

# 泛函分析

孙天阳

中国科学技术大学数学科学学院

`tysun@mail.ustc.edu.cn`

2025 年 1 月 21 日

# 目录

目录	3
<b>1 拓扑向量空间</b>	<b>4</b>
1 拓扑向量空间	4
2 局部凸空间	5
<b>2 赋范线性空间</b>	<b>7</b>
1 半范数	7
2 压缩映射原理	8
3 完备化	9
4 列紧集	10
5 线性赋范空间	11
5.1 最佳逼近问题	11
5.2 有限维赋范线性空间的刻画	12
5.3 商空间	12
6 凸集与不动点	14
6.1 Minkowski 泛函	14
6.2 Schauder 不动点定理	15
7 内积空间	16
7.1 定义	16
7.2 内积与范数	16
<b>3 线性算子</b>	<b>17</b>
1 线性算子的概念	17
2 下有界算子	18
3 Riesz-Fréchet 表示定理及其应用	19
4 纲与开映像定理	20
4.1 开映射定理	22
4.2 闭图像定理	22
4.3 Lax-Milgram 定理	22
5 Hahn-Banach 定理	23
6 共轭空间 · 弱收敛 · 自反空间	24
6.1 共轭空间的表示	24

目录	2
6.2 二次共轭空间	25
6.3 共轭算子	25
6.4 弱收敛及 * 弱收敛	28
7 线性算子的谱	29
7.1 定义	29
7.2 预解式与谱集的基本性质	29
7.3 Gelfand 公式	31
7.4 例子	32
<b>4 紧算子与 Fredholm 算子</b>	<b>33</b>
1 紧算子	33
1.1 基本性质	33
1.2 全连续	34
1.3 例子	35
1.4 Schauder 基	35
2 Fredholm 理论	37
3 Riesz-Schauder 定理	38
3.1 紧算子的谱	38
3.2 不变子空间	39
4 Hilbert-Schmidt 定理	40
<b>5 广义函数</b>	<b>42</b>
1 动机	42
2 广义函数的概念	43
2.1 基本空间 $\mathcal{D}(\Omega)$	43
2.2 广义函数的定义和基本性质	44
2.3 广义函数的收敛性	45
<b>6 Banach 代数</b>	<b>46</b>
1 代数准备知识	46
2 谱	47
<b>7 习题</b>	<b>48</b>
1 1.1	48
2 1.2	49
3 1.3	50
4 1.4	51
5 1.5	52
6 1.6	53
7 2.1	54
8 2.2	55
9 2.3	56

目录	3
<b>A 泛函分析中的反例</b>	<b>57</b>
1 纲	57
2 映射	58
3	58
<b>B 套路</b>	<b>59</b>
1 有机会成为一组的东西	59
2 那些要自己构造一个范数的证明	59
3	59

# Chapter 1

## 拓扑向量空间

### 1 拓扑向量空间

定义 1.1. 称线性空间  $X$  及其上的拓扑  $\tau$  是拓扑向量空间, 如果加法和数乘是连续的.

定义 1.2. 完备拓扑向量空间.

例 1.3. 存在局部凸的完备拓扑向量空间, 不是可度量化

## 2 局部凸空间

**定义 2.1.** 称拓扑线性空间  $X$  是局部凸的, 如果  $X$  存在由凸集构成的邻域基.

**命题 2.2.** 设  $X$  是线性空间,  $\{p_\alpha\}_{\alpha \in A}$  是其上的一族半范数. 设  $x \in X, \alpha \in A, \varepsilon > 0$ , 则由

$$U_{x\alpha\varepsilon} = \{y \in X : p_\alpha(y - x) < \varepsilon\}$$

生成的拓扑使得  $X$  成为局部凸拓扑线性空间.

证明.

- 加法的连续性. 考虑

$$\mu: X \times X \longrightarrow X, \quad u, v \longmapsto u + v$$

我们证明子基  $U_{x\alpha\varepsilon}$  的原像是开集. 设  $\mu(u, v) = w \in U_{x\alpha\varepsilon}$ , 记  $\eta = (\varepsilon - p_\alpha(x - w))/2$ .

取  $(u, v)$  的邻域  $U_{u\alpha\eta} \times U_{v\alpha\eta}$ , 取  $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in U_{u\alpha\eta} \times U_{v\alpha\eta}$ , 下证  $\mu(\tilde{u}, \tilde{v}) = \tilde{w} \in U_{x\alpha\varepsilon}$ .

$$p_\alpha(x - \tilde{w}) \leq p_\alpha(x - w) + p_\alpha(u - \tilde{u}) + p_\alpha(v - \tilde{v}) < \varepsilon.$$

- 数乘的连续性. 考虑

$$\lambda: \mathbb{R} \times X \longrightarrow X, \quad r, u \longmapsto ru$$

我们证明子基  $U_{x\alpha\varepsilon}$  的原像是开集. 不妨设  $r > 0$ , 设  $\lambda(r, u) = w \in U_{x\alpha\varepsilon}$ , 记  $\eta = \varepsilon - p_\alpha(x - w)$ .

注意到  $\lambda(r, B_{u\alpha\delta}) = B_{w\alpha r\delta}$ . 取  $(r, u)$  的邻域  $(r - \xi, r + \xi) \times B_{u\alpha\delta}$ , 其中  $\delta = \eta/((r + \xi))$ .

- 局部凸. 只需证明  $U_{x\alpha\varepsilon}$  是凸集. 设  $y, z \in U_{x\alpha\varepsilon}$ , 则

$$p_\alpha(x - ty - (1 - t)z) \leq tp_\alpha(x - y) + (1 - t)p_\alpha(x - z) < \varepsilon.$$

□

**例 2.3.** 记  $L^0([0, 1])$  为  $[0, 1]$  上的可测函数全体 (几乎处处相等视为恒等). 定义

$$d(f, g) = \int_0^1 \frac{|f(x) - g(x)|}{1 + |f(x) - g(x)|} dx.$$

证明:

- (1)  $d(f, g)$  是  $L^0([0, 1])$  上的度量.
- (2)  $L^0([0, 1])$  在  $d(f, g)$  诱导的拓扑下成为拓扑线性空间.
- (3) 按度量  $d(f, g)$  收敛就是依测度收敛.
- (4)  $L^0([0, 1])$  在  $d(f, g)$  诱导的拓扑下不是局部凸的.

证明.

- (1) • 设  $d(f, g) = 0$ 
  - 由函数  $x/(1 + x)$  的单调性, 容易看出  $d(f, g) \leq d(f, h) + d(g, h)$ .

- (2) • 加法的连续性.  
• 数乘的连续性.

(3)

(4)

□

**命题 2.4.** 设  $X$  是局部凸拓扑线性空间, 闵可夫斯基泛函

**命题 2.5.** 设  $X$  是局部凸拓扑线性空间, 其上的拓扑由半范数族  $\{p_\alpha\}_{\alpha \in A}$  生成, 那么

- (1)  $X$  是 *Hausdorff* 的当且仅当对任意  $x \neq 0$  存在  $\alpha \in A$  使得  $p_\alpha(x) \neq 0$ .  
(2) 假设  $X$  是 *Hausdorff* 的且  $A$  是至多可数集, 那么  $X$  可被一个平移不变度量度量化.

证明.

(1)

(2)

□

## Chapter 2

# 赋范线性空间

### 1 半范数

定义 1.1. 设  $X$  是线性空间, 若  $p: X \rightarrow \mathbb{R}$  满足

$$(1) \quad p(x+y) \leq p(x) + p(y)$$

$$(2) \quad p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$$

则称  $p$  是  $X$  上的半范数.

容易看出

$$p(0) = 0, \quad p(0) \leq p(x) + p(-x) = 2p(x) \implies p(x) \geq 0.$$



## 2 压缩映射原理

**定义 2.1.** 设  $(X, \rho)$  是度量空间,  $T: X \rightarrow X$ . 若存在  $\lambda \in (0, 1)$  使得

$$\rho(Tx, Ty) \leq \lambda \rho(x, y)$$

对任意  $x, y \in X$  成立, 则称  $T$  是  $X$  上的压缩映射.

**例 2.2.** 考虑积分方程

$$x(t) - \lambda \int_0^1 e^{t-s} x(s) ds = y(t),$$

其中  $y(t) \in C[0, 1]$  为一给定函数,  $\lambda$  为常数,  $|\lambda| < 1$ . 求证存在唯一解  $x(t) \in C[0, 1]$ .

