

# 连续介质力学

孙天阳

中国科学技术大学数学科学学院

`tysun@mail.ustc.edu.cn`

2025 年 10 月 18 日

# 目录

目录	2
<b>I 线弹性静力学</b>	<b>3</b>
1 应力分析	5
1 应力矢量	5
2 应力张量	5
3 动量守恒/平衡方程	6
4 角动量方程	7
5 主应力	7
2 应变分析	8
1 位移场	8
3 应力应变关系	9
1 各向同性	10
4 有限元方法	12
1 变分形式	12
2 二维问题	13
5 弹性动力学	15
1 振动的有限元推导	15
2 弹性动力学的基本方程	16
<b>II 流体力学</b>	<b>18</b>
6 流体力学的基本概念	20
1 应力张量	20
7 流体力学的基本方程	21
1 流体力学的基本方程	21
2 基本方程的线化	22

目录	2
3 两层介质时的反射与透射	23
<b>8 声学</b>	<b>24</b>
1 方程与边界条件	24
2 一维情形	25
3 二维有限元基础	26
4 二维左入射右吸收	27
5 二维左入射右硬壁	28
6 二维模态分析	29
7 编程复现	30
8 声子晶体	31
9 能带计算方法	32
10 周期边界条件	34
11 声振耦合	35

## Part I

# 线弹性静力学

考虑静力学, 当然要建立研究对象的平衡方程, 对研究对象进行受力分析. 这就有了第一章应力分析, 也就是对弹性体内部的力的分析. 第二章研究了物体的变形, 是纯粹的几何学, 为后面的理论奠定基础. 第三章进行了一些假设, 一是应力由物体的变形唯一决定, 二是物体的初始状态没有应力, 三是应力与应变之间是线性关系. 我主要对第二条假设感到疑虑, 我不知道这是不是一条很本质的假设. 按他这样说的话静静摆在地上的桌子不能作为初始状态来进行分析, 但我觉得应该有一种等效的观点使得静静摆在地上的桌子能被视为初始的状态.

# Chapter 1

## 应力分析

弹性力学中物体的受力分析与刚体力学中物体的受力分析是截然不同的. 首先, 弹性体受力后会变形, 从而产生内力, 这是与刚体的一个本质区别; 其次, 作用在弹性体上的外力, 一般不能简单地归结为作用在相应点上的一个合力和一对力偶, 而必须写成与外力分布相应的分布函数.

### 1 应力矢量

下面刻画某点  $P$  处的内力. 首先选取一个经过点  $P$  的定向光滑曲面  $S$ , 其在点  $P$  处的单位外法向记为  $\vec{n}$ . 在  $P$  周围取一个面元  $\Delta S$ , 该面元所受的力为  $\Delta \vec{\sigma}$ . 欧拉-柯西应力定理指出

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\sigma}}{\Delta S} = \vec{\sigma}(P, \vec{n})$$

极限存在, 且只依赖于  $S$  在  $P$  处的单位外法向  $\vec{n}$  而不依赖于  $S$ . 一般我们略去  $P$  简记做  $\vec{\sigma}(\vec{n})$ , 称作经过  $P$  点以  $\vec{n}$  为单位外法向的平面上的应力矢量, 注意一般来说  $\vec{\sigma}(\vec{n})$  不必与  $\vec{n}$  是同一方向. 注意应力矢量并不是力, 而是单位面积上的力, 所以其量纲与压强相同. 可在直角坐标系下进行分解

$$\vec{\sigma}(\vec{n}) = \sigma_1(\vec{n})\vec{e}_1 + \sigma_2(\vec{n})\vec{e}_2 + \sigma_3(\vec{n})\vec{e}_3.$$

也可沿  $\vec{n}$  和与  $\vec{n}$  垂直的方向  $\vec{t}$  进行分解

$$\vec{\sigma}(\vec{n}) = \vec{\sigma}_n + \vec{\tau}_t,$$

其中  $\vec{\sigma}_n$  称为正应力, 而  $\vec{\sigma}(\vec{n}) - (\vec{\sigma}(\vec{n}) \cdot \vec{n})\vec{n} = \vec{\tau}_t$  称为剪应力.

### 2 应力张量

本节我们证明,

$$\vec{\sigma}(\vec{n}) = \vec{\sigma}(n_1\vec{e}_1 + n_2\vec{e}_2 + n_3\vec{e}_3) = n_1\vec{\sigma}(\vec{e}_1) + n_2\vec{\sigma}(\vec{e}_2) + n_3\vec{\sigma}(\vec{e}_3)$$

因此可将  $\vec{\sigma}(\vec{n})$  视作关于  $\vec{n}$  的线性映射. 记

$$\vec{\sigma} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix}$$

考虑点  $P = (0, 0, 0)$ ,  $A = (a, 0, 0)$ ,  $B = (0, b, 0)$ ,  $C = (0, 0, c)$  围成的四面体  $PABC$ , 容易求出平面  $ABC$  的方程是

$$\frac{1}{a}x + \frac{1}{b}y + \frac{1}{c}z - 1 = 0, \quad \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}} \left( \frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c} \right)$$

由等体积法可以求出  $ABC$  的面积是

$$dS = \frac{1}{2}abc\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}$$

所以可以看到侧面的面积  $dS_i$  等于斜面  $dS$  的面积乘上  $\vec{n}$  对应的分量  $n_i$ . 在静力平衡下,

$$\vec{\sigma}(\vec{n})dS - \vec{\sigma}(\vec{e}_i)dS_i + \vec{f}dV = \vec{\sigma}(\vec{n})dS - n_i\vec{\sigma}(\vec{e}_i)dS + \vec{f}dV = 0$$

$dV$  是  $dS$  的更高阶小量, 当令  $dS$  趋于零时得到

$$\vec{\sigma}(\vec{n}) = n_i\vec{\sigma}(\vec{e}_i)$$

所以  $\vec{\sigma}$  是一个线性映射.

### 3 动量守恒/平衡方程

考虑一个体积为  $V$  表面积为  $S$  的单元体, 其  $\vec{e}_i$  方向的动量定理为

$$\oint_S \sigma_i(\vec{n})dS + \int_V f_i dV = \frac{d}{dt} \int_V \rho v_i dV$$

对左侧使用高斯定理得到

$$\oint_S \sigma_i(\vec{n})dS = \oint_S \sigma_{ij}n_j dS = \oint_S \vec{\sigma}(\vec{e}_i) \cdot d\vec{S} = \int_V (\nabla \cdot \vec{\sigma}(\vec{e}_i))dV = \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} dV$$

由单元体的任意性, 我们得到恒成立的微分方程

$$f_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} = \frac{d}{dt}(\rho v_i)$$

静力平衡时得到

$$f_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} = 0,$$

即  $\vec{e}_i$  方向的体力加上应力矢量的散度为零. 注意这是内部区域满足的方程, 表面有额外的边值条件.

## 4 角动量方程

回忆角动量定理为

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v})_i = \sum (\vec{r} \times \vec{F})_i$$

再次考虑一个体积为  $V$  表面积为  $S$  的单元体, 其  $e_i$  方向的角动量定理为

$$\begin{aligned} \frac{dL_i}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_V (\vec{r} \times \rho \vec{v})_i dV = \frac{d}{dt} \int_V \epsilon_{ijk} x_j \rho v_k dV = \int_V \epsilon_{ijk} v_j \rho v_k + \epsilon_{ijk} x_j \frac{d(\rho v_k)}{dt} dV = \int_V \epsilon_{ijk} x_j \frac{d(\rho v_k)}{dt} dV \\ M_i &= \oint_S (\vec{r} \times \vec{\sigma}(\vec{n}))_i dS + \int_V (\vec{r} \times \vec{f})_i dV = \oint_S \epsilon_{ijk} x_j \sigma_k(\vec{n}) dS + \int_V \epsilon_{ijk} x_j f_k dV \\ \oint_S \epsilon_{ijk} x_j \sigma_k(\vec{n}) dS &= \oint_S \epsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl} n_l dS = \int_V (\epsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl})_l dV = \int_V \epsilon_{ijk} \sigma_{kj} + \epsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl,l} dV \\ \int_V \epsilon_{ijk} x_j \frac{d(\rho v_k)}{dt} dV &= \int_V \epsilon_{ijk} \sigma_{kj} + \epsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl,l} dV + \int_V \epsilon_{ijk} x_j f_k dV \implies \int_V \epsilon_{ijk} \sigma_{kj} dV = 0 \end{aligned}$$

## 5 主应力

一般来说, 物体中一点  $P$  沿某一方向为  $\vec{n}$  的截面上的应力矢量  $\vec{\sigma}(\vec{n})$  与  $\vec{n}$  的方向不一致. 称二者方向一致的方向为主应力方向, 相应的应力矢量称为主应力矢量, 相应的缩放倍数称为主应力. 用线性代数的语言来说, 其实就是线性映射  $\vec{\sigma}(\vec{n})$  的特征值和特征向量.



## Chapter 2

# 应变分析

### 1 位移场

我们以物体变形前描述物体上每点位置的矢径  $\vec{r}$  作为自变量, 以该点变形后距离初始位置的位移  $\vec{u}$  作为因变量, 这样我们就得到了位移场  $\vec{u}(\vec{r})$ , 物体变形后每点位置的矢径就是  $\vec{r} + \vec{u}(\vec{r})$ .

