Toda

孙天阳

目录

Chapter 1

预备知识

1 自同构群

1.1 $\mathbb{C}$ 的全纯自同构群

所有的一次多项式，参考刘太顺 195 页

1.2 $\mathbb{CP}^1$ 的全纯自同构群

所有的分式线性变换，参考刘太顺 195 页

1.3 $\mathbb{C}^n$ 的全纯自同构群

1.4 $\mathbb{CP}^n$ 的全纯自同构群

1.5 $\mathbb{R}^n$ 的等距群

Proposition 1.1. $Iso(\mathbb{R}^n) \cong T(n) \rtimes O(n)$.

证明. 假设 $f \in Iso(\mathbb{R}^n)$ 满足 $f(0) = 0$, 否则考虑 $\tilde{f} = f - f(0)$.

(1) f 保持内积. 因为 f 保持距离, 所以对任意 $x, y \in \mathbb{R}^n$, 有

$$\|f(x) - f(y)\|^2 = \|x - y\|^2 \Longrightarrow \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle .$$

(2) f 是线性的.

- $\|f(ax) - af(x)\|^2 = \|f(ax)\|^2 + \|af(x)\|^2 - 2\langle f(ax), af(x) \rangle = \|ax\|^2 + \|ax\|^2 - 2\|ax\|^2 = 0.$
- $\|f(x+y) - f(x) - f(y)\|^2 \xlongequal{\text{展开}} \cdots \xlongequal{\text{脱}f} \cdots \xlongequal{\text{合并}} \|x + y - x - y\|^2 = 0.$

(3) $f \in O(n)$.

$\square$

Remark. 证明了稍稍强一点的事：等距 $\Longrightarrow$ 双射.

1.6 $\mathbb{S}^n$

Proposition 1.2. $Iso(\mathbb{S}^n) \cong \mathrm{O}(n+1)$.

证明. https://math.stackexchange.com/questions/130193/isometries-of-mathbbsn □

1.7 $\mathbb{H}^n$

2 典型群

2.1 正交群

2.2 特殊正交群

SO(2)

Proposition 2.1. $\mathbb{S}^1 \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong \mathrm{U}(1) \cong \mathrm{SO}(2)$

SO_3

Proposition 2.2. $\mathrm{SO}(3) \cong \mathbb{RP}^3$

证明一. □

证明二. □

2.3 酉群

2.4 特殊酉群

SU(2)

Proposition 2.3. $\mathrm{SU}(2) \cong \mathbb{S}^3$

证明. □

Proposition 2.4.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{SU}(2) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{SO}(3) \\ \mathbb{S}^3 \arrow[r] & \mathbb{RP}^3 \arrow[u] \end{tikzcd}$$

因此 SU(2) 是 SO(3) 的二重覆叠.

2.5 Mobius 变换群及其子群

2.6 射影线性群

3 黎曼球面

考虑球 $x^2+y^2+z^2=1$ 从点 $(0,0,1)$ 到平面 $z=0$ 的球极投影

$$
\begin{aligned}
\iota\colon \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{S}^2(1) \hookrightarrow \mathbb{R}^3 \\
(X,Y) &\longmapsto \left(\frac{2X}{X^2+Y^2+1}, \frac{2Y}{X^2+Y^2+1}, \frac{X^2+Y^2-1}{X^2+Y^2+1}\right)
\end{aligned}
$$

考虑 $\mathbb{R}^3$ 上的标准度量 $g=\mathrm{d}x\otimes\mathrm{d}x+\mathrm{d}y\otimes\mathrm{d}y+\mathrm{d}z\otimes\mathrm{d}z$, 计算 ι^*g.

