代数拓扑

孙天阳

2024 年 4 月 23 日

目录

1 概论

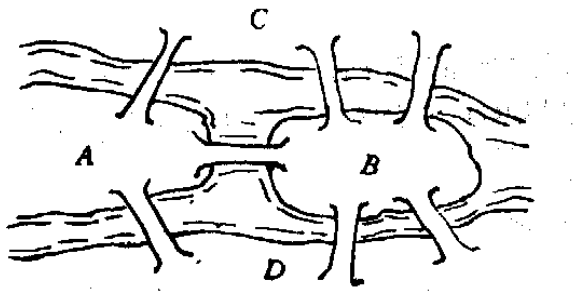
代数拓扑（同调论）广泛分布于数学的各个分支，

- 数论/代数，如：离散群
- 几何/拓扑，如：示性类，K-理论
- 分析/方程，如：Hodge 理论

代数拓扑起点：Euler 的两个结果

1. 哥尼斯堡七桥问题和一笔画问题
2. 多面体的 Euler 公式

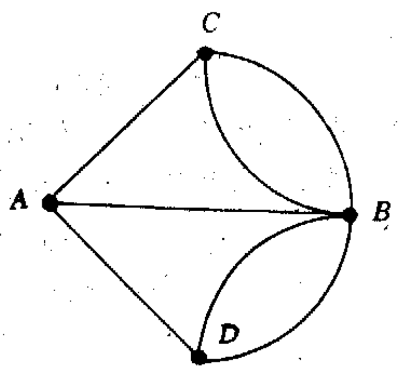
1.1 哥尼斯堡七桥问题



问：有没有一种散步方法，从某处出发，经过所有的桥恰好一次后回到原点？

数学研究步骤：具体问题 $\longrightarrow$ 抽象（合适的数学语言表达）$\longrightarrow$ 解决（找到合适的数学工具）$\longrightarrow$ 推广（公理化）$\longrightarrow \cdots$

Euler：抽象出图的概念. 图 $\begin{cases} \text{顶点} & \text{陆地，岛} \\ \text{棱} & \text{桥} \end{cases}$



连通图：任何两个顶点之间有一条由若干条棱构成的路径连结

假定每个棱有两个不同的顶点（即没有 self loops）

记图为 Γ，$\begin{cases} \text{顶点集}V(\Gamma) & v(\Gamma)=|V(\Gamma)| \\ \text{棱集}E(\Gamma) & e(\Gamma)=|E(\Gamma)| \end{cases}$

定义 1.1. *Γ 的一个 Euler 回路是指从某个点出发，沿着 Γ 的棱的一个路径，经过每条棱恰好一次，并且最终回到出发点.*

哥尼斯堡七桥问题 $\Longleftrightarrow$ 图 Γ 有没有 Euler 回路.

观察：

- 若 Γ 有 Euler 回路，则在任意顶点 $v \in V(\Gamma)$ 处，

$$\text{进入}v\text{的棱数} = \text{离开}v\text{的棱数}.$$

- Euler 回路跑遍所有的棱，特别地，跑遍 v 处的所有棱

定义 1.2. *$val(v) = v$ 的所有棱个数.*

定理 1.3. *若 Γ 有 Euler 回路 $\Longleftrightarrow$ 任意 $v \in V(\Gamma), val(V)$ 是偶数.*

证明.

$\Longrightarrow$

$$\begin{aligned} val(v) &= v\text{的所有棱个数} \\ &= \text{进入}v\text{的棱个数} + \text{离开}v\text{的棱个数} \\ &= 2 \times \text{进入}v\text{的棱个数} \end{aligned}$$

$\Longleftarrow$ 见图论书.

□

Euler 一笔画问题

定义 1.4. *Γ 的 Euler 道路是指沿 Γ 的一个路径，走过所有的棱（此时未必回到出发点）.*

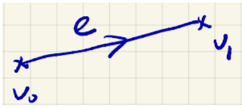
- Case 1 起点 $=$ 终点，此时回到 Euler 回路问题
- Case 2 起点 $\neq$ 终点
  - Case2.1 终点为偶顶点：仅有一个奇顶点
  - Case2.2 终点为奇顶点：恰有两个奇顶点

定理 1.5. *Γ 有 Euler 道路 $\Longleftrightarrow \Gamma$ 至多有两个奇顶点.*

证明. 见图论书. □

重新回顾

如下图给棱 e 一个定向



在此定向下，我们定义 $\partial e = v_1 - v_0$.

如果 Γ 有 Euler 回路，按 Euler 回路诱导 $E(\Gamma)$ 中的棱的定向，则有

$$\partial\left(\sum_{e\in E(\Gamma)} e\right) = 0.$$

定义 1.6.

- $C_1(\Gamma) = \left\{\sum_{e\in E(\Gamma)} a_e e \mid a_e \in \mathbb{R},\ \mathit{for}\ e \in E(\Gamma)\right\}$，即由 $E(\Gamma)$ 张成的 $\mathbb{R}$-线性空间.
- $C_0(\Gamma) = \left\{\sum_{v\in V(\Gamma)} b_v v \mid b_v \in \mathbb{R},\ \mathit{for}\ v \in V(\Gamma)\right\}$，即由 $V(\Gamma)$ 张成的 $\mathbb{R}$-线性空间.
- 记 $\dim C_1(\Gamma) = e(\Gamma), \dim C_0(\Gamma) = v(\Gamma)$.

事实上，若

(1) Γ 没有 self loop

(2) Γ 是定向图（即每条棱都指定了定向）

即可定义

$$\partial\colon C_1(\Gamma) \longrightarrow C_0(\Gamma).$$

定义 1.7.

- $H_1(\Gamma) = \ker\partial = \{c \in C_1(\Gamma) \mid \partial c = 0\}$
- $H_0(\Gamma) = \operatorname{coker}\partial = C_0(\Gamma)/\operatorname{im}\partial$
- 记 $h_1 := \dim H_1(\Gamma), h_0 := \dim H_0(\Gamma)$

命题 1.8. *$h_1(\Gamma)$ 和 $h_0(\Gamma)$ 不依赖于 Γ 的定向.*

推论 1.9. *若 $h_1(\Gamma) = 0$，则 Γ 一定无 Euler 回路.*

问题：如何计算 $h_1(\Gamma)$ 与 $h_0(\Gamma)$？

命题 1.10. 若 Γ 连通，则 $h_0(\Gamma)=1$，并且

$$h_0(\Gamma)-h_1(\Gamma)=v(\Gamma)-e(\Gamma).$$

证明. 定义

$$\begin{aligned} C_1(\Gamma) \xrightarrow{\partial} C_0(\Gamma) &\xrightarrow{\varphi} \quad \mathbb{R} \\ \sum_{v\in V(\Gamma)} b_v v &\longmapsto \sum_{v\in V(\Gamma)} b_v \end{aligned}$$

- φ 线性.
- φ 满射. 任取 $w\in V(\Gamma)$，有 $\varphi(\lambda w)=\lambda$.
- $\operatorname{im}\partial\subset\ker\varphi$. 只需对 $e\in E(\Gamma)$ 验证，显然有 $\varphi\partial(e)=0$.
- $\ker\varphi\subset\operatorname{im}\partial$. 设 $\sum\limits_v b_v v\in\ker\varphi$，即 $\sum\limits_v b_v=0$. 任意取定 $w\in V(\Gamma)$，则有

$$\begin{aligned} b_w &= -\sum_{v\neq w} b_v \\ \sum_v b_v v = b_w w + \sum_{v\neq w} b_v v &= \sum_{v\neq w} b_v(v-w) \end{aligned}$$

  因为 Γ 连通，所以 $v-w=\partial c_v$，其中 $c_v\in C_1(\Gamma)$.（c_v 不一定简单到是一条边.）
- 结合上述两条有 $\ker\varphi=\operatorname{im}\partial$，从而

$$H_0(\Gamma)=C_0(\Gamma)/\operatorname{im}\partial=C_0(\Gamma)/\ker\varphi\simeq\operatorname{im}\varphi=\mathbb{R}\Longrightarrow h_0(\Gamma)=1.$$

下证命题中的另一等式

$$\begin{aligned} &\dim\ker\partial-\dim\operatorname{coker}\partial = \operatorname{index}\partial \\ =&(\dim C_1(\Gamma)-\dim\operatorname{im}\partial)-(\dim C_0(\Gamma)-\dim\operatorname{im}\partial) \\ =&\dim C_1(\Gamma)-\dim C_0(\Gamma). \end{aligned}$$

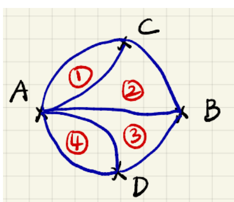
□

注记.

$$\underbrace{\operatorname{index}\partial}_{\text{分析}}=\underbrace{h_1(\Gamma)-h_0(\Gamma)}_{\text{拓扑}}=\underbrace{e(\Gamma)-v(\Gamma)}_{\text{几何}}.$$

注记. $e(\Gamma)=7, v(\Gamma)=4$. 则 $h_1(\Gamma)=h_0(\Gamma)+e(\Gamma)-v(\Gamma)=4$.

直观上，$h_1(\Gamma)$ 给出 Γ 的“洞个数”.