假设  $\vec{r}$  和  $\vec{r} + d\vec{r}$  是相邻的两点, 反映物体变形的是两点之间相对位置的变化

$$d\vec{u}(\vec{r}) = \vec{u}(\vec{r} + d\vec{r}) - \vec{u}(\vec{r})$$

## Chapter 3

# 应力应变关系

## 1 各向同性

拉梅系数  $\lambda, \mu$ , 其中  $\mu$  后面会看到是剪切模量,  $\lambda$  没有物理意义

$$\sigma = 2\mu\epsilon + \lambda \operatorname{tr} \epsilon I$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mu + \lambda & \lambda & \lambda & & & \\ \lambda & 2\mu + \lambda & \lambda & & & \\ \lambda & \lambda & 2\mu + \lambda & & & \\ & & & 2\mu & & \\ & & & & 2\mu & \\ & & & & & 2\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{12} \end{pmatrix}$$

实践中一般对应力提要求, 想象一下也比较符合直觉: 可以期待在只对表面施加轴向或一个平面内的外力时应力也是轴向或者在一个平面内, 其他分量为零, 但很难期待只在一个方向产生应变而其他方向不产生应变. 考虑单轴拉伸压缩实验, 则

$$\sigma_{11} = F/S, \quad \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{23} = \sigma_{13} = \sigma_{12} = 0$$

考虑方程组的前三行

$$\sigma_{11} = 2\mu\epsilon_{11} + \lambda \operatorname{tr} \epsilon, \quad 0 = 2\mu\epsilon_{22} + \lambda \operatorname{tr} \epsilon, \quad 0 = 2\mu\epsilon_{33} + \lambda \operatorname{tr} \epsilon$$

将这三个式子求和得到

$$\sigma_{11} = (2\mu + 3\lambda) \operatorname{tr} \epsilon$$

代回第一个式子消去  $\operatorname{tr} \epsilon$  得到

$$\frac{\sigma_{11}}{\epsilon_{11}} = \frac{\mu(2\mu + 3\lambda)}{\mu + \lambda} := E$$

代回第二个式子得到  $\epsilon_{11}$  和  $\epsilon_{22}$  之间的关系

$$-\frac{\epsilon_{22}}{\epsilon_{11}} = \frac{\lambda}{2(\mu + \lambda)} := \nu$$

通过  $E$  和  $\nu$  反解出  $\lambda$  和  $\mu$  得到

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{pmatrix} 1 - \nu & \nu & \nu & & & \\ \nu & 1 - \nu & \nu & & & \\ \nu & \nu & 1 - \nu & & & \\ & & & 1 - 2\nu & & \\ & & & & 1 - 2\nu & \\ & & & & & 1 - 2\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{12} \end{pmatrix}$$

考虑平面应力问题, 即  $\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$ , 根据应力应变关系, 后两个为零蕴含着  $\epsilon_{13} = \epsilon_{23} = 0$ , 第一个  $\sigma_{33} = 0$  蕴含着

$$\nu(\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) + (1 - \nu)\epsilon_{33} = 0 \implies \epsilon_{33} = \frac{\nu}{\nu - 1}(\epsilon_{11} + \epsilon_{22})$$

这样一来  $\epsilon_{33}$  就用  $\epsilon_{11}$  和  $\epsilon_{22}$  表示出来了, 也就是说  $\sigma_{11}$  和  $\sigma_{22}$  也可以仅用  $\epsilon_{11}$  和  $\epsilon_{22}$  表示, 整理得到

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_{11} + \nu\epsilon_{22}), \quad \sigma_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}(\nu\epsilon_{11} + \epsilon_{22}), \quad \sigma_{12} = \frac{E}{1+\nu}\epsilon_{12}$$

写成矩阵形式就是

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{12} \end{pmatrix}$$

## Chapter 4

# 有限元方法

### 1 变分形式

总结前三章, 我们建立了线弹性静力学的如下方程组

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j} + f_i = 0 \\ \sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl} \\ \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \end{cases}$$

其中  $f_i$  是体力, 认为是已知量; 而  $C_{ijkl}$  是弹性张量, 也认为是已知量; 未知量是  $u, \epsilon, \sigma$ , 一共 15 个未知量; 第一组方程是平衡方程, 共 3 个; 第二组方程是应力应变关系, 是线性方程, 共 6 个; 第三组方程是应变张量  $\epsilon$  的定义式, 共 6 个, 所以也一共 15 个方程, 与未知量个数刚好匹配.

常用的边界条件是 Dirichlet 边界条件, 即边界的某部分被固定, 位移场为零

$$u_i = 0, \quad x \in \Gamma_1$$

和 Neumann 边界条件, 即边界的某部分施加了面力  $g_i$

$$\sigma_{ij}n_j = g_i, \quad x \in \Gamma_2$$

下面我们导出这个问题的变分形式. 将  $\epsilon_{ij}$  写作  $\epsilon_{ij}(u)$  以示区分. 设  $u, \epsilon(u), \sigma$  是满足以上偏微分方程组与边值条件的解, 设  $v$  是测试函数, 将  $v$  乘到平衡方程两端并在  $\Omega$  上积分

$$-\int_{\Omega} \sigma_{ij,j} v_i dx = \int_{\Omega} f_i v_i dx$$

由分部积分得

$$-\int_{\Omega} \sigma_{ij,j} v_i dx = \int_{\Omega} \sigma_{ij} v_{i,j} dx - \int_{\Gamma} \sigma_{ij} v_i n_j dS = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \epsilon_{ij}(v) dx - \int_{\Gamma} \sigma_{ij} v_i n_j dS$$

用上边界条件得到

$$\int_{\Omega} C_{ijkl} \epsilon_{kl}(u) \epsilon_{ij}(v) dx = \int_{\Omega} f_i v_i dx + \int_{\Gamma_2} g_i v_i dS.$$

## 2 二维问题

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \epsilon_{ij}(v) dx = \int_{\Omega} f_i v_i dx + \int_{\Gamma_2} g_i v_i dS$$

左侧是九项求和. 当考虑二维问题时, 变成四项求和

$$\sigma_{11} \epsilon_{11}(v) + \sigma_{22} \epsilon_{22}(v) + \sigma_{12} \epsilon_{12}(v) + \sigma_{21} \epsilon_{21}(v) = \sigma_{11} \epsilon_{11}(v) + \sigma_{22} \epsilon_{22}(v) + 2\sigma_{12} \epsilon_{12}(v)$$

将  $2\epsilon_{12}$  写成  $\gamma_{12}$ , 就变成三项求和

$$\sigma_{11} \epsilon_{11}(v) + \sigma_{22} \epsilon_{22}(v) + \sigma_{12} \gamma_{12}(v)$$

而  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$  与  $\epsilon_{11}(u), \epsilon_{22}(u), \gamma_{12}(u)$  之间的关系是

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{12} \end{pmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} =: D \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix}$$

这样一来第一项就变成

$$\int_{\Omega} \begin{pmatrix} \epsilon_{11}(u) & \epsilon_{22}(u) & \gamma_{12}(u) \end{pmatrix} D \begin{pmatrix} \epsilon_{11}(v) \\ \epsilon_{22}(v) \\ \gamma_{12}(v) \end{pmatrix} dx$$

$u$  是  $\Omega$  上的向量值函数, 而二维问题只有两个分量  $u_x, u_y$  且在  $z$  方向上没有变换因此可视为自变量是二元的函数. 在四边形单元上, 使用节点的值进行线性插值

$$u = u_1 N_1 + u_2 N_2 + u_3 N_3 + u_4 N_4$$

考虑四边形单元  $[-a, a] \times [-b, b]$ , 从右上角开始逆时针编号, 从而

$$N_1(x, y) = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{x}{a}\right) \left(1 + \frac{y}{b}\right), N_2(x, y) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 + \frac{y}{b}\right), N_3(x, y) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right), N_4(x, y) = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right)$$

$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} \left(1 + k \frac{y}{b}\right) \frac{l}{a} & 0 & \left(1 + l \frac{x}{a}\right) \frac{k}{b} \\ 0 & \left(1 + l \frac{x}{a}\right) \frac{k}{b} & \left(1 + k \frac{y}{b}\right) \frac{l}{a} \end{pmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \left(1 + m \frac{y}{b}\right) \frac{n}{a} & 0 \\ 0 & \left(1 + n \frac{x}{a}\right) \frac{m}{b} \\ \left(1 + n \frac{x}{a}\right) \frac{m}{b} & \left(1 + m \frac{y}{b}\right) \frac{n}{a} \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{16} \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} \frac{ln}{a^2} \left(1 + \frac{ky}{b}\right) \left(1 + \frac{my}{b}\right) + \frac{1-\nu}{2} \frac{km}{b^2} \left(1 + \frac{lx}{a}\right) \left(1 + \frac{nx}{a}\right) & \nu \frac{lm}{ab} \left(1 + \frac{ky}{b}\right) \left(1 + \frac{nx}{a}\right) + \frac{1-\nu}{2} \frac{kn}{ab} \left(1 + \frac{my}{b}\right) \left(1 + \frac{lx}{a}\right) \\ \frac{1-\nu}{2} \frac{lm}{ab} \left(1 + \frac{ky}{b}\right) \left(1 + \frac{nx}{a}\right) + \nu \frac{kn}{ab} \left(1 + \frac{my}{b}\right) \left(1 + \frac{lx}{a}\right) & \frac{km}{b^2} \left(1 + \frac{lx}{a}\right) \left(1 + \frac{nx}{a}\right) + \frac{1-\nu}{2} \frac{ln}{a^2} \left(1 + \frac{ky}{b}\right) \left(1 + \frac{my}{b}\right) \end{pmatrix}$$

在  $[-a, a] \times [-b, b]$  上进行积分, 我们只需要仔细算两个, 其他的都只是换换字母

$$\int_{-b}^b \left(1 + \frac{ky}{b}\right) \left(1 + \frac{my}{b}\right) dy = \left(2 + \frac{2km}{3}\right)b$$

$$\frac{1}{16} \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} \frac{4b}{a} \ln \left(1 + \frac{km}{3}\right) + \frac{1-\nu}{2} \frac{4a}{b} km \left(1 + \frac{nl}{3}\right) & 4\nu lm + 2(1-\nu)kn \\ 2(1-\nu)lm + 4\nu kn & \frac{1-\nu}{2} \frac{4b}{a} \ln \left(1 + \frac{km}{3}\right) + \frac{4a}{b} km \left(1 + \frac{nl}{3}\right) \end{pmatrix}$$

