偏微分方程数值解

中国科学技术大学 数学学院

张 梦 萍

办公室：东区–管理科学楼1227室

0551-63601855；mpzhang@ustc.edu.cn；2024-09

付 杨 鑫

（办公室：东区–管理科学楼1212室）

李 顺

（办公室：东区–管理科学楼1212室）

第一部分：一维线性偏微分方程初值问题的有限差分方法

第一章：Fourier级数和三角插值

傅里叶级数理论是偏微分方程的数值方法分析研究的主要工具。

1 Fourier级数理论的一些常用概念与结果

首先，我们考虑用傅立叶级数表示连续复值函数。本章我们假设函数均定义在所有实数上，周期为2π（除特别说明之外）。

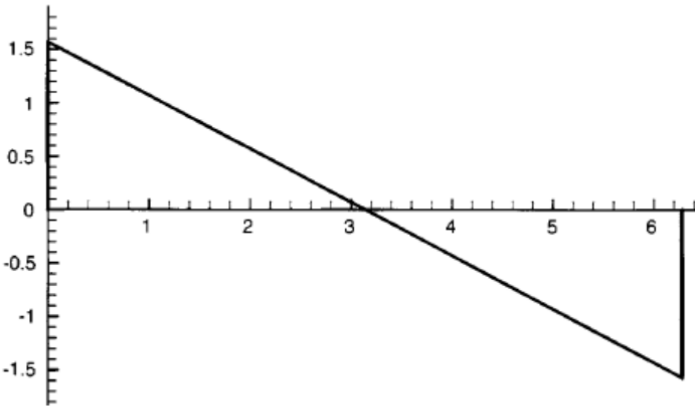
1.1 Fourier级数的收敛性

1. 定理

Theorem 1.1 假设$f \in C^1_{(-\infty,\infty)}$是$2\pi$周期的周期函数，则$f(x)$可由如下*Fourier*级数表示：$f(x) = \frac{1}{\sqrt[2]{2\pi}} \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x}$。
其中，*Fourier*系数$\hat{f}(\omega)$为：$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt[2]{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-i\omega x} dx$。
且该*Fourier*级数一致收敛性于$f(x)$

$C^n_{(a,b)}$：表示在(a,b)上的n次连续可导的函数集合。

Theorem 1.2 假设f是2π周期、分片C^1函数。若在$a < x < b$上$f \in C^1_{(a,b)}$，则在(a,b)上的任意子区间$a < \alpha \leq x \leq \beta < b$上，其*Fourier* 级数一致收敛性于$f(x)$。在间断点$x$处，*Fourier*级数收敛性于$\frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0))$



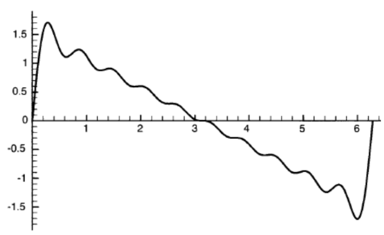


Figure 1: fig1.1.2

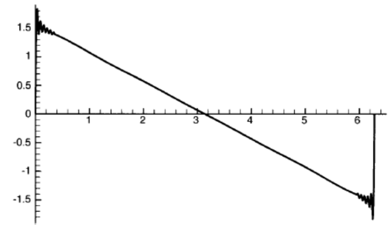


Figure 2: fig1.1.3

Theorem 1.3 若$g(x)$是2π周期函数，假设它的p阶导数是分片C^1函数，则其*Fourier*系数满足：

$$|\hat{g}(\omega)| \leq constant/(|\omega|^{p+1}+1)$$

2. 锯齿函数的Fourier级数特性

   锯齿函数$f(x)=\frac{\pi-x}{2}$, $0<x\leq 2\pi$，$f(x)=f(x+2\pi)$

   $\Rightarrow$: $f(x)$是分片C^1的2π周期的周期函数

   $f(x)=\sum_{\omega=1}^{\infty}\frac{sin\omega x}{\omega}$；且$|\hat{f}(\omega)|\leq constant/|\omega|$。

