

微分几何

孙天阳

中国科学技术大学数学科学学院

`tysun@mail.ustc.edu.cn`

2024 年 4 月 18 日

目录

目录	2
1 \mathbb{R}^3 中的曲线论	3
1 曲线的概念	3
2 平面曲线	5
3 E^3 的曲线	6
4 曲线论基本定理	7
2 曲面的局部理论	8
1 曲面的表示	8
2 法曲率	9
3 曲面的第一基本形式	10
4 曲面的第二基本形式	11
5 Weingarten 变换	12
6 主曲率与 Gauss 曲率	13
7 曲面的一些例子	14
7.1 直纹面	14
7.2 旋转曲面	14
7.3 全脐点曲面	14
8 习题 3	15
3 曲面论基本定理	16
1 活动标架	16
2 自然标架下的基本公式	17
3 曲面的存在唯一性定理	19
4 外微分形式	20
4.1 外代数	20
4.2 外微分形式	22
4.3 外微分	23
5 么正活动标架	25
6 曲面的结构方程 (么正)	27
6.1 title	27

目录	2
4 曲面的内蕴几何	30
1 曲面的等距对应	30
2 曲面的协变微分	31
3 测地曲率与测地线	32
4 测地坐标系	34
5 局部的 Gauss-Bonnet 公式	35
5.1 应用	36
6 曲面上的 Laplace 算子	37
I 整体微分几何选讲	38
5 平面曲线的整体性质	39
1 平面的闭曲线	39
2 平面的凸曲线	40
6 曲面的若干整体性质	41
1 曲面的整体描述	41
2 Gauss-Bonnet 公式	43
2.1 曲面的三角剖分	43
2.2 整体的 Gauss-Bonnet 公式	43
2.3 Gauss-Bonnet 定理的应用	43
3 紧致曲面的高斯映射	44
3.1 紧致曲面的绝对全曲率	44
3.2 空间曲线的全曲率	44
4 凸曲面	45
4.1 凸曲面	45
4.2 积分公式	45
4.3 球面的判断	45
4.4 卵形面的刚性定理	45
4.5 凸曲面的 Minkowski 问题	45
A 联络	46
1 矢量丛上的联络	46
B 一些总结	47
1	47
2 算子的局部性	48
3 我会算什么	49
C 活动标架法	50
D 复习课	51
1 title	51

Chapter 1

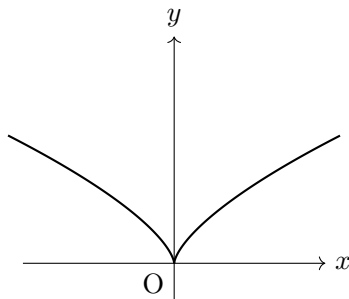
\mathbb{R}^3 中的曲线论

1 曲线的概念

或许你已经在数学分析中学过, 我们认为曲线是一个映射 $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$, 而不是映射的像集 $\gamma(I)$, 虽然后者更符合我们日常中提到曲线时的意思. 我们只研究光滑正则曲线,

定义 1.1. 称光滑曲线 $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是正则的, 如果对任意 $t \in I$ 有 $\gamma'(t) \neq 0$. 即 γ 是一个浸入.

正则性排除了两种情况, 第一种是 $\gamma(t) = (t^3, t^3)$, 本身是一条直线, 但选择了一个不好的参数化. 第二种是 $\gamma(t) = (t^3, t^2)$, 几何本身就有奇性, 不是找一个好的参数化能解决的.



考虑如下的交换图表, 其中 φ 和 ψ 是微分同胚,

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightleftharpoons[\psi]{\varphi} & I' \\ & \searrow \gamma & \swarrow \tilde{\gamma} \\ & \mathbb{R}^n & \end{array}$$

这其实定义了光滑曲线 $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ 之间的等价关系, 很多教材称之为重新参数化. 比如 $\gamma(t) = (t, t)$ 和 $\gamma(t) = (t^3, t^3)$ 虽然几何上决定相同的曲线, 但二者并不在同一个等价类里. 可以看到光滑正则曲线只会与光滑正则曲线等价.

在此简单谈谈切向量. 本讲义假定读者熟悉微分流形和黎曼几何的基本语言. 我们知道 \mathbb{R}^n 每点处的切空间典范同构于他自身, 这是上天的馈赠也是灾难. 许多初学者的混淆都来自于对二者的不区分. 我的观点是可以等同, 但必须清醒自己何时做了等同. 我们已经在数学分析中学了对光滑曲线 γ 求切向量的方式, 就是对每个分量求导, 也会计算切向量的长度; 但正确的概念其实是 γ_{*,t_0} 的像集是 $T_{\gamma(t_0)}\mathbb{R}^n$ 的一个一维子空间 (在 $\gamma_{*,t_0} \neq 0$ 时), 然后 $T_{\gamma(t_0)}\mathbb{R}^n$ 又等同于 \mathbb{R}^n , 所以我们才可以对 $\gamma'(t_0)$ 使用 \mathbb{R}^n 的基向量 e_1, e_2, e_3 , 我们才可以用计算 \mathbb{R}^n 中向量的长度的方式来计算 $\gamma'(t_0)$ 的长度.

定义 1.2. 设 $\gamma: I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是光滑曲线, 定义其长度 $L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$.

容易证明, 如果 γ 和 $\tilde{\gamma}$ 之间相差一个重新参数化, 则二者有相同的长度.

命题 1.3. 设 $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是光滑正则曲线, 则 $\varphi: I = [a, b] \rightarrow [0, L(\gamma)], t \mapsto L(\gamma|_{[a, t]})$ 是微分同胚.

证明.

$$\varphi(t) = \int_a^t \|\gamma'(s)\| ds, \quad \varphi'(t) = \|\gamma'(t)\| > 0.$$

□

于是对任何光滑正则曲线, 我们可以将其重新参数化为 $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi^{-1}: [0, L(\gamma)] \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$\tilde{\gamma}' = \gamma' \cdot (\varphi^{-1})' = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}.$$

我们称这个参数化为弧长参数化, 它的特点是切向量的长度恒为 1. 后面我们一律研究弧长参数化的光滑正则曲线.

古典微分几何的终极目标之一是给出 \mathbb{R}^3 中的曲线和曲面的完整刻画. 后面我们会学到, 曲线可以由它的曲率和挠率唯一决定, 而曲面可以由它的第一基本形式和第二基本形式唯一决定. 我们实现这一目标的手段是活动标架法. 我认为, 每个想搞懂活动标架法的人都该去读一下 Griffiths 在 1974 年发表在 Duke 上的文章《On Cartan's method of Lie groups and moving frames as applied to uniqueness and existence questions in differential geometry》

2 平面曲线

例 2.1. 曲率为常数的曲线:

(1) $k(s) = 0 \iff \mathbf{r}(s)$ 是直线;

(2) $k(s) = a \neq 0 \iff (r)(s)$ 是半径为 $\left|\frac{1}{a}\right|$ 的圆周。

Gauss 映射

例 2.2. 求平面曲线 $\mathbf{r}(t) = (t, \sin t)$ 的曲率。

注记. 解本题时需注意参数不一定是弧长参数, 但也不必先弧长参数化再做题, 利用复合函数求导的法则, 对弧长参数 s 求导就是先对 t 求导再乘上 t 对 s 求导, 期中 t 对 s 求导是 s 对 t 求导的倒数, 而 s 对 t 求导是 \mathbf{r} 对 t 求导的模长. 须知, 不管是在得到切向量还是在得到曲率向量, 求导都是对弧长参数 s 求导。

证明. $\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{dt}{ds}$

□

3 E^3 的曲线

当考虑空间曲线时, 法向不能被唯一决定. 但由切向量模长恒为 1 推得曲率向量落在法平面中, 若曲率向量的模长不为零, 则令曲率向量的单位化为主法向量, 此时曲率就是曲率向量的模长 (因此曲率大于零)。

注记. 需要注意, 平面曲线情形下曲率是可以为负的, 曲率的正负反映了曲线的弯曲方向.

定义 3.1. 从法向量, 密切平面, 从切平面

以上都是建立在 $\dot{\mathbf{T}}(s) \neq 0$ 的前提上的, 当然, 一点不为零便有局部不为零, 而目前我们只关心局部的理论.

推导 Frenet 标架的运动方程.

用 \mathbf{r} 相对于弧长参数 s 的各阶导数来表达曲率和挠率.

例 3.2. 圆柱螺线.

例 3.3. $\mathbf{r}(s)$ 落在某平面上当且仅当 $\tau \equiv 0$.

$\mathbf{r}(s)$ 的近似曲线。

一般参数下, 曲率和挠率的计算.

例 3.4. 如果曲线的所有法平面过定点, 则曲线必是球面曲线。

证明. 不妨设原点是定点, 那么 $\mathbf{r}(s)$ 为该点的法向量,

$$\begin{aligned}\mathbf{T}(s) \cdot \mathbf{r}(s) &\equiv 0 \\ \iff \frac{d}{ds}(\mathbf{r}(s), \mathbf{r}s) &\equiv 0 \\ \iff |\mathbf{r}(s)| &\equiv c.\end{aligned}$$

□

例 3.5. 切向量与固定方向成定角的非直线曲线称为一般螺线. 证明: 非直线曲线是一般螺线的充要条件是其挠率与曲率之比是常数。

4 曲线论基本定理

Chapter 2

曲面的局部理论

1 曲面的表示

定义 1.1. \mathbb{R}^3 中的一个曲面是指 \mathbb{R}^3 中的一个 2-维嵌入子流形.