$lk$  和  $nm$  各有四组取值,  $N_1$  对应  $l = n = 1, k = m = 1$ ,  $N_2$  对应  $l = n = -1, k = m = 1$ ,  $N_3$  对应  $l = n = -1, k = m = -1$ ,  $N_4$  对应  $l = n = 1, k = m = -1$ . 小块的主对角线元最终取值只与  $l \times n$  和  $k \times m$  的值有关

1.  $ln = 1$  且  $km = 1$ , 这就是对角线的四小块,

$$k_{11} = k_{33} = k_{55} = k_{77} = \frac{16}{3} \left( \frac{b}{a} + \frac{1-\nu}{2} \frac{a}{b} \right)$$

$$k_{22} = k_{44} = k_{66} = k_{88} = \frac{16}{3} \left( \frac{a}{b} + \frac{1-\nu}{2} \frac{b}{a} \right)$$

2.  $ln = 1$  且  $km = -1$ , 这就是  $N_1N_4, N_4N_1, N_2N_3, N_3N_2$

$$k_{17} = k_{35} = k_{53} = k_{71} = \frac{8}{3} \left( \frac{b}{a} - (1-\nu) \frac{a}{b} \right)$$

$$k_{28} = k_{46} = k_{64} = k_{82} = \frac{4}{3} \left( (1-\nu) \frac{b}{a} - \frac{4a}{b} \right)$$

3.  $ln = -1$  且  $km = 1$ , 这就是  $N_1N_2, N_2N_1, N_3N_4, N_4N_3$

$$k_{13} = k_{57} = k_{31} = k_{75} = \frac{4}{3} \left( (1-\nu) \frac{a}{b} - \frac{4b}{a} \right)$$

$$k_{24} = k_{68} = k_{42} = k_{86} = \frac{8}{3} \left( \frac{a}{b} - (1-\nu) \frac{b}{a} \right)$$

4.  $ln = -1$  且  $km = -1$ , 这就是  $N_1N_3, N_3N_1, N_2N_4, N_4N_2$

$$k_{15} = k_{37} = k_{51} = k_{73} = -\frac{8}{3} \left( \frac{b}{a} + \frac{1-\nu}{2} \frac{a}{b} \right)$$

$$k_{26} = k_{48} = k_{62} = k_{84} = -\frac{8}{3} \left( \frac{a}{b} + \frac{1-\nu}{2} \frac{b}{a} \right)$$

小块的副对角线元最终取值只与  $l \times m$  和  $k \times n$  的值有关

1.  $lm = 1$  且  $kn = 1$  的右上角与左下角, 这就是  $N_1N_1, N_3N_3, N_2N_4, N_4N_2$ ,

$$k_{12} = k_{56} = k_{38} = k_{74} = 2 + 2\nu$$

$$k_{21} = k_{65} = k_{47} = k_{83} = 2 + 2\nu$$

2.  $lm = -1$  且  $kn = -1$  的右上角与左下角, 这就是  $N_1N_3, N_3N_1, N_2N_2, N_4N_4$

$$k_{16} = k_{52} = k_{34} = k_{78} = -2 - 2\nu$$

$$k_{25} = k_{61} = k_{43} = k_{87} = -2 - 2\nu$$

3.  $lm = 1$  且  $kn = -1$  的右上角, 这就是  $N_1N_2, N_2N_3, N_3N_4, N_4N_1$  的右上角

$$k_{14} = k_{36} = k_{58} = k_{72} = 6\nu - 2$$

$lm = -1$  且  $kn = 1$  的左下角, 这就是  $N_1N_4, N_2N_1, N_3N_2, N_4N_3$  的左下角

$$k_{27} = k_{41} = k_{63} = k_{85} = 6\nu - 2$$

4.  $lm = -1$  且  $kn = 1$  的右上角, 这就是  $N_1N_4, N_2N_1, N_3N_2, N_4N_3$  的右上角

$$k_{18} = k_{32} = k_{54} = k_{76} = 2 - 6\nu$$

$lm = 1$  且  $kn = -1$  的左下角, 这就是  $N_1N_2, N_2N_3, N_3N_4, N_4N_1$  的左下角

$$k_{23} = k_{45} = k_{67} = k_{81} = 2 - 6\nu$$

# Chapter 5

## 弹性动力学

### 1 振动的有限元推导

$$\nabla \cdot \vec{\sigma} = -\omega^2 \rho \vec{u}$$

式子的左右两侧都是二维向量. 任取虚位移  $\vec{v}$ , 两侧做点积并积分, 右侧得到

$$-\omega^2 \int_{\Omega} \rho u_i v_i = -\omega^2 \sum_e \rho_e \int_{\Omega_e} \begin{pmatrix} v_x & v_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$$

$$\int_{\Omega_e} \begin{pmatrix} v_{x3} & v_{y3} & v_{x4} & v_{y4} & v_{x1} & v_{y1} & v_{x2} & v_{y2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_3 & 0 \\ 0 & N_3 \\ N_4 & 0 \\ 0 & N_4 \\ N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_1 & 0 & N_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{x3} \\ u_{y3} \\ u_{x4} \\ u_{y4} \\ u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{36} \begin{pmatrix} v_{x3} & v_{y3} & v_{x4} & v_{y4} & v_{x1} & v_{y1} & v_{x2} & v_{y2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{x3} \\ u_{y3} \\ u_{x4} \\ u_{y4} \\ u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \end{pmatrix}$$



## 2 弹性动力学的基本方程

在弹性动力学中, 原有的平衡方程改为

$$\nabla \cdot \vec{\sigma} + \vec{f} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \iff \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}.$$

根据 Sigmund 和 Jensen 在 2003 年的论文, 三维非均匀弹性体中的振动方程满足

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} (\lambda \nabla \cdot \vec{u}) + \nabla \cdot \left( \mu \left( \nabla u + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \right) \right) \\ \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial y} (\lambda \nabla \cdot \vec{u}) + \nabla \cdot \left( \mu \left( \nabla v + \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} \right) \right) \\ \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z} (\lambda \nabla \cdot \vec{u}) + \nabla \cdot \left( \mu \left( \nabla w + \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \right) \right) \end{cases}$$

我们下面进行小心的推导来说明这两个形式是一致的,

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} (\lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}) = \frac{\partial}{\partial x_i} (\lambda \nabla \cdot \vec{u}) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right)$$

而从 Sigmund 和 Jensen 的方程出发, 第  $i$  个方程的最后一项中被求散度的向量是

$$\mu \left( \nabla u_i + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} \right) = \mu \left( \begin{pmatrix} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_i}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_i}{\partial x_3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_i} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_i} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_i} \end{pmatrix} \right)$$

所以可以看到两个形式是一致的. 但我希望将其改写成用算符表达的更简洁的形式.

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right) = \mu \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) + \frac{\partial \mu}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

前两项很容易改写, 就是  $\mu \nabla^2 \vec{u} + \mu (\nabla (\nabla \cdot \vec{u}))$  的第  $i$  项. 后两项是  $\nabla \mu \cdot (\nabla u_i + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i})$ . 这两项不是很好改写, 而  $\nabla (\lambda \nabla \cdot \vec{u}) = (\nabla \cdot \vec{u}) \nabla \lambda + \lambda (\nabla (\nabla \cdot \vec{u}))$ , 所以有些文章中如果方程里有  $\nabla ((\lambda + \mu) \nabla \cdot \vec{u})$  这一项那是比较诡异的, 因为我看不到  $(\nabla \cdot \vec{u}) \nabla \mu$  这一项从哪来. 当介质均匀的时候也就是  $\lambda$  和  $\mu$  是常值的时候就比较容易写成干净的样子了. 有些文章里有  $\nabla \vec{u}$  这一项, 得到的结果应该是一个矩阵, 这是一个非常危险的记号, 它既可以诠释为对  $\vec{u}$  的三个分量分别求梯度, 也就是矩阵的第  $i$  行是  $\nabla u_i$ ; 又可以诠释为将  $\vec{u}$  视作一个整体求梯度, 矩阵的第  $i$  行是  $\vec{u}$  关于  $x_i$  求导. 前者的矩阵是

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

所以很容易看出前者跟后者的矩阵相差转置的关系. 从记号  $\nabla^2 \vec{u}$  和记号  $\nabla \cdot \vec{\sigma}$  的角度来说, 我倾向于将  $\nabla \vec{u}$  理解为前者, 这样一来后者可以用  $(\nabla \vec{u})^T$  来表示,

$$\rho \ddot{\vec{u}} = (\lambda + \mu) (\nabla (\nabla \cdot \vec{u})) + \mu \nabla^2 \vec{u} + (\nabla \cdot \vec{u}) \nabla \lambda + \nabla \mu \cdot (\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^T).$$

写到这我才意识到这跟昨天 DeepSeek 告诉我的式子是一样的. 回过头去看它的答案, 里面还包含了

$$\vec{\sigma} = \lambda (\nabla \cdot \vec{u}) I + \mu (\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^T).$$

接下来我们假定材料参数在  $z$  方向上不变, 即  $\lambda, \mu, \rho$  都只是关于  $x, y$  的函数, 并且我们只研究沿  $x, y$  平面传播的波, 即  $\vec{u}$  关于  $z$  也是常数. 这样一来上述方程变为

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} ((2\mu + \lambda) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial y} (\mu (\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x})) \\ \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} (\mu (\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x})) + \frac{\partial}{\partial y} ((2\mu + \lambda) \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x}) \\ \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} (\mu \frac{\partial w}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\mu \frac{\partial w}{\partial y}) \end{cases}$$