   取：部分和$f_N(x)=\sum_{\omega=1}^{N}\frac{sin\omega x}{\omega}$。

   图fig1.1.1、fig1.1.2和fig1.1.3分别给出了曲线$f(x)$、$f_{10}(x)$和$f_{100}(x)$。

由图可见：在二个不连续点$x=0$、2π的邻域，出现了明显的Gibbs现象；即接近跳跃处，出现快速振荡；随着N增大，振荡

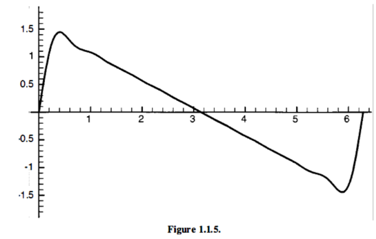


Figure 3: fig1.1.5

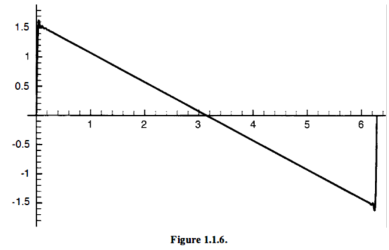


Figure 4: fig1.1.6

收窄、频率加快，而且不收敛于0；越接近$x=0$、2π，振荡幅度越大。

3. p阶导数为锯齿函数的函数的Fourier级数特性

取$f^{(1)}(x)$的导数为锯齿函数$f(x)=\frac{\pi-x}{2}$，则有

$f^{(1)}(x)=\int_0^x f(t)dt=\sum_{\omega=1}^{\infty}\frac{1}{\omega^2}-\sum_{\omega=1}^{\infty}\frac{\cos\omega x}{\omega^2}$，$0\le x\le 2\pi$。

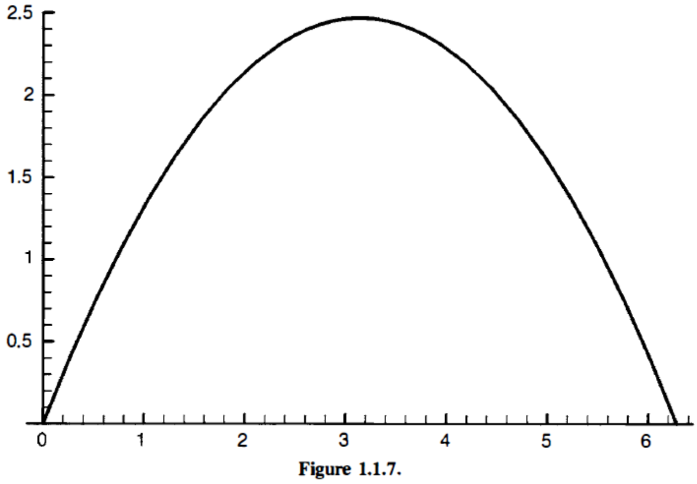
由此可见：1）$f^{(1)}(x)$是Lipschitz连续函数，它的1阶导数是锯齿函数（在$x=0,\pm 2\pi,\pm 4\pi,\cdots$处有跳跃）；2）其Fourier 级数对所有的$x$一致收敛性于$f^{(1)}(x)$；3）其Fourier系数满足：$|\hat{f^{(1)}}(\omega)|\le constant/(|\omega|^2+1)$（其中：$f^{(1)}(x)$的1阶导数是分片$C^1$）

取：$f_N^{(1)}(x)=\sum_{\omega=1}^{N}\frac{1}{\omega^2}-\sum_{\omega=1}^{N}\frac{\cos\omega x}{\omega^2}$

图fig2.1.1、fig2.1.2和fig2.1.3分别给出了曲线$f^{(1)}(x)$、$f_{10}^{(1)}(x)$和$f_{100}^{(1)}(x)$。由图可见：，则：$N\to\infty$ 时，$f_N^{(1)}(x)$ 收敛于$f^{(1)}(x)$