$$
\begin{aligned}
\iota_*\frac{\partial}{\partial X} &= \frac{1}{(1+X^2+Y^2)^2}\left(-2X^2+2Y^2+2,-4XY,4X\right) \\
\iota_*\frac{\partial}{\partial Y} &= \frac{1}{(1+X^2+Y^2)^2}\left(-4XY,2X^2-2Y^2+2,4Y\right) \\
\iota^*\mathrm{d}x &= \frac{1}{(1+X^2+Y^2)^2}\left((-2X^2+2Y^2+2)\mathrm{d}X-4XY\mathrm{d}Y\right) \\
\iota^*\mathrm{d}y &= \frac{1}{(1+X^2+Y^2)^2}\left(-4XY\mathrm{d}X+(2X^2-2Y^2+2)\mathrm{d}Y\right) \\
\iota^*\mathrm{d}z &= \frac{1}{(1+X^2+Y^2)^2}\left(4X\mathrm{d}X+4Y\mathrm{d}Y\right) \\
\iota^*g &= \frac{4}{(1+X^2+Y^2)^2}\left(\mathrm{d}X\otimes\mathrm{d}X+\mathrm{d}Y\otimes\mathrm{d}Y\right)
\end{aligned}
$$

3.1 $\mathbb{R}^3$ 中的单位球面

3.2 复平面的单点紧化

3.3 射影直线

在仿射图册中计算 FS 度量

4 全纯函数与共形映射

设 $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 是 $\mathbb{R}$-线性映射, 选定基后, 它有矩阵表示

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

4.1 全纯函数

线性代数

设 $A\colon (\mathbb{C}, z = x + \mathrm{i}y) \to (\mathbb{C}, w = u + \mathrm{i}v)$ 是 $\mathbb{C}$-线性映射, 则 $A(\mathrm{i}z) = \mathrm{i}Az = \mathrm{i}w$, 即

$$\begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

这就迫使

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = d \\ b = -c \end{cases}.$$

此时

$$w = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sqrt{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sqrt{a^2 + b^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z.$$

切映射

考虑 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. 它在某点 $p = (x_0, y_0)$ 处的切映射为 $f_{*,p}\colon T_p\mathbb{R}^2 \to T_{f(p)}\mathbb{R}^2$. 取 $T_p\mathbb{R}^2$ 的基为 $\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_p, \left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_p \right\}$, 取 $T_{f(p)}\mathbb{R}^2$ 的基为 $\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial u}\right|_{f(p)}, \left.\frac{\partial}{\partial v}\right|_{f(p)} \right\}$. 则 $f_{*,p}$ 在这组基下的矩阵表示为

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u \circ f}{\partial x} & \dfrac{\partial u \circ f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v \circ f}{\partial x} & \dfrac{\partial v \circ f}{\partial y} \end{pmatrix} (p) =: \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} (p).$$

$f_{*,p}$ 是 $\mathbb{C}$-线性映射当且仅当

$$\begin{cases} u_x(p) = v_y(p) \\ u_y(p) = -v_x(p) \end{cases}.$$

4.2 共形映射

参考资料:

- Angle preserving linear transformations

线性代数

Proposition 4.1. 设 $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 是线性映射, 则如下三条等价:

(1) L 保持两个非零向量之间的夹角.

(2) 存在 $\lambda > 0$ 使得 $\langle Av, Aw\rangle = \lambda^2 \langle v, w\rangle$

(3) 存在 $\lambda > 0$ 使得 $\|Av\| = \lambda\|v\|$.

切映射

做了上面这些铺垫后, 我们容易看出, 保定向的共形映射等价于导数恒不为零的全纯函数.

5 Monodromy representation

Let Σ be a Riemman surface, $\mathbf{f}\colon \Sigma \to \mathbb{CP}^1$ be a multi-valued holomorphic map.

Chapter 2

Toda 系统的历史

1　1 维 Toda 方程的哈密顿描述

Toda 方程起源于 Morikazu Toda[?][?] 对弹簧振子的研究. 考虑 n 个相同的质量为 m 的质点, 串在水平的光滑杆上, 相邻的两个质点被弹簧连接, 所有弹簧均相同. 假设 y_p 表示第 p 个质点相较平衡态的水平位移, 那么根据牛顿运动方程有

$$m\frac{\mathrm{d}^2 y_p}{\mathrm{d}t^2} = f(y_{p+1} - y_p) - f(y_p - y_{p-1}), \tag{2.1}$$

其中 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 描述弹簧在形变下提供的力. 经典情形中,$f(r) = kr$,k 是 Hooke 常数. $f(r)$ 是 r 的非线性函数的情形最初是由 Fermi-Pasta-Ulam 在 20 世纪 50 年代通过数值的方式研究的. 1967 年由 Toda 进一步发展, 他考虑了 $f(r) = a\mathrm{e}^{\lambda r}$. 这是非线性完全可积系统的最早的例子.