可以看到前两个方程只含有  $u, v$ , 第三个方程只含有  $w$ , 发生了解耦, 我称前两个方程的解为面内波, 第三个方程的解为面外波. 以上假设是一个非平凡的假设, 实际上将原有的三维问题简化成了两个二维问题, 这也符合从简单到复杂的科研规律. 第三个方程可以写为

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \nabla \cdot (\mu \nabla w)$$

这与声压  $p$  服从的方程同属于标量函数的波动方程. 假设时间部分为  $e^{i\omega t}$ , 则可以得到空间部分满足的 Helmholtz 方程  $\omega^2 \rho w + \nabla \cdot (\mu \nabla w) = 0$ . 按照有限元的步骤, 得到有限元方程  $(K - \omega^2 M)W = F$ , 这里  $F$  来自边界项. 如果我们关心的是声子晶体的设计, 则要施加周期边界条件, 对于给定的波数  $\vec{k}$ , 定义转移矩阵  $\Lambda(\vec{k})$ , 则

$$\Lambda^H(\vec{k})(K - \omega^2 M)\Lambda(\vec{k})\tilde{W} = \Lambda^H(\vec{k})F = 0 \implies (\tilde{K}(\vec{k}) - \omega^2 \tilde{M}(\vec{k}))\tilde{W} = 0$$

所以这是一个广义的求解特征值和特征向量的问题. 我们的目标函数主要是在  $\omega_i(\vec{k})$  的基础上做各种  $\min, \max$  和代数运算. 所以想研究目标函数的灵敏度, 绕不开研究  $\omega_i(\vec{k})$  的灵敏度. 在  $\omega_i(\vec{k})$  是一个非简并的特征值的时候, 它关于设计变量的导数是好算的, 对整个方程关于设计变量求导,

$$\begin{aligned} (\tilde{K} - \omega^2 \tilde{M}) \frac{\partial \tilde{W}}{\partial x_i} + \left( \frac{\partial \tilde{K}}{\partial x_i} - \frac{\partial \omega^2}{\partial x_i} \tilde{M} - \omega^2 \frac{\partial \tilde{M}}{\partial x_i} \right) \tilde{W} &= 0 \\ \frac{\partial \omega^2}{\partial x_i} \tilde{M} \tilde{W} &= (\tilde{K} - \omega^2 \tilde{M}) \frac{\partial \tilde{W}}{\partial x_i} + \left( \frac{\partial \tilde{K}}{\partial x_i} - \omega^2 \frac{\partial \tilde{M}}{\partial x_i} \right) \tilde{W} \\ \frac{\partial \omega^2}{\partial x_i} \tilde{W}^T \tilde{M} \tilde{W} &= \tilde{W}^T (\tilde{K} - \omega^2 \tilde{M}) \frac{\partial \tilde{W}}{\partial x_i} + \tilde{W}^T \left( \frac{\partial \tilde{K}}{\partial x_i} - \omega^2 \frac{\partial \tilde{M}}{\partial x_i} \right) \tilde{W} \\ \frac{\partial \omega^2}{\partial x_i} \tilde{W}^T \tilde{M} \tilde{W} &= \tilde{W}^T \left( \frac{\partial \tilde{K}}{\partial x_i} - \omega^2 \frac{\partial \tilde{M}}{\partial x_i} \right) \tilde{W} \\ \frac{\partial \omega^2}{\partial x_i} W^T M W &= W^T \left( \frac{\partial K}{\partial x_i} - \omega^2 \frac{\partial M}{\partial x_i} \right) W \end{aligned}$$

上面出现的这些量在 matlab 中的计算对我来说是熟悉的. 下一步要研究特征值简并时如何求导. 或者使用拉链方法避开简并的特征值. (文章使用拉链方法是不是为了避开简并的特征值? 如果对于简并的特征值用上面的方法会报什么样的错误?)

我们使用第一级特征值的  $p$ -norm 来近似它的最大值, 即  $f = (\sum_j \omega_1(\vec{k}_j)^p)^{1/p}$ , 它的导数是

## Part II

# 流体力学

我们称静止时处处的应力张量都不具有剪切分量的连续体为流体. 而我们允许流体在运动时有剪切分量, 这也反映了流体的粘性. 如果假设运动时也没有剪切分量, 也就是假设流体无粘, 那么称之为理想流体.

## Chapter 6

# 流体力学的基本概念

### 1 应力张量

#### 理想流体的应力张量

理想流体忽略粘性, 即忽略剪切应力. 这样一来理想流体中任何一点沿任何方向都是应力张量的特征矢量, 所以应力张量作为线性变换只能是标量变换,

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{pmatrix}$$

取负号的原因是强调力是压力 (因为流体不能承受拉力). 由此可见, 在理想流体中, 只要用一个标量函数  $P$  便可完全刻画任一点的应力状态.

## Chapter 7

# 流体力学的基本方程

### 1 流体力学的基本方程

考虑静止均匀理想流体,

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad \rho \frac{d\vec{v}}{dt} + \nabla P = 0, \quad c^2 = \frac{\gamma P}{\rho},$$

分别对应质量守恒定律、牛顿第二定律和状态方程.

## 2 基本方程的线化

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \vec{v}' = 0, \quad \rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla p = 0, \quad p = c_0^2 \rho'.$$

3 代入 1, 得到

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \vec{v}' = 0 \iff \frac{1}{\kappa} \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{v} = 0$$

与 2 联立消去  $v$  得到

$$\nabla \cdot (\rho^{-1} \nabla p) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\kappa^{-1} p).$$

### 3 两层介质时的反射与透射

在介质的交界面处, 有两个基本的连续性条件: 声压连续性和法向质点速度连续性. 这两个条件是推导声波在平面分界面上反射系数和透射系数的基础. 考虑平面  $x = 0$ , 左侧是均匀介质  $Z_1 = \rho_1 c_1$ , 右侧是均匀介质  $Z_2 = \rho_2 c_2$ , 现在有介质一到介质二的入射波  $P_i$ 、反射波  $P_r$ 、透射波  $P_t$ ,

$$P_i = P_{ia} e^{i(\omega t - k_1 x)}, x \leq 0, \quad P_r = P_{ra} e^{i(\omega t + k_1 x)}, x \leq 0, \quad P_t = P_{ta} e^{i(\omega t - k_2 x)}, x \geq 0.$$

则介质一中的声压  $P_1 = P_i + P_r$ , 介质二中的声压  $P_2 = P_t$ . 结合质点速度与声压的关系式

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x} \implies v_1 = \frac{P_{ia}}{\rho_1 c_1} e^{i(\omega t - k_1 x)} - \frac{P_{ra}}{\rho_1 c_1} e^{i(\omega t + k_1 x)}, \quad v_2 = \frac{P_{ta}}{\rho_2 c_2} e^{i(\omega t - k_2 x)}.$$

由声压和法向质点速度在  $x = 0$  处的连续性, 可以列出如下方程组

$$P_{ia} + P_{ra} = P_{ta}, \quad \frac{P_{ia}}{Z_1} - \frac{P_{ra}}{Z_1} = \frac{P_{ta}}{Z_2} \implies R = \frac{P_r}{P_i} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2}, \quad T = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2}.$$

现在考虑三层介质, 从左到右为介质一、介质二、介质三, 其中介质二的厚度为  $d$ . 记  $R_{12}, T_{12}$  是从介质一入射到介质二的反射系数和透射系数, 其他记号以此类推, 我们要计算从介质一到介质三的总体反射系数和透射系数. 实际上利用两层介质的结果进行简单推导即可.

$$T = T_{12} \cdot e^{-ik_2 d} \cdot T_{23} + T_{12} \cdot e^{-ik_2 d} \cdot \boxed{R_{23} \cdot e^{-ik_2 d} \cdot R_{21} \cdot e^{-ik_2 d}} \cdot T_{23} + \dots$$

$$T = \frac{T_{12} T_{23} e^{-ik_2 d}}{1 - R_{21} R_{23} e^{-ik_2 2d}} = \frac{4Z_2 Z_3 e^{-ik_2 d}}{(Z_1 + Z_2)(Z_2 + Z_3) + (Z_2 - Z_1)(Z_3 - Z_2) e^{-ik_2 2d}}$$

$$R = R_{12} + T_{12} \cdot e^{-ik_2 d} \cdot R_{23} \cdot e^{-ik_2 d} \cdot T_{21} + T_{12} \cdot e^{-ik_2 d} \cdot R_{23} \cdot e^{-ik_2 d} \cdot \boxed{R_{21} \cdot e^{-ik_2 d} \cdot R_{23} \cdot e^{-ik_2 d}} \cdot T_{21} + \dots$$

$$R = R_{12} + \frac{T_{12} R_{23} T_{21} e^{-ik_2 2d}}{1 - R_{21} R_{23} e^{-ik_2 2d}} = \frac{(Z_2 - Z_1)(Z_2 + Z_3) + (Z_3 - Z_2)(Z_1 + Z_2) e^{-ik_2 2d}}{(Z_1 + Z_2)(Z_2 + Z_3) + (Z_2 - Z_1)(Z_3 - Z_2) e^{-ik_2 2d}}$$

当  $d = 0$  时可以验证确实退化为两层介质的情形

$$R = \frac{Z_3 - Z_1}{Z_1 + Z_3}, \quad T = \frac{2Z_3}{Z_1 + Z_3}.$$



# Chapter 8

## 声学

### 1 方程与边界条件

声压  $p(x, t)$  满足波动方程

$$\nabla \cdot (\rho^{-1} \nabla p) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\kappa^{-1} p),$$

其中  $\rho$  和  $\kappa$  代表物质的密度和体积模量. 假设  $\rho$  和  $\kappa$  都是常数, 可以化成标准形式

$$p_{tt} - \frac{\kappa}{\rho} p_{xx} = 0 \implies p_{tt} - c^2 p_{xx} = 0, \quad c^2 = \frac{\kappa}{\rho},$$

