偏微分方程数值解

中国科学技术大学 数学学院

张 梦 萍

办公室：东区–管理科学楼1227室

0551-63601855；mpzhang@ustc.edu.cn；2024-09

第一部分：一维线性偏微分方程初值问题的有限差分方法

第五章：有限差分方法的基本性质

本章主要介绍偏微分方程有限差分方法的基本概念、基本理论

1　差分方法的相容性、收敛性、稳定性

本节主要针对一般的偏微分方程的初值问题：

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = g, & -\infty < x < \infty,\ t > 0 \\ u(x,t_0) = f(x) & -\infty < x < \infty,\ 2\pi\ \ periodic \end{cases} \tag{5.1}$$

其中$\mathcal{L}$是（时空）偏微分算子，考虑其一般差分格式$Lv_j^n = g_j^n$的相容性、收敛性和稳定性。

回顾：

- 有限维空间：

  常用实的欧氏空间$\mathcal{R}$或复的欧氏空间$\mathcal{C}$ 中的模：$\forall U^n = (U_1^n, \cdots, U_N^n) \in \mathcal{R}$或$\mathcal{C}$

  l_2模（2模）：$||U^n||_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^N |U_j^n|^2}$

  $l_{2,\Delta x}$模（能量模）：$||U^n||_{2,\Delta x} = \sqrt{\sum_{j=1}^N |U_j^n|^2 \Delta x}$

  l_∞模（最大模）：$||U^n||_\infty = sup_{1\le j\le N}|U_j^n|$

- 无限维序列空间：

  对于初值问题，计算区域是无界的，所以空间网格个数是无限

的，相应的格点函数可视为无穷序列或无限维向量

无限维实的或复的l_2空间：

$l_2=\{U^n=(\cdots,U^n_{-1},U^n_0,U^n_1,\cdots)^T:\ \sum_{j=-\infty}^{\infty}|U^n_j|^2<\infty\}$

l_2模（2模）：$||U^n||_2=\sqrt{\sum_{j=-\infty}^{\infty}|U^n_j|^2}$

$l_{2,\Delta x}$模（能量模）：$||U^n||_{2,\Delta x}=\sqrt{\sum_{j=-\infty}^{\infty}|U^n_j|^2\Delta x}$

无限维有界序列空间l_∞：

$l_\infty=\{U^n=(\cdots,U^n_{-1},U^n_0,U^n_1,\cdots)^T:\ sup_{-\infty<j<\infty}|U^n_j|<\infty\}$

l_∞模（最大模）：$||U^n||_\infty=sup_{-\infty\leq j\leq\infty}|U^n_j|$

- 高维问题（以二维问题为例）

  有限维空间，$U^n=\{U^n_{ij}\}_{i=1,j=1}^{n_x,n_y}$：

  l_2模（2模）：$||U^n||_2=\sqrt{\sum_{i=1}^{n_x}\sum_{j=1}^{n_y}|U^n_{ij}|^2}$

  $l_{2,\Delta x}$模（能量模）：$||U^n||_{2,\Delta x}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n_x}\sum_{j=1}^{n_y}|U^n_{ij}|^2\Delta x\Delta y}$

  无限维空间，$U^n=\{U^n_{ij}\}_{i=-\infty,j=-\infty}^{\infty,\infty}$：

  l_2模（2模）：$||U^n||_2=\sqrt{\sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}|U^n_{ij}|^2}$

  $l_{2,\Delta x}$模（能量模）：$||U^n||_{2,\Delta x}=\sqrt{\sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}|U^n_{ij}|^2\Delta x\Delta y}$

1.1 截断误差与差分方法的精度:

截断误差：与差分方程$Lv^n_j=g^n_j$等价的微分方程，与源方程$\mathcal{L}u=g$之差

Definition 1.1 对于满足$\mathcal{L}u=g$的任意光滑函数$u(x,t)$，$T^n_j=Lu^n_j-g^n_j-(\mathcal{L}u(x_j,t_n)-g(x_j,t_n))$称为差分格式$Lv^n_j=g^n_j$在$(x_j,t_n)$处的（局部）截断误差。