定义 1.2. 称 $\Sigma \subset E^3$ 为正则曲面, 如果存在 $\mathbf{r}: D \rightarrow \Sigma$, 其中 $D \subset E^2 = \{(u, v)\}$ 是区域, 满足

- (1) \mathbf{r} 光滑, 即具有各阶连续偏导数;
- (2) \mathbf{r} 是双射;
- (3) $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ 恒不为零, 即雅可比矩阵的秩恒为 2.

例 1.3. 图

例 1.4. $F(x, y, z) = c$.

2 法曲率

设 $M \subset \mathbb{R}^3$ 是一个 2-维嵌入子流形, 嵌入映射

$$\iota: M \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

自然诱导了每点 $p \in M$ 处的单射

$$\iota_{p,*}: T_p M \longrightarrow T_p \mathbb{R}^3$$

设 $g = dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2 + dx^3 \otimes dx^3$ 是 \mathbb{R}^3 中的标准黎曼度量.

定义 2.1. $p \in M$ 处的一个法向量是指 $T_p \mathbb{R}^3$ 中在 g 下与 $T_p M$ 垂直的一个非零元素.

在 $T_p \mathbb{R}^3$ 与 \mathbb{R}^3 的标准等同下, p 处的法向量 N_p 可视作 \mathbb{R}^3 中的一个向量, 考虑经过点 p 并且和 N_p 平行的一个平面 P , 记 $C := P \cap M$.

平面 P 是某个线性泛函 $f(x, y, z)$ 的零点集. 设 $\bar{f}: M \rightarrow \mathbb{R}$ 是 f 在 M 上的限制, 则 $C = \bar{f}^{-1}(0)$. 证明 p 是 \bar{f} 的正则点, 即 $\bar{f}_{*,p}: T_p M \rightarrow T_0 \mathbb{R}$ 是满射. 因此 C 在 p 的一个邻域附近是一个一维的正则子流形.

3 曲面的第一基本形式

4 曲面的第二基本形式

5 Weingarten 变换

6 主曲率与 Gauss 曲率

命题 6.1. *Euler* 公式

定义 6.2. 主曲率, *Gauss* 曲率, 平均曲率

定义 6.3. 脐点, 全脐点曲面

例 6.4. 全平点曲面为平面或平面的一部分.

定义 6.5. 渐进方向, 渐进曲线

定义 6.6. 曲率线

命题 6.7. 非脐点曲面上必有曲率线网

证明. 曲率线所满足的微分方程是

$$(EM - FL) \left(\frac{du^1}{dt} \right)^2 + (EN - LG) \frac{du^1}{dt} \frac{du^2}{dt} + (FN - GM) \left(\frac{du^2}{dt} \right)^2 = 0.$$

由于非脐点, 所以 $EM - FL, EN - LG, FN - GM$ 不同时为零.

□

曲面的局部形状

Gauss 曲率的几何解释

第三基本形式

7 曲面的一些例子

7.1 直纹面

定义 7.1. 直纹面

命题 7.2. 设 $\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{a}(u) + v\mathbf{b}(u)$ 是直纹面, 则以下三条等价:

- (1) Gauss 曲率恒为零;
- (2) $(\mathbf{a}', b, \mathbf{b}') \equiv 0$;
- (3) 沿着直母线, 直纹面的法向量不变, 即 $\mathbf{n}(u, v_1) = \mathbf{n}(u, v_2) (v_1 \neq v_2)$.

定义 7.3. 可展曲面

命题 7.4. 直纹面 为可展曲面的充要条件是

证明.

□

注记.

命题 7.5. 非脐点处, $K \equiv 0 \iff \Sigma$ 是可展曲面.

证明. 局部取曲率线网 balabala

□

证明. 补充证明

□

可展曲面的分类

命题 7.6. 可展曲面的分类

证明.

□

例 7.7. 曲线上的曲线 C 为曲率线的充要条件是 C 上每点曲面法线所生成的曲面 $\tilde{\Sigma}$ 为可展曲面.

证明.

□

曲率线的计算

balabala

7.2 旋转曲面

7.3 全脐点曲面

- 利用偏导数的交换性可证明主曲率 k 是常数.

8 习题 3

16. 求曲面 $F(x, y, z) = 0$ 的第二基本形式.

证明. 不妨设在 (x_0, y_0, z_0) 点处, 有 $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. 则由隐函数定理知, 局部上 $z = z(x, y)$, 且

$$z_x = -\frac{F_x(x, y, z(x, y))}{F_z(x, y, z(x, y))}, z_y = -\frac{F_y(x, y, z(x, y))}{F_z(x, y, z(x, y))}.$$

□

26. 设 P 是曲面 S 上的一点. 证明: 当 P 不是脐点时, S 的主曲率 k_1, k_2 是 P 附近的光滑函数; 当 P 是脐点时, 主曲率是 P 附近的连续函数.

Chapter 3

曲面论基本定理

1 活动标架

- 对应于向量丛的 frame. 我们这里向量丛是 $\Sigma \times \mathbb{R}^3$ 这个平凡丛.

设 $\vec{x}_1(u, v), \vec{x}_2(u, v), \vec{x}_3(u, v)$ 为 $\Sigma: \vec{r} = \vec{r}(u, v)$ 上处处线性无关的向量场, 称 $\{\vec{r}(u, v); \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$ 为曲面上的活动标架. 通过研究曲面上的任意标架场来研究曲面与标架无关的几何性质, 是现代微分几何的一个基本方法.

通常 \vec{x}_1, \vec{x}_2 取为切向量场.

称 $\{\vec{r}(u, v); \vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{n}\}$ 为自然标架.

例 1.1. 设 $\vec{r}(s)$ 为 E_3 中的弧长参数曲线, $\{\vec{r}(s); e_1, e_2, e_3\}$

2 自然标架下的基本公式

设 $\Sigma : \vec{r} = \vec{r}(u_1, u_2), \vec{r}_\alpha = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_\alpha}, I = g_{\alpha\beta} du^\alpha \otimes du^\beta, II = b_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta$, 其中 $g_{\alpha\beta} = \vec{r}_\alpha \cdot \vec{r}_\beta, b_{\alpha\beta} = \vec{r}_{\alpha\beta} \cdot \vec{n}$.

回忆

$$\begin{pmatrix} \vec{n}_1 \\ \vec{n}_2 \end{pmatrix} = -W \begin{pmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} b_{\alpha\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g^{\gamma\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} b_\alpha^\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \end{pmatrix}$$

Weingarten 公式可写作

$$\vec{n}_\alpha = -b_\alpha^\beta \vec{r}_\beta$$

或

$$d\vec{n} = \vec{n}_\alpha du^\alpha = -b_\alpha^\beta \vec{r}_\beta du^\alpha$$

下面考虑自然标架 $\{\vec{r}; \vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{n}\}$, 我们希望得到

$$\vec{r}_{\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \vec{r}_\gamma + b_{\alpha\beta} \vec{n},$$

其中 $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ 称作第二类 Christoffel 符号, 它满足

命题 2.1.

$$(1) \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = \Gamma_{\beta\alpha}^\gamma$$

$$(2) \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = \frac{1}{2} g^{\gamma\delta} \left(\frac{\partial g_{\delta\beta}}{\partial u^\alpha} + \frac{\partial g_{\alpha\delta}}{\partial u^\beta} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\delta} \right)$$

证明.

(1) 由 $\vec{r}_{\alpha\beta} = \vec{r}_{\beta\alpha}$ 显然.

(2)

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\beta}^\delta g_{\gamma\delta} &= \vec{r}_{\alpha\beta} \cdot \vec{r}_\gamma \\ &= \frac{\partial}{\partial u^\beta} (\vec{r}_\alpha \cdot \vec{r}_\gamma) - \vec{r}_\alpha \cdot \vec{r}_{\delta\beta} \\ &= \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial u^\beta} - \vec{r}_\alpha \cdot \frac{\partial \vec{r}_\beta}{\partial u^\gamma} \\ &= \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial u^\beta} - \frac{\partial}{\partial u^\gamma} (\vec{r}_\alpha \cdot \vec{r}_\beta) + \vec{r}_{\alpha\gamma} \cdot \vec{r}_\beta \\ &= \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial u^\beta} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} + \frac{\partial g_{\delta\beta}}{\partial u^\alpha} - \vec{r}_\delta \cdot \vec{r}_{\beta\alpha} \end{aligned}$$

□

设曲面 $\Sigma: \mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2)$, 自然标架 $\{\mathbf{r}(u^1, u^2); \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{n}\}$, 上一节中我们导出了运动方程

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^\alpha} = \mathbf{r}_\alpha & (3.1a) \\ \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial u^\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \mathbf{r}_\gamma + b_{\alpha\beta} \mathbf{n} & (3.1b) \\ \mathbf{n}_\alpha = -b_\alpha^\beta \mathbf{r}_\beta & (3.1c) \end{cases}$$

现在问:

- 给定如何的 $g_{\alpha\beta}(u^1, u^2)$ 和 $b_{\alpha\beta}(u^1, u^2)$, 上述一阶偏微分方程组有解。
- 若有解, 得到的解是否是我们想要的几何对象? 即 $\mathbf{r}(u^1, u^2)$ 是否代表正则曲面? 其第一、第二基本形式是否是 $g_{\alpha\beta}$ 和 $b_{\alpha\beta}$?

