Bravais lattice of 2 dim

小七不戚戚

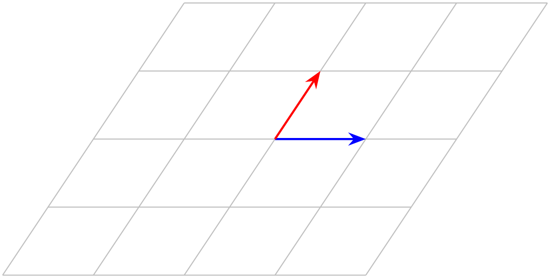
中国科学技术大学 计算与应用数学系

2025 年 4 月 10 日

考虑

$$\Lambda = \{n_1 v_1 + n_2 v_2 \mid n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}^2$$

其中 v_1, v_2 线性无关. 从代数的角度看, $\Lambda \cong \mathbb{Z}^2$.



想象给每个平行四边形铺上一样的瓷砖，瓷砖自身的图案可以没有任何对称性也可以带某种对称性．我们研究那些在变换前后使得格点完全吻合且瓷砖的图案也完全吻合的等距变换，称为 Λ 加该瓷砖的**空间群** G，它是 $E(2)$ 的子群．将它用 $E(2) \to O(2)$ 进行投影，得到 Λ 加该瓷砖的**点群** $\overline{G}$，它是 $O(2)$ 的子群．

我们也可以先不考虑贴的瓷砖，等价于贴的是纯白的瓷砖．此时只研究 Λ．如果 Λ 和 $\tilde{\Lambda}$ 有相同的空间群，则视作一样，在这个意义下可以将 Λ 分为 5 种，称作 5 种 Bravais lattice．如果两种 Bravais lattice 有相同的点群，则认为它们属于同一种 lattice system，一共有 4 种．三维时是 14 种 Bravais lattice 属于 7 种 lattice system．

命题: $O(2)$ 的有限子群只有 C_n 和 D_n, 其中 $n \geqslant 1$.

证明.
先考虑 $SO(2)$ 的有限子群. 因为 $SO(2)$ 中的元素是旋转, 可以找到该子群中旋转角度最小的元素, 利用带余除法容易证明该子群是循环群 C_n.
现在假设 G 是不包含在 $SO(2)$ 中的有限子群, 则存在 $F \in G$ 使得 $\det F = -1$, 即 F 是一个反射. 假设 $G \cap SO(2)$ 是一个 n 阶群, 有生成元 R. 那么
$\det(FR) = \det F \det R = -1$, 即 FR 也是一个反射. 因此 $(FR)^2 = I$, 这等价于
$FRF = R^{-1}$, 故 $G \cong D_n$. $\square$

O(2) O(2) 的子群一共是 C1C2C3C4C6D1D2D3D4D6

Oblique

Primitive rectangular

Centered rectangular

Square

谢谢!