截断误差反映了差分方程对源方程的近似程度。

Definition 1.2 若截断误差$T_j^n = Lu_j^n - g_j^n - (\mathcal{L}u(x_j,t_n) - g(x_j,t_n)) = O((\Delta x)^p) + ((\Delta t)^q)$则称为差分格式$Lv_j^n = g_j^n$的（局部）截断误差对时间是$q$ 阶、对空间是p阶的，即：差分格式$Lv_j^n = g_j^n$对时间是q阶、对空间是p阶精度。

1.2 差分方法的相容性：

相容性：反映源方程与差分方程之间的关系

Definition 1.3 当$\Delta x,\ \Delta t \to 0$时，若差分格式$Lv_j^n = g_j^n$ 的截断误差$T_j^n \to 0$，则称为该差分格式$Lv_j^n = g_j^n$与源方程$\mathcal{L}u = g$是（无条件）逐点相容的。

Definition 1.4 对于$\mathcal{L}u = g$的二层格式：$\mathbf{V}^{n+1} = Q\cdot\mathbf{V}^n + \Delta t\cdot G^n$，其中$\mathbf{V}^n = (\cdots, v_{-1}^n, v_0^n, v_1^n, \cdots)$，$G^n = (\cdots, g_{-1}^n, g_0^n, g_1^n, \cdots)$。$\forall (x,t)$，若$\Delta x,\ \Delta t \to 0$ 时，源方程$\mathcal{L}u = g$的解$u(x,t)$为$\mathbf{U}^{n+1} = Q\cdot\mathbf{U}^n + \Delta t\cdot G^n + \Delta t\cdot T^n$，且$||T^n|| \to 0$，则称该差分格式$Lv_j^n = g_j^n$ 与源方程$\mathcal{L}u = g$ 是按模$||\cdot||$（无条件）相容的。

1.3 差分方法收敛性：

收敛性：反映源方程的精确解与差分方程的近似解之间的关系

Definition 1.5 $\forall (x,t)$，当$\Delta x,\ \Delta t \to 0$，$j\Delta x \to x$，$n\Delta t \to t$时，有$v_j^n \to u_j^n = u(x_j,t_n)$，则称近似于源方程$\mathcal{L}u = g$的差分格式$Lv_j^n = g_j^n$是（无条件）逐点收敛的。

Definition 1.6 $\forall(x,t)$，若$\Delta x,\ \Delta t\to 0$，$j\Delta x\to x$，$(n+1)\Delta t\to t$时，有$||\mathbf{U}^{n+1}-\mathbf{V}^{n+1}||\to 0$，则称源方程$\mathcal{L}u=g$的差分格式$Lv_j^n=g_j^n$（在$t$时刻）是按模$||\cdot||$（无条件）收敛的。若$||T^n||=O((\Delta x)^p+(\Delta t)^q)$，则称该差分格式按模$||\cdot||$具有$(p,q)$阶精度；或称该差分格式是按模$||\cdot||$ (p,q)阶收敛的。

1.4 稳定性：

稳定性：定解条件（初值条件）的微小变化对数值解的影响

1. 定义

Definition 1.7 对于$\mathcal{L}u=g$的二层格式：

$$\mathbf{V}^{n+1}=Q\cdot\mathbf{V}^n,\ n\geq 1, \tag{$*1$}$$

其中Q为差分算子，$\mathbf{V}^n=(\cdots,v_{-1}^n,v_0^n,v_1^n,\cdots)$。$\forall(x,t)$，若$\exists$常数$\Delta x_0>0$，$\Delta t_0>0$，$K\geq 0$，$\beta\geq 0$，使得$\forall 0\leq t\leq(n+1)\Delta t$，$0<\Delta x\leq\Delta x_0$，$0<\Delta t\leq\Delta t_0$，有：

$$||\mathbf{V}^{n+1}||\leq Ke^{\beta t}||\mathbf{V}^0||, \tag{$*2$}$$

则称该差分格式*(*1)*关于模$||\cdot||$是（无条件）稳定的。

Definition 1.8 上面定义中的（*2）由下式代替：

$$||\mathbf{V}^{n+1}||\leq K||\mathbf{V}^0||, \tag{$*3$}$$

上面二种定义比较强，常见的其它定义还有：

如：对于$\forall T$，当$(n+1)\Delta t \le T$时，（*2）或（*3）成立；其中K和β可以与T有关。

2. 命题

考虑$\mathcal{L}u = g$的二层差分格式：$\mathbf{V}^{n+1} = Q \cdot \mathbf{V}^n$, $n \ge 1$的稳定性