本节中我们回答第一个问题。

偏微分方程的理论告诉我们, 该方程组有解当且仅当满足如下的可积性条件:

$$\mathbf{r}_{\alpha\beta} = \mathbf{r}_{\beta\alpha}$$

$$\mathbf{r}_{\alpha\beta\gamma} = \mathbf{r}_{\alpha\gamma\beta}$$

$$\mathbf{n}_{\alpha\beta} = \mathbf{n}_{\beta\alpha}$$

其必要性是显然的, 充分性是令人惊讶的, 我们在这里承认它。

下面分几步:

- 通过计算 $\mathbf{r}_{\alpha\beta\gamma} = \mathbf{r}_{\alpha\gamma\beta}$, 将式子表示为 \mathbf{r}_δ 和 \mathbf{n} , 令前面系数为零分别得到 Gauss 方程和 Codazzi 方程。
- 通过计算 $\mathbf{n}_{\alpha\beta} = \mathbf{n}_{\beta\alpha}$, 发现得到一个与 Codazzi 方程等价的方程和一个平凡方程。
- 问: 两个方程组独立的方程各自有几个?
 - 引进 Riemann 记号
 - 得到 Gauss 绝妙定理 (这是一个副产品)
 - 断言 Riemann 记号满足的性质, 在承认性质的基础上推得 Gauss 方程组实际上只有一个独立方程
 - 引入共变导数, 证明 Riemann 记号满足的性质。
 - 证明 Codazzi 方程组只有两个独立方程。

3 曲面的存在唯一性定理

定理 3.1. 设 $\Sigma, \tilde{\Sigma}$ 定义于同一参数区域 D , 如果对应点处有相同的第一、第二基本形式, 则存在一刚体运动 τ 使得 $\Sigma = \tau(\tilde{\Sigma})$.

证明. 固定一点 $P = (u_0^1, u_0^2) \in D$, 必存在一个刚体运动 τ 使得

$$\tau(\{\tilde{\mathbf{r}}(P); \tilde{\mathbf{r}}_1(P), \tilde{\mathbf{r}}_2(P), \tilde{\mathbf{n}}(P)\}) = \{\mathbf{r}(P); \mathbf{r}_1(P), \mathbf{r}_2(P), \mathbf{n}(P)\},$$

这是因为 $g_{\alpha\beta}(P) = \tilde{g}_{\alpha\beta}(P)$.

因为刚体运动不改变第一、第二基本形式, 所以 Σ 与 $\tau(\tilde{\Sigma})$ 的对应点仍有相同的第一、第二基本形式.

现在 Σ 与 $\tau(\tilde{\Sigma})$ 满足相同的运动方程, 有相同的初值, 从而由偏微分方程组解的唯一性, 知 $\Sigma = \tau(\tilde{\Sigma})$. \square

例 3.2. 证明: Σ 没有脐点, 且 $K \equiv 0$, 则 Σ 是可展曲面.

证明. 仅需证明 Σ 为直纹面.

设 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 分别为主曲率 $k_1 \equiv 0, k_2 \neq 0$ 对应的主方向, 则

$$\omega_1^3 = k_1 \omega^1 \equiv 0, \quad \omega_2^3 = k_2 \omega^2$$

$$d\omega_1^3 = \omega_1^2 \wedge \omega_2^3 = k_2 \omega_1^2 \wedge \omega^2$$

$$k_2 \neq 0 \implies \omega_1^2 \wedge \omega^2 = 0 \iff \omega_1^2 = f \omega^2$$

考虑 Pfaff 方程 $\omega^2 = 0$, 它决定的向量场就是 \mathbf{e}_1 .

设 $\mathbf{r}(t)$ 为 $\omega^2 = 0$ 的任意一条积分曲线,

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\omega \mathbf{e}_1 + \omega^2 \mathbf{e}_2}{dt} = \frac{\omega^1}{dt} \mathbf{e}_1 + \frac{\omega^2}{dt} \mathbf{e}_2 = \frac{\omega^1}{dt} \mathbf{e}_1$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{e}_1}{dt} &= \frac{d}{dt} \mathbf{e}_1(u^1(t), u^2(t)) \\ &= \frac{\omega_1^2 \mathbf{e}_2 + \omega_1^3 \mathbf{e}_3}{dt} \\ &= \omega_1^2(\mathbf{r}'(t)) \mathbf{e}_1 + \omega_1^3(\mathbf{r}'(t)) \mathbf{e}_3 \\ &= 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

前一项为零是因为 $\omega_1^2(\mathbf{r}'(t)) = f \omega^2(\mathbf{r}'(t)) = 0$, 后一项为零是因为 $\omega_1^3 = k_1 \omega^1 \equiv 0$.

从而沿积分曲线 \mathbf{e}_1 保持不变, 所以 Σ 是直纹面. \square

4 外微分形式

4.1 外代数

k 重线性映射

设 V 是实数域 \mathbb{R} 上的 m 维线性空间, V^* 记为其对偶空间, $V^* = \{\theta \mid \theta: V \rightarrow \mathbb{R} \text{ 线性映射}\}$, $V^{**} = V$.

- 设 $\{e_i\}$ 为 V 的一组基, 考虑 V^* 上的 m 个向量 w^1, \dots, w^m 使得 $w^j(e_i) = \delta_i^j$. 容易证明 $\{w^i\}$ 是 V^* 的一组基, 也称为 $\{e_i\}$ 的对偶基.
- k 重线性映射. $f: V_1 \times \dots \times V_k \rightarrow W$, 这里 V_1, \dots, V_k, W 均为向量空间, 满足

$$f(x_1, \dots, x_{i-1}, \lambda x_i + \mu y_i, \dots, x_k) = \lambda f(x_1, \dots, x_k) + \mu f(x_1, \dots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \dots, x_k).$$

$\mathcal{L}(V_1, \dots, V_k; W) = \{f \mid f: V_1 \times V_2 \times \dots \times V_k \rightarrow W \text{ 为 } k \text{ 重线性映射}\}$, 可自然地定义加法和数乘, 构成线性空间.

(*) 举例子说明, $\text{Im } f \subset W$, 但不一定是线性空间.

外乘法

定义一个运算 “ \wedge ”: $V \times V \rightarrow W$

- (1) “ \wedge ” 为双线性映射
- (2) $W = L(\text{Im “}\wedge\text{”})$
- (3) 反对称性. $\xi^1 \wedge \xi^2 = -\xi^2 \wedge \xi^1, \forall \xi^1, \xi^2 \in V$.
- (4) 对于任意向量空间 \overline{W} 和反对称双线性映射 $f: V \times V \rightarrow \overline{W}$, 都存在线性映射 $f^*: W \rightarrow \overline{W}$ 使得 $f = f^* \circ \wedge$.

$$\begin{array}{ccc} & \wedge^2 V & \\ \uparrow \wedge & \nwarrow & \\ V \times V & \xrightarrow{\wedge} & W \\ \downarrow f & \swarrow f^* & \\ \overline{W} & & \end{array}$$

(*)(4) 中 f^* 是由 f 唯一决定的: $f = f_i^* \circ \wedge, i = 1, 2$,

$$f_1^*(\xi_1 \wedge \xi_2) = f(\xi_1, \xi_2) = f_2^*(\xi_1 \wedge \xi_2) \xrightarrow{W=L(\text{Im “}\wedge\text{”})} f_1^* = f_2^*$$

★ 满足上述条件的运算 “ \wedge ” 和 W 在同构意义下是唯一的。

具体构造

(a) $\wedge^2 V = \{\theta \in \mathcal{L}(V^*, V^*; \mathbb{R}) \mid \theta \text{ 为反对称的}\}$

定义

$$\wedge: V \times V \rightarrow \wedge^2 V$$

$$(\xi^1, \xi^2) \mapsto \xi^1 \wedge \xi^2, \quad \xi^1 \wedge \xi^2(x_1, x_2) = \det(\xi^\alpha(x_\beta)), \forall x_1, x_2 \in V^*$$

容易验证: (1) 双线性; (3) 反对称性

(2) $\wedge^2 V = L(\text{Im}(\wedge))$, 但通常 $\wedge^2 V \neq \text{Im}(\wedge)$

证明. 设 $\{\sigma^\alpha\}_{\alpha=1}^m$ 为 V 的一组基, $\{e_\beta\}_{\beta=1}^m$ 为 V^* 中其偶基, 即 $e_\beta(\sigma^\alpha) = \delta_\beta^\alpha$

$L(\text{Im}(\wedge)) = \{\sigma^\alpha \wedge \sigma^\beta \text{ 张成的线性空间}, \alpha < \beta\}$, 其中个数为 $\frac{1}{2}m(m-1)$

- $\sigma^\alpha \wedge \sigma^\beta, \alpha < \beta$ 为线性无关
- $\sigma \in \wedge^2 V, \theta = \sum_{\alpha < \beta} \theta(e_\alpha, e_\beta) \sigma^\alpha \wedge \sigma^\beta$

所以 $\wedge^2(V) = L(\text{Im}(\wedge))$ 。

□

(4) $f: V \times V \rightarrow \overline{W}$, 令 $f^*: \wedge^2 V \rightarrow \overline{W}$, $f^*(\xi \wedge \eta) = f(\xi, \eta)$ 。

(b) 唯一性

根据定义, 必存在线性映射

$$\begin{aligned} I: W &\rightarrow \wedge^2(V) \\ \xi^1 \wedge \xi^2 &\mapsto \xi^1 \wedge \xi^2 \quad \wedge = I \circ \text{“} \wedge \text{”} \\ I': \wedge^2(V) &\rightarrow W, \quad \text{“} \wedge \text{”} = I' \circ \wedge \end{aligned}$$

所以

$$\left. \begin{aligned} \wedge &= I \circ I' \circ \wedge \\ \text{“} \wedge \text{”} &= I' \circ I \circ \text{“} \wedge \text{”} \end{aligned} \right\} \implies \begin{cases} I \circ I' = Id_{\wedge^2(V)} \\ I' \circ I = Id_W \end{cases}$$

由此我们可定义

$$\begin{aligned} \wedge: V \times V &\rightarrow \wedge^2 V \\ \xi^1, \xi^2 &\mapsto \xi^1 \wedge \xi^2 \end{aligned}$$