其中  $c$  是声速. 假设有变量分离形式的解  $p(x, t) = X(x)T(t)$ , 代入可以得到

$$X(x)T_{tt}(t) - c^2 X_{xx}(x)T(t) = 0 \implies \frac{T_{tt}(t)}{T(t)} = c^2 \frac{X_{xx}(x)}{X(x)} = \lambda$$

单独考察时间部分的方程  $T_{tt}(t) - \lambda T(t) = 0$ , 有通解  $e^{\sqrt{\lambda}t}$  和  $e^{-\sqrt{\lambda}t}$ , 从物理角度来看  $\lambda \geq 0$  时解没有实际意义, 设  $\lambda = -\omega^2$ , 则通解为  $e^{i\omega t}$  和  $e^{-i\omega t}$ . 所以文献中常做的假设  $p(x, t) = p(x)e^{i\omega t}$ , 其合理性来自于波动方程的分离变量法和叠加原理. 至于这里是选择  $e^{i\omega t}$ , 还是选择  $e^{-i\omega t}$ , 甚至选择二者的线性组合, 其实都可以. 给定一个空间部分的解  $P(x)$ , 乘上上述三个, 都可以得到一个解  $p(x, t)$ , 那乘  $e^{i\omega t}$  和  $e^{-i\omega t}$  有什么区别呢?  $P(x)$  可以认为是一个静止的解, 某一时刻的解, 而乘上  $e^{i\omega t}$  或  $e^{-i\omega t}$  就加入了时间的演化, 波就传播起来了, 而  $e^{i\omega t}$  和  $e^{-i\omega t}$  实际上与  $P(x)$  一起决定了波的传播方向, 注意是一起决定. 比如以  $e^{ikx}$  为例, 其中  $k > 0$ , 不乘时间因子你是没办法谈论它是往那边传的波的, 而  $e^{i(kx+\omega t)}$  就是一个往左传的波, 而  $e^{i(kx-\omega t)}$  就是一个往右传的波. 所以选择  $e^{i\omega t}$  相当于做一个约定, 约定  $e^{ikx}$  是往左传的波, 而  $e^{-ikx}$  是往右传的波. 将  $p(x, t) = p(x)e^{i\omega t}$  代入波动方程得到

$$\nabla \cdot (\rho^{-1} \nabla p) + \omega^2 \kappa^{-1} p = 0, \quad x \in \Omega.$$

(上面对记号  $p$  进行了混用, 但不影响理解) 问题中常见以下几类边界条件

Pressure boundary condition:  $p = p_0$

Hard wall condition:  $\mathbf{n} \cdot \nabla p = 0$

Acceleration boundary condition:  $\mathbf{n} \cdot \nabla p = a_n$

Sommerfeld boundary condition:  $\mathbf{n} \cdot \nabla p + i \cdot \mathbf{k} \cdot p = 2i \cdot \mathbf{k} \cdot p_{\text{in}}$

对于一般的宏观问题, 或者按照宏观问题来处理的单胞设计的问题, 上面的这个方程和边界条件就够用了, 按照标准的有限元流程得到线性方程组  $(K - \omega^2 M)P = F$  即可. 细节见后面小节.

## 2 一维情形

本节我们来研究一维情形  $\Omega = [0, L]$ , 并在这个最简单的情形下理解 Sommerfeld 边界条件. 假设介质均匀, 方程退化为

$$\rho^{-1}p'' + \omega^2\kappa^{-1}p = 0 \iff p'' + \frac{\omega^2}{c^2}p = 0 \iff p'' + k^2p = 0, \quad x \in [0, L].$$

方程的通解是  $Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$ . 其有限元形式的推导为

$$\int_0^L p''\tilde{p}dx + k^2 \int_0^L p\tilde{p}dx = 0 \iff \int_0^L p'\tilde{p}'dx - k^2 \int_0^L p\tilde{p}dx - p'(L)\tilde{p}(L) + p'(0)\tilde{p}(0) = 0.$$

把  $[0, L]$  划分成  $N$  个区间, 每个区间的长度为  $h = L/N$ . 使用  $[0, 1]$  区间上的标准形函数  $N_0(x) = 1 - x, N_1(x) = x$ , 可以得到

$$\begin{aligned} \int_0^1 p\tilde{p}dx &= \begin{pmatrix} \tilde{p}_0 & \tilde{p}_1 \end{pmatrix} \int_0^1 \begin{pmatrix} N_0^2 & N_0N_1 \\ N_1N_0 & N_1^2 \end{pmatrix} dx \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{p}_0 & \tilde{p}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} /6 \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix} \\ \int_0^1 p'\tilde{p}'dx &= \begin{pmatrix} \tilde{p}_0 & \tilde{p}_1 \end{pmatrix} \int_0^1 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} dx \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{p}_0 & \tilde{p}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

如果是在  $[0, h]$  区间上进行计算, 形函数为  $N_0(\xi) = 1 - \xi/h, N_1(\xi) = \xi/h$ .

$$\begin{aligned} \int_0^h p(\xi)\tilde{p}(\xi)d\xi &= \begin{pmatrix} \tilde{p}_0 & \tilde{p}_1 \end{pmatrix} \int_0^h \begin{pmatrix} N_0^2(\xi) & N_0(\xi)N_1(\xi) \\ N_1(\xi)N_0(\xi) & N_1^2(\xi) \end{pmatrix} d\xi \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{p}_0 & \tilde{p}_1 \end{pmatrix} h \int_0^1 \begin{pmatrix} N_0^2(x) & N_0(x)N_1(x) \\ N_1(x)N_0(x) & N_1^2(x) \end{pmatrix} dx \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix} \\ \int_0^h p'(\xi)\tilde{p}'(\xi)d\xi &= \begin{pmatrix} \tilde{p}_0 & \tilde{p}_1 \end{pmatrix} \int_0^h \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} /h^2 d\xi \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{p}_0 & \tilde{p}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} /h \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

所以正确的局部刚度矩阵和局部质量矩阵是

$$K_e = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} /h, \quad M_e = h \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} /6$$

假设在计算中不正确引入  $h$ , 相当于在计算过程中认为  $h = 1$ , 相当于改变了  $L$  的值.

我们考虑如下 Sommerfeld 边界条件

$$ikp(0) - p'(0) = 2ikp_{in}, \quad ikp(L) + p'(L) = 0$$

可求得此时的理论解为  $p(x) = p_{in}e^{-ikx}$ . 读者若感兴趣, 可以再研究一下右端边界条件改为  $p'(L) = 0$  的情形. 通过研究这两个情形, 可以发现上述两个 Sommerfeld 边界条件分别代表在  $x = 0$  处有振幅为  $p_{in}$  的波入射, 而在  $x = L$  处没有反射. 接下来看该边界条件如何反映在有限元中.

$$\int_0^L p'\tilde{p}'dx - k^2 \int_0^L p\tilde{p}dx - p'(L)\tilde{p}(L) + p'(0)\tilde{p}(0) = 0 \implies \int_0^L p'\tilde{p}'dx - k^2 \int_0^L p\tilde{p}dx + ikp(0)\tilde{p}(0) + ikp(L)\tilde{p}(L) = 2ikp_{in}\tilde{p}(0)$$

### 3 二维有限元基础

设  $\tilde{p}$  是测试函数, 在方程两端同乘  $\tilde{p}$  并在  $\Omega$  上积分得到

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \tilde{p} \nabla \cdot (\rho^{-1} \nabla p) + \int_{\Omega} \rho^{-1} \nabla \tilde{p} \cdot \nabla p &= \int_{\Omega} \nabla \cdot (\tilde{p} \rho^{-1} \nabla p) = \int_{\partial\Omega} \tilde{p} \rho^{-1} \nabla p \cdot \vec{n} \\ \int_{\Omega} \rho^{-1} \nabla \tilde{p} \cdot \nabla p - \int_{\Omega} \omega^2 \kappa^{-1} p \tilde{p} - \int_{\partial\Omega} \tilde{p} \rho^{-1} \nabla p \cdot \vec{n} &= 0 \end{aligned}$$

考虑四边形单元,

$$p = p_1 N_1 + p_2 N_2 + p_3 N_3 + p_4 N_4 = \begin{pmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix}$$

其中 (为了尊重 Sigmund 改为左下角作为起点)

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-2x)(1-2y), N_2 = \frac{1}{4}(1+2x)(1-2y), N_3(x, y) = \frac{1}{4}(1+2x)(1+2y), N_4 = \frac{1}{4}(1-2x)(1+2y)$$

那么梯度  $\nabla p$  可以计算如下 (可类比根据位移计算应变, 但梯度的关系更加直接简单)

$$\nabla p = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix} p = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1+2y & 1-2y & 1+2y & -1-2y \\ -1+2x & -1-2x & 1+2x & 1-2x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix}$$

这样一来在一个单元  $[-0.5, 0.5] \times [-0.5, 0.5]$  上  $\int_{\Omega} \nabla \tilde{p} \cdot \nabla p$  可以计算如下

$$\frac{1}{4} \int_{[-0.5, 0.5]} \int_{[-0.5, 0.5]} \begin{pmatrix} \tilde{p}_1 & \tilde{p}_2 & \tilde{p}_3 & \tilde{p}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1+2y & -1+2x \\ 1-2y & -1-2x \\ 1+2y & 1+2x \\ -1-2y & 1-2x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1+2y & 1-2y & 1+2y & -1-2y \\ -1+2x & -1-2x & 1+2x & 1-2x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix}$$

完成积分的计算, 最终得到的结果是

$$\frac{1}{6} \begin{pmatrix} \tilde{p}_1 & \tilde{p}_2 & \tilde{p}_3 & \tilde{p}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix}$$

同样的在一个单元上  $\int_{\Omega} \tilde{p} p$  可以类似计算

$$\frac{1}{36} \begin{pmatrix} \tilde{p}_1 & \tilde{p}_2 & \tilde{p}_3 & \tilde{p}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix}$$