(a) 命题1

(*1)关于$||\cdot||$是稳定的$\Leftrightarrow$ $\exists$常数$\Delta x_0 > 0$，$\Delta t_0 > 0$，$K \ge 0$，$\beta \ge 0$，使得$\forall 0 \le t \le (n+1)$，$0 < \Delta x \le \Delta x_0$，$0 < \Delta t \le \Delta t_0$，有：

$$||Q^{n+1}|| \le K e^{\beta t}, \tag{$*4$}$$

Example 1.1 试证：若$0 \le \mu \le \frac{1}{2}$，则$v_j^{n+1} = (1-2\mu)v_j^n + \mu(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n)$关于$L_\infty$模是稳定的。

Example 1.2 讨论$u_t + au_x = 0$的*FTFS*格式关于L_2模稳定性。

(b) 命题2

在$L_{2,\Delta x}$空间，序列U^n是稳定的，当且仅当在$L_2[-\pi,\pi]$空间中，序列$\hat{U}^n$是也稳定的

$\Rrightarrow$稳定性分析只要在Fourier空间执行即可，不必返回到物理空间

Example 1.3 讨论$u_t + au_x = 0$的*FTBS*格式的稳定性。

(c) 命题3

$\mathbf{V}^{n+1} = Q\cdot\mathbf{V}^n$关于$l_{2,\Delta x}$模是稳定的$\Leftrightarrow$ $\exists$常数$\Delta x_0 > 0$，$\Delta t_0 >$

0，$K \geq 0$，$\beta \geq 0$，使得$\forall 0 < \Delta x \leq \Delta x_0$，$\omega \in [0, 2\pi]$，有：

$$|g(\omega)|^{n+1} \leq K e^{\beta(n+1)\Delta t}$$

其中g为格式的放大因子，即：$\hat{v}^{n+1} = g\hat{v}^n$

(d) 命题4

$\mathbf{V}^{n+1} = Q \cdot \mathbf{V}^n$关于$l_{2,\Delta x}$模是稳定的$\Leftrightarrow$: $\exists$常数$\Delta x_0 > 0$，$\Delta t_0 > 0$，$c \geq 0$，使得$\forall 0 < \Delta x \leq \Delta x_0$，$\omega \in [0, 2\pi]$，有：

$$|g(\omega)| \leq 1 + c\Delta t$$

————————————————Von Neumann条件

(e) 命题5

若$\mathbf{V}^{n+1} = Q \cdot \mathbf{V}^n$是稳定的，则：对任意的标量$b$，差分格式$\mathbf{V}^{n+1} = (Q + b\Delta t I) \cdot \mathbf{V}^n$ 也是稳定的

1.5 LAX定理—差分方法相容性、收敛性、稳定性之间的关系

LAX定理反映差分方法相容性、收敛性和稳定性之间的关系

- 相容性：差分方程与偏微分方程的关系

- 收敛性：差分方程的解与偏微分方程的解之间的关系

- （初值）稳定性：差分方程的解与偏微分方程定解条件（初值条件）的关系

Theorem 1.1 （*Lax*等价定理）：对于一个适定的相信线性偏微分方程初值问题的相容的二层差分格式，其收敛性与稳定性是等价的。

Theorem 1.2 （*Lax*定理）：对于一个适定的相信线性偏微分方程初值问题，其按$||\cdot||$模是(p,q)阶精度的二层差分格式为：$\mathbf{V}^{n+1}=Q\cdot\mathbf{V}^n+\Delta tG^n$，若它关于$||\cdot||$模是稳定的，则它是关于$||\cdot||$模$(p,q)$阶收敛的。