★ 进一步可定义多重外积 (k 重外积)。 $\xi^1, \dots, \xi^k \in V$

$$\xi^1 \wedge \dots \wedge \xi^k \in \wedge^k V = \left\{ \theta \in \mathcal{L}(\overbrace{V^*, \dots, V^*}^k; \mathbb{R}), \theta \text{ 为反对称 } k \text{ 重线性映射} \right\}$$

定义

$$\xi^1 \wedge \dots \wedge \xi^K(x_1, \dots, x_k) = \det(\xi^\alpha(x_\beta))$$

容易验证

$$(1) \xi^1 \wedge \dots \wedge (\lambda \xi^i + \mu \eta^i) \wedge \dots \wedge \xi^k = \lambda \xi^1 \wedge \dots \wedge \xi^i \wedge \dots \wedge \xi^k + \mu \xi^1 \wedge \dots \wedge \xi^{i-1} \wedge \eta^i \wedge \xi^{i+1} \wedge \dots \wedge \xi^k$$

$$(2) \xi^1 \wedge \dots \wedge \xi^i \wedge \dots \wedge \xi^j \wedge \dots \wedge \xi^k = -\xi^1 \wedge \dots \wedge \xi^j \wedge \dots \wedge \xi^i \wedge \dots \wedge \xi^k$$

$$(3) i \neq j, \xi^i = \xi^j, \text{ 则必有 } \xi^1 \wedge \dots \wedge \xi^k = 0$$

(4)

外代数 Grassmann 代数

$G(V) = \wedge^0 V \oplus \wedge^1 V \oplus \cdots \oplus \wedge^k V \oplus \cdots \oplus \wedge^m V = \bigoplus_{k=1}^m \wedge^k V$, 也记为 $\wedge(V)$, $\dim(\wedge(V)) = \sum_{k=1}^m C_m^k = 2^m$
运算外积

$$\wedge : \wedge^k V \times \wedge^l V \rightarrow \wedge^{k+l} V$$

$$(\sigma^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \sigma^{\alpha_k}) \wedge (\sigma^{\beta_1} \wedge \cdots \wedge \sigma^{\beta_l}) = \sigma^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \sigma^{\alpha_k} \wedge \sigma^{\beta_1} \wedge \cdots \wedge \sigma^{\beta_l} \in \wedge^{k+l} V$$

(*) 容易验证 $\varphi \in \wedge^k V, \psi \in \wedge^l V, \varphi \wedge \psi = (-1)^{kl} \psi \wedge \varphi$ (反交换律)

$\{G(V), \wedge\}$ 称为 V 上的外代数或 Grassmann 代数

4.2 外微分形式

欧式空间 E^m , 取定一组基 $\{e_1, \cdots, e_m\}$, 等同于 $\mathbb{R}^m = \{(u^1, \cdots, u^m) \mid u^\alpha \in \mathbb{R}, 1 \leq \alpha \leq m\}$, 这里 u^α 为坐标函数, 每点处有 m 个独立的微分 du^1, \cdots, du^m , 生成数域 \mathbb{R} 上的向量空间记为 Lu . 等同 $Lu \cong (E^m)^*$, $du^i(e_j) = \delta_j^i$.

考虑 $V = Lu$ 上的外代数, $\wedge(Lu) = \bigoplus_{k=0}^m \wedge^k(Lu)$

每个 k 重元素, 具有如下形式 $\sum_{1 \leq \alpha_1 < \cdots < \alpha_k \leq m} a_{\alpha_1 \cdots \alpha_k} du^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge du^{\alpha_k} \in \mathcal{L}(\overbrace{E^m, \cdots, E^m}^k; \mathbb{R})$

或 $\sum_{1 \leq \alpha_1, \cdots, \alpha_k \leq m} \tilde{a}_{\alpha_1 \cdots \alpha_k} du^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge du^{\alpha_k}$, 其中 $\tilde{a}_{\alpha_{\tau(1)} \cdots \alpha_{\tau(k)}} = (-1)^{sgn \tau} \cdot \frac{1}{k!} a_{\alpha_1 \cdots \alpha_k}$
 $\tilde{a}_{\alpha_1 \cdots \alpha_k}$ 关于指标反交换。

 k 次外微分形式 (k 形式)

设 $U \subset \mathbb{R}^m$ 为一开区域

定义 4.1. U 上的一个 k 次外微分形式, 即对每点 $u \in U$ 确定 $\wedge^k(Lu)$ 中的一个元素使其在 U 上连续可微地变化, 通常表示为

$$\begin{aligned} \omega(u) &= \sum_{1 \leq \alpha_1 < \cdots < \alpha_k \leq m} a_{\alpha_1 \cdots \alpha_k} du^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge du^{\alpha_k} \\ &= \tilde{a}_{\alpha_1 \cdots \alpha_k}(u) du^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge du^{\alpha_k} \quad (\text{Einstein 求和约定}) \end{aligned}$$

1 形式也称为 U 上的 Pfaff 形式

★ 线性无关行 (处处)

设 $\omega^\gamma = a_\alpha^\gamma du^\alpha, 1 \leq \gamma \leq p, 1 \leq \alpha \leq m$ 为 U 上的 p 个 1 形式。

如果 $p \times m$ 矩阵 (a_α^γ) 地秩在 U 的每点都为 p , 则称这 p 个形式 $\{\omega^\gamma\}$ 是线性独立的, 等价地,

$\sum_{i=1}^p f_i \omega^i \equiv 0$ 则必有 $f_i \equiv 0, \forall i = 1, \cdots, p$ 。

命题 4.2. $\omega^1, \cdots, \omega^p$ 个 1 形式是线性独立的充要条件为 $\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^p \neq 0$ 。

证明. $\omega^1 \wedge \omega^p = \sum_{1 \leq \alpha_1 < \cdots < \alpha_p \leq m} \begin{vmatrix} a_{\alpha_1}^1 & \cdots & a_{\alpha_p}^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{\alpha_1}^p & \cdots & a_{\alpha_p}^p \end{vmatrix} du^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge du^{\alpha_p}$, 必有一个 p 阶子式非零。 \square

引理 4.3 (Cartan 引理). 设 $\{\omega^\gamma, \varphi^\gamma\}_{1 \leq \gamma \leq p \leq m}$ 是 $2p$ 个 1 形式, 其中 $\{\omega^\gamma\}_{\gamma=1}^p$ 是线性独立的, 则 $\sum_{\gamma=1}^p \varphi^\gamma \wedge \omega^\gamma = 0$ 成立的充要条件是 φ^γ 可表示为

$$\varphi^\gamma = c_s^\gamma, 1 \leq r, s \leq p, \text{ 其中 } c_s^\gamma = c_\gamma^s.$$

证明. 充分性. 反交换律 $\sum_{k=1}^p \varphi^\gamma \wedge \omega^\gamma = c_s^\gamma \omega^s \wedge \omega^\gamma = c_\gamma^s \omega^s \wedge \omega^\gamma = -c_\gamma^s \omega^\gamma \wedge \omega^s = -\sum_{s=1}^p \varphi^s \wedge \omega^s$.

必要性. 每一点 $u \in U$ 处, $\{\omega^\gamma\}_{\gamma=1}^p$ 扩张成 Lu 的一组基,

则 $\varphi^\gamma = \sum_{s=1}^p c_s^\gamma \omega^s + \sum_{\lambda=p+1}^m c_\lambda^\gamma \omega^\lambda$, 代入已知条件,

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma=1}^p \varphi^\gamma \wedge \omega^\gamma &= \sum_{r,s=1}^p c_s^\gamma \omega^s \wedge \omega^\gamma + \sum_{\gamma=1}^p \sum_{\lambda=p+1}^m c_\lambda^\gamma \omega^\lambda \wedge \omega^\gamma \\ &= \sum_{1 \leq s < \gamma \leq p} (c_s^\gamma - c_\gamma^s) \omega^s \wedge \omega^\gamma + \sum_{\gamma=1}^p \sum_{\gamma=p+1}^m c_\lambda^\gamma \omega^\lambda \wedge \omega^\gamma \end{aligned}$$

所以 $c_s^\gamma = c_\gamma^s, c_\lambda^\gamma = 0, 1 \leq \gamma, s \leq p, p+1 \leq \gamma \leq m$. □

推论 4.4 ($p=1$). ω 是非零 1 形式, 则 1 形式 φ 与 ω 相差一函数因子的充要条件是 $\varphi \wedge \omega = 0$.

引理 4.5. 设 $\omega^\gamma (1 \leq \gamma \leq p)$ 是 p 个线性独立的 1 形式, Ω 是 2 形式, 那么要使

$$\Omega \equiv 0 \pmod{(\omega^1, \dots, \omega^p)}$$

的充要条件是存在 p 个 1 形式 $\{\varphi^\gamma\}$ 使得 $\Omega = \sum_{\gamma=1}^p \omega^\gamma \wedge \varphi^\gamma$.