### 3 完备化

## 4 列紧集

- 紧  $\xrightarrow{\text{Hausdorff}}$  闭
- 紧  $\xrightarrow{\text{度量空间}}$  有界
- 列紧  $\xrightarrow{\text{度量空间}}$  有界
- 自列紧  $\xrightarrow{A1+\text{Hausdorff}}$  闭
- 自列紧  $\xrightarrow{\text{度量空间}}$  有界
- 列紧集的子集是列紧的.
- 列紧  $\xrightarrow{\text{度量空间}}$  完全有界
- 完全有界  $\xrightarrow{\text{完备度量空间}}$  列紧

## 5 线性赋范空间

- 关于不是所有 Abel 群都能够成为线性空间的评述可以参看与 wzd 的聊天记录
- 虽然但是, 线性结构与拓扑结构的第一步结合实际上是拓扑向量空间, 线性结构与度量结构的结合才是赋范线性空间.
- 线性流形: 线性子空间的平移

我们引进过一个空间  $X$  的线性结构, 也引进过它的度量结构, 现在要把两者结合起来, 即是要求

$$\rho(x+z, y+z) = \rho(x, y)$$

**命题 5.1.**  $\rho$  满足平移不变性当且仅当  $\rho$  对加法连续.

**定义 5.2.** 设  $P: X \rightarrow \mathbb{R}$  是线性空间  $X$  上的一个函数, 若它满足

$$(1) P(x+y) \leq P(x) + P(y)$$

$$(2) P(\lambda x) = \lambda P(x)$$

**注记.** 对于次线性泛函我的评述是: 对于一般的线性空间就可以定义次线性泛函, 但如果还是赋范线性空间那么结果会更加丰富

### 5.1 最佳逼近问题

**定理 5.3.** 设  $X$  是赋范线性空间,  $M \subset X$  是闭子空间, 则下列命题等价:

$$(1) \text{ 存在有界线性算子 } P: X \rightarrow M \text{ 使得 } P|_M = Id_M.$$

$$(2) \text{ 存在 } L \subset X \text{ 是闭子空间使得 } X = M \oplus L.$$

$$(3) \text{ 对任意 } x$$

设  $X$  是赋范线性空间,  $X_0$  是  $X$  的子空间. 任给  $y \in X$ , 量

$$d := \inf_{x \in X_0} \|y - x\|$$

总是有意义的. 并且, 我们总能找到一列点  $\{x_n\} \subset X_0$ , 使得  $\{\|y - x_n\|\}$  趋近于  $d$ .

我们还知道,  $\{x_n\}$  是有界集. 假如存在某种列紧性, 我们就能取出一个收敛子列, 可猜测序列极限便是  $y$  在  $X_0$  中的最佳逼近元.

**问题:** 给定赋范线性空间  $X$ , 并给定  $X$  中的有限多个向量  $e_1, \dots, e_n$ . 对于给定的向量  $x \in X$ , 求一组数  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ , 使得

$$\left\| x - \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \right\| = \min \left\| x - \sum_{i=1}^n a_i e_i \right\|.$$

**引理 5.4.** 设  $X$  是一个赋范线性空间,  $X_0$  是  $X$  的真闭子空间, 那么对  $\forall \varepsilon \in (0, 1)$ , 存在  $\|y\| = 1$ , 并且

$$\|y - x\| \geq 1 - \varepsilon.$$

## 5.2 有限维赋范线性空间的刻画

**定理 5.5.** 设  $X$  是赋范线性空间,  $X_0$  是  $X$  的一个真闭子空间, 那么对任意  $0 < \varepsilon < 1$ , 存在  $y \in X$ , 使得  $\|y\| = 1$ , 并且

$$\|y - x\| \geq 1 - \varepsilon, \quad \forall x \in X_0.$$

运用 F.Riesz 引理的要害察觉:

- $A$  是紧算子
- 由条件 (一般是反证时假设的条件) 构造出一串严格单增或严格单减的闭子空间
- 每个闭子空间都是  $A$  的不变子空间
- 特别地, 当  $A$  作用上去, 得到的是元素本身 (常数倍也可以, 但需要系数的模长是下有界的) 与相邻的维数较小的闭子空间中的某个元素之和.
- 由 F.Riesz 引理, 可以在第  $n$  个空间中选出一个单位向量  $x_n$ , 使得它与相邻的维数较小的闭子空间的距离大于  $\alpha$ , 其中  $\alpha$  是任意介于 0 和 1 之间的常数.
- 考虑  $\{Ax_n\}$ , 如果上上条是常数倍  $\lambda_n$ , 那么需要考虑的是  $\{Ax'_n\}$ , 其中  $x'_n = \frac{x_n}{\lambda_n}$ . 系数模长下有界的要求正是为了保证  $x'_n$  是有界的.
- 因为  $A$  是紧算子, 所以  $\{Ax_n\}$  有收敛子列.
- 但另一方面, 由我们的构造任意  $Ax_n$  与  $Ax_{n+p}$  的距离都大于  $\alpha$ , 矛盾.

## 5.3 商空间

**定义 5.6.** 设  $X$  是赋范线性空间,  $Y$  是它的闭子空间. 定义函数  $\|\cdot\|_0 : X/Y \rightarrow \mathbb{R}$  为

$$\|[x]\| = d(x, Y) = \inf_{y \in Y} \|x - y\| = \inf_{z \in [x]} \|z\|,$$

其中  $d(x, Y)$  是  $x$  到  $Y$  的距离. 那么

(a)  $\|\cdot\|$  是商空间  $X/Y$  上的范数.

()

**定理 5.7.** 设  $T : X \rightarrow Y$  是有界线性算子. 定义

$$\tilde{T} : \tilde{X} = X/N(T) \rightarrow Y, [x] \mapsto T(x).$$

则  $\|\tilde{T}\| = \|T\|$ .

**证明.**  $\|\tilde{T}\| = \sup_{\|[x]\| \leq 1} \|\tilde{T}([x])\| = \sup_{\|[x]\| \leq 1} \|Tx\|$ .

$$\|Tx\| = \|Tz\| \leq \|T\|\|z\|, \forall z \in [x] \implies \|Tx\| \leq \|T\| \inf_{z \in [x]} \|z\| = \|T\|\|[x]\|.$$

$$\|\tilde{T}\| = \|T\|.$$

□

## 半范数

**定义 5.8.** 设  $X$  是一个向量空间, 称  $p: X \rightarrow \mathbb{R}$  是一个半范数, 如果

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y), \forall x, y \in X, \quad p(\lambda x) = |\lambda|p(x), \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in X.$$

由半范数的定义, 我们可以直接得到

$$p(0) = p(0 \cdot x) = 0 \cdot p(x) = 0$$

和

$$p(0) = p(x + (-x)) \leq p(x) + p(-x) = 2p(x) \implies p(x) \geq 0.$$

**命题 5.9.** 设  $X$  是一个向量空间,  $p$  和  $q$  分别是  $X$  上的范数和半范数, 则  $p+q$  是  $X$  上的范数.

这个命题的证明是显然的, 但我们仍然把它单独拎出来, 因为对于很多函数空间, 我们使用的范数都是以这种方式构造的.

**例 5.10** ( $\gamma$  阶 Hölder 半范). 设  $U \subset \mathbb{R}^n$  是开集,  $u: U \rightarrow \mathbb{R}$ , 定义

$$[u]_{C^{0,\gamma}(U)} = \sup_{\substack{x, y \in U \\ x \neq y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\gamma}.$$

再定义

$$C^{0,\gamma}(U) = \{u: U \rightarrow \mathbb{R} \mid [u]_{C^{0,\gamma}(U)} < \infty\}.$$

证明  $C^{0,\gamma}(U)$  是线性空间,  $p: u \mapsto [u]_{C^{0,\gamma}(U)}$  是其上的半范数.

证明.

$$\begin{aligned} & \bullet \quad \frac{|u(x) + v(x) - u(y) - v(y)|}{|x - y|^\gamma} \leq \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\gamma} + \frac{|v(x) - v(y)|}{|x - y|^\gamma}. \\ & \bullet \quad \frac{|\lambda u(x) - \lambda u(y)|}{|x - y|^\gamma} = \frac{|\lambda| |u(x) - u(y)|}{|x - y|^\gamma}. \end{aligned}$$

□

设  $u \in C^{0,\gamma}(U)$ , 则存在常数  $C$  依赖于  $u$  使得

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|^\gamma,$$

这个条件显然蕴含  $u$  是连续函数, 因此  $C^{0,\gamma}(U) \subset C^0(U)$ . 回忆  $C^0(U)$  上我们有范数

$$[u] = \sup |u(x)|$$

这显然也是子空间  $C^{0,\gamma}(U)$  上的范数. 我们定义  $C^{0,\gamma}(U)$  上的范数

## 6 凸集与不动点

### 6.1 Minkowski 泛函

- 对于  $\mathbb{K}$ -线性空间  $X$  及其包含原点的凸子集  $C$ , 我们可以定义 Minkowski 泛函.
  - 注意即是针对  $\mathbb{C}$ -线性空间, 考虑的也是实一维的直线.
  - $P(x)$  取值于  $[0, +\infty]$
  - $P(x)$  具有正齐次性
  - $P(x)$  具有次可加性
- $C$  是吸收集  $\iff P$  取值于  $[0, +\infty)$
- $C$  对称或均衡  $\iff P$  具有齐次性
- 若  $X$  是  $B^*$  空间, 可以讨论  $C$  的闭性,  $0$  是否为内点,  $C$  的有界性.
  - 
  - $0$  为内点  $\implies C$  为吸收的  $\implies P$  取值于  $[0, +\infty)$
  - $0$  为内点  $\implies P$  一致连续.
  - $C$  有界  $\implies P$  正定.

