(x_{j-\frac{1}{2}}) + O(h^4) \\ u_{j+\frac{1}{2}}^n - u_{j-\frac{1}{2}}^n &= \frac{1}{2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) - \frac{h^2}{4}u_{xx}^n(x_{j+\frac{1}{2}}) + \frac{h^2}{4}u_{xx}^n(x_{j-\frac{1}{2}}) + O(h^4) = \frac{1}{2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + O(h^3) \end{aligned}$$

代入得

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{a}{2h}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + O(h^2) + O(\Delta t) + O(h^2) = 0$$

所以我们得到差分方程

$$\frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} + \frac{a}{2h}(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n) = 0$$

这其实就是 FTCS 格式, 从上面的推导也可以看出该格式的截断误差为 $O(h^2 + \Delta t)$ 阶的.

取时空区域 $\Omega_j^n = [t_{n-1}, t_{n+1}] \times [x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}]$ 为控制区域

$$\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} (u^{n+1} - u^{n-1}) dx$$

2.13 变系数对流方程

$$u_t + a(x, t)u_x = 0$$

$$\frac{dt}{dx} = a(x, t) \implies \frac{d}{dt}u(x(t), t) = 0.$$

Chapter 3

扩散方程

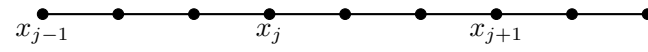
3.1 常系数扩散方程初值问题

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & -\infty < x < \infty \end{cases}$$

3.2 待定系数法构造高阶逼近

均匀网格

非均匀网格



3.3 变系数扩散方程

3.3.1 非守恒型扩散方程

FTCS 格式

$$v_j^{n+1} = (I + b_j^n \Delta t D_+ D_-) v_j^n = v_j^n + b_j^n (v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n)$$

算放大因子

算截断误差

$$T_j^n = O(h^2 + \Delta t)$$

算整体误差

假设 $B = \max_{j,n} b_j^n, \bar{T} = \max_{j,n} T_j^n, E^n = \max_j |e_j^n|$

$$E^{n+1} \leq E^n + T \Delta t \leq E^0 + \bar{T}(n+1) \Delta t$$

BTCS 格式

θ 方法

最终的格式应该有相容性、收敛性、稳定性，有效的，先不讲高效

哪种方法好其实与 $b(x, t)$ 的行为有关.

截断误差在哪点都一样, 主要看好不好算

3.3.2 守恒型扩散方程

物理意义, 热流量守恒

考虑方程的守恒性质, 使用积分形式构造有限差分格式, 取时空区域 Ω_j^n

Chapter 4

偏微分方程初值问题的适定性

解存在，唯一，稳定

先总结前面的解的特点，再看怎么得到适定性的定义