## 4 二维左入射右吸收

方程的弱形式为

$$\int_{\Omega} \rho^{-1} \nabla \tilde{p} \cdot \nabla p - \int_{\Omega} \omega^2 \kappa^{-1} p \tilde{p} - \int_{\partial\Omega} \tilde{p} \rho^{-1} \nabla p \cdot \vec{n} = 0.$$

考虑如下边界条件

$$\mathbf{n} \cdot \nabla p = 0, \quad x \in \partial\Omega_{\text{上}} \cup \partial\Omega_{\text{下}}, \quad \mathbf{n} \cdot \nabla p + i \cdot \mathbf{k} \cdot p = 2i \cdot \mathbf{k} \cdot p_{\text{in}}, \quad x \in \partial\Omega_{\text{左}}, \quad \mathbf{n} \cdot \nabla p + i \cdot \mathbf{k} \cdot p = 0, \quad x \in \partial\Omega_{\text{右}}.$$

即上方和下方都是声学硬壁, 左侧有一个振幅为  $p_{\text{in}}$  的入射波, 右侧无反射. 弱形式变为

$$\int_{\Omega} \rho^{-1} \nabla p \cdot \nabla \tilde{p} - \int_{\Omega} \omega^2 \kappa^{-1} p \tilde{p} + \int_{\partial\Omega_{\text{左}} \cup \partial\Omega_{\text{右}}} i k \rho^{-1} p \tilde{p} = \int_{\partial\Omega_{\text{左}}} 2i k \rho^{-1} p_{\text{in}} \tilde{p}$$

回忆有限元的基本流程, 首先写出弱形式, 然后根据积分的可加性转换成每个单元上的积分, 再将函数写成形函数的线性组合的形式, 系数是该单元的自由度, 积分得到局部矩阵, 最后利用记录了单元自由度在总体自由度中的序号的信息将局部刚度矩阵拼到整体刚度矩阵. 所以这里虽然  $\partial\Omega_{\text{左}}$  只是一个一维的边界, 但为了利用已有的代码, 还是用二维的形函数.

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-2x)(1-2y), N_2 = \frac{1}{4}(1+2x)(1-2y), N_3(x, y) = \frac{1}{4}(1+2x)(1+2y), N_4 = \frac{1}{4}(1-2x)(1+2y)$$

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega_{\text{左}}} \rho^{-1} \tilde{p} p &= \int_{\partial\Omega_{\text{左}}} \rho^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{p}_1 & \tilde{p}_2 & \tilde{p}_3 & \tilde{p}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{pmatrix}^T dy \\ &= \begin{pmatrix} \tilde{p}_1 & \tilde{p}_2 & \tilde{p}_3 & \tilde{p}_4 \end{pmatrix} \int_{\partial\Omega_{\text{左}}} \rho^{-1} \begin{pmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_4 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_4 \end{pmatrix} dy \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{pmatrix}^T \\ &= \begin{pmatrix} \tilde{p}_1 & \tilde{p}_2 & \tilde{p}_3 & \tilde{p}_4 \end{pmatrix} \int_{\partial\Omega_{\text{左}}} \rho^{-1} \begin{pmatrix} N_1^2 & 0 & 0 & N_1 N_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_1 N_4 & 0 & 0 & N_4^2 \end{pmatrix} dy \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{pmatrix}^T \\ &= \begin{pmatrix} \tilde{p}_1 & \tilde{p}_2 & \tilde{p}_3 & \tilde{p}_4 \end{pmatrix} \rho^{-1} \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/6 & 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{pmatrix}^T \end{aligned}$$

## 5 二维左入射右硬壁

考虑二维问题, 区域是一个矩形, 长  $l_x$  宽  $l_y$ , 稳态且时谐的声压满足 Helmholtz 方程

$$\nabla \cdot (\rho^{-1} \nabla p) + \omega^2 \kappa^{-1} p = 0 \iff \nabla^2 p + \frac{\omega^2}{c^2} p = 0 \iff \nabla^2 p + k^2 p = 0, \quad x \in \Omega$$

上、右、下三条边都赋予硬声场边界条件  $\vec{n} \cdot \nabla p = 0$ , 左侧边赋予 Sommerfeld 边界条件

$$\mathrm{i} \cdot k \cdot p + \vec{n} \cdot \nabla p = 2\mathrm{i} \cdot k \cdot A$$

注意这里面出现的  $k$  与在上面 Helmholtz 方程里出现的  $k$  是同一个  $k$ , 这蕴含了后面做分离变量法的时候  $y$  方向是常值. 所以这个时候解应该是

$$A \cos(kx - 2kL) + A \cos(-kx).$$

## 6 二维模态分析

设环境温度为 20°C, 也就是 293.15K, 压强为 1 标准大气压, 也就是 101.325Kpa. 此时空气的密度为 1.2041kg/m<sup>3</sup>, 声速为 343.21m/s, 体积模量为  $\kappa = 141834.677\text{Pa}$ .

考虑二维问题, 区域是一个矩形, 长  $l_x$  宽  $l_y$ , 稳态且时谐的声压满足 Helmholtz 方程

$$\nabla \cdot (\rho^{-1} \nabla p) + \omega^2 \kappa^{-1} p = 0 \iff \nabla^2 p + \frac{\omega^2}{c^2} p = 0 \iff \nabla^2 p + k^2 p = 0, \quad x \in \Omega$$

四条边都赋予硬声场边界条件  $\vec{n} \cdot \nabla p = 0$ . 使用分离变量法, 设解的形式为  $p(x, y) = X(x)Y(y)$ , 代入 Helmholtz 方程, 分离变量得到

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -\frac{\omega^2}{c^2} \implies \frac{X''}{X} = -k_x^2, \quad \frac{Y''}{Y} = -k_y^2, \implies X'' + k_x^2 X = 0, Y'' + k_y^2 Y = 0, \quad k_x^2 + k_y^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

$$X'(0) = X'(l_x) = 0 \implies X(x) = A \cos(k_x x), \quad k_x l_x = n\pi \implies k_x = n\pi/l_x$$

$$Y'(0) = Y'(l_y) = 0 \implies Y(y) = B \cos(k_y y), \quad k_y l_y = m\pi \implies k_y = m\pi/l_y$$

$$\omega_{n,m} = c \sqrt{\left(\frac{n\pi}{l_x}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{l_y}\right)^2}, \quad f_{n,m} = \frac{\omega_{n,m}}{2\pi} = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{n}{l_x}\right)^2 + \left(\frac{m}{l_y}\right)^2}$$

假设取  $l_x = 2\text{m}, l_y = 1\text{m}$ , 我们可以计算出特征频率的理论值.

## 7 声子晶体

声子晶体从严格意义上来说应该叫做周期性弹性复合材料，是由两种或两种以上的弹性材料按周期性排列所组成的复合结构。由于考虑的是宏观弹性波在这种复合结构中的传播特性，因而这里所说的“声子”并不是固体物理中所定义的格波能量量子。其中的“晶体”一词取义于构成系统各组元的周期排列与天然晶体中原子周期排列的类似性。在天然晶体中，电子作为一种物质波在晶体中的行为满足薛定谔方程和布洛赫定理，由于波的布拉格散射，使得电子在一定的能量区域内会出现禁带，晶体的导电行为因此表现出各种与此有关的特殊性，出现导体、绝缘体、和半导体之分。我们知道电子波与经典波的共性在于其波动性，那么，寻找经典波如光波及声波在周期结构中的行为与电子在晶体中行为的类似性质就成了一个有趣的物理问题。传统意义下的晶体的光学类比就是光子晶体，它由具有两种或两种以上具有不同介电常数的宏观介质周期性排列而成，相当于晶体微结构的放大。而描述电子在晶体中行为的薛定谔方程则以描述光波波动行为的麦克斯韦方程组来取代。声子晶体则可以理解为光子晶体概念在弹性波领域内的一个延伸，它是以弹性常数不同的宏观介质按周期排列构成的宏观结构。通过求解描述弹性波行为的弹性波方程可以确定弹性波在这种复合介质中的传播性质。相对天然晶体中电子波而言，宏观介质中的光波是矢量波，而声波更是全矢量波（即在弹性介质中同时存在横波及纵波），因此对经典波在光子晶体及声子晶体中所遵循的规律进行研究可能为波在周期性介质中的行为提供更进一步的理解。特别地，由于较大的晶格常数及较长的声波波长，声子晶体中的局域本征模将由晶格的无序所导致的波局域现象提供直接测量的可能。

## 8 能带计算方法

接下来考虑无限周期排列的单元. 根据 Floquet-Bloch 理论, 可以进一步假设  $p(x) = p_k(x)e^{i\vec{k}\cdot x}$ , 其中  $p_k(x)$  是一个与单元的周期相同的函数. 接下来有不同处理手段,

给定  $\vec{k}$ , 求  $\omega$

将  $p(x)$  视为求解对象, 将  $p(x) = p_k(x)e^{i\vec{k}\cdot x}$  视为某种周期性边界条件, 不是说完全相等, 而是相差一个已知的由  $\vec{k}$  决定的相位. 那么我们就可以给出有限元求解中的自由度  $P$  与更少的自由度  $\tilde{P}$  之间的转换关系  $P = \Lambda\tilde{P}$ , 其中  $\Lambda$  含有  $\vec{k}$ ,

$$(K - \omega^2 M)P = F \implies \Lambda^H(K - \omega^2 M)\Lambda\tilde{P} = \Lambda^H F = 0 \iff (\tilde{K} - \omega^2 \tilde{M})\tilde{P} = 0$$

然后给定  $\vec{k}$ , 就可以解出各级的特征频率  $\omega$ , 得到  $\omega(\vec{k})$  曲线.