1.2 多面体的 Euler 公式

设 p 是一个凸多面体（此处不给出严格定义）. 记

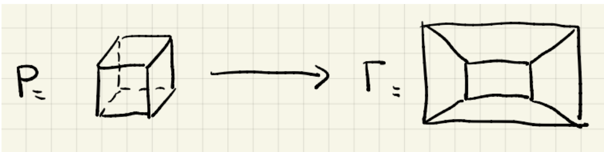
$$\begin{cases} v(p) & \text{顶点数} \\ e(p) & \text{棱数} \\ f(p) & \text{面数} \end{cases}$$

则

$$v(p) - e(p) + f(p) = 2.$$

Cauchy 的证明.

(1) 任取 P 的一个底面，将底面拉得足够大，得到一平面图 Γ



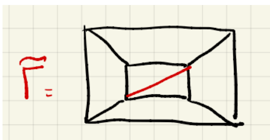
将 p 和 Γ 进行比较，

$$\begin{cases} v(p) = v(\Gamma) \\ e(p) = e(\Gamma) \\ f(p) = \#\left\{\mathbb{R}^2 \backslash \Gamma \text{的连通分支}\right\} \end{cases}$$

按习惯，定义 Γ 的面 =“有界”的面，则 $f(p) = f(\Gamma) + 1$. 等价于要证明

$$v(\Gamma) - e(\Gamma) + f(\Gamma) = 1.$$

(2) 在 Γ 的同属于一个面的两个未直接相连的顶点间增加一条连线，得到 $\widetilde{\Gamma}$



将 $\widetilde{\Gamma}$ 和 Γ 进行比较

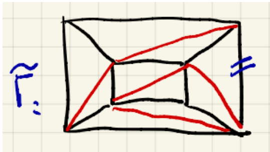
$$\begin{cases} v(\widetilde{\Gamma}) = v(\Gamma) \\ e(\widetilde{\Gamma}) = e(\Gamma) + 1 \\ f(\widetilde{\Gamma}) = f(\Gamma) + 1 \end{cases}$$

因此

$$v(\widetilde{\Gamma}) - e(\widetilde{\Gamma}) + f(\widetilde{\Gamma}) = v(\Gamma) - e(\Gamma) + f(\Gamma).$$

现设 Γ 的每个面都已经通过连线剖分成三角形，得到的新图仍记作 Γ.

(3) 从最外边去掉一条边，新图记作 $\widetilde{\Gamma}$.



将 $\widetilde{\Gamma}$ 和 Γ 进行比较

$$\begin{cases} v(\widetilde{\Gamma}) = v(\Gamma) \\ e(\widetilde{\Gamma}) = e(\Gamma) - 1 \\ f(\widetilde{\Gamma}) = f(\Gamma) - 1 \end{cases}$$

仍有

$$v(\widetilde{\Gamma}) - e(\widetilde{\Gamma}) + f(\widetilde{\Gamma}) = v(\Gamma) - e(\Gamma) + f(\Gamma).$$

(4) 在消边的时候还可能遇到如下情况

将 $\widetilde{\Gamma}$ 和 Γ 进行比较

$$\begin{cases} v(\widetilde{\Gamma}) = v(\Gamma) - 1 \\ e(\widetilde{\Gamma}) = e(\Gamma) - 1 \\ f(\widetilde{\Gamma}) = f(\Gamma) \end{cases}$$

仍有

$$v(\widetilde{\Gamma}) - e(\widetilde{\Gamma}) + f(\widetilde{\Gamma}) = v(\Gamma) - e(\Gamma) + f(\Gamma).$$

(5) 有限步之后，只剩一条线段，

$$v - e + f = 2 - 1 + 0 = 1.$$

□

重新叙述

设 $\mathbb{R}^2$ 中的闭凸集 A 由有限个三角形沿边粘贴得到.

记 $\Gamma(A)$ 为对应的平面图，$V(\Gamma), E(\Gamma), F(\Gamma)$ 分别为顶点集、棱集和有界面集.

对每个面逆时针定向，对每条棱任意定向.

分别记 $C_2(\Gamma), C_1(\Gamma), C_0(\Gamma)$ 为由 $F(\Gamma), E(\Gamma), V(\Gamma)$ 张成的 $\mathbb{R}$-线性空间.

定义算子

$$C_2(\Gamma) \xrightarrow{\partial_2} C_1(\Gamma) \xrightarrow{\partial_1} C_0(\Gamma),$$

其中 ∂_1 如前. $\partial_2 f = f$ 的棱的 ± 1 系数组合. 当 f 诱导的定向与棱给定的定向一致时取 1，相反取 -1. 说白了，$\partial_2 f$ 就是把 f 的棱按 f 诱导的定向加起来.

引理 1.11. $\partial_1\partial_2 = 0$

证明. 不妨设棱 f 诱导的定向与给定定向一致，若不然，也不影响 $\partial_2 f$ 的实际结果.

$\partial_1\partial_2 f = \partial_1(e_1+e_2+e_3) = v_1 - v_0 + v_2 - v_1 + v_0 - v_2 = 0.$ □

定义 1.12.

- $H_2(\Gamma) = \ker \partial_2$
- $H_1(\Gamma) = \ker \partial_1 / \operatorname{im} \partial_2$
- $H_0(\Gamma) = \operatorname{coker} \partial_1 = C_0(\Gamma)/\operatorname{im}\partial_1$

命题 1.13. $H_0(\Gamma) \simeq \mathbb{R}$.

定理 1.14. $\dim H_0(\Gamma) - \dim H_1(\Gamma) + \dim H_2(\Gamma) = \dim C_0(\Gamma) - \dim C_1(\Gamma) + \dim C_2(\Gamma)$.

证明.

$$\begin{aligned}
&\dim C_2(\Gamma) - \dim C_1(\Gamma) + \dim C_0(\Gamma)\\
=&\dim\ker\partial_2 - \dim\ker\partial_2 + \dim C_2(\Gamma) - \dim C_1(\Gamma) + \dim C_0(\Gamma)\\
=&\dim H_2(\Gamma) + \dim\operatorname{im}\partial_2 - \dim C_1(\Gamma) + \dim C_0(\Gamma)\\
=&\dim H_2(\Gamma) + \dim\operatorname{im}\partial_2 - \dim\ker\partial_1 + \dim\ker\partial_1 - \dim C_1(\Gamma) + \dim C_0(\Gamma)\\
=&\dim H_2(\Gamma) - \dim H_1(\Gamma) - \dim\operatorname{im}\partial_1 + \dim C_0(\Gamma)\\
=&\dim H_2(\Gamma) - \dim H_1(\Gamma) + \dim H_0(\Gamma).
\end{aligned}$$

□

定理 1.15. $H_2(\Gamma) = \{0\}$.

证明. 设 $\sum_f a_f f \in \ker\partial_2$. 考虑相邻的两个面 f_1, f_2，他们中间夹着一条棱 e. 经由 ∂_2 作用能提供 e 的只有 f_1 和 f_2. 注意 f_1 和 f_2 诱导 e 的定向是相反的，因此为了保证经由 ∂_2 作用后 e 前系数为零，必须有 $a_{f_1} = a_{f_2}$. 由连通性知 $a_f \equiv a$. 但注意

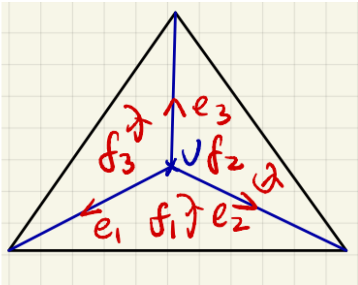
$$\textstyle\sum_f \partial f = \sum \text{边界棱} \neq 0.$$

因此 $a\displaystyle\sum_f \partial f = 0 \Longrightarrow a = 0 \Longrightarrow \ker\partial_2 = \{0\}$.

□

push to boundary 技巧

假设 v 为内点，记 $f_1, \cdots, f_k$ 为以 v 为顶点的所有面，记 $e_1, \cdots, e_k$ 为以 v 为端点的所有面. 对每个面逆时针定向，取 e_i 定向为 f_i 诱导定向，如下图所示



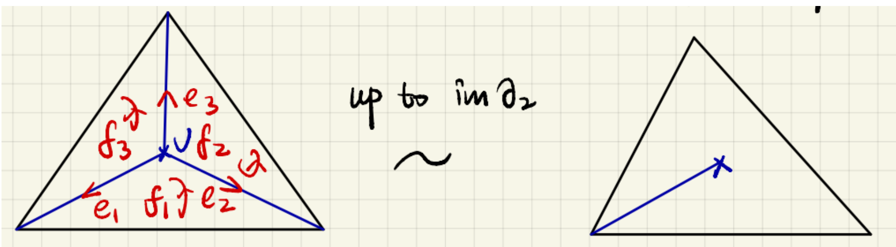
注意到有

$$e_2 = e_3 + \partial f_2 + \text{边界棱}$$

因此，对于 $\sum b_i e_i$，其中的 e_2 项总可以被 e_3 项在相差边界棱和 $\operatorname{im}\partial_2$ 中元素的意义下替换. 同理 e_3 可以被 e_1 替换. 因此

$$b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3 = \tilde{b}_1 e_1 + \partial(\text{sth}) + \text{边界棱}$$

即



特别地，假设我们还有 $\partial_1(\sum b_i e_i) = 0$，那么

$$\partial_1(\tilde{b}_1 e_1) + \underbrace{\partial_1\partial_2(\text{sth})}_{\text{自动为零}} + \underbrace{\partial_1(\text{边界棱})}_{\text{只贡献边界顶点}} = 0 \Longrightarrow \tilde{b}_1 = 0.$$

即

$$b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3 = \partial(\text{sth}) + \text{边界棱}.$$

Chapter 1

单纯同调

1 单纯复形和单纯同调群

定义 1.1 (单形)**.** 设 $x_0, \cdots, x_n \in \mathbb{R}^N$. 若 $x_1 - x_0, \cdots, x_n - x_0$ 线性无关，则称

$$\left\{ x_0 + \sum_{i=1}^{n} t_i(x_i - x_0) \mid 0 \leqslant t_i \leqslant 1, \sum_{i=1}^{n} t_i = 1 \right\}$$

为以 $x_0, \cdots, x_n$ 为顶点的 n-单形.