**定义 6.1.** 设  $X$  是线性空间,  $C$  是  $X$  上含有  $0$  的凸子集, 在  $X$  上规定一个取值于  $[0, +\infty]$  的函数

$$P(x) = \inf \left\{ \lambda > 0 \mid \frac{x}{\lambda} \in C \right\},$$

称为  $C$  的 Minkowski 泛函.

## 6.2 Schauder 不动点定理



## 7 内积空间

回去看第八次课

### 7.1 定义

### 7.2 内积与范数

内积  $\longrightarrow$  范数

设  $X$  为内积空间, 定义

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}.$$

下验证  $\|\cdot\|$  是  $X$  上范数:

范数  $\longrightarrow$  内积

**命题 7.1.** 设  $X$  为赋范线性空间, 则其范数由内积诱导当且仅当

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2), \quad \forall x, y \in X.$$

证明.

□

## Chapter 3

# 线性算子

### 1 线性算子的概念

## 2 下有界算子

**定义 2.1.** 设  $X, Y$  是赋范线性空间. 称线性算子  $T: X \rightarrow Y$  是下有界的, 如果存在  $\gamma > 0$  使得

$$\|Tx\| \geq \gamma\|x\|, \quad \forall x \in X.$$

**引理 2.2.**  $T: X \rightarrow Y$  不是下有界的当且仅当存在一系列单位长的向量  $\{x_n\} \subset X$  使得  $\|Tx_n\| \rightarrow 0$ .

在下个引理中我们罗列下有界算子的一些性质

**引理 2.3.** 设  $X, Y$  是赋范线性空间,  $T \in L(X, Y)$  是下有界算子, 那么

- (1)  $T$  是单射.
- (2) 下有界算子全体是  $L(X, Y)$  中的开集.

Banach 空间之间的下有界算子可以被如下刻画:

**定理 2.4.** Banach 空间之间的有界线性算子  $T: X \rightarrow Y$  是下有界的当且仅当它是单射且有闭值域.

**定义 2.5.** Banach 空间的同构

有趣的是存在两个复 Banach 空间, 它们作为实 Banach 空间实同构的, 但作为复 Banach 空间不是同构的.

### 3 Riesz-Fréchet 表示定理及其应用

为什么线性函数可以用与某元素的内积表示？因为线性函数是由被作用的元素在某一方向上的分量来决定的，而分量是可以通过求内积取出来的。

## 4 纲与开映像定理

**定义 4.1.** 设  $X$  是拓扑空间, 称  $A \subset X$  是无处稠密集, 如果  $\bar{A}$  无内点.

- 另一个常用的概念是无内点闭集.
- 无处稠密集总是含在一个无内点闭集中, 即它的闭包.
- 无内点闭集是无处稠密集, 无处稠密集是无内点集.
- Baire 空间的一条等价刻画是: 可列个无内点闭集/无处稠密集的并是无内点集.
- 有例子说明, 不能再将结果进一步强化为无处稠密集.

**定义 4.2.** 称拓扑空间  $X$  为 Baire 空间如果它满足下列等价叙述中的一条:

- (1)  $X$  的非空开子集是第二纲集;
- (2)  $X$  的剩余集稠密
- (3) 可数个无内点闭集的并无内点
- (4) 可数个稠密开集的交稠密
- (5)
- (6)

直觉上, Baire 空间具有以下性质

- (1) “大”集合的可数交还是“大”集合
- (2) “小”集合的可数并还是“小”集合
- (3) “大”集合不能够被写为“小”集合的可数并
- (4) 全空间是“大”集合.

小集合有时指无内点闭集, 有时指无处稠密集, 我想这并没有很大的区别.

我们称无处稠密集的可数并为第一纲集.

**定理 4.3** (Baire). 完备度量空间是 Baire 空间.

**证明.** 我们证明可数个稠密开集的交是稠密的.

设  $\{U_n\}$  是一族稠密开集,  $U = \cap U_n$ .

任给  $x \in X$  和  $\varepsilon > 0$ , 我们要找  $y \in U$  使得  $y \in B(x, \varepsilon) \cap U$ .

因为  $U_1$  是稠密的, 所以存在  $y_1 \in U_1$  使得  $y_1 \in B(x, \varepsilon) \cap U_1$ .

因为  $B(x, \varepsilon) \cap U_1$  是开集, 所以存在  $0 < \varepsilon_1 < \frac{1}{2}$  使得  $\overline{B(y_1, \varepsilon_1)} \subset B(x, \varepsilon) \cap U_1$ .

因为  $U_2$  是稠密的, 所以存在  $y_2 \in U_2$  使得  $y_2 \in B(y_1, \varepsilon_1) \cap U_2$ .

因为  $B(y_1, \varepsilon_1) \cap U_2$  是开集, 所以存在  $0 < \varepsilon_2 < \frac{1}{2^2}$  使得  $\overline{B(y_2, \varepsilon_2)} \subset B(y_1, \varepsilon_1) \cap U_2$ .

如此做下去, 可取出一列  $\{y_n\}$  和  $\{\varepsilon_n\}$  满足

$$B(x, \varepsilon) \supset \overline{B(y_1, \varepsilon_1)} \supset \overline{B(y_2, \varepsilon_2)} \supset \cdots, \quad \overline{B(y_n, \varepsilon_n)} \subset U_n.$$

由完备度量空间的闭集套定理, 存在  $y \in \overline{B(y_n, \varepsilon_n)} \subset B(x, \varepsilon) \cap U$ .

□

例 4.4.  $\mathbb{R}$  不可数.

证明. 赋予  $\mathbb{R}$  标准度量, 则  $\mathbb{R}$  是完备度量空间.

假如  $\mathbb{R}$  可数, 则  $\mathbb{R}$  能被表示为可数个单点集的并, 这与 Baire 定理矛盾.  $\square$

定理 4.5. 设  $X, Y$  是 Banach 空间, 若  $T \in L(X, Y)$  是满射, 则  $T$  是开映射.

证明.

(1) 由  $T$  的线性,  $T$  为开映射当且仅当存在  $\delta > 0$  使得

$$B_Y(0, \delta) \subset T(B_X(0, 1)).$$

(2) 因为  $T$  是满射, 所以

$$Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} T(B_X(0, n)).$$

由 Baire 纲定理,  $Y$  作为一个有内点的集合, 不可能是可列个无处稠密的并.

因此存在  $N$  使得  $\overline{T(B_X(0, N))}$  有内点, 即存在  $y_0$  和  $r$  使得  $B_Y(y_0, r) \subset \overline{T(B_X(0, N))}$ .

注意到  $\overline{T(B_X(0, N))}$  是一个对称凸集, 因此  $B_Y(-y_0, r) \subset \overline{T(B_X(0, N))}$ , 从而

$$B_Y(0, r) \subset \frac{1}{2}B_Y(y_0, r) + \frac{1}{2}B_Y(-y_0, r) \subset \overline{T(B_X(0, N))}.$$

$\square$

### 4.1 开映射定理

**定理 4.6** (开映射定理). 设  $X, Y$  是 Banach 空间, 若  $T \in L(X, Y)$  是满射, 那么  $T$  是开映射.

证明. 按定义要证明对任意开集  $W \subset X$  有  $T(W) \subset Y$  是开集, 即对任意  $y_0 \in T(W)$  存在  $\delta$  使得  $U(y_0, \delta) \subset T(W)$ . 因为  $y_0 \in T(W)$ , 所以存在  $x_0 \in W$  使得  $Tx_0 = y_0$ . 因为  $W$  是开集所以存在  $B(x_0, r) \subset W$ . 下面我们证明存在  $\delta$  使得  $U(Tx_0, \delta) \subset T(B(x_0, r))$ , 因为集合的包含关系在平移下保持不变, 所以这等价于证明存在  $\delta$  使得  $U(0, \delta) \subset T(B(0, r))$ , 即证明  $0$  是  $T(B(0, r))$  的内点.  $\square$

### 4.2 闭图像定理

### 4.3 Lax-Milgram 定理

**定理 4.7.** 设  $H$  是一个 Hilbert 空间, 设

$$B: H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$$

是一个双线性映射满足存在常数  $\alpha, \beta > 0$  使得

$$|B[u, v]| \leq \alpha \|u\| \|v\|, \quad \beta \|u\|^2 \leq B[u, u].$$

设  $f: H \rightarrow \mathbb{R}$  是  $H$  上的有界线性泛函, 那么存在唯一的  $u \in H$  使得

$$B[u, v] = \langle f, v \rangle.$$

证明. 在  $B$  就是  $H$  上的内积的时候, Lax-Milgram 定理其实就是 Riesz 表示定理, 即使  $B$  不是内积, 在条件  $|B[u, v]| \leq \alpha \|u\| \|v\|$  的保证下, 取定  $u \in H$ , 映射

$$v \longmapsto B[u, v]$$

也确定了  $H$  上的一个有界线性泛函. Lax-Milgram 定理就是要保证  $H$  上的有界线性泛函都可以通过这种方式得到. 由 Riesz 表示定理我们知道对于取定的这个  $u \in H$  存在唯一的  $w \in H$  使得

$$B[u, v] = (w, v), \quad \forall v \in H$$

这样就定义了一个映射  $Au = w$ , Lax-Milgram 定理就是要证明  $A: H \rightarrow H$  是满射.