证明. 充分性显然。

必要性, 补充 $m-p$ 个形式 $\omega^{p+1}, \dots, \omega^m$; 每点处 $\{\omega^\alpha\}_{\alpha=1}^m$ 为 Lu 的基。

$$\begin{aligned} \Omega &= \sum_{1 \leq \gamma < s \leq p} c_{\gamma s} \omega^\gamma \wedge \omega^s + \sum_{\gamma=1}^p \sum_{\lambda=p+1}^m c_{\gamma \lambda} \omega^\gamma \wedge \omega^\lambda + \sum_{p+1 \leq \alpha < \beta \leq m} c_{\alpha \beta} \omega^\alpha \wedge \omega^\beta \\ &= \sum_{\gamma=1}^p \omega^\gamma \wedge \left(\sum_{s=1}^p a_{\gamma s} \omega^s + \sum_{\lambda=p+1}^m c_{\gamma \lambda} \omega^\lambda \right) \end{aligned}$$

□

4.3 外微分

$\wedge^k(U)$ 表示 $U \subset \mathbb{R}^m$ 上 k 形式的全体, $\wedge(U) = \bigoplus_{k=0}^m \wedge^k(U)$ 。

定义: $d: \wedge^k(U) \rightarrow \wedge^{k+1}(U)$ 。设 $\omega \in \wedge^k(U), \omega = a_{\alpha_1 \dots \alpha_k}(u) du^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge du^{\alpha_k}$
 $d\omega = da_{\alpha_1 \dots \alpha_k} \wedge du^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge du^{\alpha_k} = \frac{\partial a_{\alpha_1 \dots \alpha_k}}{\partial u^\beta} du^\beta \wedge du^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge du^{\alpha_k} \in \wedge^{k+1}(U)$
 $\omega \in \wedge^0(U) = C^\infty(U)$, 外微分即普通微分, $\omega \in \wedge^m(U)$, 则 $d\omega = 0$ 。

$d: \wedge(U) \rightarrow \wedge(U)$ 。

命题 4.6. 外微分算子 d 具有如下性质:

(1) 设 φ, ψ 为两个外微分形式, 则 $d(\varphi \pm \psi) = d\varphi \pm d\psi$

(2) 如果 $\omega \in \wedge^k(U), \varphi \in \wedge^l(U)$, $d(\omega \wedge \varphi) = d\omega \wedge \varphi + (-1)^k \omega \wedge d\varphi$

引理 4.7 (Poincare 引理). 任何外微分形式的两次外微分为零, 即 $d^2 = 0$ 。

对于一个外微分形式 ω , 如果 $d\omega = 0$, 则称 ω 为闭形式

恰当形式即存在 $\theta \in \wedge(U)$, 使得 $d\theta = \omega$

恰当形式必为闭形式, 反之不成立, 例如 $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ 上的 1 形式

$$\omega = -\frac{v}{u^2 + v^2} du + \frac{u}{u^2 + v^2} dv.$$

极坐标 $\begin{cases} u = \cos \theta \rho \\ v = \sin \theta \rho \end{cases}$, $\omega = d\theta$, 这里 θ 在 $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ 中不光滑, $\int_{S^1} \omega = 2\pi$

如果存在 $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ 光滑函数使得 $\omega = dg$, $\int_{S^1} \omega = \int_{S^1} dg = 0$.

但闭形式局部恰当。

5 么正活动标架

正则曲面 Σ , $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2)$, $\forall p \in \Sigma$, $du^\alpha : T_p \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$, $du^\alpha(\mathbf{r}_\alpha) = \frac{\partial u^\alpha}{\partial u^\beta} = \delta_\beta^\alpha$

1 形式 $\omega = a_\alpha du^\alpha$

2 形式 $f du^1 \wedge du^2$

令 $\omega^\beta = a_\alpha^\beta du^\alpha$, $\omega^1 \wedge \omega^2 = \det(a_\alpha^\beta) du^1 \wedge du^2$

$\omega^1 \wedge \omega^2 = 0 \iff \det(a_\alpha^\beta) = 0 \xrightarrow{\text{Cartan引理}} \omega^1$ 与 ω^2 只相差一个函数因子, $\omega^1 \neq 0, \omega^2 = f\omega^1$

ω^1, ω^2 线性无关 $\iff \omega^1 \wedge \omega^2 \neq 0$.

取 Σ 上么正活动标架 $\{\mathbf{r}; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ (右手系), $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \in T_p \Sigma$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

已知 $\{du^\alpha\}$ 为 $\{\mathbf{r}_\alpha\}$ 的对偶基, 令 $\{\omega^\alpha\}_{\alpha=1}^2$ 为 $\{\mathbf{e}_\alpha\}_{\alpha=1}^2$ 的对偶基

令 $\begin{pmatrix} du^1 & du^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega^1 & \omega^2 \end{pmatrix} B$

$\begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du^1 & du^2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^1 & \omega^2 \end{pmatrix} B$, 所以 $AB = Id_{2 \times 2}$, 即 $B = A^{-1}$.

所以 $\begin{pmatrix} \omega^1, \omega^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} du^1 & du^2 \end{pmatrix} A$

$\omega^1 \wedge \omega^2 = \det A du^1 \wedge du^2$

所以 $d\mathbf{r} = \begin{pmatrix} du^1 & du^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega^1 & \omega^2 \end{pmatrix} A^{-1} A \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega^1 & \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} = \omega^\alpha \mathbf{e}_\alpha$

所以 $I = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \omega^1 & \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \end{pmatrix} = \omega^1 \cdot \omega^1 + \omega^2 \cdot \omega^2$

第一基本形式与么正标架选取无关, 第二基本形式与同向么正标架选取无关

么正标架的运动方程

$d\mathbf{e}_i = \omega_i^j \mathbf{e}_j, \alpha = 1, 2; 1 \leq i, j \leq 3$

由 $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \implies d\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_i \cdot d\mathbf{e}_j = 0 \implies \omega_i^j + \omega_j^i = 0$.

其中 ω_i^j 中最多只有三个独立的 1 形式 $\omega_1^2, \omega_2^3, \omega_3^1$

运动方程 $\begin{cases} d\mathbf{r} = \omega^\alpha \mathbf{e}_\alpha \\ d\mathbf{e}_i = \omega_i^j \mathbf{e}_j, \omega_i^j + \omega_j^i = 0, \alpha = 1, 2; 1 \leq i, j \leq 3 \end{cases}$

对上式两边求外微分 $0 = d(d\mathbf{r}) = d(\omega^\alpha \mathbf{e}_\alpha) = d\omega^\alpha \mathbf{e}_\alpha - \omega^\alpha \wedge d\mathbf{e}_\alpha = d\omega^\alpha \mathbf{e}_\alpha - \omega^\beta \wedge \omega_\beta^j \mathbf{e}_j$

$d\omega^\alpha = \omega^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha, \omega^\beta \wedge \omega_\beta^3 = 0$ 自然成立, 由第二基本形式的对称性.

$0 = d(d\mathbf{e}_i) = d(\omega_i^j \mathbf{e}_j) = d\omega_i^j \mathbf{e}_j - \omega_i^k \wedge d\mathbf{e}_k = (d\omega_i^j - \omega_i^k \wedge \omega_k^j) \mathbf{e}_j = 0$

结构方程 $\begin{cases} d\omega^\alpha = \omega^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha \\ d\omega_i^j = \omega_i^k \wedge \omega_k^j \end{cases}$

么正标架 Weingarten 变换的表示 $\begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix}, \mathbf{n} = \mathbf{e}_3$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \omega^1 & \omega^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} du^1 & du^2 \end{pmatrix} A, I = \begin{pmatrix} du^1 & du^2 \end{pmatrix} (g_{\alpha\beta}) \begin{pmatrix} du^1 \\ du^2 \end{pmatrix} = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \omega^1 & \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} du^1 & du^2 \end{pmatrix} A A^T \begin{pmatrix} du^1 \\ du^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

所以 $(g_{\alpha\beta}) = AA^T$

$$\text{令 } \begin{pmatrix} \omega_1^3 \\ \omega_2^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \end{pmatrix}, II = \begin{pmatrix} du^1 & du^2 \end{pmatrix} (b_{\alpha\beta}) \begin{pmatrix} du^1 \\ du^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega^1 & \omega^2 \end{pmatrix} (h_{\alpha\beta}) \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \end{pmatrix}$$

所以 $(b_{\alpha\beta}) = A(h_{\alpha\beta})A^T$ 或 $(h_{\alpha\beta}) = A^{-1}(b_{\alpha\beta})(A^{-1})^T$

$(b_{\alpha\beta})$ 对称 $\implies (h_{\alpha\beta})$ 对称

$$\det(h_{\alpha\beta}) = \det(A^{-1}(b_{\alpha\beta})(A^{-1})^T) = \det(b_{\alpha\beta}) \det((AA^T)^{-1}) = \frac{\det(b_{\alpha\beta})}{\det(g_{\alpha\beta})} = K$$

$$\text{tr}(h_{\alpha\beta}) = \text{tr}((b_{\alpha\beta})(AA^T)^{-1}) = \text{tr}((b_{\alpha\beta})(g_{\alpha\beta})^{-1}) = 2H$$

Weingarten 变换 $\mathcal{W}: T_p\Sigma \rightarrow T_p\Sigma$

$$\mathcal{W} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \mathbf{n}_1 \\ \mathbf{n}_2 \end{pmatrix} = (b_{\alpha\beta})(g_{\alpha\beta})^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \end{pmatrix}$$

在基 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ 下,

$$\mathcal{W} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} = \mathcal{W}(A^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \end{pmatrix}) = A^{-1} \mathcal{W} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \end{pmatrix} = A^{-1} (b_{\alpha\beta})(g_{\alpha\beta})^{-1} A \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} = A^{-1} (b_{\alpha\beta})(A^{-1})^T \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} = (h_{\alpha\beta}) \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix}$$

\mathcal{W} 在 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ 下的系数矩阵即为 $(h_{\alpha\beta})$

主曲面没有脐点时, 可取 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 为曲面的主方向,

$$\mathcal{W}(\mathbf{e}_\alpha) = k_\alpha \mathbf{e}_\alpha$$

$$\text{此时 } (h_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}, \text{ 即 } \omega_1^3 = k_1 \omega^1, \omega_2^3 = k_2 \omega^2, II = k_1 (\omega^1)^2 + k_2 (\omega^2)^2$$

6 曲面的结构方程 (么正)