若2π周期函数$f^{(p)}(x)$是锯齿函数$f(x)=\frac{\pi-x}{2}$的p重积分，则$f^{(p)}(x)$的$p-1$阶导数连续，p阶导数有跳跃点；易得到其Fourier系数满足：

$$|\hat{f^{(p)}}(\omega)|\le constant/(|\omega|^p+1)$$



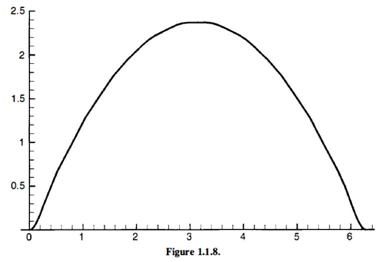


Figure 5: fig2.1.2

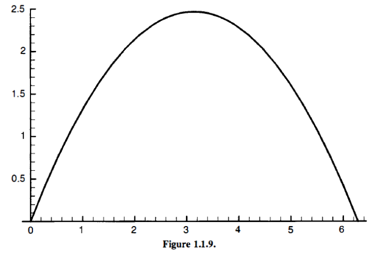


Figure 6: fig2.1.3

对于一般的 2π 周期的、p 阶导数是分片 C^1 的函数也有类似的性质；见定理1.3

4. 定理1.3的证明

5. 一般的 2π 周期的、分片光滑的函数的研究，转换为对锯齿函数的研究

1.2　标量内积与 L_2 模

1. 定义

常用的收敛性定义有："按 $||\cdot||$ 模收敛"和"逐点收敛"

本章若没有特别说明，则 $||\cdot||$ 是指 L_2 模。

令 $\bar{f}$ 为 f 的复共轭，则 L_2 标量内积与 L_2 模分别定义为：

- 函数 f 与 g 的内积：$(f,g)=\int_0^{2\pi}\bar{f}(x)g(x)dx$，

- 函数 f 的 L_2 模：$\|f\|_2=(f,f)^{\frac{1}{2}}=(\int_0^{2\pi}\bar{f}(x)f(x)dx)^{\frac{1}{2}}=(\int_0^{2\pi}|f|^2dx)^{\frac{1}{2}}$

- 序列 $\{f_\mu\}_{\mu=1}^{\infty}$ 在平均意义下（L_2 模意义下）收敛于 f，即：$\lim_{\mu\to\infty}\|f_\mu-f\|=0$

标量内积是双线性的，即：

$(f,g)=\overline{(g,f)},\quad (f+g,h)=(f,h)+(g,h)$

$(\lambda f,g)=\bar{\lambda}(f,g),\quad (f,\lambda g)=\lambda(f,g),\quad \lambda\, is\ costant\ scalar$

L_2 模满足：$\|\lambda f\|=|\lambda|\cdot\|f\|$，$|(f,g)|\le\|f\|\cdot\|g\|$ ，

三角不等式：$\|f+g\|\le\|f\|+\|g\|$，$|\|f\|-\|g\||\le\|f-g\|$

2. 若干重要引理、定理

Lemma 1.1 指数函数 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}$, $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$ 关于 L_2 标量内积是标准正交的，即：

$$(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx},\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{imx})=\begin{cases}0 & \text{当}m\neq n;\\ 1 & \text{当}m=n\end{cases}$$

Theorem 1.4 （*Bessel*不等式）
对所有的 N，有：$\sum_{\omega=-N}^{N}|\hat{f}(\omega)|^2\leq\|f\|^2$。
此外，当且仅当*Parseval*关系成立（即：$\sum_{\omega=-\infty}^{\infty}|\hat{f}(\omega)|^2=\|f\|^2$）时，有：
$\lim_{N\to\infty}\|f-S_N\|^2=\lim_{N\to\infty}(\|f\|^2-\sum_{\omega=-N}^{N}|\hat{f}(\omega)|^2)=0$；
其中 $S_N=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{\omega=-N}^{N}\hat{f}(\omega)e^{i\omega x}$，$\hat{f}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi}e^{-i\omega x}f(x)dx$。