给定  $\omega$ , 求  $\vec{k}$

第二种处理手段是将  $p(x) = p_k(x)e^{i\vec{k}\cdot x}$  继续代入方程, 得到

$$\nabla \cdot (\rho^{-1} \nabla p_k) + i\vec{k} \rho^{-1} \cdot \nabla p_k + \nabla \cdot (i\vec{k} \rho^{-1} p_k) - |\vec{k}|^2 \rho^{-1} p_k + \omega^2 \kappa^{-1} p_k = 0$$

乘上测试函数  $\tilde{p}_k$  并积分得到

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \tilde{p}_k \nabla \cdot (\rho^{-1} \nabla p_k) + \int_{\Omega} \rho^{-1} \nabla \tilde{p}_k \cdot \nabla p_k = \int_{\Omega} \nabla \cdot (\tilde{p}_k \rho^{-1} \nabla p_k) = \int_{\partial\Omega} \tilde{p}_k \rho^{-1} \nabla p_k \cdot \vec{n} = 0 \\ & \int_{\Omega} \tilde{p}_k \nabla \cdot (i\vec{k} \rho^{-1} p_k) + \int_{\Omega} \nabla \tilde{p}_k \cdot i\vec{k} \rho^{-1} p_k = \int_{\Omega} \nabla \cdot (i\vec{k} \rho^{-1} \tilde{p}_k p_k) = \int_{\partial\Omega} i\vec{k} \cdot \vec{n} \rho^{-1} \tilde{p}_k p_k = 0 \\ & - \int_{\Omega} \rho^{-1} \nabla \tilde{p}_k \cdot \nabla p_k + i\vec{k} \int_{\Omega} \rho^{-1} \tilde{p}_k \nabla p_k - i\vec{k} \int_{\Omega} \rho^{-1} p_k \nabla \tilde{p}_k - |\vec{k}|^2 \int_{\Omega} \rho^{-1} p_k \tilde{p}_k + \omega^2 \int_{\Omega} \kappa^{-1} p_k \tilde{p}_k = 0 \\ & \int_{\Omega} \rho^{-1} \nabla \tilde{p}_k \cdot \nabla p_k + i \int_{\Omega} \rho^{-1} (k_x (p_k \tilde{p}_{k,x} - \tilde{p}_k p_{k,x}) + k_y (p_k \tilde{p}_{k,y} - \tilde{p}_k p_{k,y})) + \int_{\Omega} (|\vec{k}|^2 \rho^{-1} - \omega^2 \kappa^{-1}) p_k \tilde{p}_k = 0 \\ & K_1 = \rho^{-1} \int_S N^T N, K_2 = \rho^{-1} \int_S N_x^T N - N^T N_x, K_3 = \rho^{-1} \int_S N_y^T N - N^T N_y, K_4 = \rho^{-1} \int_S N_x^T N_x + N_y^T N_y, M_1 = \kappa^{-1} \int_S N^T N \\ & (\sum K_4 + i k \cos \theta \sum K_2 + i k \sin \theta \sum K_3 + k^2 \sum K_1 - \omega^2 \sum M_1) P = 0 \end{aligned}$$

记  $K_I = \sum K_1, K_{II} = i \cos \theta \sum K_2 + i \sin \theta \sum K_3, K_{III} = \sum K_4 - \omega^2 \sum M_1$ , 则整理成

$$(k^2 K_I + k K_{II} + K_{III}) P = 0$$

这是一个关于  $k$  的二次多项式, 注意里面还含有  $\theta$  和  $\omega$ . 给定  $k$  和  $\theta$  也就是  $\vec{k}$  后, 依旧能解出各级的特征频率  $\omega$ , 并且我相信与第一种方式得到的  $\omega$  是一样的. 但这个形式有个额外的好处

$$\left[ \begin{pmatrix} K_{II} & K_{III} \\ I & 0 \end{pmatrix} - k \begin{pmatrix} -K_I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} K_{II}Q + K_{III} + kK_I Q = 0 \\ Q = kP \end{cases} \iff (k^2 K_I + k K_{II} + K_{III})P = 0$$

这是一个关于  $k$  的标准的广义特征值问题, 并且能解出来复数值的  $k$ . 实数值的  $k$  的物理意义是波在整个周期结构中稳定地传播, 能量不会被衰减, 这种情况对应的是材料的通带. 对于复数值的  $\vec{k}$ , 相位项  $e^{i\vec{k}\cdot x}$  会被分解成一个振荡部分和一个指数衰减部分, 这意味着波的振幅会随着在结构中的传播而迅速衰减, 能量无法有效传递到远处. 这种情况对应的是材料的带隙.



## 平面波展开法

思想是将周期函数  $\rho^{-1}(x), \kappa^{-1}(x)$  和  $p_k(x)$  展开成 Fourier 级数

$$p_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{G}} P_{\mathbf{G}} e^{i\mathbf{G} \cdot \mathbf{x}}, \quad p(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{G}} P_{\mathbf{G}} e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{G}) \cdot \mathbf{x}}, \quad \rho^{-1}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{G}'} \alpha_{\mathbf{G}'} e^{i\mathbf{G}' \cdot \mathbf{x}}, \quad \kappa^{-1}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{G}''} \beta_{\mathbf{G}''} e^{i\mathbf{G}'' \cdot \mathbf{x}}$$

$$\nabla \cdot (\rho^{-1}(\mathbf{x}) \nabla p(\mathbf{x})) + \omega^2 \kappa^{-1}(\mathbf{x}) p(\mathbf{x}) = 0, \quad \nabla p(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{G}} i(\mathbf{k} + \mathbf{G}) P_{\mathbf{G}} e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{G}) \cdot \mathbf{x}}$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left[ \left( \sum_{\mathbf{G}'} \alpha_{\mathbf{G}'} e^{i\mathbf{G}' \cdot \mathbf{x}} \right) \left( \sum_{\mathbf{G}} i(\mathbf{k} + \mathbf{G}) P_{\mathbf{G}} e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{G}) \cdot \mathbf{x}} \right) \right] &= - \sum_{\mathbf{G}, \mathbf{G}'} \alpha_{\mathbf{G}'} (\mathbf{k} + \mathbf{G} + \mathbf{G}') \cdot (\mathbf{k} + \mathbf{G}) P_{\mathbf{G}} e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{G}+\mathbf{G}') \cdot \mathbf{x}} \\ \omega^2 \left( \sum_{\mathbf{G}''} \beta_{\mathbf{G}''} e^{i\mathbf{G}'' \cdot \mathbf{x}} \right) \left( \sum_{\mathbf{G}} P_{\mathbf{G}} e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{G}) \cdot \mathbf{x}} \right) &= \omega^2 \sum_{\mathbf{G}, \mathbf{G}''} \beta_{\mathbf{G}''} P_{\mathbf{G}} e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{G}+\mathbf{G}'') \cdot \mathbf{x}} \end{aligned}$$

为了求解系数  $P_{\mathbf{G}}$ , 我们利用傅里叶级数的正交性, 将整个方程乘以  $e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{G}_0) \cdot \mathbf{x}}$  并在一个单元晶胞体积  $V$  内积分. 整理后, 我们得到一个关于傅里叶系数  $P_{\mathbf{G}}$  的线性方程组

$$\sum_{\mathbf{G}} (\mathbf{k} + \mathbf{G}_0) \cdot (\mathbf{k} + \mathbf{G}) \alpha_{\mathbf{G}_0 - \mathbf{G}} P_{\mathbf{G}} = \omega^2 \sum_{\mathbf{G}} \beta_{\mathbf{G}_0 - \mathbf{G}} P_{\mathbf{G}}$$

这个方程对所有的倒易点阵矢量  $\mathbf{G}_0$  都成立. 上述方程组可以写成一个标准的矩阵广义特征值问题:

$$\mathbf{A}(\mathbf{k}) \mathbf{P} = \omega^2 \mathbf{B}(\mathbf{k}) \mathbf{P}, \quad A_{\mathbf{G}_0, \mathbf{G}} = (\mathbf{k} + \mathbf{G}_0) \cdot (\mathbf{k} + \mathbf{G}) \alpha_{\mathbf{G}_0 - \mathbf{G}}, \quad B_{\mathbf{G}_0, \mathbf{G}} = \beta_{\mathbf{G}_0 - \mathbf{G}}$$

在实际计算中, 我们必须截取有限数量的平面波 (即有限个  $\mathbf{G}$  矢量) 来构建有限维的矩阵. 然后, 给定一个波矢  $\mathbf{k}$ , 就可以解出该特征值问题, 得到一系列特征频率  $\omega$ .

## 伪谱法

LOBPCG 这种方法, 在计算广义特征值问题  $\mathbf{A}(\mathbf{k}) \mathbf{P} = \omega^2 \mathbf{B}(\mathbf{k}) \mathbf{P}$  的时候, 可以不知道具体的  $A$  和  $B$ , 它关心对于具体的向量  $v$ , 需要知道  $Av$  和  $Bv$  这两个向量的值. 回顾我们这里的情形, 可以认为  $Av$  是当  $p(x)$  的傅里叶系数是  $v$  时,  $\nabla \cdot (\rho^{-1}(\mathbf{x}) \nabla p(\mathbf{x}))$  的傅里叶系数. 我们知道空间域中的微分在频域中是乘法, 空间域中的乘法在频域中是卷积, 所以我们可以根据运算的难易来选择一个操作到底是在空间域做还是在频域做. 比如微分  $\nabla p(\mathbf{x})$  在频域中做, 乘法  $\rho^{-1}(\mathbf{x}) \nabla p(\mathbf{x})$  在空间域做, 微分  $\nabla \cdot (\rho^{-1}(\mathbf{x}) \nabla p(\mathbf{x}))$  又回到频域中做. 频域和空间域之间的切换就靠快速傅里叶变换来完成. 这种方法避免了标准平面波展开法中构建和存储大型稠密矩阵的难题, 通过在最合适的空间计算为 LOBPCG 提供所需的矩阵向量乘积. 而 FFT 算法本身是高度优化的并行算法, 所以整个方法易于并行.