- \mathbf{r} 视作嵌入 $\Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$. 但这样的映射又可视作平凡丛的截面, 所以认为 $\mathbf{r} \in \Gamma(\Sigma, \Sigma \times \mathbb{R}^3)$

$$\begin{aligned}
 d\mathbf{e}_3 &= \omega_3^1 \mathbf{e}_1 + \omega_3^2 \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} \omega_3^1 & \omega_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \\
 d\mathbf{n} &= \begin{pmatrix} du^1 & du^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{n}_1 \\ \mathbf{n}_2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} du^1 & du^2 \end{pmatrix} (-b_{\alpha\beta})(g^{\alpha\beta}) \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \end{pmatrix} \\
 &= -\begin{pmatrix} \omega^1 & \omega^2 \end{pmatrix} A^{-1}(b_{\alpha\beta})(A^{-1})^T A^{-1} A \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \\
 &=: -\begin{pmatrix} \omega^1 & \omega^2 \end{pmatrix} (h_{\alpha\beta}) \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} \omega_1^3 & \omega_2^3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \omega^1 & \omega^2 \end{pmatrix} A^{-1}(b_{\alpha\beta})(A^{-1})^T
 \end{aligned}$$

6.1 title

设 $\Sigma: \mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2)$, 么正标架 $\{\mathbf{r}; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, 其中 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 为切向。上一节中我们得到了曲面的运动方程

$$\begin{cases} d\mathbf{r} = \omega^\alpha \mathbf{e}_\alpha, & \alpha = 1, 2 \\ d\mathbf{e}_i = \omega_i^j \mathbf{e}_j, \omega_i^j + \omega_j^i = 0, & 1 \leq i \leq j \leq 3 \end{cases}$$

此时

$$\begin{aligned}
 I &= d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \omega^1 \otimes \omega^1 + \omega^2 \otimes \omega^2 \\
 II &= -d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{n} = -\begin{pmatrix} \omega^1 & \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_3^1 \\ \omega_3^2 \end{pmatrix} \\
 &= -\begin{pmatrix} \omega^1 & \omega^2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \omega_3^1 \\ \omega_3^2 \end{pmatrix} = \omega^\alpha \otimes \omega_\alpha^3
 \end{aligned}$$

解释: $\theta_1 \otimes \theta_2(X, Y) := \theta_1(X)\theta_2(Y)$

当曲面是非脐点曲面时, 可取 \mathbf{e}_α 为主方向, 此时

$$\mathcal{W}(\mathbf{e}_\alpha) = k_\alpha \mathbf{e}_\alpha, (h_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
 II &= \begin{pmatrix} \omega^1 & \omega^2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \omega_1^3 \\ \omega_2^3 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \omega^1 & \omega^2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$= k_1 \omega^1 \otimes \omega^1 + k_2 \omega^2 \otimes \omega^2.$$

结构方程

$$\begin{aligned} 0 &= d(\mathbf{dr}) = d(\omega^\alpha \mathbf{e}_\alpha) \\ &= (d\omega^\alpha) \mathbf{e}_\alpha - \omega^\alpha \wedge d\mathbf{e}_\alpha \\ &= (d\omega^\alpha - \omega^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha) \mathbf{e}_\alpha - \omega^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha \mathbf{e}_\beta \end{aligned}$$

所以 $d\omega^\alpha = \omega^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha, \omega^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha = 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= d(\mathbf{de}_i) = d(\omega_i^j \mathbf{e}_j) \\ &= (d\omega_i^j) \mathbf{e}_j - \omega_i^k \wedge d\mathbf{e}_k \\ &= (d\omega_i^j - \omega_i^k \wedge \omega_k^j) \mathbf{e}_j \end{aligned}$$

$$\begin{cases} d\omega_1^2 &= \omega_1^k \wedge \omega_k^2 \\ d\omega_1^3 &= \omega_1^k \wedge \omega_k^3 \\ d\omega_2^3 &= \omega_2^k \wedge \omega_k^3 \\ d\omega^\alpha &= \omega^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha \end{cases} \quad \begin{aligned} (3.2a) \\ (3.2b) \\ (3.2c) \\ (3.2d) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\omega_1^2 &= \omega_1^3 \wedge \omega_3^2 \\ &= -\omega_1^3 \wedge \omega_2^3 \\ &= -(h_{1\alpha} \omega^\alpha) \wedge (h_{2\beta} \omega^\beta) \\ &= -(h_{1\alpha} h_{2\beta}) \omega^\alpha \wedge \omega^\beta \\ &= -(h_{11} h_{22} - h_{12} h_{21}) \omega^1 \wedge \omega^2 \\ &= -K \omega^1 \wedge \omega^2 \end{aligned}$$

用么正标架求 Gauss 曲率

$$K = -\frac{d\omega_1^2}{\omega^1 \wedge \omega^2}$$

设 $\omega_1^2 = a\omega^1 + b\omega^2$,

$$d\omega^1 = \omega^\beta \wedge \omega_\beta^1 = \omega^2 \wedge \omega_2^1 = \omega_1^2 \wedge \omega^2 = (a\omega^1 + b\omega^2) \wedge \omega^2 = a\omega^1 \wedge \omega^2$$

$$a = \frac{a\omega^1}{\omega^1 \wedge \omega^2}, \quad b = \frac{d\omega^2}{\omega^1 \wedge \omega^2}$$

例 6.1. 设 (u, v) 是正交餐宿, $I = Edu + Gdv$,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \frac{\mathbf{r}_u}{\sqrt{E}}, \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{r}_v}{\sqrt{G}} \\ \omega^1 &= \sqrt{E} du, \omega^2 = \sqrt{G} dv \\ \omega^1 \wedge \omega^2 &= \sqrt{EG} du \wedge dv \\ d\omega^1 &= d(\sqrt{E} du) = (\sqrt{E})_v dv \wedge du \\ d\omega^2 &= d(\sqrt{G} dv) = (\sqrt{G})_u du \wedge dv \\ \omega_1^2 &= \frac{-(\sqrt{E})_v}{\sqrt{EG}} \sqrt{E} du + \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{EG}} \sqrt{G} dv \end{aligned}$$

$$d\omega_1^2 = \left(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}} \right)_v du \wedge dv + \left(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}} \right)_u du \wedge dv$$

$$K = - \frac{\left(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}} \right)_v + \left(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}} \right)_u}{\sqrt{EG}}$$

不变量

$$(1) \text{ I} = \begin{pmatrix} \omega^1 & \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \end{pmatrix}$$

$$(2) \text{ d}A = \omega^1 \wedge \omega^2$$

$$(3) \text{ II} = \begin{pmatrix} \omega^1 & \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1^3 \\ \omega_2^3 \end{pmatrix}$$

$$(4) \text{ III}$$

$$(5) \text{ d}\sigma = \omega_1^2 \wedge \omega_2^3$$

$$(6) \text{ } \psi = \omega^1 \otimes \omega_2^3 - \omega^2 \otimes \omega_1^3$$

Chapter 4

曲面的内蕴几何

$$(u^1, u^2), \quad I = g_{\alpha\beta} du^\alpha \otimes du^\beta$$

1 曲面的等距对应

定义 1.1. 设 $\sigma: \Sigma \rightarrow \tilde{\Sigma}$ 是双射, Σ 上任意曲线段 c 与 $\tilde{\Sigma}$ 中对应的 $\tilde{c} = \sigma(c)$ 长度相等, 则称 σ 为 Σ 到 $\tilde{\Sigma}$ 的等距变换。

设 $c: \mathbf{r}(u(t), v(t))$, $\tilde{c}: \tilde{\mathbf{r}}(u(t), v(t))$, 则

$$\begin{aligned} L(c) &= \int_a^b \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| dt = L(\tilde{c}) = \int_a^b \left| \frac{d\tilde{\mathbf{r}}}{dt} \right| dt \\ \iff \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| &= \left| \mathbf{r}_u \frac{du}{dt} + \mathbf{r}_v \frac{dv}{dt} \right| = \left| \frac{d\tilde{\mathbf{r}}}{dt} \right| = \left| \tilde{\mathbf{r}}_u \frac{du}{dt} + \tilde{\mathbf{r}}_v \frac{dv}{dt} \right| \\ \iff |\mathbf{r}_u| &= |\tilde{\mathbf{r}}_u|, |\mathbf{r}_v| = |\tilde{\mathbf{r}}_v|, \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v \rangle = \langle \tilde{\mathbf{r}}_u, \tilde{\mathbf{r}}_v \rangle \\ \iff I(p) &= \tilde{I}(\sigma(p)), \forall p \in \Sigma \end{aligned}$$

2 曲面的协变微分

3 测地曲率与测地线

设曲面 $\Sigma: \mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2)$, 曲线 $C: \mathbf{r}(s) = \mathbf{r}(u^1(s), u^2(s))$.

回忆曲率向量 $\ddot{\mathbf{r}} = k\mathbf{N}$, 现在我们将它分为垂直于法向的部分 $(k\mathbf{N})^T$ 和平行于法向的部分 $(k\mathbf{N})^\perp$, 称前者为测地曲率向量, 后者为法曲率向量.

注意到 $\ddot{\mathbf{r}} \perp \mathbf{r} \implies (k\mathbf{N})^T \perp \mathbf{T}$, 因此 $(k\mathbf{N})^T \parallel \mathbf{n} \times \mathbf{T}$, 其中 \mathbf{n} 是曲面的法向量.

为了得到一个标量,

定义 3.1. 测地曲率 $k_g := (k\mathbf{N})^T \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{T}) = (\mathbf{n}, \dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}})$

直观上, 法曲率反映了曲面的弯曲, 而测地曲率反映曲线自身在曲面内的弯曲.

