Notes on FS metric

孙天阳

2023 年 7 月 14 日

目录

1 李群和齐性空间上的左不变度量

定义 1.1.

命题 1.2. 设 G 是李群, $\langle\ ,\ \rangle$ 是 T_eG 上的一个内积, 则可以定义 G 上的黎曼度量

$$g(u,v) := \big\langle (L_{p*})^{-1}(u), (L_{p*})^{-1}(v) \big\rangle, \quad u, v \in T_pG.$$

证明. 首先 g 在每点处的切空间都良好定义一个内积. 只需要证明 g 是光滑的. 注意到可以在 G 上找到由左不变向量场构成的全局的标架, g 的光滑性是显然的. □

命题 1.3. 设 G 是李群, H 是 G 的闭子群, $M = G/H$ 是齐性空间, $p \in M$. 设 $\langle\ ,\ \rangle$ 是 T_pM 上的一个内积, 则可以定义 M 上的黎曼度量

2 Kahler 形式

2

3 Chern 形式

设 L 是复流形 X 上的全纯线丛, h 是 L 上的厄米度量, 那么

$$\omega = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\partial\bar{\partial}\log h$$

是 $(1,1)$-型的闭形式. 如何理解这个式子呢? 设

$$\varphi_\alpha\colon \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{C}, \quad \varphi_\beta\colon \pi^{-1}(U_\beta) \longrightarrow U_\beta \times \mathbb{C}.$$

在 U_α 上, 考虑 $\sigma_\alpha(p) = \varphi_\alpha^{-1}(p,1)$, 定义函数 $h_\alpha(p) = h(\sigma_\alpha(p), \sigma_\alpha(p))$, 下面我们研究 h_α 与 h_β 之间的关系, 为此我们需要研究 $\sigma_\alpha(p)$ 与 $\sigma_\beta(p)$ 之间的关系.

固定一点 $p \in U_\alpha \cap U_\beta$, 我们习惯考虑映射

$$\varphi_{\alpha,p} \circ \varphi_{\beta,p}^{-1}\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

我们知道它是一个线性映射, 可以用一个复数 $g_{\alpha\beta}(p)$ 来表示, 当 p 变动起来时,$g_{\alpha\beta}$ 是一个全纯函数.

但我们现在需要的不是 $\varphi_{\alpha,p} \circ \varphi_{\beta,p}^{-1}$, 而是 $\varphi_{\beta,p}^{-1} \circ \varphi_{\alpha,p}$, 但我们说这两个东西相差不远，因为

$$\varphi_{\beta,p}^{-1} \circ \varphi_{\alpha,p} = \varphi_{\alpha,p}^{-1} \circ \varphi_{\alpha,p} \circ \varphi_{\beta,p}^{-1} \circ \varphi_{\alpha,p} = \varphi_{\alpha,p}^{-1} \circ g_{\alpha\beta}(p) \circ \varphi_{\alpha,p} = g_{\alpha\beta}(p)$$

即

$$\varphi_{\beta,p}^{-1} = g_{\alpha\beta}(p) \circ \varphi_{\alpha,p}^{-1} \Longrightarrow \sigma_\beta = g_{\alpha\beta}\sigma(\alpha) \Longrightarrow h_\beta = g_{\alpha\beta}\bar{g}_{\alpha\beta}h_\alpha.$$

定义

$$\omega_\alpha = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\partial\bar{\partial}\log h_\alpha$$

因为 $g_{\alpha\beta}$ 是全纯的, 容易看出 $\omega_\alpha = \omega_\beta$, 我们得到了一个整体定义在 X 上的 2-形式.

4 Fubini-Study 度量的定义