注记. $x_1 - x_0, \cdots, x_n - x_0$ 线性无关 $\iff x_0 - x_i, \cdots, x_{i-1} - x_i, x_{i+1} - x_i, \cdots, x_n - x_i$ 线性无关.

证明. $\sum_{j=0}^{n} \lambda)j(x_j - x_0) + \sum_{j=0}^{n} \lambda_j(x_0 - x_i) = 0$

$\sum_{j=0}^{n} \lambda_j$ □

注记 (重心坐标)**.**

$$x_0 + \sum_{i=1}^{n} t_i(x_i - x_0) = \left(1 - \sum_{i=1}^{n} t_i\right) x_0 + \sum_{i=1}^{n} t_i x_i$$

$\sum_{i=0}^{n} s_i x_i$

$(s_0, \cdots, s_n)$ 称为重心坐标.

定义 1.2. 称由 $\{x_0, \cdots, x_n\}$ 的非空子集决定的单形为由 $\{x_0, \cdots, x_n\}$ 决定的单形的面.

定向 n-单形与 ∂ 算子

指定了顶点的排列顺序 $[x_0, \cdots, x_n]$ 的单形称为定向 n-单形. 认为相差偶置换的两个排列决定相同的定向. n-单形有且只有两种定向.

$\partial_n[x_0, \cdots, x_n] := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i [x_0, \cdots, \hat{x}_i, \cdots, x_n]$

验证良定性

引理 1.3. $\partial_{n-1}\partial_n = 0$

证明.

$$
\begin{aligned}
&\partial_{n-1}\partial_n[x_0,\cdots,x_n]\\
=&\partial_{n-1}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i[x_0,\cdots,\hat{x}_i,\cdots,x_n]\\
=&\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\sum_{0\leqslant j<i}(-1)^j[x_0,\cdots,\hat{x}_j,\cdots,\hat{x}_i,\cdots,x_n]
\end{aligned}
$$

□

有限单纯复形

定义 1.4. 设 $K=\left\{\mathbb{R}^N\text{中的一些单形}\right\}$，若 K 满足

(0) $\#K<\infty$.

(1) $\sigma\in K\Longrightarrow\sigma$ 的每个面 $\tau\in K$.

(2) $\sigma_1,\sigma_2\in K$，若 $\sigma_1\cap\sigma_2\neq\varnothing$，则它是 σ_1 及 σ_2 的面.

则称 K 为 $\mathbb{R}^N$ 中的有限单纯复形. 设

$$|K|=\bigcup_{\sigma\in K}\sigma\subset\mathbb{R}^N,$$

赋予 $|K|$ 子空间拓扑. 称 $|K|$ 为 K 的底空间，称 K 为 $|K|$ 的一个三角剖分.

单纯同调

设 K 是一个有限单纯复形.

定义 1.5. $C_p(K):=\left\{\sum\limits_{\substack{\sigma\in K\\ \dim\sigma=p}}a_\sigma[\sigma]\mid a_\sigma\in\mathbb{R}\right\}$

称 $C_p(K)$ 中的元素为 p 链
$C_p(K)\xrightarrow{\partial_p}C_{p-1}(K)$
$0\xrightarrow{\partial_{n+1}}C_n(K)\ \overset{\partial_n}{under}$
$H_p(K)=\ker\partial_p/\operatorname{im}\partial_{p+1}$
$b_p(K)=\dim H_p(K)$

2 Euler-Poincaré 定理与强 Morse 不等式

定理 2.1 (Euler-Poincaré)**.** 设 K 为 n 维有限单纯复形，则

$$\sum_{p=0}^{n}(-1)^p \dim C_p(K) = \sum_{p=0}^{n}(-1)^p b_p(K).$$

证明一. 有如下短正合列

$$0 \longrightarrow \operatorname{im}\partial_{p+1} \longrightarrow \ker\partial_p \longrightarrow H_p \longrightarrow 0 \Longrightarrow b_p(K) = \dim\ker\partial_p - \dim\operatorname{im}\partial_{p+1}$$
$$0 \longrightarrow \operatorname{im}\partial_p \longrightarrow C_{p-1} \longrightarrow \operatorname{coker}\partial_p \longrightarrow 0 \Longrightarrow \dim\operatorname{im}\partial_p = \dim C_{p-1} - \dim\operatorname{coker}\partial_p$$

□

证明二. 有如下短正合列

$$0 \longrightarrow \operatorname{im}\partial_{p+1} \longrightarrow \ker\partial_p \longrightarrow H_p \longrightarrow 0 \Longrightarrow b_p(K) = \dim\ker\partial_p - \dim\operatorname{im}\partial_{p+1}$$
$$0 \longrightarrow \ker\partial_p \longrightarrow C_p \longrightarrow \operatorname{im}\partial_p \longrightarrow 0 \Longrightarrow \dim C_p = \dim\ker\partial_p + \dim\operatorname{im}\partial_p$$

容易看出定理正确，因为

- 对于每个 p，$b_p(K)$ 和 $\dim C_p$ 中有相同符号的 $\dim\ker\partial_p$，而求和中二者前面的符号也相同.
- 考虑 $0 \leqslant p \leqslant n-1$.
  - $b_p(K)$ 中，出现了负的 $\dim\operatorname{im}\partial_{p+1}$
  - $\dim C_{p+1}$ 中，出现了正的 $\dim\operatorname{im}\partial_{p+1}$
  - 而在求和中，$b_p(K)$ 与 $\dim C_{p+1}$ 的符号刚好不同，正好抵消.
- 最后剩下一个 $\dim\operatorname{im}\partial_0$ 无人抵消，但它本身是零.

□

定理 2.2.

证明. $R(t) = (1+t)^{-1}(c(t)-p(t)) = \sum_{s=0}^{\infty}(-t)^s$ □

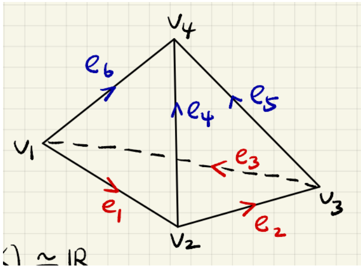
以后会证明，三角剖分算出来的欧拉示形数不依赖于三角剖分.
陈：欧拉示性数

强 Morse 不等式

3 例子

球面

取正四面体 K



这是一个二维单纯复形. 我们来计算它的各阶实系数单纯同调群.

- $H_0(K)$. 由连通性，$H_0(K) \simeq \mathbb{R}$.
- $H_1(K) = \ker \partial_1 / \operatorname{im} \partial_2$. 设

  $$\partial(a_i e_i) = 0 \Longrightarrow (-a_1 + a_3 - a_6)v_1 + (a_1 - a_2 - a_4)v_2 + (a_2 - a_3 - a_5)v_3 + (a_4 + a_5 + a_6)v_4 = 0$$

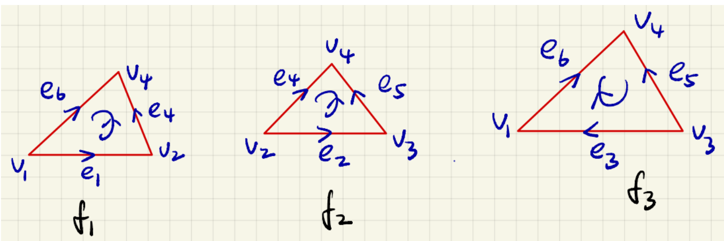
  其中有 6 个未知数，6 是棱的条数；有 4 个方程，4 是顶点的个数. 但其中只有 3 个独立方程. 解得

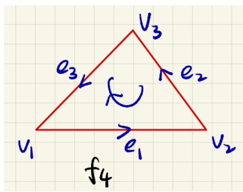
  $$\begin{cases} a_4 = a_1 - a_2 \\ a_5 = a_2 - a_3 \\ a_6 = a_3 - a_1 \end{cases}.$$

  所以

  $$\begin{aligned} & a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4 + a_5e_5 + a_6e_6 \\ =& a_1(e_1 + e_4 - e_6) + a_2(e_2 - e_4 + e_5) + a_3(e_3 - e_5 + e_6) \\ =& a_1\partial f_1 + a_2\partial f_2 + a_3 \partial f_3 \in \operatorname{im}\partial_2 \Longrightarrow H_1(K) = 0. \end{aligned}$$

  其中

  注意到面的定向都使得右手大拇指指向外.

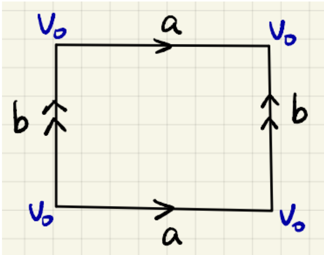
- $H_2(K) = \ker \partial_2$.