Parseval关系：$\sum_{\omega=-\infty}^{\infty}|\hat{f}(\omega)|^2=\|f\|^2$
Bessel不等式$\sum_{\omega=-N}^{N}|\hat{f}(\omega)|^2\leq\|f\|^2$

Theorem 1.5 任意分片连续地函数 f 都能展开成在 L_2 模意义下收敛于 f 的*Fourier*级数，即：$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{\omega=-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{i\omega x}$，$\hat{f}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi}e^{-i\omega x}f(x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(e^{-i\omega x},f(x))$；且*Parseval*关系成立。

证明：

1) 对所有的属于 $C^1(-\infty,\infty)$ 的 2π 周期函数，Parseval 关系成立。

2) 若 f 是一个分片连续地函数，则在 L_2 模意义下，它可以被 2π 周期属于 C^1 的函数任意好的逼近（实变函数中的一个

定理）；即：存在函数序列$\{f_\mu\}$，$f_\mu \in C^1$，且是2π周期的，使得：

$$\lim_{\mu\to\infty} \|f - f_\mu\| = 0$$

$$\lim_{\mu\to\infty} \| f_\mu \| = \| f \|$$

。

$| \sum_{\omega=-\infty}^{\infty}(|\hat{f}(\omega)|^2 - |\hat{f}_\mu(\omega)|^2) |$
$\le (2(\|f\|^2 + \|f_\mu\|^2))^{\frac{1}{2}} \cdot \|f - f_\mu\|$；

$\|f\|^2 - \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2$
$\le \lim_{\mu\to\infty}(2(\|f\|^2 + \|f_\mu\|^2))^{\frac{1}{2}}\|f - f_\mu\|$
$\Rrightarrow$： $\|f\|^2 = \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)\|^2$ 证毕

由于任意C^1函数可以被C^∞函数任意好地近似，所以我们也可以使用C^∞函数代替C^1函数。一个“坏”函数可以用一系列光滑函数近似。

Theorem 1.6 若 $f, g \in L_2$, 则 $(f, g) = \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} \bar{\hat{f}}\hat{g}$，其中：
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega x}$， $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} \hat{g}(\omega)e^{i\omega x}$

若f, g是一般函数，则在L_2意义下上式成立。

作业–20240912：

参考书1：page 17: 1.1.1；1.1.2

2 周期性格点函数与差分算子

2.1 收敛速度刻画–"大O"表示

收敛速度的"大O"表示

1、 函数

- 定义：假设$\lim_{h\to 0} G(h)=0$，$\lim_{h\to 0} F(h)=L$，若存在常数$K>0$，且对足够小的h，有$|F(h)-L|\le K|G(h)|$，
  则可写成$F(h)=L+O(G(h))$，即：$F(h)$收敛于L的速度与$G(h)$收敛于0的速度相当；
  通常取$G(h)=h^p$，$p>0$；且p越大，收敛的速度越快
- 例子

2、 序列

- 定义：假设$\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$是一个已知收敛于$0$的序列，$\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$收敛于$\alpha$，若存在常数$K>0$，且对大的$n$，有$|\alpha_n-\alpha|\le K|\beta_n|$，
  则称$\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$收敛于$\alpha$ 的速度与$\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$收敛于$0$的速度相当；或$\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$以$O(\beta_n)$收敛的速度收敛于$\alpha$；
  记为：$\alpha_n=\alpha+O(\beta_n)$。$O(\beta_n)$读为：大O β_n
  通常取:$\beta_n=\frac{1}{n^p}$, $p>0$，p越大，收敛的速度越快
- 例子

2.2 周期性格点函数

将x轴用一系列点分割，则这些点称为格点$x_0, x_{\pm 1}, x_{\pm 2}, \ldots, x_{\pm n}\ldots$；

如均匀剖分：$x_j = j \cdot h, j = 0, \pm 1, \ldots$；其中$h = \frac{T}{N+1}$是空间步长，$T$为周期，这儿$T = 2\pi$。函数$u(x)$ 在格点x_j处的值称为格点函数值$u_j = u(x_j)$。周期性格点函数$u_j = u(x_j) = u(x_j + 2\pi) = u_{j+N+1}$.