$A$  的线性性显然, 下证  $A$  是有界线性算子

$$\|Au\|^2 = (Au, Au) = B[u, Au] \leq \alpha \|u\| \|Au\| \implies \|Au\| \leq \alpha \|u\|$$

下证  $A$  是单射且  $R(A)$  是  $H$  中的闭集,

$$\beta \|u\|^2 \leq B[u, u] = (Au, u) \leq \|Au\| \|u\| \implies \beta \|u\| \leq \|Au\|.$$

$\square$

## 5 Hahn-Banach 定理



## 6 共轭空间 · 弱收敛 · 自反空间

• 赋范线性空间就可以讨论共轭空间, 共轭空间是其上连续线性泛函的全体.

• 例子

–  $L^p$  的共轭空间是  $L^q$ , 其中  $p \in (1, +\infty)$

–  $L^1$  的共轭空间是  $L^\infty$

–  $L^\infty$  的共轭空间不是  $L^1$

–  $C[0, 1]$  的共轭空间是  $BV[0, 1]$

### 6.1 共轭空间的表示

定义 6.1. 设  $X$  是赋范线性空间,  $X$  上的连续线性泛函全体按范数

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)|$$

构成一个 Banach 空间, 称为  $X$  的共轭空间.

例 6.2.  $L^p[0, 1]$  的共轭空间, 其中  $1 \leq p < \infty$ .

解. 设  $q$  是  $p$  的共轭指数, 即

$$\begin{cases} \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, & p > 1, \\ q = \infty, & p = 1. \end{cases}$$

我们将证:

$$L^p[0, 1]^* = L^q[0, 1].$$

□

例 6.3. 求证:  $(l^p)^* = l^q$ .

证明.

(1) 定义

$$\varphi: l^q \longrightarrow (l^p)^*, \{\eta\} \longmapsto f := \varphi(\{\eta\}): l^p \rightarrow \mathbb{K}, \{x\} \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} x_n \eta_n.$$

•  $f \in (l^p)^*$ .

(2)  $\varphi$  是满射

(3)  $\varphi$  是等距

□

## 6.2 二次共轭空间

定义 6.4. 设  $X$  是赋范线性空间, 定义赋值映射

$$\begin{aligned} J : X &\longrightarrow X^{**} \\ x &\longmapsto J(x) : f \mapsto f(x). \end{aligned}$$

- $J(x) \in X^{**}$ .
  - $J(x)(f_1 + f_2) = (f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) = J(x)(f_1) + J(x)(f_2)$ .
  - $|J(x)(f)| = |f(x)| \leq \|f\|\|x\| \implies \|J(x)\| \leq \|x\|$ .
- $J$  是线性的.
  - $J(x_1 + x_2)(f) = f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) = J(x_1)(f) + J(x_2)(f)$ .
  - $J(\lambda x)(f) = f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda J(x)(f)$ .
- $J$  是有界的.  $\|J(x)\| \leq \|x\| \implies \|J\| \leq 1$ .
- $J$  是等距嵌入. 要证  $\|J(x)\| = \|x\|$ , 即对任意  $x \neq 0$ , 要找到一  $f \in X^*$ , 使得

$$\frac{|J(x)(f)|}{\|f\|} = \frac{|f(x)|}{\|f\|} = \|x\|,$$

而这是由 Hahn-Banach 定理保证的.

定义 6.5. 如果  $J$  是满射, 则称  $X$  是自反的.

例 6.6.

- 显然,  $X$  是自反空间的必要条件是  $X$  是 Banach 空间.
- Hilbert 空间是自反空间.
- $\forall p \in (1, +\infty), L^p(\Omega, B, \mu)$  是自反空间.

## 6.3 共轭算子

定义 6.7. 设  $X, Y$  是赋范线性空间,  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ . 定义  $T$  的共轭算子

$$\begin{aligned} T^* : Y^* &\longrightarrow X^* \\ f &\longmapsto f \circ T. \end{aligned}$$

- $T^*f \in X^*$ .
  - $T^*f$  是线性的, 这是由  $T$  的线性和  $f$  的线性保证的.
  - $T^*f$  是连续的, 这是由  $T$  的连续性和  $f$  的连续性保证的.
- $T^*$  是线性的, 这是由  $Y^*$  的线性结构的定义保证的.

- $T^*$  是有界的, 不仅如此,

$$\begin{aligned}
\|T^*\| &= \sup_{\|f\| \leq 1} \|T^*f\| \\
&= \sup_{\|f\| \leq 1} \sup_{\|x\| \leq 1} \|T^*f(x)\| \\
&= \sup_{\|f\| \leq 1} \sup_{\|x\| \leq 1} \|f(Tx)\| \\
&= \sup_{\|x\| \leq 1} \sup_{\|f\| \leq 1} \|f(Tx)\| \\
&= \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| = \|T\|
\end{aligned}$$

- $*$ :  $\mathcal{L}(X, Y) \rightarrow \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ ,  $T \mapsto T^*$  是线性的, 这是由  $f$  的线性保证的.  
从而  $*$  是  $\mathcal{L}(X, Y)$  到  $\mathcal{L}(Y^*, X^*)$  的线性等距嵌入.

**命题 6.8.** 设  $X$  是 Banach 空间,  $T \in L(X)$ . 如果  $T^*$  是可逆的, 那么  $T$  也是可逆的.

证明.

- $R(T)$  是闭集. 设  $S$  是  $T^*$  的逆. 设  $\{Tx_n\}$  是 Cauchy 列, 那么

$$\begin{aligned}
\|x_n - x_m\| &= \sup \{|f(x_n - x_m)| : f \in X^*, \|f\| = 1\} \\
&= \sup \{|T^*Sf(x_n - x_m)| : f \in X^*, \|f\| = 1\} \\
&= \sup \{|(Sf)(Tx_n - Tx_m)| : f \in X^*, \|f\| = 1\} \\
&\leq \|Tx_n - Tx_m\| \sup \{\|Sf\| : f \in X^*, \|f\| = 1\} \\
&= \|S\| \|Tx_n - Tx_m\|.
\end{aligned}$$

所以  $\{x_n\}$  是 Cauchy 列, 存在极限  $x \in X$ . 由  $T$  连续,  $Tx = \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n$ , 所以  $R(T)$  是闭的.

- $T$  是单射. 事实上, 如果  $Tx = 0$ , 那么对任意  $f \in X^*$ , 存在  $g \in Y^*$  使得  $f = T^*g$ . 那么

$$f(x) = T^*g(x) = g(Tx) = g(0) = 0.$$

所以对任意  $f \in X^*$  有  $f(x) = 0$ . 由 Hahn-Banach 定理,  $x = 0$ .

- $T$  是满射. 事实上, 如果存在  $y \in X \setminus R(T)$ , 由 Hahn-Banach 定理, 存在  $g \in X^*$  满足  $g(y) = 1$  且  $g(Tx) = 0$  对任意  $x \in X$  成立. 但这意味着  $T^*g(x) = g(Tx) = 0$  对任意  $x \in X$  成立, 即  $T^*g = 0$ . 因为  $T^*$  是单射, 所以  $g = 0$ , 矛盾.