作业–20241031：(第2本参考书)P111: 3.1.2

1.6 偏微分方程的耗散性、色散性

Example 1.4 讨论PDE：$u_t + au_x = 0$的谐波解的特征

任取一个谐波作为PDE的解，即取：$u(x,t) = e^{i(kt+\omega x)}$；其中$k$为波的频率，$\omega$是该波的波数，波长为$\frac{2\pi}{\omega}$
代入PDE得：$ik + ia\omega = 0 \longrightarrow k = -a\omega$
这儿$k = k(\omega) = -a\omega$称为$u_t+au_x = 0$的色散关系，且其解为：$u(x,t) = e^{i\omega(x-at)}$

一般情况下$k = k(\omega) = \alpha + ib$是复数，则PDE的谐波解为：

$$u(x,t) = e^{-bt}e^{i(\alpha t+\omega x)}$$

- 谐波振幅e^{-bt}可能随时间衰减。谐波振幅随时间衰减的现象称为“耗散”

- 谐波传播的波速为$c_e = -\frac{Re(k)}{\omega} = -\frac{\alpha}{\omega} \overset{u_t+au_x=0}{=} a$；
  若$c_e > 0$，则谐波从左向右传播，$c_e < 0$，谐波从右向左传播。

- 色散关系$k = k(\omega)$
  如果k是ω的线性函数，则不同波数的谐波传播的波速是相同的，整体波形保持不变；若k是ω的非线性函数，则不同波数的谐波传播的波速是不同的，整体波形随时间发生变化，相应的物理现象称为“色散”

- 放大因子
  $\lambda_e \triangleq \frac{u(x,t+\Delta t)}{u(x,t)} = e^{ik\Delta t} = e^{-b\Delta t}e^{i\alpha\Delta t} = |\lambda_e|e^{i\varphi_e}$，称$|\lambda_e| = e^{-b\Delta t}$为$\lambda_e$

的模，称 $\varphi_e = \alpha\Delta t$ 为 λ_e 的幅角。

$\Rrightarrow$ 放大因子体现了谐波解的随时间变化特征

不同波数的谐波的传播和振幅衰减是PDE的解的性质的一个重要组成部分。若有谐波振幅无限增长，则该PDE的解是不稳定的

Definition 1.9 *1. PDE*的耗散性

若*PDE*的谐波解的振幅不随时间增长，且至少有一个谐波的振幅是衰减的，则称该*PDE*具有耗散性，其解是稳定的。若*PDE*的所有谐波解的振幅既不增长，也不衰减，则称该*PDE*是无耗散的，其解是稳定的。若非上述二种情况，则称该*PDE*是逆耗散的，其解不稳定。

*2. PDE*的色散性

若不同波数的谐波以不同的速度传播，则称该*PDE*具有色耗散性，其解是色散的

若谐波的传播速度与波数无关，则称该*PDE*无色散，其解是无色散的

Example 1.5 讨论 $u_t + au_x = 0$ 的耗散性、色散性（a 是常数）。

Example 1.6 讨论 $u_t + cu_{xxx} = 0$ 的耗散性、色散性（c 是常数）。

1.7 差分方程的耗散性、色散性

1.7.1 差分方程的耗散性、色散性

类似于上面讨论PDE耗散性、色散性的做法，任取一个谐波作为差分方程的解，即取：$v_j^n = e^{i(\omega x_j + k t_n)} \overset{\text{时空均匀剖分}}{=} e^{i(\omega j\Delta x + k n \Delta t)}$，代入差分方程得：离散的色散关系$k = k(\omega) = \alpha + ib$。由此得到差分方程的谐波解：

$v_j^n = e^{-bt_n} e^{i\omega(x_j - (\frac{-\alpha}{\omega})t_n)}$，其中$c = \frac{-\alpha}{\omega}$为波速。

放大因子：$\lambda = \frac{v_j^{n+1}}{v_j^n} = e^{(-b+i\alpha)\Delta t}$

$$\Rightarrow \ v_j^n = \lambda^n e^{i\omega x_j}$$

Definition 1.10 若差分方程的谐波解为：$v_j^n = e^{-bt_n} e^{i\omega(x_j - (\frac{-\alpha}{\omega})t_n)} = \lambda^n e^{i\omega x_j}$，则：