2.3 差分算子

1. 平移算子$E = E^1$：$(Ev)_j \equiv v_{j+1}$

   平移算子E是线性算子：

   $E^p v = E^{p-1}(Ev)$：$(E^p v)_j = v_{j+p}$，$(E^{-1}v)_j = v_{j-1}$，$(E^0 v)_j = v_j$；且：$(\alpha E^p + \beta E^q)v = \alpha E^p v + \beta E^q v$，$\alpha, \beta$分别是常数

2. 前差算子D_+：$D_+ \equiv \frac{E^1 - E^0}{h}$

3. 后差算子D_-：$D_- \equiv \frac{E^0 - E^{-1}}{h}$

4. 中心算子D_0：$D_0 \equiv \frac{E^1 - E^{-1}}{2h}$

$hD_+ e^{i\omega x_j} = (e^{i\omega h} - 1)e^{i\omega x_j} = (i\omega h + O(\omega^2 h^2))e^{i\omega x_j}$

$hD_- e^{i\omega x_j} = (1 - e^{-i\omega h})e^{i\omega x_j} = (i\omega h + O(\omega^2 h^2))e^{i\omega x_j}$

$hD_0 e^{i\omega x_j} = \frac{1}{2}(e^{i\omega h} - e^{-i\omega h})e^{i\omega x_j} = (i\omega h + O(\omega^3 h^3))e^{i\omega x_j}$

2.4 导数的近似

$|(D_+ - \frac{\partial}{\partial x})e^{i\omega x}| = O(\omega^2 h)$，1阶近似（1阶精度）

$|(D_- - \frac{\partial}{\partial x})e^{i\omega x}| = O(\omega^2 h)$，1阶近似（1阶精度）

$|(D_0 - \frac{\partial}{\partial x})e^{i\omega x}| = O(\omega^3 h^2)$，2阶近似（2阶精度）

即：D_+, D_- 分别是$\frac{\partial}{\partial x}$的1阶近似；$D_0$是$\frac{\partial}{\partial x}$的2阶近似；

高阶导数可以用上述算子的乘积近似；如：

$(D_+ D_- v)_j = (D_- D_+ v)_j = h^2((E - 2E^0 + E^{-1})v)_j = h^2(v_{j+1} - 2v_j +$

$v_{j-1})$；

$h^2D_+D_-e^{i\omega x_j}=(e^{i\omega h}-2+e^{-i\omega h})e^{i\omega x_j}=(-4(sin(\frac{\omega h}{2}))^2)e^{i\omega x_j}=(-\omega^2h^2+O(\omega^4h^4))e^{i\omega x_j}$

$\Rightarrow$：$|(D_+D_- -\frac{\partial^2}{\partial x^2})e^{i\omega x}|=O(\omega^4h^2)$；即：$D_+D_-$是$\frac{\partial^2}{\partial x^2}$的2阶近似（2阶精度）

2.5 有限维矢量空间的模以及性质

考虑m维矢量空间V_m，$\forall u=(u^{(1)},\cdots,u^{(m)})\in V_m$，$u^{(j)},j=1,\cdots,m$是复数，$u^*$是$u$的共轭转置，即：$u^*=\bar{u}^T$。