□

**例 6.9.** 设  $X$  是 Hilbert 空间,  $T \in B(X)$ .

- 一方面, 对于固定的  $y \in X$ ,  $x \mapsto (Tx, y)$  是有界线性函数, 由 Riesz 表示定理, 存在  $z_y \in X$  使得  $(Tx, y) = (x, z_y)$  对任意  $x \in X$  成立. 因此可定义  $\tilde{T} : y \mapsto z_y$ .
- 另一方面, 考虑  $T$  的共轭算子  $T^*$ , 对任意  $f \in X^*$ ,  $T^*(f)(x) = f(Tx)$ .

$$(x, T^*y_f) = (Tx, y_f)$$

例 6.10. 设  $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$  是一个测度空间,  $K(x, y)$  是  $\Omega \times \Omega$  上的平方可积函数. 定义算子

$$T_K : L^2(\Omega, \mu) \longrightarrow L^2(\Omega, \mu)$$

$$u \longmapsto (T_K u)(x) = \int_{\Omega} K(x, y) u(y) d\mu(y)$$

- $(T_K u)(x) \in L^2(\Omega, \mu)$
- $T_K \in \mathcal{L}(L^2(\Omega, \mu))$

$$\begin{aligned} \|T_K u\|_{L^2}^2 &= \int_{\Omega} \left| \int_{\Omega} K(x, y) u(y) d\mu(y) \right|^2 d\mu(x) \\ &\stackrel{Cauchy-Schwarz}{\leq} \int_{\Omega} \left( \int_{\Omega} |K(x, y)|^2 d\mu(y) \right) \left( \int_{\Omega} |u(y)|^2 d\mu(y) \right) d\mu(x) \\ &= \|u\|_{L^2}^2 \int_{\Omega} \left( \int_{\Omega} |K(x, y)|^2 d\mu(y) \right) d\mu(x) \\ &\stackrel{Fubini?}{=} \|u\|_{L^2}^2 \int_{\Omega \times \Omega} |K(x, y)|^2 d\mu(x) d\mu(y) \\ &= \|u\|_{L^2}^2 \|K\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

## 6.4 弱收敛及 \* 弱收敛

定义 6.11. 设  $X$  是一个赋范线性空间,  $x_n, x \in X$ , 如果

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x) \quad \forall f \in X^*,$$

则称  $\{x_n\}$  弱收敛到  $x \in X$ , 记作  $x_n \rightharpoonup x$ , 称  $x$  为  $\{x_n\}$  的弱极限.

命题 6.12. 如果  $\{x_n\}$  的弱极限存在, 则是唯一的.

证明.

$$f(x) = f(x'), \quad \forall f \in X^* \xrightarrow{\text{Hahn-Banach}} x = x'.$$

□

命题 6.13. 如果  $\{x_n\}$  的强极限存在, 则该强极限也是弱极限.

证明.

$$|f(x_n) - f(x)| \leq \|f\| \|x_n - x\| \rightarrow 0.$$

□

弱收敛与按范数收敛的关系

例 6.14.

因为  $X^*$  也是一个赋范线性空间, 自然也可以讨论  $X^*$  上的弱收敛, 但这要涉及到  $X^{**}$ , 为了避免这一点

定义 6.15. \* 弱收敛

定理 6.16 (Eberlein-Smulian). 自反空间中的单位 (闭) 球为弱 (自) 列紧的.

例 6.17.  $X = L^2[0, 1], D = \{f \in L^2[0, 1] : \|f\|_{L^2} \leq 1\}$ , 则  $D$  是弱自列紧的.

证明.

□

定理 6.18 (Banach). 设  $X$  是赋范线性空间. 若  $X^*$  是可分的, 那么  $X$  也是可分的.

证明.

- 考察

□

定理 6.19 (Pettis). 自反空间的闭子空间仍为自反空间.

证明. 设  $X_0$  是  $X$  的闭子空间,  $\iota: X_0 \hookrightarrow X$  是嵌入映射.

我们有  $\iota^{**}: X_0^{**} \hookrightarrow X^{**}$ . 任取  $x^{**}$

□

## 7 线性算子的谱

### 7.1 定义

- 理论上的讨论我们先只考虑复空间, 我不知道实空间行不行
- 我们先只考虑 Banach 空间, 虽然我还没想清楚哪里用到了

定义 7.1. 稠定线性算子.

定义 7.2. 设  $X$  是  $\mathbb{C}$ -Banach 空间,  $T: D(T) \rightarrow X$  是线性算子. 对任意  $\lambda \in \mathbb{C}$ , 令

$$T_\lambda = T - \lambda I.$$

- 称  $\lambda$  为正则值如果
  - (1)  $T_\lambda$  是单射, 进而  $T_\lambda$  在它的像集的余限制有逆算子  $R(\lambda, T)$
  - (2)  $R(\lambda, T)$  是稠定的, 即  $T_\lambda$  的值域在  $X$  中稠密.
  - (3)  $R(\lambda, T)$  是有界线性算子.
- 称  $\lambda$  为点谱如果  $T_\lambda$  不满足 (1).
- 称  $\lambda$  为剩余谱如果  $T_\lambda$  满足 (1) 但不满足 (2).
- 称  $\lambda$  为连续谱如果  $T_\lambda$  满足 (1)(2) 但不满足 (3).

命题 7.3. 其他条件同上, 附加  $T$  是闭算子, 则  $\lambda$  为正则值当且仅当  $T_\lambda$  是双射.

定义 7.4.  $r_\sigma(T) = \sup \{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}$ .

### 7.2 预解式与谱集的基本性质

引理 7.5. 设  $X$  是赋范线性空间,  $T \in L(X)$ . 若 Neumann 级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} T^k$$

按算子范数收敛, 那么  $I - T$  可逆并且

$$(I - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k.$$

使得上述引理成立的一个充分条件是  $X$  是 Banach 空间,  $\|T\| < 1$ .

由上述引理立得以下两个命题

命题 7.6. 设  $X$  是  $\mathbb{C}$ -Banach 空间,  $T \in L(X)$ , 则  $\sigma(T)$  是有界集.

证明. 设  $|\lambda| > \|T\|$ , 即  $\|\lambda^{-1}T\| < 1$ .

$\lambda I - T = \lambda(I - \lambda^{-1}T)$ , 由引理  $I - \lambda^{-1}T$  可逆, 则  $\lambda I - T$  也可逆, 即  $\lambda \in \rho(T)$ .

从而  $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > \|T\|\} \subset \rho(T)$ , 即  $\sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|T\|\}$ . □

**推论 7.7.**  $r_\sigma(A) \leq \|A\|$ .

**命题 7.8.** 设  $X$  是  $\mathbb{C}$ -Banach 空间,  $T \in L(X)$ , 则  $\rho(T)$  是开集.

证明. 任取  $\lambda_0 \in \rho(T)$ , 要找  $\delta > 0$  使得  $B(\lambda_0, \delta) \subset \rho(T)$ .

$$\lambda I - T = (\lambda - \lambda_0)I + \lambda_0 I - T = (\lambda_0 I - T)(I + (\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 I - T)^{-1}).$$

则  $\lambda I - T$  是双射等价于  $I + (\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 I - T)^{-1}$  是双射, 由引理这只需  $|\lambda - \lambda_0|$  足够小.  $\square$

知道了  $\rho(T)$  是  $\mathbb{C}$  的非空开子集后, 我们定义预解式

**定义 7.9.**

$$R : \rho(T) \longrightarrow L(X), \quad \lambda \longmapsto (\lambda I - T)^{-1}.$$

**定义 7.10.** 可微与解析.

**命题 7.11.**  $R$  在  $\rho(T)$  上解析.

证明.  $\lambda I - T = (\lambda_0 I - T)(I + (\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 I - T)^{-1}) = (\lambda_0 I - T)(I + (\lambda - \lambda_0)R(\lambda_0))$ .

$$R(\lambda) = (I + (\lambda - \lambda_0)R(\lambda_0))^{-1}R(\lambda_0).$$

记  $S_\lambda = (\lambda_0 - \lambda)R(\lambda_0)$ , 当  $|\lambda - \lambda_0|$  足够小时,

$$R(\lambda) = (I + S_\lambda + S_\lambda^2 + \cdots)R(\lambda_0) = R(\lambda_0) + S_\lambda R(\lambda_0) + S_\lambda^2 R(\lambda_0) + \cdots.$$

$$R(\lambda) - R(\lambda_0) = S_\lambda R(\lambda_0) + S_\lambda^2 R(\lambda_0) + \cdots.$$

$$\frac{R(\lambda) - R(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} = -R(\lambda_0)^2 + (\lambda - \lambda_0)(\cdots)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{R(\lambda) - R(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} = -R(\lambda_0)^2.$$

$\square$

**命题 7.12.** 设  $X$  是  $\mathbb{C}$ -Banach 空间,  $T \in L(X)$ , 则  $\sigma(T)$  非空.

证明. 设  $\sigma(T) = \emptyset$ , 则  $\rho(T) = \mathbb{C}$ .

任取  $f \in L(X)^*$  满足  $f(I) = 1$ , 有  $F := f \circ R : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  是解析函数.