  对任意一条棱，它属于两个面，容易验证这两个面在棱的诱导定向相反. 因此

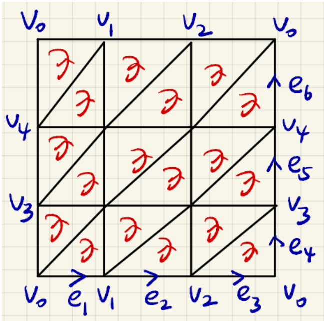
  $$\partial(a_i f_i) = 0 \Longrightarrow a_i \equiv 1 \Longrightarrow \dim \ker \partial_2 = 1 \Longrightarrow H_2(K) \simeq \mathbb{R}.$$

环面

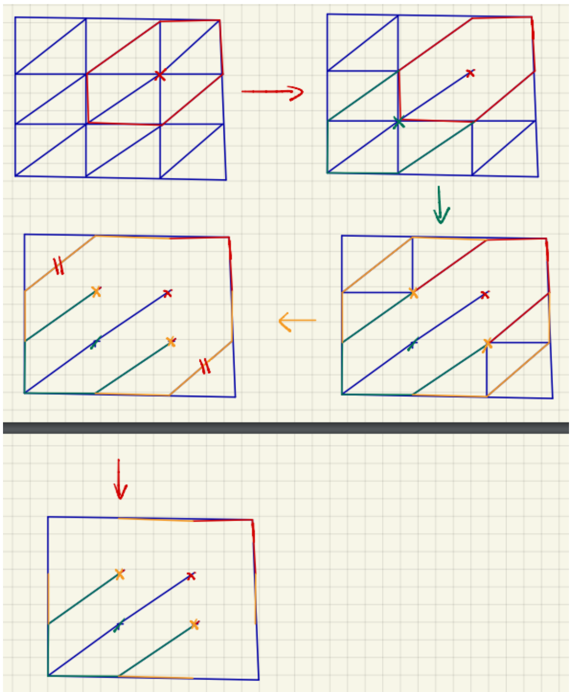
环面的三角剖分不容易直接给出，我们先考虑环面的多边形表示



再在此基础上给出三角剖分



- 由连通性，$H_0(K) \simeq \mathbb{R}$.
- $H_1(K) = \ker \partial_1 / \operatorname{im} \partial_2$. 先利用 push to boundary 技巧对上图进行简化，



任取 $\sum c_e e$，则可知存在 $f \in C_2(K)$ 和 $a_i \in \mathbb{R}$，使得

$$\sum c_e e = \partial_2 f + \sum a_i e_i.$$

若 $\sum c_e e \in \ker \partial_1$，则

$$0 = \partial_1 \sum c_e e = \partial_1 \partial_2 f + \partial_1 \sum a_i e_i \Longrightarrow \sum a_i \partial_1 e_i = 0.$$

即

$$(a_1 - a_2)v_1 + (a_2 - a_3)v_2 + (a_4 - a_5)v_3 + (a_5 - a_6)v_4 + (-a_1 + a_3 - a_4 + a_6)v_0 = 0.$$

解得

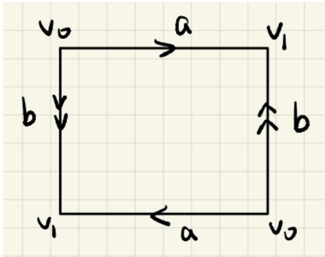
$$a_1 = a_2 = a_3, \quad a_4 = a_5 = a_6.$$

整理一下我们上面得到的结果便是，对于任意的 $E \in \ker \partial_1$，存在 $F \in C_2(K)$ 及 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$，使得

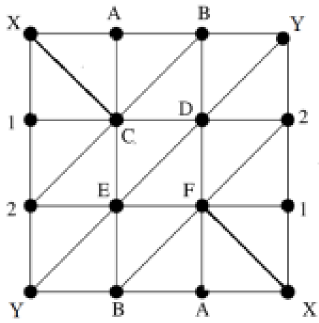
$$E = \partial_2 F + \ \alpha(e_1 + e_2 + e_3) + \beta(e_4 + e_5 + e_6).$$

$\mathbb{RP}^2$

考虑 $\mathbb{RP}^2$ 的多边形表示



及其三角剖分



- 由连通性，$H_0(K) \simeq \mathbb{R}$.
- $H_1(K) = \ker \partial_1 / \operatorname{im} \partial_2$. 由 push to boundary 技巧，对任意的 $E \in \ker \partial_1$，存在 $F \in C_2(K)$ 使
$$E = \partial_2 F + \sum a_i e_i.$$
两边用 ∂_1 作用得 $a_i \equiv a$. 所以 $E = \partial_2 F + a \sum e_i$.
注意到 $\partial_2 \sum f = -2 \sum e_i$. 所以 $E = \partial_2 \left(F - \dfrac{a}{2} \sum f \right)$. 即 $H_1(K) = \{0\}$.
- $H_2(K) = \ker \partial_2$. 设 $\sum a_f f \in \ker \partial_2$，则 $a_f \equiv a$. 但 $\partial_2 \sum f = -2 \sum e_i \neq 0$.
所以 $a = 0$，即 $H_2(K) = \{0\}$.

Klein 瓶

总结

- 计算 $H^2(K,\mathbb{R})$
  - 设 $\sum a_f f \in \ker \partial_2$，由连通性的论证知 $a_f \equiv a$.
  - 转化到 $\partial_2 \sum f$ 的计算. 若为零，则 $H^2(K,\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}$；若不为零，则 $H^2(K,\mathbb{R}) = \{0\}$.
  - 为零的例子：球面，环面.
  - 不为零的例子：$\mathbb{RP}^2$.
- 计算 $H^1(K,\mathbb{R})$
  - 由 push to boundary 技巧，对任意的 $E \in C_1(K)$，存在 $F \in C_2(K)$ 使得
  $$E = \partial_2 F + \sum a_i e_i.$$
  - 当 $E \in \ker \partial_1$ 时，也有 $\sum a_i e_i \in \ker \partial_1$，从而我们得到一些系数 a_i 的关系式.
    * 球面时，$a_4 = a_1 - a_2, a_5 = a_2 - a_3, a_6 = a_3 - a_1$.
    * 环面时，$a_1 = a_2 = a_3, \quad a_4 = a_5 = a_6$.
    * $\mathbb{RP}^2$ 时，$a_i \equiv a$.
  - 剩下多少个自由的系数，我们就有多少个闭链的生成元.
    * 球面时，$a_i e_i = a_1(e_1 + e_4 - e_6) + a_2(e_2 - e_4 + e_5) + a_3(e_3 - e_5 + e_6)$
    * 环面时，$a_i e_i = \alpha(e_1 + e_2 + e_3) + \beta(e_4 + e_5 + e_6)$
    * $\mathbb{RP}^2$ 时，$a_i e_i = a \sum e_i$
  - 在这些生成元中，有些其实也是边缘链
    * 球面时，$\partial f_1 = e_1 + e_4 - e_6, \partial f_2 = e_2 - e_4 + e_5, \partial f_3 = e_3 - e_5 + e_6$
    * $\mathbb{RP}^2$ 时，$-\frac{1}{2}\partial \sum f = \sum e_i$.

    在这些情形中，$H^1(K,\mathbb{R}) = \{0\}$.
- 刨除掉边缘链，剩下的便是同调群中的元素. 我们要做的便是看清同调群的代数结构，构造从 1 维闭链群到代数结构的同态，最后证明 ker 是边缘链.
  - 环面时，$e_1 + e_2 + e_3$ 和 $e_4 + e_5 + e_6$ 都不是边缘. 因此猜出 $H^1(K,\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$.

    下面我们想定义 $\varphi\colon \ker \partial_1 \to \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}, E \mapsto (\alpha, \beta)$.

    为此我们需验证对于每个 E 只有一组 (α, β).

    只需验证 $E = 0$ 时 $\alpha = \beta = 0$.

    设 $\partial F + \alpha(e_1 + e_2 + e_3) + \beta(e_4 + e_5 + e_6) = 0$.

    设 $F = \sum a_f f$. 由连通性知 $a_f \equiv f$，则 $\partial F = a\partial \sum f = 0$.

    因此 $\alpha(e_1 + e_2 + e_3) + \beta(e_4 + e_5 + e_6) = 0 \Longrightarrow \alpha = \beta = 0$.

    从而 φ 良定，易见 φ 为满射. 易见 $\ker \varphi = \operatorname{im} \partial_2$.

    所以 $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \simeq \ker \partial_1 / \ker \varphi = \ker \partial_1 / \operatorname{im} \partial_2 = H^1(K,\mathbb{R})$.

$\mathbb{Z}$-系数同调

考虑

4 锥的同调群

9 月 21 日讲义

$K = \mathbb{R}^N$ 中单纯复形

$\mathbb{R}^N \subset \mathbb{R}^{N+1}, (x_1, \cdots, x_N) \mapsto (x_1, \cdots, x_N, 0)$

$v_0 = (0, \cdots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{N+1}$

将 v_0 与 K 中的点连线

上述集合构成 $\mathbb{R}^{N+1}$ 中的单纯复形

称为 K 上锥复形，记作 $\hat{K}$

命题 4.1. $H_n(\hat{K}; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = 0 \\ 0, & n > 0 \end{cases}$

注记. 有限生成阿贝尔群，实系数相当于 *tensor* 上 $\mathbb{R}$ 后把挠部分杀掉.