标量内积：$<u,v>=u*v=\sum_{j=1}^m\bar{u}^{(j)}v^{(j)}$；模：$|u|=<u,u>^{\frac{1}{2}}$

标量内积满足下列双线性关系：

$<u,v>=\overline{<v,u>}$，$<u+w,v>=<u,v>+<w,v>$

$<\lambda u,v>=\bar{\lambda}<u,v>$，$<u,\lambda v>=\lambda<u,v>$，$\lambda$是复常数

$|<u,v>|\leq|u|\cdot|v|$，$|u+v|\leq|u|+|v|$

$<u,v>\leq|u|\cdot|v|\leq\delta|u|^2+\frac{1}{4\delta}|v|^2$，常数$\delta>0$

2.6 矩阵的模

设矩阵$A=(a_{ij})_{m\times m)}$，A的转置为：$A^T=(a_{ji})_{m\times m}$；

A的共轭转置为：$A^*=(\bar{a}_{ji})_{m\times m}$；其中$a_{ij}$ 是复数。

若u是m维矢量空间的矢量，则A的模为：$|A|\equiv max_{|u|=1}|Au|$。

矩阵模的性质：$|Au|\leq|A|\cdot|u|$，$|A+B|\leq|A|+|B|$，$|AB|\leq|A|\cdot|B|$

若λ,u分别是A的特征值和相应的特征向量，则有：$A\cdot u=\lambda\cdot u$。

A的谱半径为$\rho(A)\equiv max_j|\lambda_j(A)|$，且有：$\rho(A)\leq|A|$，其中$\lambda_j$是$A$的

第 j 个特征值。

2.7 周期性格点函数的标量内积和模

将 $[a,b]$ 区间用 $N+1$ 个节点均分，空间步长为 h。对于固定的 h 和 N，这些节点处的函数值构成了一个矢量空间

由于我们主要是对 $h\to 0$ 或 $N(h)\to\infty$ 时的函数值感兴趣，而上面定义的内积，在这种极限情况下并不一定是有限的，所以需要另外定义离散的标量内积。

离散的标量内积和模：$(u,v)_h\equiv\sum_{j=0}^{N}\bar{u}_j v_j h$，及 $\|u\|_h^2\equiv(u,u)_h$。

离散的标量的内积是双线性的；即：

$(u,v)_h=\overline{(v,u)}_h$，$(u+w,v)_h=(u,v)_h+(w,v)_h$

$(\lambda u,v)_h=\bar{\lambda}(u,v)_h$，$(u,\lambda v)_h=\lambda(u,v)_h$，$\lambda$ 是复常数

$|(u,v)_h|\le\|u\|_h\cdot\|v\|_h$，$|(u,bv)_h|\le\|b\|_\infty\cdot\|u\|_h\cdot\|v\|_h$，$\|b\|_\infty=max_j|b_j|$

$\|u+v\|_h\le\|u\|_h+\|v\|_h$，$|\ \|u\|_h-\|v\|_h\ |\le\|u-v\|_h$

若 u，v 是连续函数在格点的投影，则有：

$\lim_{h\to 0}(u,v)_h=(u,v)$，$\lim_{h\to 0}\|u\|_h^2=\|u\|^2$

这个结论对 C^1 函数也是有效的

2.8 算子模

$\|Q\|_h=\sup_{\|u\|_h=1}\|Qu\|_h$

2.9 矢量格点函数的标量内积和模

对于矢量 $u=(u^{(1)},\cdots,u^{(m)})^T$ 的格点函数，定义其内积和模：

$(u,v)_h\equiv\sum_{j=0}^{N}<u_j,v_j>h$，及 $\|u\|_h^2\equiv(u,u)_h$。

如此定义的内积的性质；

$(u,v)_h=\overline{(v,u)_h}$，$(u+w,v)_h=(u,v)_h+(w,v)_h$

$(\lambda u,v)_h=\bar{\lambda}(u,v)_h$，$(u,\lambda v)_h=\lambda(u,v)_h$，$\lambda$是复常数

$|(u,v)_h|\le\|u\|_h\cdot\|v\|_h$，$\|u+v\|_h\le\|u\|_h+\|v\|_h$，$|\ \|u\|_h-\|v\|_h\ |\le\|u-v\|_h$

