Notes on BM

孙天阳

2024 年 1 月 7 日

目录

1 定理 1

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 有界区域, 考虑

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

其中 $f \in L^1(\Omega)$.

定理 1.1. 对于任意的 $\delta \in (0, 4\pi)$,

$$\int_\Omega \exp\left\{\frac{4\pi - \delta}{\|f\|_1}|u(x)|\right\} \mathrm{d}x \leqslant \frac{4\pi^2}{\delta}(\operatorname{diam}\Omega)^2.$$

证明. 设 $R = \operatorname{diam}\Omega/2$, 所以 Ω 含于某个半径为 R 的开球 $B_R(x_0)$. 构造

$$\tilde{u}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{B_R(x_0)} \log\frac{2R}{|x-y|}|f(y)|\mathrm{d}y, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

$\tilde{u}(x)$ 显然是良好定义的, 下证 $\tilde{u}$ 是局部可积的, 只需对任意紧集 K, 证明

$$\int_K \int_{B_R(x_0)} \log(x-y)|f(y)|\mathrm{d}y\mathrm{d}x < +\infty,$$

这是显然的. 下证在分布的意义下, $-\Delta\tilde{u} = |f|$, 即证对于任意 $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, 有

$$-\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{u}\Delta\varphi\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} |f|\varphi\mathrm{d}x.$$

证明如下:

$$\begin{aligned} LHS &= -\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{2\pi}\int_{B_R(x_0)} \log\frac{2R}{|x-y|}|f(y)|\mathrm{d}y\Delta\varphi(x)\mathrm{d}x \\ &= -\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^n} \log\frac{2R}{|x-y|}|f(y)|\mathrm{d}y\Delta\varphi(x)\mathrm{d}x \\ &= -\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^n} \log\frac{2R}{|x-y|}\Delta\varphi(x)\mathrm{d}x|f(y)|\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)|f(y)|\mathrm{d}y = RHS. \end{aligned}$$

因为 $\tilde{u}$ 中 $\log 2R$ 项的存在, 对于 $x \in B_R(x_0)$, 我们有 $\tilde{u}(x) \geqslant 0$, 特别地, 在 $\partial\Omega$ 上有 $\tilde{u} \geqslant 0$. 由**极值原理**, 我们有

$$|u| \leqslant \tilde{u}, \quad x \in \Omega.$$

因此

$$\int_\Omega \exp\left\{\frac{4\pi-\delta}{\|f\|_1}|u(x)|\right\}\mathrm{d}x \leqslant \int_{B_R(x_0)} \exp\left\{\frac{4\pi-\delta}{\|f\|_1}\tilde{u}(x)\right\}\mathrm{d}x.$$

由 Jensen 不等式, 其中 $\eta = (4\pi - \delta)/2\pi$

$$\begin{aligned} \int_{B_R(x_0)} \exp\left\{\frac{4\pi-\delta}{\|f\|_1}\tilde{u}(x)\right\}\mathrm{d}x &\leqslant \int_{B_R(x_0)}\int_{B_R(x_0)} \frac{|f(y)|}{\|f\|_1}\left(\frac{2R}{|x-y|}\right)^\eta \mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ &\leqslant \int_{B_R(x_0)} \frac{|f(y)|}{\|f\|_1}\int_{B_R(x_0)}\left(\frac{2R}{|x-y|}\right)^\eta \mathrm{d}x\mathrm{d}y \end{aligned}$$

但对于 $y \in B_R(x_0)$, 我们有

$$\int_{B_R(x_0)} \left(\frac{2R}{|x-y|}\right)^\eta \mathrm{d}x \leqslant \int_{B_R(x_0)} \left(\frac{2R}{|x-x_0|}\right)^\eta \mathrm{d}x = 2^\eta \frac{\pi^2}{\delta} (\operatorname{diam}\Omega)^2 \leqslant \frac{4\pi^2}{\delta} \left(\operatorname{diam}\Omega\right)^2.$$

综上所述, 我们证明了

$$\int_\Omega \exp\left\{\frac{4\pi-\delta}{\|f\|_1}|u(x)|\right\} \mathrm{d}x \leqslant \frac{4\pi^2}{\delta} \left(\operatorname{diam}\Omega\right)^2.$$

$\square$