当  $|\lambda| > \|T\|$  时,

$$R(\lambda) = (\lambda I - T)^{-1} = \lambda^{-1}(I + \frac{T}{\lambda} + \frac{T^2}{\lambda^2} + \cdots)$$

$$f \circ R(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \left( 1 + \frac{f(T)}{\lambda} + \frac{f(T^2)}{\lambda^2} + \cdots \right)$$

由 Liouville 定理, 恒为常数, 矛盾!  $\square$

**命题 7.13.** 设  $p$  是多项式. 那么

- $\sigma(p(T)) = p(\sigma(T))$
- 如果  $T$  可逆, 那么  $\sigma(T^{-1}) = (\sigma(T))^{-1}$
-

## 7.3 Gelfand 公式

引理 7.14. 设  $a_n \in [-\infty, +\infty)$ , 且  $a_{n+m} \leq a_n + a_m$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} = \inf_{n \geq 1} \frac{a_n}{n}.$$

证明. 显然有

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} \geq \inf_{n \geq 1} \frac{a_n}{n},$$

只需证

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} \leq \inf_{n \geq 1} \frac{a_n}{n},$$

这等价于

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} \leq \frac{a_m}{m}, \quad \forall m \geq 1.$$

固定  $m \in \mathbb{N}$ , 对任意  $n \in \mathbb{N}$ , 存在  $l_n$  和  $r_n$  使得  $n = l_n m + r_n$ , 其中  $l_n \in \mathbb{N}, r_n \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ .

$$a_n = a_{l_n m + r_n} \leq l_n a_m + a_{r_n}$$

$$\frac{a_n}{n} \leq \frac{l_n m}{n} \frac{a_m}{m} + \frac{a_{r_n}}{n}$$

左右两边取上极限得证. □

定理 7.15. 设  $X$  是 Banach 空间,  $T \in L(X)$ , 则  $\sigma(T) = \sigma(T^*)$ .

证明. 显然. □

定理 7.16.  $r_\sigma(T) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$ .

证明. □



## 7.4 例子

例 7.17. 设  $X = C([0, 1])$ ,

$$T: X \longrightarrow X, \quad u(y) \longmapsto yu(y).$$

解.

- 点谱:  $(\lambda I - T)u = 0 \iff (\lambda - x)u(x) \equiv 0 \iff u(x) \equiv 0$   
 $\sigma_p(T) = \emptyset.$

□

例 7.18. 设  $H$  是 Hilbert 空间, 称  $U \in L(H)$  是紧算子, 如果

- (1)  $(Ux, Uy) = (x, y), \forall x, y \in H.$
- (2)  $R(U) = H.$

## Chapter 4

# 紧算子与 Fredholm 算子

### 1 紧算子

定义 1.1. 称  $T \in L(X, Y)$  为紧算子, 如果  $T$  将有界集映为列紧集. 将紧算子全体记作  $\mathfrak{C}(X, Y)$ .

#### 1.1 基本性质

命题 1.2.

(1)  $\mathfrak{C}(X, Y) \subset B(X, Y)$ .

证明. 紧算子将有界集映为列紧集, 而度量空间中列紧集一定是有界集, 从而紧算子有界.  $\square$

(2)  $\mathfrak{C}(X, Y)$  是线性子空间.

证明. 设  $A \subset X$  为有界集.

- 易见  $(\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2)(A) \subset \lambda_1 T_1(A) + \lambda_2 T_2(A)$ .
- 后者是列紧的, 因为任何序列  $\{z_n\}$  都可以被分解为  $\{x_n\}$  和  $\{y_n\}$  满足  $z_n = x_n + y_n$ , 先找到  $\{x_n\}$  的收敛子列, 再找  $\{y_n\}$  对应子列的收敛子列, 就找到了  $\{z_n\}$  的收敛子列.
- 而列紧集的子集是列紧的.

$\square$

(3)  $\mathfrak{C}(X, Y)$  是闭的.

证明.

$\square$

(4)

命题 1.3.  $T \in L(X, Y)$  是紧算子当且仅当  $T^*$  是紧算子.

命题 1.4.  $T \in \mathfrak{C}(X, Y)$ , 其中  $Y$  Banach 空间. 那么  $R(T)$  闭当且仅当  $R(T)$  有限维.

证明. 假设  $R(T)$  闭, 考虑限制下来. 则  $T$  成为满射. 由开映像定理, 这玩意是开映射. 然后  $Y$  的原点有个邻域是紧集. 取有界集, 映成预紧集, 由开映像是邻域.  $\square$

## 1.2 全连续

与紧性概念密切相关的是全连续概念.

**定义 1.5.** 设  $X, Y$  是 Banach 空间, 称  $T \in B(X, Y)$  是全连续的, 如果

$$x_n \rightharpoonup x \implies Tx_n \rightarrow Tx.$$

**命题 1.6.** 设  $T \in B(X, Y)$ , 则

- (1) 若  $T \in \mathfrak{C}(X, Y)$ , 则  $T$  是全连续的;
- (2) 若  $X$  是自反的,  $T$  是全连续的, 则  $T \in \mathfrak{C}(X, Y)$ .

证明.

- (1)
  - $x_n \rightharpoonup x \implies Tx_n \rightharpoonup Tx$ .
  - 由共鸣定理,  $x_n$  有界. 由  $T$  是紧算子,  $Tx_n$  列紧.
  - $\{Tx_n\}$  的每一个强收敛的子列, 它们也都是弱收敛的, 由弱收敛极限的唯一性,  $\{Tx_n\}$  的每一个强收敛的子列的极限都是  $Tx$ .
  - 假如  $\{Tx_n\}$  不强收敛到  $Tx$ , 那么可以取出一个子列与  $Tx$  的距离保持在  $\varepsilon$  外, 但由列紧性这个子列必有强收敛子列, 由上一条, 这个强收敛子列必须强收敛到  $Tx$ , 矛盾.
- (2)
  - 因为  $X$  是自反的, 由 Eberlin-Smulian 定理, 有界列  $\{x_n\}$  有弱收敛子列.
  - 因为  $T$  是全连续的, 它将该弱收敛子列映为强收敛子列.

□

### 1.3 例子

积分算子

有限秩算子

定义 1.7. 有限秩算子

命题 1.8.  $T \in Fd(X, Y) \iff \exists y_1, \dots, y_k \in Y, f_1, \dots, f_k \in X^*$  使得  $T = \sum y_i \otimes f_i$

证明. □

命题 1.9.  $\overline{Fd(X, Y)} \subset \mathfrak{C}(X, Y)$ .

证明. 设  $T \in L(X, Y)$  且存在  $\{T_n\} \subset Fd(X, Y)$  使得  $\|T_n - T\| \rightarrow 0$ .

要证  $T \in \mathfrak{C}(X, Y)$ , 等价于证  $T(B_X(0, 1))$  为列紧集, 由  $Y$  的完备性, 这又等价于证  $T(B_X(0, 1))$  完全有界, 等价于证对任意  $\varepsilon > 0, T(B_X(0, 1))$  存在有限的  $\varepsilon$  网. □

例 1.10.

### 1.4 Schauder 基

命题 1.11. 设  $Y$  为 Hilbert 空间,  $X$  为 Banach 空间, 此时  $\overline{Fd(X, Y)} = \mathfrak{C}(X, Y)$ .

证明. □

定义 1.12. 设  $X$  是 Banach 空间, 称序列  $\{e_n\}_{n=1}^\infty$  为  $X$  的一组 Schauder 基, 如果对任意  $x \in X$ , 存在唯一的一个序列  $\{c_n(x)\}$ , 使得

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x) e_n.$$

一个简单的观察是,  $X = \overline{\text{span}\{e_n\}_{n=1}^\infty}$ , 因此如果  $X$  有 Schauder 基, 则  $X$  是可分的.

于是自然会问是否每个可分的 Banach 空间都具有 Schauder 基? 1973 年, Enflo 作出了否定的回答, 参看: <https://sci-hub.se/10.1007/bf02392270>. 不久, A.M.Davie 给出了一个较简单的证明, 参看 <https://sci-hub.se/10.1112/blms/5.3.261>.

由于  $x \mapsto c_n(x)$  的唯一性,  $c_n$  是  $X$  上的线性函数. 事实上,

引理 1.13.  $c_n$  是  $X$  上的有界线性泛函.

证明. 对于希尔伯特空间, 这是显然的. 因为此时我们有 Parsaval 恒等式,

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (c_n(x))^2 \|e_n\|^2.$$

对于 Banach 空间, 我们必须另谋出路.

令  $S_N(x) = \sum_{n=1}^N c_n(x) e_n$ , 在  $X$  上引入另一个模  $\|x\|_1 := \sup_{N \in \mathbb{N}} \|S_N(x)\|$ .

- 正定性

- 齐次性
- 三角不等式

易知有  $\|x\| \leq \|x\|$ , 一旦  $\|\cdot\|$  完备, 由于  $\|\cdot\|$  比  $\|\cdot\|$  强, 所以两范数等价.

从而存在  $C > 0$  使得  $\|x\| \leq C\|x\|, \forall x \in X$ .

所以  $\|c_N(x)e_N\| = \|S_N(x) - S_{N-1}(x)\| \leq 2C\|x\|$ , 即

以下验证  $\|\cdot\|$  完备.

- 取  $\{x_n\}$  为 Cauchy 列.

你想想它还能收敛到谁呢? 肯定是收敛到各个分量的那个极限啊.

- 验证对任意  $N, \{C_N(x_n)\}$  为 Cauchy 列, 令  $c_N = \lim_{m \rightarrow \infty} c_N(y_m)$ .