证明. $C_n(\hat{K}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{T} C_{n+1}(\hat{K}, \mathbb{Z})$

$[x_0, \cdots, x_n] \longmapsto \begin{cases} [v_0, x_0, \cdots, x_n] & v_0 \neq x_i \\ 0 \end{cases}$

验证 $\partial T + T\partial = \mathrm{Id}$

如果 $v_0 \neq x_i \forall i$

$(\partial T + T\partial)[x_0, \cdots, x_n] = \partial[v_0, x_0, \cdots, x_n] + T\sum_{i=0}^{n}(-1)^i[x_0, \cdots, \hat{x}_i, \cdots, x_n]$

$= [x_0, \cdots, x_n] + \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}[v_0, x_0, \cdots, \hat{x}_i, \cdots, x_n]$

$+ \sum_{i=0}^{n}(-1)^i[v_0, x_0, \cdots, \hat{x}_i, \cdots, x_n]$

$= [x_0, \cdots, x_n]$

如果 $x_0 = v_0$

$\partial T[x_0, \cdots, x_n] = 0$

$T\partial[v_0, x_1, \cdots, x_n] = [v_0, x_1, \cdots, x_n]$

上述计算需要 $n > 0$ □

$S_n = \partial \Delta_{n+1}$

Δ_{n+1} 看成 Δ_n 上的锥

$C_p(\partial \Delta_{n+1}) = \begin{cases} C_p(\Delta_{n+1}) & 0 \leqslant p \leqslant n \\ 0 & p > n \end{cases}$

$0 \leqslant p \leqslant n-1, H_p(S^n; \mathbb{Z}) = H^p(\Delta^{n+1}, \mathbb{Z}) = H_p(\hat{\Delta}_n, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & p = 0 \\ 0, 0 < p \leqslant n-1 \end{cases}$

$H_n(\partial \Delta_{n+1}) = \ker(\partial_n) =$

手术

$n = a + b + 1$

M^n

挖掉 $D^{a+1} \times \partial D^{b+1} \hookrightarrow M^n$

沿着边界 $\partial D^{a+1} \times \partial D^{b+1} = S^a \times S^b$ 站上 $\partial D^{a+1} \times D^{b+1}$

给定单纯复形 K_1, K_2

子单纯复形 L_1, L_2

设 L_1, L_2 分别同构于 L

$K_1 \cup_L K_2$

$C_n(K_1 \cup_L K_2) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(K_1 \cup_L K_2)$

$\{C_k\}_{0 \leqslant k \leqslant n}$ 有限维向量空间（群，环，模）∂

5 相对单纯同调群与 Mayer-Vietoris 序列

9 月 21 日讲义第 12 页

定义 5.1. 设 K 是单纯复形，$L \subset K$ 是子单纯复形，称

$$C_n(K,L) := C_n(K)/C_n(L)$$

为单纯复形偶 (K,L) 的相对 n-链群.

引理 5.2. 设 $f\colon V_1 \to V_2$ 满足 $f(W_1) \subset W_2$，则如下图表交换

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"] & V_2 \arrow[d, "\pi"] \\ V_1/W_1 \arrow[r, "\tilde{f}"] & V_2/W_2 \end{tikzcd}.$$

定义 5.3. 将链复形

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1}(K,L) \xrightarrow{\partial} C_n(K,L) \xrightarrow{\partial'} C_{n-1}(K,L) \longrightarrow \cdots$$

的同调群记作 $H_n(K,L)$，称为单纯复形偶 (K,L) 的第 n-阶相对同调群.

回到原始问题，设 L 为一单纯复形，可以嵌入到两个单纯复形 K_1, K_2 中作为子单纯复形，研究 $H_*(K_1 \cup_L K_2)$ 的计算问题.

本质上我们使用的是如下命题

命题 5.4. 设 W_1, W_2 是向量空间，$V = W_1 \cap W_2$，则有短正合列

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow V \longrightarrow & W_1 \oplus W_2 \longrightarrow W_1 + W_2 \longrightarrow 0 \\ & (w_1, w_2) \longmapsto w_1 + w_2 \\ w \longmapsto & (w, -w) \end{aligned}$$

命题 5.5.

$$C_n(K_1 \cup_L K_2) = C_n(K_1) + C_n(K_2), \quad C_n(K_1) \cap C_n(K_2) = C_n(L).$$

向量空间粘接

设 W_1, W_2 为两个向量空间，$V = W_1 \cap W_2$，则 $W_1 + W_2$ 满足如下的万有性质

$$\begin{array}{ccc} V & W_1 & \\ W_2 & W_1 + W_2 & \\ & & E \end{array}$$

拓扑空间粘接

6 单纯映射

在本节中，我们希望定义单纯映射的概念，进而得到单纯复形范畴；我们应该期待，由单纯复形之间的单纯映射可以诱导链复形之间的链映射，得到单纯复形范畴到链复形范畴的函子.

- 单纯映射的定义
- 确实构成单纯复形范畴（复合还是单纯映射）
- 单纯同构. 范畴论中的老生常谈
- 单纯映射诱导的链映射（定义 + 验证它确实为链映射）
- 函子性
- 单纯复形偶范畴

设 K, L 是单纯复形，$K^{(0)}, L^{(0)}$ 分别是 K, L 的 0-维骨架.

引理 6.1. 称 $f\colon K \to L$ 为单纯映射，如果 $f^{(0)}\colon K^{(0)} \to L^{(0)}$ 满足对任意 $\{v_0, \cdots, v_p\}$ 为 K 中某个 p-单形的全部顶点，有 $\left\{f^{(0)}(v_0), \cdots, f^{(0)}(v_p)\right\}$ 为 L 中某单形的顶点. 此时 $f^{(0)}$ 决定了 K 中任一单形到 L 中某个单形的映射

$$f(s_0v_0 + \cdots + s_pv_p) = s_0f(v_0) + \cdots + s_pf(v_p)$$

称 f 为单纯映射.

引理 6.2. 设 $f\colon K \to L$ 及 $g\colon L \to M$ 为单纯映射，则 $g \circ f\colon K \to M$ 也为单纯映射.

定义 6.3. 若 $f\colon K \to L$ 及 $g\colon L \to K$ 为单纯映射满足

$$g \circ f = \mathrm{Id}_K, \quad f \circ g = \mathrm{Id}_L$$

则称 f 为从 K 到 L 的单纯同构.

定义 6.4. $f_\#\colon C_*(K) \to C_*(L), [v_0, \cdots, v_p] \mapsto [f(v_0), \cdots, f(v_p)]$.

引理 6.5. $f_\#$ 为链映射，即 $f_\# \circ \partial^K = \partial^L \circ f_\#$.

7 单纯同伦

9 月 28 日改版讲义第 22 页

一般来说，一个给定的同调群间的同态能由不同的单纯映射诱导. 这个事实引导我们开始思考如下问题：在什么条件下两个单纯映射诱导相同的同调群间的同态?

给定单纯映射 $f, g\colon K \to L$，我们希望找到条件使得对任意 $z \in Z_p(K)$ 有 $f_\#(z)$ 与 $g_\#$ 是同调的. 换句话说，我们希望找到在什么条件下存在一个映射 D 对每个 K 中的 p-维闭链 z 指定 L 中的一个 $q+1$-维链 Dz 使得

$$\partial Dz = g_\#(z) - f_\#(z).$$

$\Delta_n \times I$ 上的单纯复形结构

同伦不变性

定义 7.1. 设 $f_0, f_1\colon K \to L$ 为两个单纯映射，若有一单纯映射 $F\colon K \times I \to L$ 使得

$$F \circ i_0 = f_0, \quad F \circ i_1 = f_1$$

其中 $i_0\colon K \to K \times I, i_1\colon K \to K \times I$ 是自然的包含映射，将每个 K 中单形 Δ 分别映到 $\Delta \times \{0\}$ 和 $\Delta \times \{1\}$. 称 f_0 与 f_1 单纯同伦，记作 $f_0 \overset{F}{\sim} f_1$. 类似地，可以定义单纯同伦等价的概念.

我们已经证明，存在 $P\colon C_n(K) \to C_{n+1}(K \times I)$ 使得对于 K 中的任一单形 σ 有

$$i_{1\#}(\sigma) - i_{0\#}(\sigma) = (\partial P + P\partial)\sigma.$$

将 $F_\#$ 作用到上式两侧，得到

$$F_\# \circ i_{1\#}(\sigma) - F_\# \circ i_{0\#}(\sigma) = (F_\# \partial^K P + F_\# P \partial^K)\sigma = \partial^L F_\# P\sigma + F_\# P \partial^K \sigma$$

定理 7.2. 设 $f_0, f_1\colon K \to L$ 是单纯同伦的单纯映射，则 $(f_0)_\#, (f_1)_\#$ 是链同伦的.

