泛函分析

孙天阳

中国科学技术大学数学科学学院

tysun@mail.ustc.edu.cn

2024 年 11 月 21 日

目录

Chapter 1

拓扑向量空间

1 拓扑向量空间

定义 1.1. *称线性空间 X 及其上的拓扑 τ 是拓扑向量空间, 如果加法和数乘是连续的.*

定义 1.2. *完备拓扑向量空间.*

例 1.3. *存在局部凸的完备拓扑向量空间, 不是可度量化的*

2 局部凸空间

定义 2.1. 称拓扑线性空间 X 是局部凸的, 如果 X 存在由凸集构成的邻域基.

命题 2.2. 设 X 是线性空间, $\{p_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是其上的一族半范数. 设 $x\in X,\alpha\in A,\varepsilon>0$, 则由

$$U_{x\alpha\varepsilon}=\{y\in X\colon p_\alpha(y-x)<\varepsilon\}$$

生成的拓扑使得 X 成为局部凸拓扑线性空间.

证明.

- 加法的连续性. 考虑
$$\mu\colon X\times X\longrightarrow X,\quad u,v\longmapsto u+v$$
我们证明子基 $U_{x\alpha\varepsilon}$ 的原像是开集. 设 $\mu(u,v)=w\in U_{x\alpha\varepsilon}$, 记 $\eta=(\varepsilon-p_\alpha(x-w))/2$. 取 (u,v) 的邻域 $U_{u\alpha\eta}\times U_{v\alpha\eta}$, 取 $(\tilde{u},\tilde{v})\in U_{u\alpha\eta}\times U_{v\alpha\eta}$, 下证 $\mu(\tilde{u},\tilde{v})=\tilde{w}\in U_{x\alpha\varepsilon}$.
$$p_\alpha(x-\tilde{w})\leqslant p_\alpha(x-w)+p_\alpha(u-\tilde{u})+p_\alpha(v-\tilde{v})<\varepsilon.$$
- 数乘的连续性. 考虑
$$\lambda\colon\mathbb{R}\times X\longrightarrow X,\quad r,u\longmapsto ru$$
我们证明子基 $U_{x\alpha\varepsilon}$ 的原像是开集. 不妨设 $r>0$, 设 $\lambda(r,u)=w\in U_{x\alpha\varepsilon}$, 记 $\eta=\varepsilon-p_\alpha(x-w)$. 注意到 $\lambda(r,B_{u\alpha\delta})=B_{w\alpha r\delta}$. 取 (r,u) 的邻域 $(r-\xi,r+\xi)\times B_{u\alpha\delta}$, 其中 $\delta=\eta/((r+\xi))$.
- 局部凸. 只需证明 $U_{x\alpha\varepsilon}$ 是凸集. 设 $y,z\in U_{x\alpha\varepsilon}$, 则
$$p_\alpha(x-ty-(1-t)z)\leqslant tp_\alpha(x-y)+(1-t)p_\alpha(x-z)<\varepsilon.$$

□

例 2.3. 记 $L^0([0,1])$ 为 $[0,1]$ 上的可测函数全体（几乎处处相等视为恒等）. 定义

$$d(f,g)=\int_0^1\frac{|f(x)-g(x)|}{1+|f(x)-g(x)|}\mathrm{d}x.$$

证明：

(1) $d(f,g)$ 是 $L^0([0,1])$ 上的度量.

(2) $L^0([0,1])$ 在 $d(f,g)$ 诱导的拓扑下成为拓扑线性空间.

(3) 按度量 $d(f,g)$ 收敛就是依测度收敛.

(4) $L^0([0,1])$ 在 $d(f,g)$ 诱导的拓扑下不是局部凸的.

证明.

(1)
- 设 $d(f,g)=0$
- 由函数 $x/(1+x)$ 的单调性, 容易看出 $d(f,g)\leqslant d(f,h)+d(g,h)$.

(2)
- 加法的连续性.
- 数乘的连续性.

(3)

(4)

□

命题 2.4. 设 X 是局部凸拓扑线性空间, 闵可夫斯基泛函

命题 2.5. 设 X 是局部凸拓扑线性空间, 其上的拓扑由半范数族 $\{p_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 生成, 那么

(1) X 是 *Hausdorff* 的当且仅当对任意 $x \neq 0$ 存在 $\alpha \in A$ 使得 $p_\alpha(x) \neq 0$.

(2) 假设 X 是 *Hausdorff* 的且 A 是至多可数集, 那么 X 可被一个平移不变度量度量化.

证明.

(1)

(2)

□

Chapter 2

赋范线性空间

1 半范数

定义 1.1. 设 X 是线性空间, 若 $p\colon X \to \mathbb{R}$ 满足

(1) $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$

(2) $p(\alpha x) = \|\alpha\| p(x)$

则称 p 是 X 上的半范数.

容易看出

$$p(0) = \|0\| p(0) = 0, \quad p(0) \leqslant p(x) + p(-x) = 2p(x) \Longrightarrow p(x) \geqslant 0.$$

2 压缩映射原理

定义 2.1. 设 (X,ρ) 是度量空间,$T:X\to X$. 若存在 $\lambda\in(0,1)$ 使得

$$\rho(Tx,Ty)\leqslant \alpha\rho(x,y)$$

对任意 $x,y\in X$ 成立, 则称 T 是 X 上的压缩映射.

例 2.2. 考虑积分方程

$$x(t)-\lambda\int_0^1 \mathrm{e}^{t-s}x(s)\mathrm{d}s=y(t),$$

其中 $y(t)\in C[0,1]$ 为一给定函数,λ 为常数,$|\lambda|<1$. 求证存在唯一解 $x(t)\in C[0,1]$.

3 完备化

4 列紧集

- 紧 $\overset{Hausdorff}{\Longrightarrow}$ 闭
- 紧 $\overset{\text{度量空间}}{\Longrightarrow}$ 有界
- 列紧 $\overset{\text{度量空间}}{\Longrightarrow}$ 有界
- 自列紧 $\overset{A1+Hausdorff}{\Longrightarrow}$ 闭
- 自列紧 $\overset{\text{度量空间}}{\Longrightarrow}$ 有界
- 列紧集的子集是列紧的.
- 列紧 $\overset{\text{度量空间}}{\Longrightarrow}$ 完全有界
- 完全有界 $\overset{\text{完备度量空间}}{\Longrightarrow}$ 列紧

5 线性赋范空间

- 关于不是所有 Abel 群都能够成为线性空间的评述可以参看与 wzd 的聊天记录
- 虽然但是, 线性结构与拓扑结构的第一步结合实际上是拓扑向量空间, 线性结构与度量结构的结合才是赋范线性空间.
- 线性流形：线性子空间的平移

我们引进过一个空间 X 的线性结构, 也引进过它的度量结构, 现在要把两者结合起来, 即是要求

$$\rho(x+z, y+z) = \rho(x, y)$$

命题 5.1. *ρ 满足平移不变性当且仅当 ρ 对加法连续.*

定义 5.2. *设 $P : X \to \mathbb{R}$ 是线性空间 X 上的一个函数, 若它满足*

(1) $P(x+y) \leqslant P(x) + P(y)$

(2) $P(\lambda x) = \lambda P(x)$

注记. *对于次线性泛函我的评述是：对于一般的线性空间就可以定义次线性泛函, 但如果还是赋范线性空间那么结果会更加丰富*

5.1 最佳逼近问题

定理 5.3. *设 X 是赋范线性空间,$M \subset X$ 是闭子空间, 则下列命题等价：*

(1) *存在有界线性算子 $P : X \to M$ 使得 $P\big|_M = Id_M$.*

(2) *存在 $L \subset X$ 是闭子空间使得 $X = M \oplus L$.*

(3) *对任意 x*

设 X 是赋范线性空间,X_0 是 X 的子空间. 任给 $y \in X$, 量

$$d := \inf_{x \in X_0} \|y - x\|$$

总是有意义的. 并且, 我们总能找到一列点 $\{x_n\} \subset X_0$, 使得 $\{\|y - x_n\|\}$ 趋近于 d.