若A是常系数矩阵，则有：$|(Au,v)_h|\le|A|\cdot\|u\|_h\cdot\|v\|_h$

若$A=A_j$是一个节点函数矩阵，则有：，$|(Au,v)_h|\le\cdot max_j|A_j|\cdot\|u\|_h\cdot\|v\|_h$

3 三角插值

对给定的未知函数 $f(x)$ 的若干点的函数值构造 $f(x)$ 的近似函数 $\varphi(x)$
插值：构造上述近似函数 $\varphi(x)$ 的一个过程。其中近似函数 $\varphi(x)$ 称为"插值函数"。当"插值函数"为"三角函数"，则称为三角插值

3.1 三角插值

令 $u \in P_h$ 是一个 2π 周期的格点函数
问题：将 $[0, 2\pi]$ 均分为 $N+1$ 个小区域，节点为 $x_0, \ldots, x_N$，$x_j = j \cdot h$，$j = 0, 1, \cdots, N$，$h = \frac{2\pi}{N+1}$，$u_j = u(x_j)$，$u_j = u_{j+1+N}$。寻求唯一（存在唯一）的 $\phi(x)$ 使得 $u_j = \phi(x_j)$，$u_j = u_{j+1+N}$，且 $\phi(x)$ 是三角函数：

- N 是偶数，则三角多项式是对称的，即从 $-\frac{N}{2}$ 到 $\frac{N}{2}$：$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\omega=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \tilde{u}(\omega) e^{i\omega x}$；
  其中 $\tilde{u}(\omega)$ 由 $u_j = \phi(x_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\omega=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \tilde{u}(\omega) e^{i\omega x_j}$，$j = 0, 1, \cdots, N$ 确定。

- N 是奇数，则三角多项式是非对称的，且 $-\frac{N+1}{2} + 1 \leq \omega \leq \frac{N+1}{2}$

为方便起见，我们假设 N 是偶数

Lemma 3.1 指数函数 $e^{i\nu x}$, $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \frac{N}{2}$ 关于离散内积是正交的，即：

$$(e^{i\nu x}, e^{i\mu x})_h = \begin{cases} 0, & 0 < |\nu - \mu| \leq N; \\ 2\pi, & \nu = \mu \end{cases}$$

Theorem 3.1 满足 $u_j = \phi(x_j)$， $j = 0, 1, \cdots, N$，的三角插值：

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\omega=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \tilde{u}(\omega) e^{i\omega x}$$

是唯一的，且

$$\tilde{u}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (e^{i\omega x}, u)_h$$

Theorem 3.2 若 $\phi(x)$、$\psi(x)$ 分别满足：$\phi(x_j) = u_j$， $\psi(x_j) = v_j$， $j = 0, 1, \cdots, N$，的三角插值；

$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\omega=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \tilde{u}(\omega) e^{i\omega x}$， $\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\omega=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \tilde{v}(\omega) e^{i\omega x}$；则有：

(1) $(u, v)_h = \sum_{\omega=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \bar{\tilde{u}}(\omega) \tilde{v}(\omega) = (\phi, \psi)$

(2) $\|\phi\|^2 = \sum_{\omega=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} |\tilde{u}(\omega)|^2 = \|u\|_h^2$

(3) $\|D_+^l u\|_h^2 \leq \|\frac{d^l}{dx^l}\phi\|^2 \leq (\frac{\pi}{2})^{2l} \|D_+^l u\|_h^2$， $l = 0, 1, \cdots$。

3.2 $\hat{u}(\omega)$ 与 $\tilde{u}(\omega)$ 关系

考虑 2π 周期的周期函数 u，假设 u 可以用Fourier级数表示，

即：$u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} \hat{u}(\omega) e^{i\omega x}$，

其格点函数的三角插值为：$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\omega=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \tilde{u}(\omega) e^{i\omega x}$；