□

## 2 Fredholm 理论

**定理 2.1** (Fredholm 第一定理). 设  $X$  是 *Banach* 空间,  $A \in \mathfrak{C}(X)$ , 那么

$$T = I - A \text{ 是单射} \iff T \text{ 是满射}.$$

特别地, 由 *Banach* 定理, 成立时有  $T^{-1} \in L(X)$ .

证明.

□

**定理 2.2** (Fredholm 第二定理).  $\dim N(T) = \dim N(T^*) < \infty$ .

证明.

□

### 3 Riesz-Schauder 定理

#### 3.1 紧算子的谱

定理 3.1. 设  $A \in \mathfrak{C}(X)$ , 则

- (1) 当  $\dim X = +\infty$  时,  $0 \in \sigma(A)$ .
- (2)  $\sigma(A) \setminus \{0\} \subset \sigma_p(A)$ .
- (3)  $\sigma(A)$  至多以 0 为聚点.
- (4)  $\sigma(A)$  至多可数.

证明.

- (1) 因为  $A$  是紧算子是有界算子进而是闭算子, 所以  $\lambda \in \rho(A)$  当且仅当  $A - \lambda I$  可逆.

假设  $0 \in \rho(A)$ , 则  $A$  可逆, 则  $I = A \circ A^{-1}$  作为紧算子与有界算子的复合是紧算子.

但这在  $\dim X = +\infty$  时是不可能的.

- (2) 首先解读一下这个式子, 它传达了: 除了 0 可能是例外,  $A$  的谱集中只有点谱, 而没有连续谱和剩余谱. 所以我们需要证明的是: 除 0 以外, 要么是点谱要么是正则值.

下面开始证明: 设  $\lambda \neq 0$ , 此时  $\lambda I - A$  的行为和  $I - \frac{A}{\lambda}$  差不多, 因为  $A$  是紧算子, 所以我们可以用 Riesz-Fredholm 理论.

- 若  $I - \frac{A}{\lambda}$  不是单射, 则  $\lambda \in \sigma_p(A)$ .
- 若  $I - \frac{A}{\lambda}$  是单射, 则是满射, 则  $\lambda \in \rho(A)$ .

- (3) 假设存在一列两两不同的  $\{\lambda_i\} \subset \sigma_p(A) \setminus \{0\}$  使得  $\lambda_i \rightarrow \lambda \neq 0$ .

由于  $\lambda_i \in \sigma_p(A)$ , 存在  $x_i \in X$  且  $\|x_i\| = 1$  使得  $Ax_i = \lambda_i x_i$ .

由于  $\lambda_i$  互不相同, 所以  $\{x_1, \dots, x_k\}$  线性无关.

令  $E_k = \text{span}\{x_1, \dots, x_k\}$ .

- (4)  $\sigma(A) \setminus \{0\} \subset \bigcup_n \left\{ \lambda \in \sigma(A) : |\lambda| > \frac{1}{n} \right\} =: \bigcup_n S_n$ .

因为  $\sigma(A)$  是有界的, 且  $\sigma(A)$  不可能有除 0 以外的聚点, 所以对任意  $n$  集合  $S_n$  是有限集.

从而  $\sigma(A)$  是至多可数的.

□

注记.  $\sigma(A) = 0$  推不出  $A = 0$ , 这件事在有限维时我们就已经知道了.

### 3.2 不变子空间

**定理 3.2.** 设  $X$  是  $\mathbb{C}$ -Banach 空间,  $A \in \mathfrak{C}(X)$ , 则存在  $A$  的非平凡闭不变子空间.

证明.

- 为什么强调  $X$  是复的, 实的不行吗? 哪里用到了复?
- 不妨设  $\dim X = +\infty$ , 有限维的时候非平凡闭不变子空间是什么?
- $\sigma(A) \setminus \{0\} = \sigma_p(A) \setminus \{0\}$ .
  - 如果  $\sigma_p(A) \neq \emptyset$ , 取  $\lambda \in \sigma_p(A)$ , 存在  $x_\lambda \neq 0$  满足  $Ax_\lambda = \lambda x_\lambda$ . 令  $M = \text{span } x_\lambda$ .
- 如果  $\sigma_p(A) = \emptyset$ , 则  $\sigma(A) = \{0\}$ .

下证  $A$  有非平凡的闭不变子空间.

用反证法, 否则对任意  $y \in X, I_y = \overline{\{P(A)y\}} = X$ .

□



## 4 Hilbert-Schmidt 定理

命题 4.1. 设  $X$  是 Hilbert 空间,  $A$  是  $X$  上的对称算子, 则

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)|.$$

证明.

- 对  $\|x\| = 1, |(Ax, x)| \leq \|Ax\| \|x\| \leq \|A\| \|x\|^2 = \|A\|.$

- 记  $c = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)|.$

$$- (A(x+y), x+y) = (Ax, x) + (Ax, y) + (Ay, x) + (Ay, y)$$

$$- (A(x-y), x-y) = (Ax, x) - (Ax, y) - (Ay, x) + (Ay, y)$$

$$- |(A(x+y), x+y)| = \|x+y\|^2 |(A(\frac{x+y}{\|x+y\|}), \frac{x+y}{\|x+y\|})| \leq c \|x+y\|^2$$

$$- |(A(x-y), x-y)| = \|x-y\|^2 |(A(\frac{x-y}{\|x-y\|}), \frac{x-y}{\|x-y\|})| \leq c \|x-y\|^2$$

$$- \text{对于 } \forall x, y \in X \text{ 满足 } \|x\| = \|y\| = 1,$$

$$|(A(x+y), x+y) - (A(x-y), x-y)| \leq |(A(x+y), x+y)| + |(A(x-y), x-y)|$$

$$\leq c(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2)$$

$$= 2c(\|x\|^2 + \|y\|^2) = 4c$$

$$|(A(x+y), x+y) - (A(x-y), x-y)| = 2(Ax, y) + 2(Ay, x)$$

$$= 2(Ax, y) + 2(y, Ax)$$

$$= 2(Ax, y) + 2\overline{(Ax, y)}$$

$$= 4\Re(Ax, y)$$

□

问: 上述命题中的  $\sup$  是否为  $\max$ ?

一般地, 我们总可以找到一列  $\{x_n\}$  满足  $\|x_n\| = 1$  使得  $|(Ax_n, x_n)| \rightarrow \|A\|$ . 可按  $(Ax_n, x_n)$  的正负将  $\{x_n\}$  分为两部分, 至少有一部分是包含无穷多项的子列, 将这串子列仍记为  $\{x_n\}$ , 不妨设  $(Ax_n, x_n) \rightarrow \|A\|$ , 否则以  $-A$  替换  $A$  来讨论.

**定理 4.2.** 设  $X$  是 Hilbert 空间,  $A$  是  $X$  上的对称紧算子, 则有至多可数个  $\lambda_i$  (可以重复), 它们是算子  $A$  的本征值, 并对应一组  $e_i$ , 使得

$$x = \sum (x, e_i) e_i, \quad Ax = \sum \lambda_i (x, e_i) e_i.$$

证明.

- 因为  $A$  是紧算子, 由 Riesz-Schauder 定理,  $\sigma(A)$  是至多以 0 为聚点的至多可数集.
- 任取  $\lambda \in \sigma_p(A) \setminus \{0\}$ , 由 Fredholm 第二定理,  $m(\lambda) := \dim N(\lambda I - A) < +\infty$ , 称为  $\lambda$  的重数. 设  $\{e_i^\lambda\}_{i=1}^{m(\lambda)}$  是  $N(\lambda I - A)$  的一组标准正交基.
- 此外, 如果  $0 \in \sigma_p(A)$ , 则设  $N(A)$  的标准正交基为  $\{e_i^0\}$ , 它不一定是可数的.

□

**定理 4.3.** 设  $X$  是 Hilbert 空间,  $A$  是  $X$  上的对称紧算子, 则

$$\lambda_n^+ = \inf_{E_{n-1}} \sup_{x \in E_{n-1}^\perp \setminus \{0\}} \frac{(Ax, x)}{(x, x)},$$

$$\lambda_n^- = \sup_{E_{n-1}} \inf_{x \in E_{n-1}^\perp \setminus \{0\}} \frac{(Ax, x)}{(x, x)},$$

其中  $E_n$  为  $X$  的  $n$  维子空间.

证明. 记  $\mu_n^+ = \inf_{E_{n-1}} \sup_{x \in E_{n-1}^\perp \setminus \{0\}} \frac{(Ax, x)}{(x, x)}$ .