## 9 周期边界条件

我们尊重论文, 保留中间、左边、下边和左下角. 但是跟他组装矩阵的思路不同, 我打算左右各按标准的顺序排开, 这样就有大部分的 1 出现在对角元的位置, 然后只需要记录少部分需要用其他元素来表示的就可以了. 少部分需要用其他元素来表示的是最上面一条边和最右一条边

$$1, \underbrace{(nely+1)+1, \dots, (nely+1)(nelx-1)+1}_{\text{代表上边中间的 } nelx-1 \text{ 个}}, \underbrace{(nely+1)nelx+1, (nely+1)nelx+2, \dots, (nely+1)nelx+nely}_{\text{代表右边中间的 } nely-1 \text{ 个}}, (nely+1)nelx+(nely+1)$$

把这些节点的编号记录一下, 剩下那些不动的节点的编号就很容易得到了. 然后再组装一个稀疏矩阵, 行的位置就是上面这些, 列的位置是

$$nely+1, \underbrace{2(nely+1), \dots, nelx(nely+1)}_{\text{代表下边中间的 } nelx-1 \text{ 个}}, nely+1, \underbrace{2, \dots, nely}_{\text{代表左边中间的 } nely-1 \text{ 个}}, nely+1$$

在转移矩阵相应的位置的值为

$$\underbrace{e^{-i\mu_y}, \dots, e^{-i\mu_y}}_{nelx \text{ 个}}, e^{-i\mu_x} e^{-i\mu_y}, \underbrace{e^{-i\mu_x}, \dots, e^{-i\mu_x}}_{nely \text{ 个}}$$

以声压为例,  $P = TP$ , 其中  $P$  是  $(nelx+1)(nely+1)$  维的列向量,

## 10 声振耦合

声振耦合是说, 定义域  $\Omega$  分为  $\Omega_a$  和  $\Omega_s$  两部分,  $\Omega_a$  由空气占据,  $\Omega_s$  由固体占据. 单独看  $\Omega_a$ , 这是一个纯声波问题, 需要求解的是处处的声压  $p$ . 单独看  $\Omega_s$ , 这是一个纯弹性波问题, 需要求解的是处处的位移  $\tilde{\mathbf{u}}$ . 声振耦合是多物理场耦合的问题, 特别是两个物理场服从的方程并不相同. 二者发生耦合的位置在交界面处, 互相成为边界条件. 研究  $\Omega_a$ , 那么弹性体的振动激发声波, 准确来说

$$\vec{n} \cdot \nabla p = \omega^2 \rho_a \vec{n} \cdot \vec{u}$$

(这里  $\vec{n}$  是从  $\Omega_a$  往外指的外法向, 虽然这个不影响, 但下面积分项中  $\vec{n}$  是  $\Omega_a$  往外指的外法向) 应该将这个式子理解为牛顿第二定律, 给整个式子同乘上时间因子  $e^{i\omega t}$ , 则

$$-\vec{n} \cdot \rho_a \frac{dv}{dt} = \vec{n} \cdot \nabla (pe^{i\omega t}) = \omega^2 \rho_a \vec{n} \cdot \vec{u} e^{i\omega t} = -\rho_a \vec{n} \cdot \frac{d^2 \vec{u} e^{i\omega t}}{dt^2}$$

从而可以看到这个式子是说边界处空气微元与弹性体微元有相同的加速度. 从有限元编程的角度来看, 这个边界条件属于前面提过的 Acceleration boundary condition. 考虑  $\Omega_a$  中交界处的一个单元

$$\int_{\partial\Omega} \tilde{p} \rho_a^{-1} \nabla p \cdot \vec{n} d\Gamma = \int_{\partial\Omega} \tilde{p} \omega^2 \vec{n} \cdot \vec{u} d\Gamma = \omega^2 \int_{\partial\Omega} N_a \tilde{\mathbf{p}} \vec{n}^T N_s \mathbf{u} d\Gamma = \omega^2 \tilde{\mathbf{p}}^T \int_{\partial\Omega} N_a^T \vec{n}^T N_s d\Gamma \mathbf{u}$$

这里我默认  $N_a, N_s$  是行向量, 而  $\tilde{\mathbf{p}}, \mathbf{u}, \vec{n}$  是列向量. 记

$$S_e = \int_{\partial\Omega} N_s^T \vec{n} N_a, \quad S_u = \sum S_e^T, \quad \mathbf{f}_a^u = \omega^2 S_u \mathbf{u}.$$

接下来研究  $\Omega_s$ , 那么声压成为弹性体的面压力, 准确来说,

$$\vec{g} = -p\vec{n}$$

(这里  $\vec{n}$  是从  $\Omega_s$  往外指的外法向, 所以上面要加一个负号, 之所以这样要求是为了跟上面的情形保持一致,  $\vec{n}$  永远是当前单元往外指的外法向) 这是 Neumann 边界条件. 考虑  $\Omega_s$  中交界处的单元,

$$\int_{\partial\Omega} \vec{g} \tilde{\mathbf{u}} d\Gamma = - \int_{\partial\Omega} p \vec{n} \tilde{\mathbf{u}} d\Gamma = -\mathbf{p}^T \int_{\partial\Omega} N_a^T \vec{n}^T N_s d\Gamma \tilde{\mathbf{u}} = -\mathbf{p}^T S_e^T \tilde{\mathbf{u}} = -\tilde{\mathbf{u}}^T S_e \mathbf{p}$$

记  $S_p = \sum S_e, \mathbf{f}_s^p = S_p \mathbf{p}$ , 于是我们有以下线性方程组

$$(K_s - \omega^2 M_s) \mathbf{u} = \mathbf{f}_s + \mathbf{f}_s^p = \mathbf{f}_s - S_p \mathbf{p}$$

$$(K_a - \omega^2 M_a) \mathbf{p} = \mathbf{f}_a + \mathbf{f}_a^u = \mathbf{f}_a + \omega^2 S_u \mathbf{u}$$

或者可以写成

$$\left( \begin{bmatrix} K_s & -S^T \\ 0 & K_a \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M_s & 0 \\ S & M_a \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_s \\ \mathbf{f}_a \end{pmatrix}.$$

以上求解方式, 显然需要我们明确知道  $\Omega_a$  与  $\Omega_s$  的几何边界, 因此并不适用于使用连续值作为设计变量的拓扑优化. 文献中提出了许多解决方式, 下面介绍一二

### 使用一个方程统一声波和弹性波方程

回忆流体是静止时应力张量没有剪切分量的弹性体, 也就是流体静止时的应力张量是标量矩阵. 为了让弹性体满足的方程可以在应力张量是标量矩阵时退化为声波方程, 我们将  $\sigma$  和  $\epsilon$  进行分解

$$\sigma = \frac{\text{tr} \sigma}{3} I + \left( \sigma - \frac{\text{tr} \sigma}{3} I \right) = \sigma_{\text{球}} + \sigma_{\text{斜}}, \quad \epsilon = \frac{\text{tr} \epsilon}{3} I + \left( \epsilon - \frac{\text{tr} \epsilon}{3} I \right) = \epsilon_{\text{球}} + \epsilon_{\text{斜}}$$

回忆使用拉梅系数  $\lambda, \mu$  表达的应力应变关系是  $\sigma = 2\mu\epsilon + \lambda \text{tr} \epsilon I$ , 改成用体积模量  $K$  和剪切模量  $\mu$ ,

$$\sigma = K \text{tr} \epsilon I + 2\mu \left( \epsilon - \frac{\text{tr} \epsilon}{3} I \right)$$

比较得到

$$\frac{\text{tr} \sigma}{3} = K \text{tr} \epsilon, \quad \sigma - \frac{\text{tr} \sigma}{3} I = 2\mu \left( \epsilon - \frac{\text{tr} \epsilon}{3} I \right)$$

将  $\sigma$  和  $\epsilon$  写成列向量得到  $\sigma = C\epsilon$ , 相应的分量之间也满足  $\sigma_{\text{球}} = C\epsilon_{\text{球}}, \sigma_{\text{斜}} = C\epsilon_{\text{斜}}$ . 回忆弹性波满足

$$-\nabla \cdot \sigma = \omega^2 \rho_s \vec{u}$$

其弱形式的推导完全类似之前,

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \sigma_{ij,j} v_i dx &= \int_{\Omega} \sigma_{ij} v_{i,j} dx - \int_{\Gamma} \sigma_{ij} v_i n_j dS = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \epsilon_{ij}(v) dx - \int_{\Gamma} \sigma_{ij} v_i n_j dS \\ \int_{\Omega} \sigma_{ij} \epsilon_{ij}(v) dx &= \int_{\Omega} \epsilon(v) C \epsilon(u) dx = \int_{\Omega} \epsilon(v)_{\text{球}} C \epsilon(u)_{\text{球}} + \epsilon(v)_{\text{斜}} C \epsilon(u)_{\text{斜}} dx \end{aligned}$$

考虑到流体情形中  $\sigma_{\text{斜}} = 0$  而  $\sigma = \sigma_{\text{球}} = -pI$ , 所以令  $\sigma_{\text{球}} = K \text{tr} \epsilon = -pI$ , 积分方程变为

$$\int_{\Omega} -p \epsilon(v)_{\text{球}} + \epsilon(v)_{\text{斜}} C \epsilon(u)_{\text{斜}} dx - \int_{\Gamma} \sigma_{ij} v_i n_j dS = \omega^2 \int_{\Omega} \rho u_i v_i dx$$

将  $p$  视为额外的变量, 所以需要额外的方程,

$$\int_{\Omega} \left( \frac{p}{K} + \text{tr} \epsilon \right) \tilde{p} dx = 0.$$

使用连续变量计算边界的有限元编程项