我们还知道,$\{x_n\}$ 是有界集. 假如存在某种列紧性, 我们就能取出一个收敛子列, 可猜测序列极限便是 y 在 X_0 中的最佳逼近元.

问题：给定赋范线性空间 X, 并给定 X 中的有限多个向量 $e_1, \cdots, e_n$. 对于给定的向量 $x \in X$, 求一组数 $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, 使得

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \right\| = \min \left\| x - \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \right\|.$$

引理 5.4. *设 X 是一个赋范线性空间,X_0 是 X 的真闭子空间, 那么对 $\forall\ \varepsilon \in (0,1)$, 存在 $\|y\| = 1$, 并且*

$$\|y - x\| \geqslant 1 - \varepsilon.$$

5.2 有限维赋范线性空间的刻画

定理 5.5. 设 X 是赋范线性空间,X_0 是 X 的一个真闭子空间, 那么对任意 $0<\varepsilon<1$, 存在 $y\in X$, 使得 $\|y\|=1$, 并且

$$\|y-x\|\geqslant 1-\varepsilon,\quad \forall\, x\in X_0.$$

运用 F.Riesz 引理的要素察觉:

- A 是紧算子
- 由条件（一般是反证时假设的条件）构造出一串严格单增或严格单减的闭子空间
- 每个闭子空间都是 A 的不变子空间
- 特别地, 当 A 作用上去, 得到的是元素本身（常数倍也可以, 但需要系数的模长是下有界的）与相邻的维数较小的闭子空间中的某个元素之和.
- 由 F.Riesz 引理, 可以在第 n 个空间中选出一个单位向量 x_n, 使得它与相邻的维数较小的闭子空间的距离大于 α, 其中 α 是任意介于 0 和 1 之间的常数.
- 考虑 $\{Ax_n\}$, 如果上上条是常数倍 λ_n, 那么需要考虑的是 $\{Ax'_n\}$, 其中 $x'_n=\dfrac{x_n}{\lambda_n}$. 系数模长下有界的要求正是为了保证 x'_n 是有界的.
- 因为 A 是紧算子, 所以 $\{Ax_n\}$ 有收敛子列.
- 但另一方面, 由我们的构造任意 Ax_n 与 Ax_{n+p} 的距离都大于 α, 矛盾.

5.3 商空间

定义 5.6. 设 X 是赋范线性空间,Y 是它的闭子空间. 定义函数 $\|\cdot\|_0: X/Y\to\mathbb{R}$ 为

$$\|[x]\|=d(x,Y)=\inf_{y\in Y}\|x-y\|=\inf_{z\in[x]}\|z\|,$$

其中 $d(x,Y)$ 是 x 到 Y 的距离. 那么

(a) $\|\cdot\|$ 是商空间 X/Y 上的范数.

()

定理 5.7. 设 $T: X\to Y$ 是有界线性算子. 定义

$$\tilde{T}:\tilde{X}=X/N(T)\to Y,[x]\mapsto T(x).$$

则 $\|\tilde{T}\|=\|T\|$.

证明. $\|\tilde{T}\|=\sup\limits_{\|[x]\|\leqslant 1}\|\tilde{T}([x])\|=\sup\limits_{\|[x]\|\leqslant 1}\|Tx\|$.

$\|Tx\|=\|Tz\|\leqslant\|T\|\|z\|,\forall z\in[x]\Longrightarrow\|Tx\|\leqslant\|T\|\inf\limits_{z\in[x]}\|z\|=\|T\|\|[x]\|$.

$\|\tilde{T}\|=\|T\|$. □

半范数

定义 5.8. 设 X 是一个向量空间, 称 $p\colon X\to\mathbb{R}$ 是一个半范数, 如果

$$p(x+y)\leqslant p(x)+p(y),\forall\ x,y\in X,\quad p(\lambda x)=|\lambda|p(x),\forall\ \lambda\in\mathbb{R},\forall\ x\in X.$$

由半范数的定义, 我们可以直接得到

$$p(0)=p(0\cdot x)=0\cdot p(x)=0$$

和

$$p(0)=p(x+(-x))\leqslant p(x)+p(-x)=2p(x)\Longrightarrow p(x)\geqslant 0.$$

命题 5.9. 设 X 是一个向量空间, p 和 q 分别是 X 上的范数和半范数, 则 $p+q$ 是 X 上的范数.

这个命题的证明是显然的, 但我们仍然把它单独拎出来, 因为对于很多函数空间, 我们使用的范数都是以这种方式构造的.

例 5.10 (γ 阶 Hölder 半范)**.** 设 $U\subset\mathbb{R}^n$ 是开集, $u\colon U\to\mathbb{R}$, 定义

$$[u]_{C^{0,\gamma}(U)}=\sup_{\substack{x,y\in U\\ x\neq y}}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\gamma}.$$

再定义

$$C^{0,\gamma}(U)=\left\{u\colon U\to\mathbb{R}\mid [u]_{C^{0,\gamma}(U)}<\infty\right\}.$$

证明 $C^{0,\gamma}(U)$ 是线性空间, $p\colon u\mapsto[u]_{C^{0,\gamma}(U)}$ 是其上的半范数.

证明.

- $$\frac{|u(x)+v(x)-u(y)-v(y)|}{|x-y|^\gamma}\leqslant\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\gamma}+\frac{|v(x)-v(y)|}{|x-y|^\gamma}.$$
- $$\frac{|\lambda u(x)-\lambda u(y)|}{|x-y|^\gamma}=\frac{|\lambda||u(x)-u(y)|}{|x-y|^\gamma}.$$

□

设 $u\in C^{0,\gamma}(U)$, 则存在常数 C 依赖于 u 使得

$$|u(x)-u(y)|\leqslant C|x-y|^\gamma,$$

这个条件显然蕴含 u 是连续函数, 因此 $C^{0,\gamma}(U)\subset C^0(U)$. 回忆 $C^0(U)$ 上我们有范数

$$[u]=\sup|u(x)|$$

这显然也是子空间 $C^{0,\gamma}(U)$ 上的范数. 我们定义 $C^{0,\gamma}(U)$ 上的范数

6 凸集与不动点

'

6.1 Minkowski 泛函

- 对于 $\mathbb{K}$-线性空间 X 及其包含原点的凸子集 C, 我们可以定义 Minkowski 泛函.
  - 注意即是针对 $\mathbb{C}$-线性空间, 考虑的也是实一维的直线.
  - $P(x)$ 取值于 $[0, +\infty]$
  - $P(x)$ 具有正齐次性
  - $P(x)$ 具有次可加性
- C 是吸收集 $\Longleftrightarrow P$ 取值于 $[0, +\infty)$
- C 对称或均衡 $\Longleftrightarrow P$ 具有齐次性
- 若 X 是 B^* 空间, 可以讨论 C 的闭性,0 是否为内点,C 的有界性.
  -
  - 0 为内点 $\Longrightarrow C$ 为吸收的 $\Longrightarrow P$ 取值于 $[0, +\infty)$
  - 0 为内点 $\Longrightarrow P$ 一致连续.
  - C 有界 $\Longrightarrow P$ 正定.

定义 6.1. 设 X 是线性空间,C 是 X 上含有 0 的凸子集, 在 X 上规定一个取值于 $[0, +\infty]$ 的函数

$$P(x) = \inf\left\{\lambda > 0 \middle| \frac{x}{\lambda} \in C\right\},$$

称为 C 的 *Minkowski* 泛函.