8 单纯同调的 Eilenberg-Steenrod 公理

(a) $\forall\ n \geqslant 0, (K, L) \to H_n(K, L)$

(b) $f\colon (K_1, L_1) \to (K_2, L_2)$ 单纯映射

(c) 任意 (K, L)，存在 $\partial_*\colon H_n(K, L) \to H_{n-1}(L)$

满足公理

(1) $i\colon (K, L) \to (K, L)$ 恒同，

(2) $(K_1, L_1) \xrightarrow{f} (K_2, L_2) \xrightarrow{f_2} (K_3, L_3)$

(3) $f\colon (K_1, L_1) \to (K_2, L_2)$

$$\begin{array}{cc} H_n(K_1, L_1) & H_{n-1}(L_1) \\ & \\ H_n(K_2, L_2) & H_{n-1}(L_2) \end{array}$$

(4) $\longrightarrow H_n(L)\ \overset{i_*}{H_n}(K)$

(5) 同伦.$f_i\colon (K_1, L_1) \to (K_2, L_2)$ 单纯同伦，那么 $(f_0)_* = (f_1)_*$

(6) 切除.(K, L) 是单纯复形偶，$U \subset |K|$，$\overline{U} \subset |L|$，假定 $|K| - U = |K_1|, |L| - U = |L_1|$

证明. □

(7) 维数公理.

$$H_n(\Delta_0) = \begin{cases} G, & n = 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

证明. □

(8) 紧支集公理. 任意 $c \in H_n(K, L)$，存在有限复形对

9 代数范畴的同调论

10 月 12 日讲义第 5 页

Chapter 2

奇异同调

1 奇异链复形与奇异同调群

考虑

$$\mathbb{R}^\infty = \left\{(x_1, x_2, \cdots, x_m, \cdots) \mid \text{只有有限个} x_i \neq 0\right\},$$

其上有自然的线性结构、内积结构. 记 $e_0 = (0, 0, \cdots, 0, \cdots)$, $e_q = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots)$, 对任意 $q \geqslant 0$, $e_0, e_1, \cdots, e_q$ 张成 $\mathbb{R}^\infty$ 中的一个 q 维凸多面体

$$\Delta^q = \left\{\lambda_0 e_0 + \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_q e_q \mid \lambda_i \geqslant 0, \sum \lambda_i = 1\right\}$$

称作 q 维标准单形. $(\lambda_0, \cdots, \lambda_q)$ 称为 Δ^q 中点 $v = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_q e_q$ 的重心坐标. 对于 $0 \leqslant i \leqslant q$, 定义线性映射

$$F_i \colon \Delta^{q-1} \longrightarrow \Delta^q, \quad e_0 e_1 \cdots e_{q-1} \longmapsto e_0 e_1 \cdots e_{i-1} \hat{e}_i e_{i+1} \cdots e_q$$

称其为 Δ^q 的第 i 个面算子.

定义 1.1. 设 X 是拓扑空间, 连续映射

$$\sigma \colon \Delta^q \longrightarrow X$$

称为 X 的一个 q 维奇异单形. X 中所有的 q 维奇异单形生成的自由 Abel 群

$$S_q(X) = \{n_1\sigma_1 + n_2\sigma_2 + \cdots + n_k\sigma_k \mid n_i \in \mathbb{Z}\}$$

称为 X 的 q 维奇异链群.

定义 1.2. 设 $q > 0$, $\sigma \in S_q(X)$, 则 $\sigma \circ F^i \in S_{q-1}(X)$. 定义

$$\partial_q(\sigma) = \sum (-1)^i \sigma \circ F^i \in S_{q-1}(X).$$

将 ∂_q 线性延拓成为整个 $S_q(X)$ 上的算子, 称 $\partial_q \colon S_q(X) \longrightarrow S_{q-1}(X)$ 为 q 维边缘同态.

引理 1.3. 对于任意 $q \geqslant 0$, 有 $\partial_q \circ \partial_{q+1} = 0$.

证明. $\square$

例 1.4. 设 X 是道路连通的, 则 $H_0(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. 如果 X 有 n 个道路连通分支, 则 $H_0(Z) = \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}$.

例 1.5. 设 $\sigma\colon \Delta^1 \to X$ 是 X 中的一条道路,

定义 1.6. 设 $f\colon X \to Y$ 是连续映射, 则可以诱导 $S(X)$ 到 $S(Y)$ 的映射

$$f_{\#}\colon S(X) \longrightarrow S(Y), \quad \sigma \longmapsto f \circ \sigma,$$

并且满足 $f_{\#} \circ \partial = \partial \circ f_{\#}$, 即下图交换

$$\begin{array}{ccc} S_{q+1}(X) & S_q(X) & S_{q-1}(X) \\ \\ S_{q+1}(Y) & S_q(Y) & S_{q-1}(Y) \end{array}$$

2 奇异同调的同伦不变性

定理 2.1. 设 $f \simeq g \colon X \to Y$ 是同伦的连续映射, 则 $f_\#$ 与 $g_\#$ 链同伦.

考虑标准单形 $\Delta_n = [e_0, \cdots, e_n]$ 上的柱形 $\Delta_n \times I$. 记 $a_i = (e_i, 0), b_i = (e_i, 1)$.

我们定义 $P(\Delta_n) \in S_{n+1}(\Delta_n \times I)$ 如下

$$P(\Delta_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i [a_0, \cdots, a_i, b_i, \cdots, b_n].$$

其中 $[a_0, \cdots, a_i, b_i, \cdots, b_n]$ 表示将 Δ_{n+1} 的顶点逐一对应再线性延拓得到的连续映射.

我们使用 $P(\Delta_n)$ 这个记号是因为我们将定义一个一般的映射

$$P \colon S_n(X) \to S_{n+1}(X \times I).$$

$P(\Delta_n)$ 中的 Δ_n 可理解为到自身的恒等映射. 因此我们是率先定义了特殊情况

$$P \colon S_n(\Delta_n) \to S_{n+1}(\Delta_n \times I)$$

中 Δ_n 的像. 我们的一般定义正是建立在这个特殊情况上的. 对于 $\sigma \colon X \to \Delta_n$, 定义

$$P(\sigma) = (\sigma \times \mathrm{Id})_\# P(\Delta_n).$$

关于映射 P 的一个重要的命题是

命题 2.2.

$$\partial(P([e_0, \cdots, e_n])) = [b_0, \cdots, b_n] - [a_0, \cdots, a_n] - \sum_{i=0}^{q} (-1)^i P([e_0, \cdots, \hat{e}_i, \cdots, e_n]).$$

证明. 设 $F \colon X \times I \to Y$ 是 f 与 g 之间的同伦. 记映射 $\iota_0, \iota_1 \colon X \to X \times I$

$$\iota_0(x) = (x, 0), \quad \iota_1(x) = (x, 1), \quad x \in X.$$

按定义有 $f = F \circ \iota_0, g = F \circ \iota_1$. □

3 相对奇异同调群

定义 3.1. 称空间偶映射 $f, g\colon (X,A)\to(Y,B)$ 同伦, 如果 $f,g\colon X\to Y$ 有同伦 F 且 $F(A\times I)\subset B$.

命题 3.2. 同伦不变性

例 3.3. 存在 $X\simeq Y$, $A\simeq B$, 但 $H_*(X,A)\not\cong H_*(Y,B)$.

证明. 取 $X=Y=S^1\times D^2$, $A=S^1\times\{0\}$, $B=\{1\}\times S^1$.

因为嵌入映射 $\iota\colon A\to X$ 是 A 与 X 之间的同伦等价, 所以 $H_*(X,A)=0$.

而嵌入映射 $\iota\colon B\to Y$ 可以分解为

$$B\hookrightarrow\{1\}\times D^2\hookrightarrow Y$$

其中 $\{1\}\times D^2$ 是可缩的, 所以 $\iota_*\colon H_n(B)\to H_n(Y)$ 是零映射, 其中 $n>1$. 考虑长正合列

$$H_1(B)\xrightarrow{0}H_1(Y)\longrightarrow H_1(Y,B)\longrightarrow H_0(B)\longrightarrow H_0(Y)$$

因为 $H_0(B)\xrightarrow{\iota_*}H_0(Y)$ 是同构, 所以 $H_1(Y,B)\cong H_1(Y)=\mathbb{Z}$. □

命题 3.4. 设 $f\colon X\to Y$ 和 $f|A\colon A\to B$ 都是同伦等价. 则 $f_*\colon H_*(X,A)\to H_*(Y,B)$ 是同构.

证明. 由同调序列的自然性, 下列图表交换

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\partial_*"] & H_q(A) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "f_*"] & H_q(X) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "f_*"] & H_q(X,A) \arrow[r, "\partial_*"] \arrow[d, "f_*"] & H_{q-1}(A) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "f_*"] & H_{q-1}(X) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "f_*"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "\partial_*"] & H_q(B) \arrow[r, "i_*"] & H_q(Y) \arrow[r, "j_*"] & H_q(Y,B) \arrow[r, "\partial_*"] & H_{q-1}(B) \arrow[r, "i_*"] & H_{q-1}(Y) \arrow[r, "j_*"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

由五引理,$f_*\colon H_*(X,A)\to H_*(Y,B)$ 是同构. □

例 3.5. 存在 $f\colon X\to Y$ 和 $f|A\colon A\to B$ 都是同伦等价, 但 $f\colon (X,A)\to(Y,B)$ 不是同伦等价.

证明. 取 $f=\iota\colon (D^n,S^{n-1})\to(D^n,D^n-0)$. 假设有同伦逆 $g\colon (D^n,D^n-0)\to(D^n,S^{n-1})$. 由映射的连续性知 $g(0)\in S^{n-1}$, 因此 $g(D^n)\subset S^{n-1}$. 因为 f 和 g 是空间偶的同伦逆, 所以

$$(g|D^n-0)_*\colon H_*(D^n-0)\longrightarrow H_*(S^{n-1})$$

是同构. 但 $g|D^n-0\colon D^n-0\to S^{n-1}$ 可以分解为

$$D^n-0\xrightarrow{\iota}D^n\xrightarrow{g}S^{n-1}.$$

其中 D^n 是可缩的, 这样就得到了矛盾, 因为 $H_{n-1}(D^n-0)=H_{n-1}(S^{n-1})=\mathbb{Z}$. □

4 奇异同调的 Eilenberg-Steenrod 公理

4.1 同伦公理

10 月 12 日讲义第 15 页

定理 4.1. 设 $f_0, f_1 \colon X \to Y$ 是同伦的连续映射，则 $(f_0)_\#, (f_1)_\#$ 是链同伦的.

