范畴论

孙天阳

2023 年 6 月 8 日

目录

1 范畴

定义 1.1. 一个范畴 $\mathcal{C}$ 为一个数学系统

(1) $\mathcal{C}$ 有一些对象，记作 $X \in \mathcal{C}$

(2) 任意两个对象 $X, Y \in \mathcal{C}$，有 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$，称为 X 到 Y 的态射集.
满足 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \cap \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X', Y') = \varnothing$ 除非 $X = X'$ 且 $Y = Y'$.

(3) 态射集之间可定义复合

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) \\ (f, g) &\mapsto g \circ f \end{aligned}$$

满足

- 存在 $1_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ 使得 $f \circ 1_X = f, 1_X \circ f = f$
- $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

定义 1.2. 小范畴，局部小范畴.

来自集合的例子

集合范畴 $\mathcal{SET}$，

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{SET}) =$ 所有集合.
- 态射是关系.

来自点集拓扑的例子

拓扑空间范畴 $\mathcal{TOP}$，

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{TOP}) =$ 所有拓扑空间，
- 态射是拓扑空间之间的连续映射.

来自代数拓扑的例子

单纯复形范畴，参见代数拓扑笔记.
单纯复形偶范畴，参见代数拓扑笔记.

来自线性代数的例子

向量空间范畴 $\mathcal{VECT}$，

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{VECT}) =$ 所有向量空间，
- 态射是向量空间之间的线性映射.

来自近世代数的例子

群范畴 $\mathcal{GROUP}$，

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{GROUP}) =$ 所有群，
- 态射是群同态.

来自微分流形的例子

光滑流形 M 上的实向量丛范畴

来自层论的例子

一个拓扑空间 $(X, \mathscr{T})$ 作为一个范畴，

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{SET}) =X$ 的所有开集.
- 态射是嵌入映射.

2 对偶范畴

3 同构

定义 3.1. 设 $\mathbf{C}$ 是范畴，$f\colon X \to Y$ 是一个态射，

(1) 称 f 是单态射，如果 f 是左消去的，即对任意 Z 和 $g_i\colon Z \to X$，有

$$f \circ g_1 = f \circ g_2 \Longrightarrow g_1 = g_2.$$

(2) 称 f 是满态射，如果 f 是右消去的，即对任意 Z 和 $g_i\colon Y \to Z$，有

$$g_1 \circ f = g_2 \circ f \Longrightarrow g_1 = g_2.$$

(3) 称 f 是双态射，如果 f 既是单态射又是满态射.

(4) 称 f 是截面，如果 f 是某个态射的右逆，即存在 $g\colon Y \to X$ 使得 $g \circ f = \mathrm{Id}_X$.

(5) 称 f 是收缩，如果 f 是某个态射的左逆，即存在 $h\colon Y \to X$ 使得 $f \circ h = \mathrm{Id}_Y$.

命题 3.2. 记号同上，设 f 既是截面又是收缩，则 $g = h$. 称 g 为 f 的逆, 称 f 是同构.

证明.

$$g = g \circ \mathrm{Id}_Y = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = \mathrm{Id}_X \circ h = h.$$

□

4 始、终、零对象

定义 4.1.

- 称 $I \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ 中的始对象，如果对任意 $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ 有 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(I, X)$ 只包含一个元素.
- 称 $T \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ 中的终对象，如果对任意 $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ 有 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, T)$ 只包含一个元素.
- 称 $O \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ 中的零对象，如果它既是始对象又是终对象.

命题 4.2. *始/终/零对象在存在的前提下是唯一的.*

例 4.3. $\mathcal{SET}$ 中，$\varnothing$ 是始对象，独点集 $\{pt\}$ 是终对象，没有零对象.

5 零映射

6 乘积与上乘积

7 函子

8 幺半范畴

9 Abel 范畴

定义 9.1. 称范畴 $\mathbf{C}$ 为预加性范畴，如果

(1) $\mathrm{Hom}(A, B)$ 为 Abel 群. 将运算记作 $+$.

(2) 复合运算为 $\mathbb{Z}$-双线性, 即

$$f \circ (g+h) = (f \circ g) + (f \circ h), \quad (f+g) \circ h = (f \circ h) + (g \circ h).$$

定义 9.2. 加性范畴

定义 9.3. Abel 范畴

10 有零态射的范畴

定义 10.1. 称 $\mathbf{C}$ 是有零映射的范畴，如果对任意 $A, B \in \mathbf{C}$，存在态射 $0_{AB} \colon A \to B$，使得下图交换

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "0_{XY}"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, "0_{XZ}"] & Y \arrow[d, "f"] \\
Y \arrow[r, "0_{YZ}"'] & Z
\end{tikzcd}
$$

命题 10.2. 设 $\mathbf{C}$ 是有零映射的范畴，则 $\{0_{AB}\}$ 是唯一的.

证明. 假设有另一组 $\{\tilde{0}_{AB}\}$ 符合要求.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\tilde{0}_{XY}"] \arrow[d, "\tilde{0}_{XY}"'] \arrow[dr, "0_{XZ}", "\tilde{0}_{XZ}"'] & Y \arrow[d, "0_{YZ}"] \\
Y \arrow[r, "0_{YZ}"'] & Z
\end{tikzcd}
$$

□

命题 10.3. 预加性范畴是有零映射的范畴.

例 10.4. 含幺交换环范畴不是有零映射的范畴.

证明. 因为 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 到 $\mathbb{Z}$ 甚至没有态射. □

11 ker 与 coker

设 $\mathbf{C}$ 是有零映射的范畴

12 自然变换

13 函子范畴

为什么关心函子范畴

- many commonly occurring categories are (disguised) functor categories, so any statement proved for general functor categories is widely applicable;
- every category embeds in a functor category (via the Yoneda embedding); the functor category often has nicer properties than the original category, allowing certain operations that were not available in the original setting.

14 Yoneda 嵌入

15 正向极限与逆向极限