- $b < 0$

  该差分方程的解的振幅随时间无界增长，该差分方法是逆耗散的，其解不稳定。

- $b > 0$

  该差分方程的解的振幅随时间递减，该差分方法是耗散的，其解是稳定的。

- $b = 0$

  该差分方程的解的振幅随时间不变化，该差分方法是无耗散的。

- $\alpha \equiv 0$

  该差分方程的谐波解传播速度为*0*，即不传播；该差分方法是无色耗散的。

- $\alpha \neq 0$

  该差分方程的谐波解以$\frac{-\alpha}{\omega}$的速度传播。若$\frac{-\alpha}{\omega}$与ω有关，即该差分方程的谐波解的传播速度与ω 有关，该差分方法是色耗散的。

讨论：

- $\frac{|\lambda|}{|\lambda_e|} < 1$时，则相对于源方程，格式有更强的耗散性；反之，格式的耗散性弱与源方程

- $\frac{\phi}{\varphi_e} < 1$时，则相对于源方程，数值解的相位滞后；反之，相位超前

Example 1.7 讨论$u_t + au_x = 0$的*FTBS*格式的稳定性、耗散项、色散性（a是常数）。

1.7.2 用MPDE方法分析$U_t = LU$的差分格式的耗散性、色散性

以一个例子介绍MPDE方法：考虑$u_t + au_x = 0,\ a > 0$的FTBS格式：

$$v_j^{n+1} = v_j^n - r(v_j^n - v_{j-1}^n),\ r = \frac{a\Delta t}{\Delta x} \tag{$*0$}$$

假设$u(x,t)$是与数值格式$(*0)$等价的PDE的精确解，则有：
$0 = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x}$

$$= \{u_t + \frac{\Delta t}{2}u_{tt} + \frac{\Delta t^2}{6}u_{ttt} + \cdots + au_x - \frac{a\Delta x}{2}u_{xx} + \frac{\Delta x^2}{6}u_{xxx} + \cdots\}_j^n \tag{$*1$}$$

将讨论差分格式$(*0)$的耗散性、色散性转换为讨论与差分格式$(*0)$等价的PDE$(*1)$的耗散性、色散性。

为了讨论PDE$(*1)$的耗散性、色散性，需要将$(*1)$中的对时间t的高

阶导数（≥ 2阶）转换为对空间变量x的导数。由于不是讨论源方程$u_t + au_x = 0$的性质，这儿就不能用源方程做转换，只能用$(*1)$本身做转换。即：通过对$(*1)$的循环求导来实现，得到一个与$(*0)$等价的$U_t = LU$型PDE，即MPDE：

$$0 = u_t + au_x - \frac{a\Delta x}{2}(1-r)u_{xx} + \frac{a\Delta x^2}{6}(1-r)(1-2r)u_{xxx} + \cdots \qquad (*2)$$

上式$(*2)$与$(*0)$是等价的，即为MPDE；且$r = \frac{a\Delta t}{\Delta x}$

- 首先取$(*2)$的前几项，分析其性质。

  $u_t + au_x - \nu_2 u_{xx} + \mu_3 u_{xxx}$, $\nu_2 = \dfrac{a\Delta x}{2}(1-r), \mu_3 = \dfrac{a\Delta x^2}{6}(1-r)(1-2r)$

  任取一个谐波作为PDE的解，即取：$u(x,t) = e^{i(\omega x + kt)}$，代入上式得：

  $ik + a(i\omega) - \nu_2(i\omega)^2 + \mu_3(i\omega)^3 = 0 \longrightarrow$：色散关系$k = -a\omega + \mu_3\omega^3 + i\nu_2\omega^2$

  其解为：$u(x,t) = e^{-\nu_2\omega^2 t} e^{i\omega(x-(a-\mu_3\omega^2)t)} = e^{-\frac{a\Delta x}{2}(1-r)\omega^2 t} e^{i\omega(x-(a-\frac{a\Delta x^2}{6}(1-r)(1-2r)\omega^2)t)}$