6.2 Schauder 不动点定理

7 内积空间

回去看第八次课

7.1 定义

7.2 内积与范数

内积 $\longrightarrow$ 范数

设 X 为内积空间, 定义

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}.$$

下验证 $\|\cdot\|$ 是 X 上范数:

范数 $\longrightarrow$ 内积

命题 7.1. 设 X 为赋范线性空间, 则其范数由内积诱导当且仅当

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right), \quad \forall\, x, y \in X.$$

证明. □

Chapter 3

线性算子

1 线性算子的概念

2 下有界算子

定义 2.1. 设 X, Y 是赋范线性空间. 称线性算子 $T : X \to Y$ 是下有界的, 如果存在 $\gamma > 0$ 使得

$$\|Tx\| \geqslant \gamma\|x\|, \quad \forall\, x \in X.$$

引理 2.2. $T : X \to Y$ 不是下有界的当且仅当存在一列单位长的向量 $\{x_n\} \subset X$ 使得 $\|Tx_n\| \to 0$.

在下个引理中我们罗列下有界算子的一些性质

引理 2.3. 设 X, Y 是赋范线性空间,$T \in L(X, Y)$ 是下有界算子, 那么

(1) T 是单射.

(2) 下有界算子全体是 $L(X, Y)$ 中的开集.

Banach 空间之间的下有界算子可以被如下刻画：

定理 2.4. *Banach* 空间之间的有界线性算子 $T : X \to Y$ 是下有界的当且仅当它是单射且有闭值域.

定义 2.5. *Banach* 空间的同构

有趣的是存在两个复 Banach 空间, 它们作为实 Banach 空间实同构的, 但作为复 Banach 空间不是同构的.

3 Riesz-Fréchet 表示定理及其应用

为什么线性函数可以用与某元素的内积表示？因为线性函数是由被作用的元素在某一方向上的分量来决定的, 而分量是可以通过求内积取出来的.

4 纲与开映像定理

定义 4.1. *设 X 是拓扑空间, 称 $A \subset X$ 是无处稠密集, 如果 $\overline{A}$ 无内点.*

- 另一个常用的概念是无内点闭集.
- 无处稠密集总是含在一个无内点闭集中, 即它的闭包.
- 无内点闭集是无处稠密集, 无处稠密集是无内点集.
- Baire 空间的一条等价刻画是：可列个无内点闭集/无处稠密集的并是无内点集.
- 有例子说明, 不能再将结果进一步强化为无处稠密集.

定义 4.2. *称拓扑空间 X 为 Baire 空间如果它满足下列等价叙述中的一条：*

(1) *X 的非空开子集是第二纲集；*

(2) *X 的剩余集稠密*

(3) *可数个无内点闭集的并无内点*

(4) *可数个稠密开集的交稠密*

(5)

(6)

直觉上,Baire 空间具有以下性质

(1)“大”集合的可数交还是“大”集合

(2)“小”集合的可数并还是“小”集合

(3)“大”集合不能够被写为“小”集合的可数并

(4) 全空间是“大”集合.

小集合有时指无内点闭集, 有时指无处稠密集, 我想这并没有很大的区别。

我们称无处稠密集的可数并为第一纲集。

定理 4.3 (Baire)**.** *完备度量空间是 Baire 空间.*

证明. 我们证明可数个稠密开集的交是稠密的.

设 $\{U_n\}$ 是一族稠密开集,$U = \cap U_n$.

任给 $x \in X$ 和 $\varepsilon > 0$, 我们要找 $y \in U$ 使得 $y \in B(x,\varepsilon) \cap U$.

因为 U_1 是稠密的, 所以存在 $y_1 \in U_1$ 使得 $y_1 \in B(x,\varepsilon) \cap U_1$.

因为 $B(x,\varepsilon) \cap U_1$ 是开集, 所以存在 $0 < \varepsilon_1 < \dfrac{1}{2}$ 使得 $\overline{B(y_1,\varepsilon_1)} \subset B(x,\varepsilon) \cap U_1$.

因为 U_2 是稠密的, 所以存在 $y_2 \in U_2$ 使得 $y_2 \in B(y_1,\varepsilon_1) \cap U_2$.

因为 $B(y_1,\varepsilon_1) \cap U_2$ 是开集, 所以存在 $0 < \varepsilon_2 < \dfrac{1}{2^2}$ 使得 $\overline{B(y_2,\varepsilon_2)} \subset B(y_1,\varepsilon_1) \cap U_2$.

如此做下去, 可取出一列 $\{y_n\}$ 和 $\{\varepsilon_n\}$ 满足

$$B(x,\varepsilon) \supset \overline{B(y_1,\varepsilon_1)} \supset \overline{B(y_2,\varepsilon_2)} \supset \cdots, \quad \overline{B(y_n,\varepsilon_n)} \subset U_n.$$

由完备度量空间的闭集套定理, 存在 $y \in \cap \overline{B(y_n,x_n)} \subset B(x,\varepsilon) \cap U$. $\square$

例 4.4. $\mathbb{R}$ 不可数.

证明. 赋予 $\mathbb{R}$ 标准度量, 则 $\mathbb{R}$ 是完备度量空间.

假如 $\mathbb{R}$ 可数, 则 $\mathbb{R}$ 能被表示为可数个单点集的并, 这与 Baire 定理矛盾. □

定理 4.5. *设 X, Y 是 Banach 空间, 若 $T \in L(X,Y)$ 是满射, 则 T 是开映射.*

证明.

(1) 由 T 的线性,T 为开映射当且仅当存在 $\delta > 0$ 使得

$$B_Y(0,\delta) \subset T(B_X(0,1)).$$

(2) 因为 T 是满射, 所以

$$Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} T(B_X(0,n)).$$

由 Baire 纲定理,Y 作为一个有内点的集合, 不可能是可列个无处稠密集的并.

因此存在 N 使得 $\overline{T(B_X(0,N))}$ 有内点, 即存在 y_0 和 r 使得 $B_Y(y_0,r) \subset \overline{T(B_X(0,N))}$.

注意到 $\overline{T(B_X(0,N))}$ 是一个对称凸集, 因此 $B_Y(-y_0,r) \subset \overline{T(B_X(0,N))}$, 从而

$$B_Y(0,r) \subset \frac{1}{2}B_Y(y_0,r) + \frac{1}{2}B_Y(-y_0,r) \subset \overline{T(B_X(0,N))}.$$

□

4.1 Lax-Milgram 定理

定理 4.6. 设 H 是一个 Hilbert 空间, 设

$$B\colon H\times H\longrightarrow\mathbb{R}$$

是一个双线性映射满足存在常数 $\alpha,\beta>0$ 使得

$$|B[u,v]|\leqslant\alpha\|u\|\|v\|,\quad \beta\|u\|^2\leqslant B[u,u].$$

设 $f\colon H\to\mathbb{R}$ 是 H 上的有界线性泛函, 那么存在唯一的 $u\in H$ 使得

$$B[u,v]=\langle f,v\rangle.$$

证明. 在 B 就是 H 上的内积的时候, Lax-Milgram 定理其实就是 Riesz 表示定理, 即使 B 不是内积, 在条件 $|B[u,v]|\leqslant\alpha\|u\|\|v\|$ 的保证下, 取定 $u\in H$, 映射

$$v\longmapsto B[u,v]$$

也确定了 H 上的一个有界线性泛函. Lax-Milgram 定理就是要保证 H 上的有界线性泛函都可以通过这种方式得到. 由 Riesz 表示定理我们知道对于取定的这个 $u\in H$ 存在唯一的 $w\in H$ 使得

$$B[u,v]=(w,v),\quad \forall v\in H$$

这样就定义了一个映射 $Au=w$, Lax-Milgram 定理就是要证明 $A\colon H\to H$ 是满射.