4.2 维数公理

10 月 12 日讲义第 17 页

5 收缩

10 月 12 日讲义第 19 页

设 X 是拓扑空间，$T\colon \Delta_n \to X$ 连续映射

$$S_n(X) = \left\{ \sum a_T T \mid \right\}$$

奇异 n-链群

定义 5.1. $A \subset X$ 称为 X 的收缩，

嵌入映射有左逆，

6 重心重分

设 K 是单纯复形

重心重分 $\Delta^1 = [b_0, \cdots, b_s]$

其中 b_i 为 σ_i 的重心，其中 $\sigma_0 < \sigma_1 < \cdots < \sigma_s$ 一串面

$$\mathrm{sd}(\sigma) = \mathrm{Sd}(\partial\sigma) * b$$

其中 b_σ 是 σ 的重心

$*$ 的意思是把该点加进去

$[v_0, v_1] * b := [v_0, v_1, b]$

如上归纳定义

$$\mathrm{Sd}\colon C(k) \longrightarrow C(K')$$

希望定义出来的 Sd 是链映射，即 $\partial\,\mathrm{Sd} = \mathrm{Sd}\,\partial$

还希望满足承载条件，即如果 $L \subset K$ 是子单纯复形

如果 $c \in C(L)$，那么 $(Sd)(c) \subset C(L')$

我们从 $C_0(K)$ 开始考虑，规定

$$\mathrm{Sd}\colon C_0(K) \longrightarrow C_0(K') = \mathrm{Id}$$

若 $i < k (k \geqslant 1)$ 时 $\mathrm{Sd}\colon C_i(K) \longrightarrow C_i(K')$ 已经定义好，且是链映射，且满足承载条件

那么 $\sigma = [v_0, \cdots, v_k]$

$\partial\sigma \in C_{k-1}(\sigma)$

$\mathrm{Sd}(\partial\sigma) \in C_{k-1}((\partial\sigma)')$

$\mathrm{Sd}(\sigma) = (-1)^k\,\mathrm{Sd} * b_\sigma$

$$\partial\,\mathrm{Sd}(\sigma) = \mathrm{Sd}(\partial\sigma) + (-1)^k(\partial\,\mathrm{Sd}(\partial\sigma))$$

$\mathrm{Sd}(\sigma) \in C_k(\sigma')$

希望定义 π 是单纯映射

$\pi\colon K' \to K, b \mapsto$

b 必是 K 中某个单形 σ 的重心

$\pi(b)$ 为 σ 的某个顶点

$\pi_\#\,\mathrm{Sd}\colon C(K) \to C(K)$

证明它链同伦于 Id

还有 $\mathrm{Sd}\,\pi_\#$ 链同伦于 Id

$\pi_\#\,\mathrm{Sd} - \mathrm{Id} = \partial H + H\partial$

$H\colon C_k(K) \longrightarrow C_{k+1}(K)$

其中 $H\colon C_k(K) \longrightarrow C_{k+1}(K)$ 满足承载条件，$L \subset K, c \in C(K), H(c) \in C(L)$

睡觉

定义 $\mathrm{Sd}\colon L_i(Y) \longrightarrow L_i(Y)$

$H\colon L_i(Y) \longrightarrow L_i(Y)$
走神

10 月 15 日讲义第 10 页

定理 6.1. 若 $\{X_i \subset X\}$ 满足 $\{\operatorname{Int} X_i\}_i$ 构成 X 的开覆盖，那么

$$\sum_i S_p(X_i) \subset S_p(X)$$

诱导出同调同构

7 单纯同调与奇异同调同构

10 月 19 日讲义第 5 页

8 切除定理

10 月 19 日讲义第 6 页

定理 8.1. 设 $A \subset X$. 如果 $U \subset X$ 满足 $\overline{U} \subset \operatorname{Int} A$，那么包含映射

$$j\colon (X-U, A-U) \longrightarrow (X, A)$$

诱导奇异同调群的同构.

证明. 记 $\mathscr{A} = \{X-U, A\}$. 由 $\overline{U} \subset \operatorname{Int} A$ 知 $\mathscr{A}$ 的元素的内部覆盖 X. □

定理 8.2. $X_1, X_2 \subset X$，$\{X_1, X_2\}$ 为 *Mayer-Vietoris* 偶，当且仅当

$$i\colon (X_1, X_1 \cap X_2) \longrightarrow (X_1 \cup X_2, X_2)$$

诱导相对同调群的同构

$$i_*\colon H_*(X_1, X_1 \cap X_2) \longrightarrow H_*(X_1 \cup X_2, X_2)$$

9 局部同调

10 月 19 日讲义第 8 页

10 一般系数的同调群

定义 10.1. 设 R 是一个交换幺环，X 是一个拓扑空间，令 $S_n(X,R)$ 为所有 n 维奇异单形生成的自由 R 模，称为 X 的 n 维 R 系数奇异链群.

11 Tor 与 Ext

定义 11.1. 设 R 是一个交换幺环，A 是 R-模. A 的一个 R-模分解是一个 R-模长正合序列

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0.$$

如果每个 C_n 都是自由 R-模，则称之为 A 的一个自由 R-模分解.

例 11.2. $\mathbb{Z}$ 作为 $\mathbb{Z}$-模的自由分解

$$\cdots \longrightarrow 0 \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z} \xrightarrow{\mathrm{Id}} \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

例 11.3. $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ 作为 $\mathbb{Z}$-模的自由分解

$$\cdots \longrightarrow 0 \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\times m} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

命题 11.4. A 的一个 R-模分解对应一个链复形

$$C\colon \cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \longrightarrow 0.$$

它的同调群是

$$H_n(C) = \begin{cases} 0, & n \geqslant 1 \\ A, & n = 0. \end{cases}$$

定理 11.5. 任何 R-模 A 的自由 R-模分解一定存在.

证明. 取 C_0 为集合 A 自由生成的 R-模 $F(A)$, 取 ε 为集合间的映射 $\mathrm{Id}\colon A \to A$ 扩充而成的 R-模同态 $\varepsilon\colon C_0 \to A$. 取 C_1 为集合 $\ker\varepsilon$ 自由生成的 R-模, 以此类推.

□

例 11.6. 设 R 是 PID, 则 R-模 A 有自由分解

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \ker\varepsilon \xrightarrow{\iota} C_0 = F(A) \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0.$$

这是因为 PID 上的自由模的子模也是自由的.

例 11.7. $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 作为 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$-模的自由分解

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

例 11.8. R 上有自然的 $R[x_1, \cdots, x_n]$ 模结构

$$f(x_1, \cdots, x_n) \cdot r = (a_0 + \sum a_{i_1 \cdots i_n} x^{i_1} \cdots x_n^{i_n}) \cdot r := a_0 r.$$

当 R 是 PID 时，给出 R 一个的自由 $R[x_1, \cdots, x_n]$-模分解.

定理 11.9 (自由零调模型). 设 $C = \{C_n, \partial_n\}_{n\geqslant 0}$ 是一个自由的链复形，A 是 C 的增广. 设 C' 是 A' 的一个 R-模分解. 对于任何线性映射 $\varphi_{-1}\colon A \to A'$, 存在链映射 $\varphi = \{\varphi_n\colon C_n \to C'_n\}_{n\geqslant 0}$ 使得 $\varepsilon \circ \varphi_0 = \varphi_{-1} \circ \varepsilon$. 且任何两个这样的链映射 φ, φ' 是链同伦的.

证明.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_2 \arrow[r] \arrow[d] & C_1 \arrow[r] \arrow[d] & C_0 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{-1}"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & C_2' \arrow[r] & C_1' \arrow[r] & C_0' \arrow[r, "\varepsilon"] & A' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

取 C_0 的一组基 $\{c_{0i}\}$, 因为 $\varepsilon\colon C_0' \to A'$ 是满射，所以存在 c_{0i}' 使得 $\varepsilon(c_{0i}') = \varphi_{-1}\circ\varepsilon(c_{0i})$.

$$\begin{tikzcd}
c_{0i} \arrow[r] \arrow[d, dashed] & \varepsilon(c_{0i}) \arrow[d] \\
c_{0i}' \arrow[r] & \varphi_{-1}\circ\varepsilon(c_{0i})
\end{tikzcd}$$

因为线性映射由它在自由模的基上的取值决定，这样我们就定义出了 φ_0. 以此类推可定义 φ.

下面我们设有两个链映射 φ 和 ψ，我们来找它们之间的链同伦.

$$\begin{tikzcd}
& C_0 \arrow[d, "\psi"', "\varphi"] & \\
C_1' \arrow[r] & C_0' \arrow[r] & A
\end{tikzcd}$$

因为 $\varepsilon\circ(\varphi-\psi) = \psi_{-1}\circ\varepsilon - \psi_{-1}\circ\varepsilon = 0$, 所以可在 C_1' 中找到 $\varphi-\psi(c_{0i})$ 的一个原像，将之定义为 $H_0(c_{0i})$. 以此类推定义 H. □

命题 11.10. *R-模 A 的任何两个自由分解 C, C' 都是链同伦等价的.*

证明.

$$\begin{tikzcd}
C_0 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & A \arrow[d, "\mathrm{Id}"] \\
C_0' \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & A \arrow[d, "\mathrm{Id}"] \\
C_0 \arrow[r] & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
C_0 \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Id}"] & A \arrow[d, "\mathrm{Id}"] \\
C_0 \arrow[r] & A
\end{tikzcd}$$

□

设 A, B 是 R-模. 取 A 的一个自由 R-模分解 C, 构造链复形 $C\otimes B$.