  解的振幅为：$|u| = e^{-\frac{a\Delta x}{2}(1-r)\omega^2 t}$, $t = n\Delta t$；耗散性：

  - $a > 0, r < 1$

    $n \to \infty \Rightarrow |u| \to 0$；即：$(*2)$具有耗散性，解稳定

  - $a > 0, r = 1$

    $|u| = 0$；即：$(*2)$无耗散性，解稳定

  - $a > 0, r < 1$

  - $a > 0, r < 1$

    $n \to \infty \Rightarrow |u| \to \infty$；即：$(*2)$是逆耗散性，解不稳定

解的色散性：$e^{i\omega(x-(a-\frac{a\Delta x^2}{6}(1-r)(1-2r)\omega^2)t)}$，解的谐波传播速度：$a-\frac{a\Delta x^2}{6}(1-r)(1-2r)\omega^2)$

$\Rrightarrow$：解的传播速度与ω有关$\Rrightarrow$：$(*2)$具有色散性

- 讨论一般情况：与$U_t = LU$相容的二层差分格式:$\Sigma_\mu \alpha_\mu v_{j+\mu}^{n+1} = \Sigma_\nu \beta_\nu v_{j+\nu}^n$

  与上述数值格式等价的MPDE为：

$$u_t = Lu + \sum_l^\infty \nu_{2l}\frac{\partial^{2l}u}{\partial x^{2l}} + \sum_m^\infty \mu_{2m+1}\frac{\partial^{2m+1}u}{\partial x^{2m+1}} \qquad (*3)$$

  其中ν_{2l}, μ_{2m+1}分别称为耗散项系数和色散项系数

  取一个谐波作为PDE的解，即取：$u(x,t) = e^{i(\omega x+kt)}$，代入$(*3)$得色散关系：

  $ik = L(i\omega) + \sum_l^\infty(-1)^l\nu_{2l}\omega^{2l} + i\sum_m^\infty(-1)^m\mu_{2m+1}\omega^{2m+1}$

  令$\nu = \sum_l^\infty(-1)^l\nu_{2l}\omega^{2l}$, $\mu = \sum_m^\infty(-1)^m\mu_{2m+1}\omega^{2m+1}$，则其解为：

  $u(x,t) = e^{L(i\omega)+i\omega t}e^{\nu t}e^{i\mu t}$。

  其中$e^{L(i\omega)+i\omega t}$是源方程$U_t = LU$的解；$e^{\nu t}$是数值耗散部分；$e^{i\mu t}$是数值色散部分

作业–20241104

补充作业1：分析偏微分方程$u_t + u_x - \nu_2 u_{xx} + \mu_3 u_{xxx} = 0$的耗散性、色散性，其中$\nu_2$, μ_3分别为常实数

补充作业2：分析偏微分方程$u_t = u_{xx}$的耗散性和色散性，以及用二种方法分别分析其FTCS格式的耗散性和色散性

大作业20241104：针对下述偏微分方程初值问题：

$$
\begin{cases}
u_t + u_x = 0,\ -\infty < x < \infty\ t > 0, \\
u(x,0) = \begin{cases} 1,\ \ 0.4 \le x \le 0.6 \\ 0,\ \ others \end{cases}
\end{cases}
\tag{1}
$$

(1) 分别用其FTBS格式、FTCS格式和Lax-Wendroff格式分别计算$t = 0.05, 0.2, 0.8, 3.2$时刻的数值解，其中$r = \frac{\Delta t}{\Delta x}$分别取0.2 和0.8，空间步长取$\Delta x = 0.05$。将相同时刻（即相同$t$值）、相同$r$值的三种格式的数值解和相应的偏微分方程初值问题的精确解绘在同一张图上（如果某些格式在某些时刻的数值解与其它格式的结果相差太大，不宜绘在同一张图上，可以略去，但需要说明）；并写出“观察到的现象”。

(2) 分别分析偏微分方程$u_t = u_x$的耗散性和色散性，以及其FTBS格式、FTCS格式和Lax-Wendroff格式的耗散性和色散性；并对产生(1)中“观察到的现象”进行评论