选取么正标架 $\{\mathbf{r}; \tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3\}$ 使得 $\tilde{\mathbf{e}}_1 = \dot{\mathbf{r}}$.

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{d\tilde{\mathbf{e}}_1}{ds} = \frac{\tilde{\omega}_1^2}{ds} \tilde{\mathbf{e}}_2 + \frac{\tilde{\omega}_1^3}{ds} \tilde{\mathbf{e}}_3$$

$$\mathbf{k}_g = \frac{\tilde{\omega}_1^2}{ds} \tilde{\mathbf{e}}_2$$

$$k_g = \mathbf{k}_g \cdot (\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{k}_g \cdot \tilde{\mathbf{e}}_2 = \frac{\tilde{\omega}_1^2}{ds} = \tilde{\omega}_1^2(\dot{\mathbf{r}})$$

$$\mathbf{k}_g = \left(\frac{d\dot{\mathbf{r}}}{ds} \right)^T = \frac{D\dot{\mathbf{r}}}{ds} = D_{\dot{\mathbf{r}}} \dot{\mathbf{r}}$$

命题 3.2. 计算测地曲率的 *Liouville* 公式. 设正交曲线网 (u^1, u^2) , 记 u^i 线的测地曲率为 k_{g_i} , 曲线 $C: \mathbf{r}(u^1(s), u^2(s))$, 设 C 与 u^1 线的夹角为 θ , 即

$$\dot{\mathbf{r}} = \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2,$$

其中 \mathbf{e}_1 和 \mathbf{e}_2 分别是 \mathbf{r}_1 和 \mathbf{r}_2 的单位化.

证明.

$$\begin{aligned} k_g &= \ddot{\mathbf{r}} \cdot (\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{r}}) \\ \ddot{\mathbf{r}} &= (-\sin \theta \mathbf{e}_1 + \cos \theta \mathbf{e}_2) \frac{d\theta}{ds} + \cos \theta \frac{d\mathbf{e}_1}{ds} + \sin \theta \frac{d\mathbf{e}_2}{ds} \\ \mathbf{n} \times \dot{\mathbf{r}} &= -\sin \theta \mathbf{e}_1 + \cos \theta \mathbf{e}_2 \\ k_g &= \frac{d\theta}{ds} + \cos^2 \theta \frac{d\mathbf{e}_1}{ds} \cdot \mathbf{e}_2 - \sin^2 \theta \frac{d\mathbf{e}_2}{ds} \cdot \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 &= 0 \implies \frac{d\mathbf{e}_1}{ds} \cdot \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1 \cdot \frac{d\mathbf{e}_2}{ds} = 0 \\ k_g &= \frac{d\theta}{ds} + \frac{d\mathbf{e}_1}{ds} \cdot \mathbf{e}_2 \\ &= \frac{d\theta}{ds} + \mathbf{e}_2 \cdot \frac{d}{ds} \left(\frac{\mathbf{r}_1}{\sqrt{g_{11}}} \right) \\ &= \frac{d\theta}{ds} + \frac{\mathbf{e}_2}{\sqrt{g_{11}}} \cdot \frac{d\mathbf{r}_1}{ds} \\ \frac{d\mathbf{r}_1}{ds} &= \mathbf{r}_{1\alpha} \frac{du^\alpha}{ds} = \Gamma_{1\alpha}^\beta \mathbf{r}_\beta \frac{du^\alpha}{ds} \\ k_g &= \frac{d\theta}{ds} + \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \Gamma_{1\alpha}^2 \frac{du^\alpha}{ds} \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{r}_2 \\ &= \frac{d\theta}{ds} + \Gamma_{1\alpha}^2 \frac{du^\alpha}{ds} \sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}} \end{aligned}$$

□

定义 3.3. 表面上的曲线如果处处测地曲率为零，则称为该表面的测地线。

定理 3.4. 曲线为测地线的充要条件是该曲线为弧长泛函的临界点。

证明.

$$L(\lambda) = \int_a^b \left| \frac{\partial \mathbf{r}(s, \lambda)}{\partial s} \right| ds$$

$$\frac{dL}{d\lambda} \Big|_{\lambda=0} = \int_a^b \frac{\partial}{\partial \lambda} \sqrt{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \right|^2} ds$$

□

4 测地坐标系

5 局部的 Gauss-Bonnet 公式

设 $\Sigma \subset E^3$ 为正则曲面, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ 为 Σ 的么正标架, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 为切向量。

第一基本形式 $I = ds^2 = \omega^1\omega^1 + \omega^2\omega^2$

运动方程

- $d\mathbf{r} = \omega^\alpha \mathbf{e}_\alpha, \alpha = 1, 2$
- $d\mathbf{e}_1 = \omega_1^2 \mathbf{e}_2 + \omega_1^3 \mathbf{e}_3$
- $d\mathbf{e}_2 = \omega_2^1 \mathbf{e}_1 + \omega_2^3 \mathbf{e}_3$
- $d\mathbf{e}_3 = \omega_3^\alpha \mathbf{e}_\alpha$

Gauss 方程

$$d\omega_1^2 = \omega_1^3 \wedge \omega_3^2 = h_{1\alpha} \omega^\alpha \wedge (-h_{2\beta} \omega^\beta) = -h_{1\alpha} h_{2\beta} \omega^\alpha \wedge \omega^\beta = -(h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21})\omega^1 \wedge \omega^2 = -K\omega^1 \wedge \omega^2$$

曲线测地曲率 $\mathbf{r}(s), \mathbf{T} = \dot{\mathbf{r}} = \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2$

$$k_g = \frac{d\mathbf{T}}{ds} \cdot (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{T}) = \frac{d}{ds}(\cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2) \cdot (\cos \theta \mathbf{e}_2 - \sin \theta \mathbf{e}_1) = \frac{d\theta}{ds} + \frac{\omega_1^2}{ds}$$

单连通区域, $\partial\Omega$ 为简单闭曲线,

$$\iint_{\Omega} K dA = \iint_{\Omega} K \omega^1 \wedge \omega^2 = - \iint_{\Omega} d\omega_1^2 = - \oint_{\partial\Omega} \omega_1^2 = - \oint_{\partial\Omega} k_g ds + \oint_{\partial\Omega} d\theta$$

$$(1) \text{ 边界光滑 } \oint_{\partial\Omega} d\theta = 2\pi$$

$$(2) \text{ 边界分段光滑 } \oint_{\partial\Omega} d\theta = \sum_i \int_{C_i} d\theta = 2\pi - \sum_i \theta_i$$

1. $\partial\Omega$ 是光滑的闭曲线

$$\left. \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right|_{s=0} = \left. \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right|_{s=1}, \theta(l) = \theta(0) + 2k\pi, \text{ 所以 } \int_{\partial\Omega} d\theta = 2k\pi$$

$\partial\Omega$ 作光滑变形, 使其落在一个等温坐标系, $\int_{\partial\Omega} d\theta = 2k\pi$ 在光滑形变下不变

将等温参数平面的原像记为 $\partial\tilde{\Omega}$, 因为共形变换保持夹角, $\int_{\partial\Omega} d\theta = \int_{\partial\tilde{\Omega}} d\theta$

$\partial\tilde{\Omega}$ 为圆周, $\int_{\partial\tilde{\Omega}} d\theta = 2\pi$, 所以 $\int_{\partial\Omega} d\theta = 2\pi$

2. 分段光滑 $\partial\Omega = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_n$

用光滑曲线逼近, $\partial\tilde{\Omega}$

$$\partial\tilde{\Omega} \cap \partial\Omega = \Gamma_1, \partial\tilde{\Omega} \setminus \partial\Omega = \Gamma_2$$

$$2\pi = \int_{\partial\tilde{\Omega}} d\theta = \int_{\Gamma_1} d\theta + \int_{\Gamma_2} d\theta$$

$$\text{所以 } \int_{\partial\Omega} d\theta + \sum_{i=1}^n \alpha_i = 2\pi$$

所以 $\iint_{\Omega} K \omega^1 \wedge \omega^2 + \oint_{\partial\Omega} k_g ds = 2\pi - \sum_{i=1}^n \alpha_i$, 单连通区域的 Gauss-Bonnet 公式

5.1 应用

测地三角形的内角和

$$\iint_{\Omega} K \omega^1 \wedge \omega^2 + \int_{\partial\Omega} k_g ds = 2\pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 - \pi$$

曲面上向量沿闭光滑曲线平移产生的角差

设 C 是光滑闭曲线，围成一单连通区域， $\mathbf{V}(s)$ 为沿 C 的平行切向量场，不妨设为单位长度， $\mathbf{V}(s) = \cos \beta \mathbf{e}_1 + \sin \beta \mathbf{e}_2$

$$0 = \frac{D\mathbf{V}}{ds} = \frac{d\beta}{ds}(-\sin \beta \mathbf{e}_1 + \cos \beta \mathbf{e}_2) + \cos \beta \frac{\omega_1^2}{ds} \mathbf{e}_2 + \sin \beta \frac{\omega_2^1}{ds} \mathbf{e}_1$$

所以 $\frac{d\beta}{ds} = -\frac{\omega_1^2}{ds}$

$$\text{所以 } \oint_C d\beta = \oint_C -\omega_1^2 = -\iint_{\Omega} d\omega_1^2 = \iint_{\Omega} K \omega^1 \wedge \omega^2$$

6 曲面上的 Laplace 算子

例 6.1. 设 Σ 为紧致曲面, 假设函数 f 满足 $\Delta_{\Sigma} f \geq 0$, 证明 f 必是常值函数.