讨论 $\hat{u}(\omega)$ 与 $\tilde{u}(\omega)$ 关系

Lemma 3.2 若 $|\omega| \leq \frac{N}{2}$， $\tilde{u}(\omega) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \hat{u}(\omega + l(N+1))$。尤其是：若 $|\omega| > \frac{N}{2}$， $\hat{u}(\omega) = 0$；则有：三角插值 $\phi(x) = u(x)$。

Theorem 3.3 假设 u 是 2π 周期的周期函数，其*Fourier*系数满足下列关系：$|\hat{u}(\omega)| \leq \frac{c}{|\omega|^m}$， $\omega \neq 0$， $m > 1$；则有：

$\|u(\cdot) - \phi(\cdot)\|_\infty \leq \frac{2c}{\sqrt{2\pi}} (\frac{N}{2})^{1-m} (\frac{1}{m-1} + \frac{2(N+1)}{N} B_m)$，

其中 $B_m=\sum_{j=1}^{\infty}(\frac{1}{2j-1})^m$， $u(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{\omega=-\infty}^{\infty}\hat{u}(\omega)e^{i\omega x}$，
$\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{\omega=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}\tilde{u}(\omega)e^{i\omega x}$， $\|u(\cdot)\|_\infty=sup_{0\le x\le 2\pi}|u(x)|$。

推论：存在常数 C_l，使得：
$\|\frac{d^l}{dx^l}u(x)-\frac{d^l}{dx^l}\phi(x)\|_\infty\le C_l(\frac{N}{2})^{1+l-m}$， $1+l<m$

作业–20240914：

参考书1：P24, 1.2.1、1.2.2；

参考书1，p37:1.5.1，1.5.2

补充作业：

试证：参考书1中P26的定理1.3.3中公式（1.3.4）；以及当N为奇数时，写出P26页相应的定理1.3.2，并证明之。

大作业1（20240914）

求下述偏微分方程初值问题在时刻 $t=0.3$ 的近似解：

$$\begin{cases} u_t=u_x,\ -\infty<x<\infty\ t>0, \\ u(x,0)=sin(2\pi x),\ -\infty<x<\infty, \\ \text{周期性边界条件，且周期为：}1 \end{cases}$$

该方程的精确解为 $u(x,t)=sin(2\pi(x+t))$, 对时空区域 $[0,1]$, $[0,1]$ 剖分(均分)如下：

时间： $t_n=n\cdot\Delta t,\ n=0,1,2,...,N$, 时间步长 $\Delta t=\frac{1}{N}$。

空间： $x_j=j\cdot\Delta x,\ j=0,1,2,...,J$, 时间步长 $\Delta x=\frac{1}{J}$。

记 $v_j^n\approx u(x_j,t_n)$, 时间导数近似 $u_t\approx\frac{u(x,t+\Delta t)-u(x,t)}{\Delta t}$, 空间导数分别

用前差 $u_x \approx \frac{u(x+\Delta x,t)-u(x,t)}{\Delta x}$ 和 $u_x \approx \frac{u(x+\Delta x,t)-u(x-\Delta x,t)}{2\Delta x}$。得到离散方程A：$v_j^{n+1} = v_j^n + \frac{\Delta t}{\Delta x}(v_{j+1}^n - v_j^n)$ 和离散方程B：$v_j^{n+1} = v_j^n + \frac{\Delta t}{2\Delta x}(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n)$。

定解条件：初始条件：$v_j^0 = \sin(2\pi x_j)$, 边界条件：$v_j^n = v_{j+J}^n$。

问题1： 取 $\Delta x = 0.02$, $\Delta t = 0.01$, 分别用离散方程A和离散方程B求上述偏微分方程初值问题在时刻 $t = 0.3$ 的近似解和精确解(画图)。

问题2： 取 $\Delta x = 0.02$, $\Delta t = 0.03$, 分别用离散方程A和离散方程B求上述偏微分方程初值问题在时刻 $t = 0.3$ 的近似解，并画图比较精确解和精确解(画图)。

问题3： 对上述实验结果进行描述，分析并评论。