A 的线性性显然, 下证 A 是有界线性算子

$$\|Au\|^2=(Au,Au)=B[u,Au]\leqslant\alpha\|u\|\|Au\|\Longrightarrow\|Au\|\leqslant\alpha\|u\|$$

下证 A 是单射且 $R(A)$ 是 H 中的闭集,

$$\beta\|u\|^2\leqslant B[u,u]=(Au,u)\leqslant\|Au\|\|u\|\Longrightarrow\beta\|u\|\leqslant\|Au\|.$$

□

5 Hahn-Banach 定理

6 共轭空间 · 弱收敛 · 自反空间

- 赋范线性空间就可以讨论共轭空间, 共轭空间是其上连续线性泛函的全体.
- 例子
  - L^p 的共轭空间是 L^q, 其中 $p \in (1, +\infty)$
  - L^1 的共轭空间是 L^∞
  - L^∞ 的共轭空间不是 L^1
  - $C[0,1]$ 的共轭空间是 $BV[0,1]$

6.1 共轭空间的表示

定义 6.1. *设 X 是赋范线性空间,X 上的连续线性泛函全体按范数*

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |f(x)|$$

构成一个 Banach 空间, 称为 X 的共轭空间.

例 6.2. *$L^p[0,1]$ 的共轭空间, 其中 $1 \leqslant p < \infty$.*

解. 设 q 是 p 的共轭指数, 即

$$\begin{cases} \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1, & p > 1, \\ q = \infty, & p = 1. \end{cases}$$

我们将证:

$$L^p[0,1]^* = L^q[0,1].$$

□

例 6.3. *求证: $(l^p)^* = l^q$.*

证明.

(1) 定义

$$\varphi : l^q \longrightarrow (l^p)^*, \{\eta\} \longmapsto f := \varphi(\{\eta\}) : l^p \to \mathbb{K}, \{x\} \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} x_k \eta_k.$$

- $f \in (l^p)^*$.

(2) φ 是满射

(3) φ 是等距

□

6.2 二次共轭空间

定义 6.4. 设 X 是赋范线性空间, 定义赋值映射

$$\begin{aligned} J: X &\longrightarrow X^{**} \\ x &\longmapsto J(x): f \mapsto f(x). \end{aligned}$$

- $J(x) \in X^{**}$.
  - $J(x)(f_1+f_2) = (f_1+f_2)(x) = f_1(x)+f_2(x) = J(x)(f_1)+J(x)(f_2)$.
  - $|J(x)(f)| = |f(x)| \leqslant \|f\|\|x\| \Longrightarrow \|J(x)\| \leqslant \|x\|$.
- J 是线性的.
  - $J(x_1+x_2)(f) = f(x_1+x_2) = f(x_1)+f(x_2) = J(x_1)(f)+J(x_2)(f)$.
  - $J(\lambda x)(f) = f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda J(x)(f)$.
- J 是有界的.$\|J(x)\| \leqslant \|x\| \Longrightarrow \|J\| \leqslant 1$.
- J 是等距嵌入. 要证 $\|J(x)\| = \|x\|$, 即对任意 $x \neq 0$, 要找到一 $f \in X^*$, 使得
$$\frac{|J(x)(f)|}{\|f\|} = \frac{|f(x)|}{\|f\|} = \|x\|,$$
  而这是由 Hahn-Banach 定理保证的.

定义 6.5. 如果 J 是满射, 则称 X 是自反的.

例 6.6.

- 显然,X 是自反空间的必要条件是 X 是 *Banach* 空间.
- *Hilbert* 空间是自反空间.
- $\forall\ p \in (1,+\infty)$,$L^p(\Omega, B, \mu)$ 是自反空间.

6.3 共轭算子

定义 6.7. 设 X, Y 是赋范线性空间,$T \in \mathscr{L}(X,Y)$. 定义 T 的共轭算子

$$\begin{aligned} T^*: Y^* &\longrightarrow X^* \\ f &\longmapsto f \circ T. \end{aligned}$$

- $T^* f \in X^*$.
  - $T^* f$ 是线性的, 这是由 T 的线性和 f 的线性保证的.
  - $T^* f$ 是连续的, 这是由 T 的连续性和 f 的连续性保证的.
- T^* 是线性的, 这是由 Y^* 的线性结构的定义保证的.

- T^* 是有界的, 不仅如此,

$$\begin{aligned}\|T^*\| &= \sup_{\|f\|\leqslant 1} \|T^* f\| \\ &= \sup_{\|f\|\leqslant 1} \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|T^* f(x)\| \\ &= \sup_{\|f\|\leqslant 1} \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|f(Tx)\| \\ &= \sup_{\|x\|\leqslant 1} \sup_{\|f\|\leqslant 1} \|f(Tx)\| \\ &= \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|Tx\| = \|T\|\end{aligned}$$

- $* : \mathscr{L}(X,Y) \to \mathscr{L}(Y^*,X^*), T \mapsto T^*$ 是线性的, 这是由 f 的线性保证的.

  从而 $*$ 是 $\mathscr{L}(X,Y)$ 到 $\mathscr{L}(Y^*,X^*)$ 的线性等距嵌入.

命题 6.8. 设 X 是 *Banach* 空间,$T \in L(X)$. 如果 T^* 是可逆的, 那么 T 也是可逆的.

证明.

- $R(T)$ 是闭集. 设 S 是 T^* 的逆. 设 $\{Tx_n\}$ 是 Cauchy 列, 那么

$$\begin{aligned}\|x_n - x_m\| &= \sup\{|f(x_n - x_m)| : f \in X^*, \|f\| = 1\} \\ &= \sup\{|T^* S f(x_n - x_m)| : f \in X^*, \|f\| = 1\} \\ &= \sup\{|(Sf)(Tx_n - Tx_m)| : f \in X^*, \|f\| = 1\} \\ &\leqslant \|Tx_n - Tx_m\| \sup\{\|Sf\| : f \in X^*, \|f\| = 1\} \\ &= \|S\|\|Tx_n - Tx_m\|.\end{aligned}$$

  所以 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列, 存在极限 $x \in X$. 由 T 连续,$Tx = \lim_{n\to\infty} Tx_n$, 所以 $R(T)$ 是闭的.

- T 是单射. 事实上, 如果 $Tx = 0$, 那么对任意 $f \in X^*$, 存在 $g \in Y^*$ 使得 $f = T^* g$. 那么

$$f(x) = T^* g(x) = g(Tx) = g(0) = 0.$$

  所以对任意 $f \in X^*$ 有 $f(x) = 0$. 由 Hahn-Banach 定理,$x = 0$.

- T 是满射. 事实上, 如果存在 $y \in X \backslash R(T)$, 由 Hahn-Banach 定理, 存在 $g \in X^*$ 满足 $g(y) = 1$ 且 $g(Tx) = 0$ 对任意 $x \in X$ 成立. 但这意味着 $T^* g(x) = g(Tx) = 0$ 对任意 $x \in X$ 成立, 即 $T^* g = 0$. 因为 T^* 是单射, 所以 $g = 0$, 矛盾.

□

例 6.9. 设 X 是 *Hilbert* 空间,$T \in B(X)$.

- 一方面, 对于固定的 $y \in X$,$x \mapsto (Tx, y)$ 是有界线性函数, 由 *Riesz* 表示定理, 存在 $z_y \in X$ 使得 $(Tx, y) = (x, z_y)$ 对任意 $x \in X$ 成立. 因此可定义 $\tilde{T} : y \mapsto z_y$.