证明.

$$\begin{aligned}\int_{\Sigma} f \operatorname{div}(\nabla f) dA &= \int_{\Sigma} f \Delta_{\Sigma} f dA \geq 0 \\ \int_{\Sigma} f \operatorname{div}(\nabla f) dA &= \int_{\Sigma} \operatorname{div}(f \nabla f) - |\nabla f|^2 dA\end{aligned}$$

□

$$\int_{\Omega} \langle DL(Du), D\varphi \rangle = 0, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \quad (*)$$

在*中, 我们

Part I

整体微分几何选讲

Chapter 5

平面曲线的整体性质

1 平面的闭曲线

2 平面的凸曲线

Chapter 6

曲面的若干整体性质

1 曲面的整体描述

- 曲面片, $\Sigma = \mathbf{r}(U)$, $\mathbf{r} : U \rightarrow E^3$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2)$
 - (1) $\mathbf{r}(u) \in C^k$
 - (2) \mathbf{r} 是一同胚, 即 U 和 $\mathbf{r}(U)$ 同胚
 - (3) \mathbf{r} 正则, 即 $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1} \wedge \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^2} \neq 0$.
- E^3 中 C^k 阶曲面 Σ , 即存在一系列 C^k 阶曲面片 $\Sigma_\alpha, \{\mathbf{r}_\alpha : U_\alpha \rightarrow E\}_\alpha, \alpha \in A$ 使得
 - (1) $\Sigma = \cup_{\alpha \in A} \Sigma_\alpha$. 每个曲面片 Σ_α 称为 Σ 的坐标邻域, $(u_\alpha^1, u_\alpha^2, \alpha)$ 称为局部坐标, $(\Sigma_\alpha, (u_\alpha^1, u_\alpha^2))$ 称为一个局部坐标系, $\{(\Sigma_\alpha, (u_\alpha^1, u_\alpha^2))\}_{\alpha \in A}$ 称为 Σ 的坐标图册.
 - (2) $\forall \alpha, \beta \in A$, 当 $\Sigma_\alpha \cap \Sigma_\beta \neq \emptyset$ 时, $\mathbf{r}_\beta^{-1} \circ \mathbf{r}_\alpha$ 仍是 C^k 映射, 称为坐标转换函数 (映射).

注记. 曲面片本身就是曲面.

例 1.1. 圆柱面, 球面, 二次锥面.

注记. 连通性: 不连通可考虑其连通分支.

$\Sigma = \cup \Sigma_\alpha \subset E^3$, 由 E^3 的欧式内积自然诱导每个 Σ_α 上的第一基本形式.

在 $\Sigma_\alpha \cap \Sigma_\beta$ 上, 由假设坐标转换函数是光滑的, 故 $\Sigma_\alpha, \Sigma_\beta$ 的第一基本形式是一致的, 因此在 Σ 上有整体的第一基本形式

内蕴几何量, 如测地曲率、Gauss 曲率均可在整个曲面 Σ 上定义.

可定向, 曲面 Σ 有一个坐标图册 $\{\Sigma_\alpha, \mathbf{r}_\alpha\}$, 每个 Σ_α 取定向即指定法向 \mathbf{n}_α 使 $\mathbf{n}_\alpha = \mathbf{n}_\beta$ 在 $\Sigma_\alpha \cap \Sigma_\beta$ 上 (等价地, 所有坐标变换 $\mathbf{r}_\beta^{-1} \circ \mathbf{r}_\alpha$ 的 Jacobi 行列式为正, $\deg(\frac{\partial(u_\beta^1, u_\beta^2)}{\partial(u_\alpha^1, u_\alpha^2)}) > 0$)

定理 1.2. 设 Σ 是 E^3 中的紧致曲面, 则在 Σ 上必有一点 p_0 , 它的 Gauss 曲率 $K(p_0) > 0$.

证明. 考虑函数 $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto \mathbf{r}(p) \cdot \mathbf{r}(p)$.

由 Σ 紧致无边, 存在内点 p_0 使得 f 取到最大值.

取 p_0 附近的局部坐标系 (u^1, u^2) .

- $df(p_0) = 2d\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}(p_0) = 0 \implies \exists \lambda > 0 \text{ s.t. } \mathbf{r}(p_0) = \lambda \mathbf{n}(p_0).$
- $0 \geq \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} \right) (p_0) = 2(\mathbf{r}_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\beta)(p_0) = 2(\lambda b_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta})(p_0)$

□

2 Gauss-Bonnet 公式

2.1 曲面的三角剖分

2.2 整体的 Gauss-Bonnet 公式

定理 2.1. 设 D 为曲面 Σ 上由分段光滑曲线所围成的区域, 则

$$\int_D K dA + \int_{\partial D} k_g dS + \sum \alpha_i = 2\pi\chi(D)$$

2.3 Gauss-Bonnet 定理的应用

Poincare 指标定理

Jacobi 定理

3 紧致曲面的高斯映射

3.1 紧致曲面的绝对全曲率

3.2 空间曲线的全曲率

4 凸曲面

4.1 凸曲面

定义 4.1. E^3 中的曲面 Σ 称为凸的, 如果其位于每点切平面的一侧.

命题 4.2. 设 Σ 为凸曲面, 则 $K \geq 0$.

证明. 对任意 $p_0 \in \Sigma$, 考虑 $f(p) = (\mathbf{r}(p) - \mathbf{r}(p_0)) \cdot \mathbf{n}(p_0)$, 其中 $\mathbf{n}(p_0)$ 是 p_0 处的单位外法向量.

由凸曲面定义, $f(p) \leq 0$, 并且在 p_0 处取到最大值.

因此 $0 \geq \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^\alpha \partial u^\beta}(p_0) \right) = (\mathbf{r}_{\alpha\beta}(p_0) \cdot \mathbf{n}(p_0))$, 即第二基本形式负定, 因此 $K \geq 0$. □

定理 4.3. 设 Σ 为 E^3 中的紧致曲面, 若 Σ 的 Gauss 曲率处处为正, 则 Σ 为凸曲面.

证明. □

4.2 积分公式

4.3 球面的判断

4.4 卵形面的刚性定理

4.5 凸曲面的 Minkowski 问题

附录 A

联络

1 矢量丛上的联络

定义 1.1. 矢量丛上的联络是一个映射

$$D : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(T^*M \otimes E),$$

它满足下列条件:

- (1) $D(s_1 + s_2) = D(s_1) + D(s_2), \forall s_1, s_2 \in \Gamma(E).$
- (2) $D(\alpha s) = d\alpha \otimes s + \alpha Ds, \forall s \in \Gamma(E), \alpha \in C^\infty(M).$

等价地, 矢量丛上的联络是一个映射:

$$\begin{aligned} D : \Gamma(TM) \times \Gamma(E) &\rightarrow \Gamma(E), \\ (X, Y) &\mapsto D_X Y \end{aligned}$$

它满足下列条件:

- (1) 关于 X 是 $C^\infty(M)$ 线性的
- (2) 关于 Y 是 \mathbb{R} 线性的
- (3) $D_X(fY) = (Xf)Y + fD_X Y.$

附录 B

一些总结

1

- ω_1^2 只依赖于第一基本形式，但它依赖于标架的选取，不是几何量.
- 克里斯托弗符号是内蕴量，但不是张量
 - “不是张量” 不是说它不可能是某个整体定义的量的分量.

在局部上，联络是由一组一次微分式给出的. 设 U 是 M 上的一个坐标域，
联络方阵在局部标架场改变时的变换公式

2 算子的局部性

3 我会算什么

- 本人习惯用下标代表行指标，用上标代表列指标.
- 给定两个坐标邻域，我会直接写出两个自然标架场之间的变换公式，也就是雅可比.
- 矩阵值的 1-形式，和，有一个矩阵，它的每个元素都是普通的 1-形式，是同一回事.
- 矩阵乘法是列指标与行指标的求和.
- 矩阵值的 1-形式的相关运算
 - 外微分：就是对每个分量做外微分
 - 张量积：如 $DS = \omega \otimes S$. 运算规律是矩阵乘法，元素与元素之间的运算是张量积.
 - 外积：如 $\Omega = d\omega - \omega \wedge \omega$. 运算规律是矩阵乘法，元素之间的运算是外积.
 - * 非常值得警醒的是，由于矩阵的非交换性，此时矩阵值形式的外积也是非交换的.
 - 数乘：如 $\omega' = dA \cdot A^{-1} + A \cdot \omega \cdot A^{-1}$. 运算规律是矩阵乘法，元素之间的运算是数乘.
 - 给定两个标架间的过渡矩阵，我会算联络矩阵的变换规律

$$S' = A \cdot S$$

$$DS' = D(A \cdot S)$$

$$= dA \otimes S + A \cdot DS$$

$$= dA \otimes (A^{-1} \cdot S') + A \cdot (\omega \otimes S)$$

$$= (dA \cdot A^{-1}) \otimes S' + (A \cdot \omega) \otimes (A^{-1} \cdot S')$$

$$= (dA \cdot A^{-1} + A \cdot \omega \cdot A^{-1}) \otimes S'$$

$$\omega' = dA \cdot A^{-1} + A \cdot \omega \cdot A^{-1}$$

$$\omega' \cdot A = dA + A \cdot \omega$$

$$d\omega' \cdot A - \omega' \wedge dA = dA \wedge \omega + A \cdot d\omega$$

$$d\omega' \cdot A - \omega' \wedge (\omega' \cdot A - A \cdot \omega) = (\omega' \cdot A - A \cdot \omega) \wedge \omega + A \cdot d\omega$$

$$(d\omega' - \omega' \wedge \omega')A = A(d\omega - \omega \wedge \omega)$$

附录 C

活动标架法

现在考虑 N 维欧式空间 \mathbb{R}^N 的刚体运动群 $E(N)$.

附录 D

复习课

1 title

粗体

斜体

粗斜体