命题 11.11. *$H_n(C\otimes B)$ 只与 A, B 有关，而与 A 的自由分解无关.*

定义 11.12. *称 $H_n(C\otimes B)$ 为 A 与 B 的第 n 个挠群，记作 $\mathrm{Tor}_n^R(A,B)$.*

例 11.13. *计算 $\mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.*

解. 找 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 的一个自由 $\mathbb{Z}$-模分解

$$\cdots \longrightarrow 0 \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

则 $C\otimes\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 为

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{2\otimes 1} \mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

所以

$$\mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \begin{cases} 0, & n \geqslant 2 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, & n = 0, 1. \end{cases}$$

□

例 11.14. 计算 $\mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

解. 找 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 的一个自由 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-模分解

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{\mathrm{Id}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

则 $C \otimes_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 为

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

所以

$$\mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \begin{cases} 0, & n \geqslant 1 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & n = 0. \end{cases}$$

□

例 11.15. 计算 $\mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

解. 找 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 的一个自由 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$-模分解

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

则 $C \otimes_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 为

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{2\otimes 1} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{2\otimes 1} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

所以

$$\mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

□

12 映射度

Chapter 3

胞腔同调

1 胞腔复形

10 月 19 日讲义第 12 页

例 1.1.

2 胞腔分解的例子

10 月 22 日讲义第 4 页

3 胞腔同调群计算的例子

10 月 22 日讲义第 8 页

4 球面的映射度

网课讲义合集第 8 页

5 透镜空间

网课讲义合集第 13 页

6 万有系数定理

网课讲义合集第 26 页

7 奇异上同调中的卡积与上积

网课讲义合集第 37 页

8 乘积空间的奇异同调

网课讲义合集第 43 页

9 Kunneth 公式

网课讲义合集第 45 页

Chapter 4

Hatcher 习题

1 Chapter0

2 Section2.1

11.Show that if A is a retract of X then the map $H_n(A) \to H_n(X)$ induced by the inclusion $A \subset X$ is injective.

证明. □

14.Determine whether there exists a short exact sequence

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{Z}_4 \longrightarrow 0.$$

More gtenerally, determine which abelian groups A fit into a short exact sequence

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_{p^m} \longrightarrow A \longrightarrow \mathbb{Z}_{p^n} \longrightarrow 0$$

with p prime. What about the case of short exact sequences

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow A \longrightarrow \mathbb{Z}_n \longrightarrow 0.$$

证明. □

附录 A

拓扑补遗

1 空间偶

定义 1.1. 称空间偶映射 $f, g\colon (X, A) \to (Y, B)$ 是同伦的, 如果存在映射

$$F\colon (X \times I, A \times I) \longrightarrow (Y, B)$$

满足 $F(x, 0) = f$ 且 $F(x, 1) = g$.

附录 B

正合列

1 链复形与链映射

- 链复形的定义
- 链映射的定义
- 链映射的例子，包含映射，商映射
- 链复形范畴到分次 Abel 群范畴的函子
- 链同伦
- 链同伦的链映射诱导同调群的同构

2 可裂的短正合列

定义 2.1. 设 $0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\pi} C \longrightarrow 0$ 为一短正合列. 如果存在子对象 $D \subset B$，使得

$$i(A) \oplus D = B$$

则称此序列分裂.

命题 2.2. 给定短正合列 $0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\pi} C \longrightarrow 0$，则下列陈述等价

(1) 短正合列可裂

(2) 存在同态 $j\colon B \longrightarrow A$ 使得 $j \circ i = \mathrm{Id}_A$

(3) 存在同态 $p\colon C \longrightarrow B$ 使得 $\pi \circ p = \mathrm{Id}_C$

更进一步地，在上述条件下，$B \simeq A \oplus C$，$D \simeq C$.

3 长正合列引理

定理 3.1. 设

$$0 \longrightarrow (C^1, \partial^1) \xrightarrow{f} (C^2, \partial^2) \xrightarrow{g} (C^3, \partial^3) \longrightarrow 0$$

为链复形的短正合列，则有同调群的长正合列

$$\cdots \longrightarrow H_{n+1}(C^1) \xrightarrow{f_*} H_{n+1}(C^2) \xrightarrow{g_*} H_{n+1}(C^3) \xrightarrow{\partial_*} H_n(C^1) \xrightarrow{f_*} H_n(C^2) \longrightarrow \cdots$$

证明.

(1) 定义 ∂_*

$$\begin{tikzcd}
& \beta \arrow[r, "g"] \arrow[d] & \alpha \arrow[d] \\
\gamma \arrow[r, hook] \arrow[d] & \partial\beta \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\partial\gamma \arrow[r, hook] & 0 &
\end{tikzcd}$$

- 对于 $[\alpha] \in H_{n+1}(C^3)$，选取代表元 $\alpha \in C^3_{n+1}$
- 因为 g 是满射，所以存在 $\beta \in C^2_{n+1}$ 使得 $g_{n+1}\beta = \alpha$
- 因为 $\partial^3_{n+1}\alpha = 0$，所以 $g_n\partial^2_{n+1}\beta = 0$，即 $\partial^2_{n+1}\beta \in \ker g_n$
- 因为 $\operatorname{im} f_n = \ker g_n$，所以存在 $\gamma \in C^1_n$ 使得 $f_n\gamma = \partial^2_{n+1}g$. 因为 f_n 是单射，所以 γ 唯一.
- γ 是闭的，因为 $f_{n-1}\partial^1_n\gamma = \partial^2_n f_n\gamma = \partial^2_n\partial^2_{n+1}g = 0$，所以 $\partial^1_n\gamma \in \ker f_{n-1}$，但 f_{n-1} 是单射
- 将 $\partial_*[\alpha]$ 定义为 $[\gamma]$.
- 下验证良定性
  -
    $$\begin{tikzcd}
    \delta \arrow[r] \arrow[d] & \beta \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
    \partial\delta \arrow[r, hook] & \partial\beta &
    \end{tikzcd}$$

    假设有 β' 使得 $g_{n+1}\beta = g_{n+1}\beta' = \alpha$，那么 $\beta - \beta' \in \ker g_{n+1} = \operatorname{im} f_{n+1}$
    设 $\beta - \beta' = f_{n+1}\delta$，其中 $\delta \in C^1_{n+1}$. 存在 $\tilde{\gamma}$ 使得 $f_n\tilde{\gamma} = \partial^2_{n+1}f_{n+1}\delta$.
    由 $\tilde{\gamma}$ 的唯一性知 $\tilde{\gamma} = \partial^1_{n+1}\delta$. 所以 β 的选取并不影响最终的 $[\gamma]$.
  -
    $$\begin{tikzcd}
    \xi \arrow[r] \arrow[d] & \eta \arrow[d] \\
    \beta = \partial\xi \arrow[r] \arrow[d] & \alpha = \partial\eta \\
    0 &
    \end{tikzcd}$$

    取 $\bar{\alpha}$ 使得 $\alpha - \bar{\alpha} = \partial^3_{n+1}\eta$，其中 $\eta \in C^3_{n+2}$.
    因为 g_{n+2} 是满射，所以存在 $\xi \in C^2_{n+2}$ 使得 $g_{n+2}\xi = \eta$.
    $g_{n+1}\partial^2_{n+2}\xi = \alpha - \bar{\alpha}$，但 $\partial^2_{n+1}\partial^2_{n+2}\xi = 0$，所以并不影响最终的 $[\gamma]$.

(2) $H_{n+1}(C^3)$ 处的正合性. 即要证明 $\operatorname{im} g_{*,n+1} = \ker \partial_{*,n+1}$.

- $\operatorname{im} g_{*,n+1} \subset \ker \partial_{*,n+1}$. 取 $[\beta] \in H_{n+1}(C^2)$，要证 $\partial_*[g(\beta)] = 0$.

$$\begin{tikzcd}
 & \beta \arrow[r] \arrow[d] & \alpha = g(\beta) \\
0 \arrow[r, hook] & 0 &
\end{tikzcd}$$

- $\ker \partial_* \subset \operatorname{im} g_*$. 即要证 β 是闭链.

$$\begin{tikzcd}
 & \beta \arrow[r] \arrow[d] & \alpha \\
0 \arrow[r, hook] & \partial\beta = 0 &
\end{tikzcd}$$

(3) $H_n(C^1)$ 处的正合性，既要证明 $\operatorname{im} \partial_* = \ker f_*$

- $\operatorname{im} \partial_* \subset \ker f_*$. 这是因为 $f_*[\gamma] = [\partial\beta] = 0$.

$$\begin{tikzcd}
 & \beta \arrow[r, "g"] \arrow[d] & \alpha \\
\gamma \arrow[r, hook] & \partial\beta &
\end{tikzcd}$$

- $\ker f_* \subset \operatorname{im} \partial_*$.

$$\begin{tikzcd}
 & \beta \arrow[r, "g"] \arrow[d] & \alpha \\
\gamma \arrow[r, hook] & f_*(\gamma) = \partial\beta &
\end{tikzcd}$$

(4) $H_{n+1}(C)$ 处的正合性，即 $\operatorname{im} f_* = \ker g_*$.

- $\operatorname{im} f_* \subset \ker g_*$ 是显然的.
- $\ker g_* \subset \operatorname{im} f_*$. 设 $g_*[\beta] = 0$，也就是 $g(\beta)$ 是边缘

$$\begin{tikzcd}
\xi \arrow[r] & \eta \arrow[d] \\
\beta \arrow[r] & \alpha := g(\beta)
\end{tikzcd}
+
\begin{tikzcd}
\xi \arrow[r] \arrow[d] & \eta \arrow[d] \\
\partial\xi \arrow[r] & g(\beta)
\end{tikzcd}
\Longrightarrow \gamma \longrightarrow \partial\xi - \beta \longrightarrow 0$$

$\square$

附录 C

范畴论