- 另一方面, 考虑 T 的共轭算子 T^*, 对任意 $f \in X^*$,$T^*(f)(x) = f(T(x))$.

$$(x, T^* y_f) = (Tx, y_f)$$

例 6.10. 设 $(\Omega, \mathscr{B}, \mu)$ 是一个测度空间,$K(x,y)$ 是 $\Omega \times \Omega$ 上的平方可积函数. 定义算子

$$\begin{aligned} T_K : L^2(\Omega,\mu) &\longrightarrow L^2(\Omega,\mu) \\ u &\longmapsto (T_K u)(x) = \int_\Omega K(x,y)u(y)\mathrm{d}\mu(y) \end{aligned}$$

- $(T_K u)(x) \in L^2(\Omega,\mu)$
- $T_K \in \mathscr{L}(L^2(\Omega,\mu))$

$$\begin{aligned} \|T_k u\|_{L^2}^2 &= \int_\Omega \left| \int_\Omega K(x,y)u(y)\mathrm{d}\mu(y) \right|^2 \mathrm{d}\mu(x) \\ &\overset{Cauchy-Schwarz}{\leqslant} \int_\Omega \left(\int_\Omega |K(x,y)|^2 \mathrm{d}\mu(y) \right) \left(\int_\Omega |u(y)|^2 \mathrm{d}\mu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) \\ &= \|u\|_{L^2}^2 \int_\Omega \left(\int_\Omega |K(x,y)|^2 \mathrm{d}\mu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) \\ &\xlongequal{Fubini?} \|u\|_{L^2}^2 \int_{\Omega\times\Omega} |K(x,y)|^2 \mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\mu(y) \\ &= \|u\|_{L^2}^2 \|K\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

6.4 弱收敛及 $*$ 弱收敛

定义 6.11. 设 X 是一个赋范线性空间, $x_n, x \in X$, 如果

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x) \quad \forall f \in X^*,$$

则称 $\{x_n\}$ 弱收敛到 $x \in X$, 记作 $x_n \rightharpoonup x$, 称 x 为 $\{x_n\}$ 的弱极限.

命题 6.12. 如果 $\{x_n\}$ 的弱极限存在, 则是唯一的.

证明.

$$f(x) = f(x'), \quad \forall f \in X^* \xRightarrow{\text{Hahn-Banach}} x = x'.$$

□

命题 6.13. 如果 $\{x_n\}$ 的强极限存在, 则该强极限也是弱极限.

证明.

$$|f(x_n) - f(x)| \leqslant \|f\| \|x_n - x\| \to 0.$$

□

弱收敛与按范数收敛的关系

例 6.14.

因为 X^* 也是一个赋范线性空间, 自然也可以讨论 X^* 上的弱收敛, 但这要涉及到 X^{**}, 为了避免这一点

定义 6.15. $*$ 弱收敛

定理 6.16 (Eberlein-Smulian)**.** 自反空间中的单位（闭）球为弱（自）列紧的.

例 6.17. $X = L^2[0,1]$,$D = \left\{f \in L^2[0,1] : \|f\|_{L^2} \leqslant 1\right\}$, 则 D 是弱自列紧的.

证明. □

定理 6.18 (Banach)**.** 设 X 是赋范线性空间. 若 X^* 是可分的, 那么 X 也是可分的.

证明.

- 考察

□

定理 6.19 (Pettis)**.** 自反空间的闭子空间仍为自反空间.

证明. 设 X_0 是 X 的闭子空间,$\iota : X_0 \hookrightarrow X$ 是嵌入映射.

我们有 $\iota^{**} : X_0^{**} \hookrightarrow X^{**}$. 任取 x^{**} □

7 线性算子的谱

7.1 定义

- 理论上的讨论我们先只考虑复空间, 我不知道实空间行不行
- 我们先只考虑 Banach 空间, 虽然我还没想清楚哪里用到了

定义 7.1. *稠定线性算子.*

定义 7.2. *设 X 是 $\mathbb{C}$-Banach 空间,$T : D(T) \to X$ 是线性算子. 对任意 $\lambda \in \mathbb{C}$, 令*

$$T_\lambda = T - \lambda I.$$

- *称 λ 为正则值如果*

  (1) *T_λ 是单射, 进而 T_λ 在它的像集的余限制有逆算子 $R(\lambda, T)$*

  (2) *$R(\lambda, T)$ 是稠定的, 即 T_λ 的值域在 X 中稠密.*

  (3) *$R(\lambda, T)$ 是有界线性算子.*

- *称 λ 为点谱如果 T_λ 不满足 (1).*
- *称 λ 为剩余谱如果 T_λ 满足 (1) 但不满足 (2).*
- *称 λ 为连续谱如果 T_λ 满足 (1)(2) 但不满足 (3).*

命题 7.3. *其他条件同上, 附加 T 是闭算子, 则 λ 为正则值当且仅当 T_λ 是双射.*

定义 7.4. *$r_\sigma(T) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}$.*

7.2 预解式与谱集的基本性质

引理 7.5. *设 X 是赋范线性空间,$T \in L(X)$. 若 Neumann 级数*

$$\sum_{k=0}^{\infty} T^k$$

按算子范数收敛, 那么 $I - T$ 可逆并且

$$(I - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k.$$

使得上述引理成立的一个充分条件是 X 是 Banach 空间,$\|T\| < 1$.
由上述引理立得以下两个命题

命题 7.6. *设 X 是 $\mathbb{C}$-Banach 空间,$T \in L(X)$, 则 $\sigma(T)$ 是有界集.*

证明. 设 $|\lambda| > \|T\|$, 即 $\|\lambda^{-1}T\| < 1$.
$\lambda I - T = \lambda(I - \lambda^{-1}T)$, 由引理 $I - \lambda^{-1}T$ 可逆, 则 $\lambda I - T$ 也可逆, 即 $\lambda \in \rho(T)$.
从而 $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > \|T\|\} \subset \rho(T)$, 即 $\sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leqslant \|T\|\}$. □

推论 7.7. $r_\sigma(A) \leqslant \|A\|$.

命题 7.8. 设 X 是 $\mathbb{C}$-*Banach* 空间,$T \in L(X)$, 则 $\rho(T)$ 是开集.

证明. 任取 $\lambda_0 \in \rho(T)$, 要找 $\delta > 0$ 使得 $B(\lambda_0, \delta) \subset \rho(T)$.

$\lambda I - T = (\lambda - \lambda_0)I + \lambda_0 I - T = (\lambda_0 I - T)(I + (\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 I - T)^{-1})$.

则 $\lambda I - T$ 是双射等价于 $I + (\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 I - T)^{-1}$ 是双射, 由引理这只需 $|\lambda - \lambda_0|$ 足够小. □

知道了 $\rho(T)$ 是 $\mathbb{C}$ 的非空开子集后, 我们定义预解式

定义 7.9.

$$R : \rho(T) \longrightarrow L(X), \quad \lambda \longmapsto (\lambda I - T)^{-1}.$$

定义 7.10. 可微与解析.

命题 7.11. R 在 $\rho(T)$ 上解析.

证明. $\lambda I - T = (\lambda_0 I - T)(I + (\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 I - T)^{-1}) = (\lambda_0 I - T)(I + (\lambda - \lambda_0)R(\lambda_0))$.

$R(\lambda) = (I + (\lambda - \lambda_0)R(\lambda_0))^{-1}R(\lambda_0)$.

记 $S_\lambda = (\lambda_0 - \lambda)R(\lambda_0)$, 当 $|\lambda - \lambda_0|$ 足够小时,

$$R(\lambda) = (I + S_\lambda + S_\lambda^2 + \cdots)R(\lambda_0) = R(\lambda_0) + S_\lambda R(\lambda_0) + S_\lambda^2 R(\lambda_0) + \cdots.$$

$$R(\lambda) - R(\lambda_0) = S_\lambda R(\lambda_0) + S_\lambda^2 R(\lambda_0) + \cdots.$$

$$\frac{R(\lambda) - R(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} = -R(\lambda_0)^2 + (\lambda - \lambda_0)(\cdots)$$

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{R(\lambda) - R(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} = -R(\lambda_0)^2.$$

□

命题 7.12. 设 X 是 $\mathbb{C}$-*Banach* 空间,$T \in L(X)$, 则 $\sigma(T)$ 非空.