- 对任意的  $E_{n-1}$ , 可找到  $x \in \text{span}\{e_1^+, \dots, e_n^+\}$  使得  $x \in E_{n-1}^\perp \setminus \{0\}$ . 那么

$$\frac{(Ax, x)}{(x, x)} = \frac{\sum_{i=1}^n |a_i^+|^2 \lambda_i^+}{\sum_{i=1}^n |a_i^+|^2} \geq \lambda_n^+ \implies \mu_n^+ \geq \lambda_n^+.$$

- 取  $E_{n-1} = \text{span}\{e_1^+, \dots, e_{n-1}^+\}$ .

$$\mu_n \leq \sup_{x \in E_{n-1}^\perp \setminus \{0\}} \frac{(Ax, x)}{(x, x)} \leq \sup \frac{\sum_{i \geq n} \lambda_i^+ |a_i^+|^2}{\sum_{i \geq n} |a_i^+|^2 + \sum_{i \geq 1} |a_i^-|^2 + \sum_{\alpha} |a_\alpha^0|^2} \leq \lambda_n^+.$$

□

**定义 4.4.** 正算子

**命题 4.5.**  $A$  为正算子当且仅当  $\sigma_p(A) \subset [0, +\infty)$ .

证明.

□

## Chapter 5

# 广义函数

### 1 动机

## 2 广义函数的概念

广义函数是定义在一类“性质很好”的函数空间上的连续线性泛函. 为此, 先引进这类“性质很好”的函数.

### 2.1 基本空间 $\mathcal{D}(\Omega)$

#### 支集

设  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  是一个开集,  $u \in C(\overline{\Omega})$ , 称集合

$$F = \{x \in \Omega \mid |u(x)| \neq 0\}$$

关于  $\Omega$  的闭包为  $u$  关于  $\Omega$  的支集, 记作  $\text{supp } u$ . 换句话说, 连续函数  $u$  的支集是在此集外  $u$  恒为 0 的相对于  $\Omega$  的最小闭集.

#### $C_0^\infty(\Omega)$

对于整数  $k \geq 0$ ,  $C_0^k(\Omega)$  表示支集在  $\Omega$  内紧的全体  $C^k(\Omega)$  函数所组成的集合, 于是

$$C_0^\infty(\Omega) \subset \cdots \subset C_0^{k+1}(\Omega) \subset C_0^k(\Omega) \subset \cdots \subset C_0^0(\Omega).$$

下例表明  $C_0^\infty(\Omega)$  是非空的.

#### 例 2.1.

**定义 2.2.** 在集合  $C_0^\infty(\Omega)$  上定义收敛性如下: 我们说序列  $\{\varphi_j\}$  收敛于  $\varphi_0$ , 如果

- (1) 存在一个相对于  $\Omega$  的紧集  $K \subset \Omega$ , 使得  $\text{supp}(\varphi_j) \subset K$
- (2) 对于任意指标  $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$  都有  $\max_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi_j(x) - \partial^\alpha \varphi_0(x)| \rightarrow 0$

带有上述收敛性的线性空间  $C_0^\infty(\Omega)$ , 称为基本空间  $\mathcal{D}(\Omega)$ .

## 2.2 广义函数的定义和基本性质

**定义 2.3.** 称  $\mathcal{D}(\Omega)$  上的线性连续泛函为广义函数, 其中连续性是指

$$\langle f, \varphi_j \rangle \longrightarrow \langle f, \varphi_0 \rangle, \quad \text{if } \varphi_j \longrightarrow \varphi_0$$

将广义函数的全体记作  $\mathcal{D}'(\Omega)$ .

**例 2.4.**  $\delta$ -函数.

**例 2.5.**  $j_\delta \longrightarrow$

## 2.3 广义函数的收敛性

## Chapter 6

# Banach 代数

### 1 代数准备知识

定义 1.1.  $A$  称为复数域  $\mathbb{C}$  上的一个代数, 如果

- (1)  $A$  是  $\mathbb{C}$  上的一个线性空间
- (2)  $A$  上规定了乘法:  $A \times A \rightarrow A$ , 满足

## 2 谱

**定义 2.1.** 设  $A$  是 *Banach* 代数  $U$  中的元素, 定义了  $A$  的谱值是什么, 即没有双边逆. 但是它似乎没有区分什么连续谱什么剩余谱什么点谱之类.



## Chapter 7

### 习题

#### 1 1.1

1.1.4 设  $T$  是度量空间上的压缩映射, 求证  $T$  是连续的.

证明. 按定义, 存在  $\alpha \in (0, 1)$  使得  $\rho(Tx_n, Tx_0) \leq \alpha \rho(x_n, x_0) \rightarrow 0$ . □

1.1.6 设  $M$  是  $(\mathbb{R}^n, \rho)$  中的有界闭集, 映射  $T: M \rightarrow M$  满足

$$\rho(Tx, Ty) < \rho(x, y), \quad \forall x, y \in M, x \neq y$$

求证  $T$  在  $M$  中存在唯一不动点.

## 2 1.2

### 3 1.3

## 4 1.4

## 5 1.5

## 6 1.6

## 7 2.1

2.1.4 设  $y(t) \in C[0, 1]$ , 定义  $C[0, 1]$  上的泛函  $f$  如下, 计算  $\|f\|$ .

$$f(x) = \int_0^1 x(t)y(t)dt, \quad \forall x \in C[0, 1].$$

2.1.5 设  $f$  是  $X$  上的非零有界线性泛函, 令  $d = \inf\{\|x\| | f(x) = 1\}$ , 求证  $\|f\| = 1/d$ .

证明.

$$\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|fx\|}{\|x\|} = \sup_{fx \neq 0} \frac{\|fx\|}{\|x\|} = 1 / \inf_{fx \neq 0} \frac{\|x\|}{\|fx\|} = \frac{1}{d}.$$

□

2.1.6 设  $f \in X^*$ , 求证对任意  $\varepsilon > 0$  存在  $x_0 \in X$  使得  $f(x_0) = \|f\|$  且  $\|x_0\| < 1 + \varepsilon$ .

证明. 不妨设  $\|f\| = 1$ , 那么由 2.1.5 知  $1 = \inf\{\|x\| | f(x) = 1\}$ .

□

2.1.9 设  $X$  是实赋范线性空间,  $f$  是  $X$  上的非零实值线性泛函, 求证不存在开球  $B(x_0, \delta)$  使得  $f(x_0)$  是  $f(x)$  在  $B(x_0, \delta)$  中的极大值或极小值.

证明. 设  $f(x_0) > 0$ , 那么

$$f(x_0 - \frac{\delta}{2} \frac{x_0}{\|x_0\|}) < f(x_0) < f(x_0 + \frac{\delta}{2} \frac{x_0}{\|x_0\|})$$

$f(x_0) < 0$  的情形同理. 下面考虑  $f(x_0) = 0$  的情形, 假设  $y \in B(x_0, \delta)$  使得  $f(y) > 0$ , 则存在  $z \in B(x_0, \delta)$  使得  $z + y = 2x$  即  $f(z) = -f(y) < 0$ . 所以真正需要排除的是  $f$  在  $B(x_0, \delta)$  上恒为零的情形, 此时  $f$  在  $B(0, \delta)$  上也恒为零, 所以  $f$  恒为零, 与条件矛盾.

□

## 8 2.2



**9 2.3**

2.3.2 设  $X, Y$  是 Banach 空间, 又设方程  $Ux = y$  对  $\forall y \in Y$  有解  $x \in X$ , 其中  $U \in L(X, Y)$

2.3.4 设  $X, Y$  是赋范线性空间,  $D$  是  $X$  的线性子空间且  $A: D \rightarrow Y$  是线性映射. 证明

(1) 如果  $A$  连续且  $D$  是闭的, 那么  $A$  是闭算子.

证明.

□

## 附录 A

# 泛函分析中的反例

### 1 纲

- 第一纲集但不无处稠密： $\mathbb{Q}$ .

## 2 映射

- 逆映射不连续

## 3

**定理 3.1** (Riesz 表示定理).

Lax-Milgram 定理可看作将内积改为满足强制条件  $a(u, u) \geq \delta \|u\|^2$  的连续共轭双线性泛函  $a(u, v)$  的推广.

**定理 3.2** (Lax-Milgram 定理).

## 附录 B

# 套路

### 1 有机会成为一组的东西

- 最佳逼近元
  - 设  $X$  是赋范线性空间,  $M$  是  $X$  的有限维子空间, 那么对于任意  $x \in X$ ,  $x$  到  $M$  的距离的最小值能取到.
  - 如果  $M$  仅仅是闭子空间, 那么虽然可以任意精度逼近, 但可能取不到.
- 对象分解
  - 设  $X$  是 Banach 空间 (?),  $\dim X < +\infty$  或  $\operatorname{codim} < +\infty$ , 那么存在  $L$  使得  $X = M + L$ .

### 2 那些要自己构造一个范数的证明

### 3

已知在像空间中,  $Tx_n$  按范数收敛到  $y$ .

- 任意  $g \in Y^*$ ,  $g(Tx_n) \rightarrow g(y)$ .
- $T^*g(x_n) \rightarrow g(y)$ .
- 也就是说, 我知道了一部分  $X^*$  中的元素, 作用在  $\{x_n\}$  上时, 的收敛性.

比较, 已知  $x_n$  弱收敛到  $x$ ,

- 我就知道了所有  $X^*$  中的元素, 作用在  $\{x_n\}$  上时, 的收敛性.