证明. 设 $\sigma(T) = \varnothing$, 则 $\rho(T) = \mathbb{C}$.

任取 $f \in L(X)^*$ 满足 $f(I) = 1$, 有 $F := f \circ R : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 是解析函数.

当 $|\lambda| > \|T\|$ 时,

$$R(\lambda) = (\lambda I - T)^{-1} = \lambda^{-1}(I + \frac{T}{\lambda} + \frac{T^2}{\lambda^2} + \cdots)$$

$$f \circ R(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\left(1 + \frac{f(T)}{\lambda} + \frac{f(T^2)}{\lambda^2} + \cdots\right)$$

由 Liouville 定理, 恒为常数, 矛盾! □

命题 7.13. 设 p 是多项式. 那么

- $\sigma(p(T)) = p(\sigma(T))$
- 如果 T 可逆, 那么 $\sigma(T^{-1}) = (\sigma(T))^{-1}$
-

7.3 Gelfand 公式

引理 7.14. 设 $a_n \in [-\infty, +\infty)$, 且 $a_{n+m} \leqslant a_n + a_m$, 则

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} = \inf_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{n}.$$

证明. 显然有

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} \geqslant \inf_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{n},$$

只需证

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} \leqslant \inf_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{n},$$

这等价于

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} \leqslant \frac{a_m}{m}, \quad \forall m \geqslant 1.$$

固定 $m \in \mathbb{N}$, 对任意 $n \in \mathbb{N}$, 存在 l_n 和 r_n 使得 $n = l_n m + r_n$, 其中 $l_n \in \mathbb{N}, r_n \in \{0, 1, \cdots, m-1\}$.

$$a_n = a_{l_n m + r_n} \leqslant l_n a_m + a_{r_n}$$

$$\frac{a_n}{n} \leqslant \frac{l_n m}{n} \frac{a_m}{m} + \frac{a_{r_n}}{n}$$

左右两边取上极限得证. □

定理 7.15. 设 X 是 *Banach* 空间,$T \in L(X)$, 则 $\sigma(T) = \sigma(T^*)$.

证明. 显然. □

定理 7.16. $r_\sigma(T) = \lim_{n\to+\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$.

证明. □

7.4 例子

例 7.17. 设 $X = C([0,1])$,

$$T\colon X \longrightarrow X, \quad u(y) \longmapsto yu(y).$$

解.

- 点谱.$(\lambda I - T)u = 0 \Longleftrightarrow (\lambda - x)u(x) \equiv 0 \Longleftrightarrow u(x) \equiv 0$

  $\sigma_p(T) = \varnothing$.

□

例 7.18. 设 H 是 *Hilbert* 空间, 称 $U \in L(H)$ 是紧算子, 如果

(1) $(Ux, Uy) = (x, y), \forall x, y \in H$.

(2) $R(U) = H$.

Chapter 4

紧算子与 Fredholm 算子

1 紧算子

定义 1.1. 称 $T \in L(X,Y)$ 为紧算子, 如果 T 将有界集映为列紧集. 将紧算子全体记作 $\mathfrak{C}(X,Y)$.

1.1 基本性质

命题 1.2.

(1) $\mathfrak{C}(X,Y) \subset B(X,Y)$.

证明. 紧算子将有界集映为列紧集, 而度量空间中列紧集一定是有界集, 从而紧算子有界. □

(2) $\mathfrak{C}(X,Y)$ 是线性子空间.

证明. 设 $A \subset X$ 为有界集.

- 易见 $(\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2)(A) \subset \lambda_1 T_1(A) + \lambda_2 T_2(A)$.
- 后者是列紧的, 因为任何序列 $\{z_n\}$ 都可以被分解为 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 满足 $z_n = x_n + y_n$, 先找到 $\{x_n\}$ 的收敛子列, 再找 $\{y_n\}$ 对应子列的收敛子列, 就找到了 $\{z_n\}$ 的收敛子列.
- 而列紧集的子集是列紧的.

□

(3) $\mathfrak{C}(X,Y)$ 是闭的.

证明. □

(4)

命题 1.3. $T \in L(X,Y)$ 是紧算子当且仅当 T^* 是紧算子.

命题 1.4. $T \in \mathfrak{C}(X,Y)$, 其中 Y Banach 空间. 那么 $R(T)$ 闭当且仅当 $R(T)$ 有限维.

证明. 假设 $R(T)$ 闭, 考虑限制下来. 则 T 成为满射. 由开映像定理, 这玩意是开映射. 然后 Y 的原点有个邻域是紧集. 取有界集, 映成预紧集, 由开映象是邻域. □

1.2 全连续

与紧性概念密切相关的是全连续概念.

定义 1.5. 设 X,Y 是 Banach 空间, 称 $T \in B(X,Y)$ 是全连续的, 如果

$$x_n \rightharpoonup x \Longrightarrow Tx_n \to Tx.$$

命题 1.6. 设 $T \in B(X,Y)$, 则

(1) 若 $T \in \mathfrak{C}(X,Y)$, 则 T 是全连续的;

(2) 若 X 是自反的,T 是全连续的, 则 $T \in \mathfrak{C}(X,Y)$.

证明.

(1)
- $x_n \rightharpoonup x \Longrightarrow Tx_n \rightharpoonup Tx$.
- 由共鸣定理,x_n 有界. 由 T 是紧算子,Tx_n 列紧.
- $\{Tx_n\}$ 的每一个强收敛的子列, 它们也都是弱收敛的, 由弱收敛极限的唯一性,$\{Tx_n\}$ 的每一个强收敛的子列的极限都是 Tx.
- 假如 $\{Tx_n\}$ 不强收敛到 Tx, 那么可以取出一个子列与 Tx 的距离保持在 ε 外, 但由列紧性这个子列必有强收敛子列, 由上一条, 这个强收敛子列必须强收敛到 Tx, 矛盾.

(2)
- 因为 X 是自反的, 由 Eberlin-Smulian 定理, 有界列 $\{x_n\}$ 有弱收敛子列.
- 因为 T 是全连续的, 它将该弱收敛子列映为强收敛子列.

□

1.3 例子

积分算子

有限秩算子

定义 1.7. 有限秩算子

命题 1.8. $T \in Fd(X,Y) \Longleftrightarrow \exists y_1,\cdots,y_k \in Y, f_1,\cdots,f_k \in X^*$ 使得 $T = \sum y_i \otimes f_i$

证明. □

命题 1.9. $\overline{Fd(X,Y)} \subset \mathfrak{C}(X,Y)$.

证明. 设 $T \in L(X,Y)$ 且存在 $\{T_n\} \subset Fd(X,Y)$ 使得 $\|T_n - T\| \to 0$.

要证 $T \in \mathfrak{C}(X,Y)$, 等价于证 $T(B_X(0,1))$ 为列紧集, 由 Y 的完备性, 这又等价于证 $T(B_X(0,1))$ 完全有界, 等价于证对任意 $\varepsilon > 0$,$T(B_X(0,1))$ 存在有限的 ε 网. □

例 1.10.

1.4 Schauder 基

命题 1.11. 设 Y 为 *Hilbert* 空间,X 为 *Banach* 空间, 此时 $\overline{Fd(X,Y)} = \mathfrak{C}(X,Y)$.

证明. □

定义 1.12. 设 X 是 *Banach* 空间, 称序列 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 X 的一组 *Shauder* 基, 如果对任意 $x \in X$, 存在唯一的一个序列 $\{c_n(x)\}$, 使得

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x) e_n.$$

一个简单的观察是,$X = \overline{\operatorname{span}\{e_n\}_{n=1}^{\infty}}$, 因此如果 X 有 Schauder 基, 则 X 是可分的.

于是自然会问是否每个可分的 Banach 空间都具有 Schauder 基? 1973 年,Enflo 作出了否定的回答, 参看: https://sci-hub.se/10.1007/bf02392270. 不久,A.M.Davie 给出了一个较简单的证明, 参看https://sci-hub.se/10.1112/blms/5.3.261.

由于 $x \mapsto c_n(x)$ 的唯一性,c_n 是 X 上的线性函数. 事实上,

引理 1.13. c_n 是 X 上的有界线性泛函.

证明. 对于希尔伯特空间, 这是显然的. 因为此时我们有 Parsaval 恒等式,

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (c_n(x))^2 \|e_n\|^2.$$

对于 Banach 空间, 我们必须另谋出路.

令 $S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n(x) e_n$, 在 X 上引入另一个模 $\|x\|_1 := \sup_{N \in \mathbb{N}} \|S_N(x)\|$.

- 正定性

- 齐次性
- 三角不等式

易知有 $\square x\square \geqslant \|x\|$, 一旦 $\square \cdot \square$ 完备, 由于 $\square \cdot \square$ 比 $\|\cdot\|$ 强, 所以两范数等价.

从而存在 $C > 0$ 使得 $\square x\square \leqslant C\|x\|, \forall\, x \in X$.

所以 $\|c_N(x)e_N\| = \|S_N(x) - S_{N-1}(x)\| \leqslant 2C\|x\|$, 即

以下验证 $\square \cdot \square$ 完备.

- 取 $\{x_n\}$ 为 Cauchy 列.

  你想想它还能收敛到谁呢？肯定是收敛到各个分量的那个极限啊.

- 验证对任意 N,$\{C_N(x_n)\}$ 为 Cauchy 列, 令 $c_N = \lim\limits_{m\to\infty} c_N(y_m)$.

$\square$

2 Fredholm 理论

定理 2.1 (Fredholm 第一定理)**.** 设 X 是 *Banach* 空间,$A \in \mathfrak{C}(X)$, 那么

$$T = I - A \text{ 是单射} \Longleftrightarrow T \text{ 是满射}.$$

特别地, 由 *Banach* 定理, 成立时有 $T^{-1} \in L(X)$.

证明. □

定理 2.2 (Fredholm 第二定理)**.** $\dim N(T) = \dim N(T^*) < \infty$.

证明. □

3 Riesz-Schauder 定理

3.1 紧算子的谱

定理 3.1. 设 $A \in \mathfrak{C}(X)$, 则

(1) 当 $\dim X = +\infty$ 时,$0 \in \sigma(A)$.

(2) $\sigma(A) \setminus \{0\} \subset \sigma_p(A)$.

(3) $\sigma(A)$ 至多以 0 为聚点.

(4) $\sigma(A)$ 至多可数.

证明.

(1) 因为 A 是紧算子是有界算子进而是闭算子, 所以 $\lambda \in \rho(A)$ 当且仅当 $A - \lambda I$ 可逆.

假设 $0 \in \rho(A)$, 则 A 可逆, 则 $I = A \circ A^{-1}$ 作为紧算子与有界算子的复合是紧算子.

但这在 $\dim X = +\infty$ 时是不可能的.

(2) 首先解读一下这个式子, 它传达了：除了 0 可能是例外,A 的谱集中只有点谱, 而没有连续谱和剩余谱. 所以我们需要证明的是：除 0 以外, 要么是点谱要么是正则值.

下面开始证明：设 $\lambda \neq 0$, 此时 $\lambda I - A$ 的行为和 $I - \dfrac{A}{\lambda}$ 差不多, 因为 A 是紧算子, 所以我们可以用 Riesz-Fredholm 理论.

- 若 $I - \dfrac{A}{\lambda}$ 不是单射, 则 $\lambda \in \sigma_p(A)$.
- 若 $I - \dfrac{A}{\lambda}$ 是单射, 则是满射, 则 $\lambda \in \rho(A)$.

(3) 假设存在一列两两不同的 $\{\lambda_i\} \subset \sigma_p(A) \setminus \{0\}$ 使得 $\lambda_i \to \lambda \neq 0$.

由于 $\lambda_i \in \sigma_p(A)$, 存在 $x_i \in X$ 且 $\|x_i\| = 1$ 使得 $Ax_i = \lambda_i x_i$.

由于 λ_i 互不相同, 所以 $\{x_1, \cdots, x_k\}$ 线性无关.

令 $E_k = \operatorname{span}\{x_1, \cdots, x_k\}$.

(4) $\sigma(A) \setminus \{0\} \subset \bigcup\limits_n \left\{\lambda \in \sigma(A) : |\lambda| > \dfrac{1}{n}\right\} =: \bigcup\limits_n S_n$.

因为 $\sigma(A)$ 是有界的, 且 $\sigma(A)$ 不可能有除 0 以外的聚点, 所以对任意 n 集合 S_n 是有限集.

从而 $\sigma(A)$ 是至多可数的.

□

注记. $\sigma(A) = 0$ 推不出 $A = 0$, 这件事在有限维时我们就已经知道了.

3.2 不变子空间

定理 3.2. 设 X 是 $\mathbb{C}$-*Banach* 空间,$A \in \mathfrak{C}(X)$, 则存在 A 的非平凡闭不变子空间.

证明.

- 为什么强调 X 是复的, 实的不行吗？哪里用到了复？
- 不妨设 $\dim X = +\infty$, 有限维的时候非平凡闭不变子空间是什么？
- $\sigma(A) \setminus \{0\} = \sigma_p(A) \setminus \{0\}$.
  - 如果 $\sigma_p(A) \neq \varnothing$, 取 $\lambda \in \sigma_p(A)$, 存在 $x_\lambda \neq 0$ 满足 $Ax_\lambda = \lambda x_\lambda$. 令 $M = \operatorname{span} x_\lambda$.
- 如果 $\sigma_p(A) = \varnothing$, 则 $\sigma(A) = \{0\}$.

  下证 A 有非平凡的闭不变子空间.

  用反证法, 否则对任意 $y \in X$,$I_y = \overline{\{P(A)y\}} = X$.

$\square$

4 Hilbert-Schmidt 定理

命题 4.1. 设 X 是 Hilbert 空间,A 是 X 上的对称算子, 则

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)|.$$

证明.

- 对 $\|x\| = 1$,$|(Ax,x)| \leqslant \|Ax\|\|x\| \leqslant \|A\|\|x\|^2 = \|A\|$.
- 记 $c = \sup\limits_{\|x\|=1} |(Ax, x)|$.
  - $(A(x+y), x+y) = (Ax, x) + (Ax, y) + (Ay, x) + (Ay, y)$
  - $(A(x-y), x-y) = (Ax, x) - (Ax, y) - (Ay, x) + (Ay, y)$
  - $|(A(x+y), x+y)| = \|x+y\|^2 |(A(\frac{x+y}{\|x+y\|}), \frac{x+y}{\|x+y\|})| \leqslant c\|x+y\|^2$
  - $|(A(x-y), x-y)| = \|x-y\|^2 |(A(\frac{x-y}{\|x-y\|}), \frac{x-y}{\|x-y\|})| \leqslant c\|x-y\|^2$
  - 对于 $\forall\, x, y \in X$ 满足 $\|x\| = \|y\| = 1$,

$$\begin{aligned}
|(A(x+y), x+y) - (A(x-y), x-y)| &\leqslant |(A(x+y), x+y)| + |(A(x-y), x-y)| \\
&\leqslant c(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) \\
&= 2c(\|x\|^2 + \|y\|^2) = 4c \\
|(A(x+y), x+y) - (A(x-y), x-y)| &= 2(Ax, y) + 2(Ay, x) \\
&= 2(Ax, y) + 2(y, Ax) \\
&= 2(Ax, y) + 2\overline{(Ax, y)} \\
&= 4\Re(Ax, y)
\end{aligned}$$

□

问：上述命题中的 sup 是否为 max？

一般地, 我们总可以找到一列 $\{x_n\}$ 满足 $\|x_n\| = 1$ 使得 $|(Ax_n, x_n)| \to \|A\|$. 可按 (Ax_n, x_n) 的正负将 $\{x_n\}$ 分为两部分, 至少有一部分是包含无穷多项的子列, 将这串子列仍记为 $\{x_n\}$, 不妨设 $(Ax_n, x_n) \to \|A\|$, 否则以 $-A$ 替换 A 来讨论.

定理 4.2. 设 X 是 Hilbert 空间,A 是 X 上的对称紧算子, 则有至多可数个 λ_i（可以重复）, 它们是算子 A 的本征值, 并对应一组 e_i, 使得

$$x = \sum (x, e_i)e_i, \quad Ax = \sum \lambda_i (x, e_i) e_i.$$

证明.

- 因为 A 是紧算子, 由 Riesz-Schauder 定理,$\sigma(A)$ 是至多以 0 为聚点的至多可数集.
- 任取 $\lambda \in \sigma_p(A) \setminus \{0\}$, 由 Fredholm 第二定理,$m(\lambda) := \dim N(\lambda I - A) < +\infty$, 称为 λ 的重数. 设 $\left\{e_i^\lambda\right\}_{i=1}^{m(\lambda)}$ 是 $N(\lambda I - A)$ 的一组标准正交基.
- 此外, 如果 $0 \in \sigma_p(A)$, 则设 $N(A)$ 的标准正交基为 $\left\{e_i^0\right\}$, 它不一定是可数的.

□

定理 4.3. 设 X 是 *Hilbert* 空间,A 是 X 上的对称紧算子, 则

$$\lambda_n^+ = \inf_{E_{n-1}} \sup_{x \in E_{n-1}^\perp \setminus \{0\}} \frac{(Ax, x)}{(x, x)},$$

$$\lambda_n^- = \sup_{E_{n-1}} \inf_{x \in E_{n-1}^\perp \setminus \{0\}} \frac{(Ax, x)}{(x, x)},$$

其中 E_n 为 X 的 n 维子空间.

证明. 记 $\mu_n^+ = \inf\limits_{E_{n-1}} \sup\limits_{x \in E_{n-1}^\perp \setminus \{0\}} \dfrac{(Ax, x)}{(x, x)}$.

- 对任意的 E_{n-1}, 可找到 $x \in \operatorname{span}\left\{e_1^+, \cdots, e_n^+\right\}$ 使得 $x \in E_{n-1}^\perp \setminus \{0\}$. 那么

$$\frac{(Ax, x)}{(x, x)} = \frac{\sum_{i=1}^n |a_i^+|^2 \lambda_i^+}{\sum_{i=1}^n |a_i^+|^2} \geqslant \lambda_n^+ \Longrightarrow \mu_n^+ \geqslant \lambda_n^+.$$

- 取 $E_{n-1} = \operatorname{span}\left\{e_1^+, \cdots, e_{n-1}^+\right\}$.

$$\mu_n \leqslant \sup_{x \in E_{n-1}^\perp \setminus \{0\}} \frac{(Ax, x)}{(x, x)} \leqslant \sup \frac{\sum_{i \geqslant n} \lambda_i^+ |a_i^+|^2}{\sum_{i \geqslant n} |a_i^+|^2 + \sum_{i \geqslant 1} |a_i^-|^2 + \sum_\alpha |a_\alpha^0|^2} \leqslant \lambda_n^+.$$

□

定义 4.4. 正算子

命题 4.5. A 为正算子当且仅当 $\sigma_p(A) \subset [0, +\infty)$.

证明. □

Chapter 5

广义函数

1 动机

2 广义函数的概念

广义函数是定义在一类“性质很好”的函数空间上的连续线性泛函. 为此, 先引进这类“性质很好”的函数.

2.1 基本空间 $\mathscr{D}(\Omega)$

支集

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个开集,$u \in C(\overline{\Omega})$, 称集合

$$F = \{x \in \Omega \mid |u(x) \neq 0\}$$

关于 Ω 的闭包为 u 关于 Ω 的支集, 记作 $\operatorname{supp} u$. 换句话说, 连续函数 u 的支集是在此集外 u 恒为 0 的相对于 Ω 的最小闭集.

$C_0^\infty(\Omega)$

对于整数 $k \geqslant 0$,$C_0^k(\Omega)$ 表示支集在 Ω 内紧的全体 $C^k(\Omega)$ 函数所组成的集合, 于是

$$C_0^\infty(\Omega) \subset \cdots \subset C_0^{k+1}(\Omega) \subset C_0^k(\Omega) \subset \cdots \subset C_0^0(\Omega).$$

下例表明 $C_0^\infty(\Omega)$ 是非空的.

例 2.1.

定义 2.2. 在集合 $C_0^\infty(\Omega)$ 上定义收敛性如下: 我们说序列 $\{\varphi_j\}$ 收敛于 φ_0, 如果

(1) 存在一个相对于 Ω 的紧集 $K \subset \Omega$, 使得 $\operatorname{supp}(\varphi_j) \subset K$

(2) 对于任意指标 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ 都有 $\max\limits_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi_j(x) - \partial^\alpha \varphi_0(x)| \to 0$

带有上述收敛性的线性空间 $C_0^\infty(\Omega)$, 称为基本空间 $\mathscr{D}(\Omega)$.

2.2 广义函数的定义和基本性质

定义 2.3. 称 $\mathscr{D}(\Omega)$ 上的线性连续泛函为广义函数, 其中连续性是指

$$< f, \varphi_j > \longrightarrow < f, \varphi_0 >, \quad if \, \varphi_j \longrightarrow \varphi_0$$

将广义函数的全体记作 $\mathscr{D}'(\Omega)$.

例 2.4. δ-函数.

例 2.5. $j_\delta \longrightarrow$

2.3 广义函数的收敛性

Chapter 6

Banach 代数

1 代数准备知识

定义 1.1. A 称为复数域 $\mathbb{C}$ 上的一个代数, 如果

(1) A 是 $\mathbb{C}$ 上的一个线性空间

(2) A 上规定了乘法: $A \times A \to A$, 满足

2 谱

定义 2.1. 设 A 是 *Banach* 代数 U 中的元素, 定义了 A 的谱值是什么, 即没有双边逆. 但是它似乎没有区分什么连续谱什么剩余谱什么点谱之类.

附录 A

泛函分析中的反例

1 纲

- 第一纲集但不无处稠密：$\mathbb{Q}$.

2 映射

- 逆映射不连续

3

定理 3.1 (Riesz 表示定理).

Lax-Milgram 定理可看作将内积改为满足强制条件 $a(u,u) \geqslant \delta\|u\|^2$ 的连续共轭双线性泛函 $a(u,v)$ 的推广.

定理 3.2 (Lax-Milgram 定理).

附录 B

套路

1 有机会成为一组的东西

- 最佳逼近元
  - 设 X 是赋范线性空间,M 是 X 的有限维子空间, 那么对于任意 $x \in X$,x 到 M 的距离的最小值能取到.
  - 如果 M 仅仅是闭子空间, 那么虽然可以任意精度逼近, 但可能取不到.
- 对象分解
  - 设 X 是 Banach 空间（?）,$\dim X < +\infty$ 或 $\mathrm{codim} < +\infty$, 那么存在 L 使得 $X = M + L$.

2 那些要自己构造一个范数的证明

3

已知在像空间中,Tx_n 按范数收敛到 y.

- 任意 $g \in Y^*$,$g(Tx_n) \to g(y)$.
- $T^*g(x_n) \to g(y)$.
- 也就是说, 我知道了一部分 X^* 中的元素, 作用在 $\{x_n\}$ 上时, 的收敛性.

比较, 已知 x_n 弱收敛到 x,

- 我就知道了所有 X^* 中的元素, 作用在 $\{x_n\}$ 上时, 的收敛性.