我们仅考虑以下两类模型：

(a) 有限或开的情形, 有 $n+2$ 个质点, 编号 $0, \cdots, n+1$, 其中第 0 个和 $n+1$ 个固定.

(b) 周期或仿射的情形, 有 $n+1$ 个质点, 排列在圆上, 相当于 $y_0 = y_{n+1}$. %beginfigure[h]

2 1 维 Toda 方程的李代数描述

上一小节中的想法在上世纪 70 年代后期被 Adler[?],Kostant[?] 和 Symes[?] 发展, 他们给出了 Toda 方程的李代数描述. 有关李代数的基础知识, 可参考 [?].

给定单李代数 $\mathfrak{g}$, 秩为 l, 设 $\{K_{ij}\}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 矩阵,$\left\{\hat{K}_{ij}\right\}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的增广 Cartan 矩阵, 我们分别有开 $\mathfrak{g}$-Toda 方程

$$\frac{\mathrm{d}^2\rho_i}{\mathrm{d}t^2}+\sum_{j=1}^{l}K_{ij}\mathrm{e}^{\rho_j}=0,\quad i=1,\cdots,l$$

和仿射 $\mathfrak{g}$-Toda 方程

$$\frac{\mathrm{d}^2\rho_i}{\mathrm{d}t^2}+\sum_{j=0}^{l}\hat{K}_{ij}\mathrm{e}^{\rho_j}=0,\quad i=0,\cdots,l$$

且

$$m_0\rho_0+\cdots+m_l\rho_l=0.$$

可验证质点在指数相互作用下导出的运动方程就是开的和仿射 $\mathfrak{su}(n+1)$-Toda 方程.

3 2 维 Toda 方程

我们可将上述 Toda 方程推广到 2 维, 其中 $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}$ 被替换为拉普拉斯算子

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

出于某些几何上的考虑, 我们有时也用复坐标 $z=x+\mathrm{i}y$, 此时 $\Delta=4\dfrac{\partial^2}{\partial z\partial\bar{z}}$.

给定单李代数 $\mathfrak{g}$,2 维 Toda 方程的两种形式为

$$\Delta\rho_i+\sum_{j=1}^{l}K_{ij}\mathrm{e}^{\rho_i}=0,\quad i=1,\cdots,l, \tag{2.2}$$

和

$$\Delta\rho_i+\sum_{j=0}^{l}\hat{K}_{ij}\mathrm{e}^{\rho_j}=0,\quad i=0,\cdots,l. \tag{2.3}$$

在 $\mathfrak{g}=\mathfrak{su}(2)$ 的情形我们分别得到 Liouville 方程

$$\Delta\rho+2\mathrm{e}^{\rho}=0$$

和 sinh-Gordon 方程

$$\Delta\rho+2\sinh\rho=0.$$

注意到, 对任意的 $\lambda>0$, 如果 $\{\rho_i\}$ 是(2.2)的解, 那么 $\{\rho_i+\log\lambda\}$ 是

$$\lambda\Delta\rho_i+\sum_{j=1}^{l}K_{ij}\mathrm{e}^{\rho_i}=0,\quad i=1,\cdots,l \tag{2.4}$$

的解. 因此我们常常根据需要修改 $\Delta\rho_i$ 前的系数 λ.

Chapter 3

Nevanlinna 理论

1 Jensen 公式

Theorem 1.1 (Jensen 公式)**.** 设

(1) $\Omega \supset \overline{B(0,R)}$,$f$ 在 Ω 全纯,$f(0) \neq 0$,f 在 $\{|z| = R\}$ 上无零点;

(2) f 在 $B(0,R)$ 内有零点 $z_1, z_2, \cdots z_N$, 计入重数.

则

$$\log|f(0)| = \sum_{k=1}^{N} \log\frac{|z_k|}{R} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\theta})| d\theta.$$

证一.

(1) 观察到若定理对 f_1, f_2 成立, 则对 $f_1 f_2$ 也成立.

(2) 令 $g(z) = \dfrac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_N)}$, 则 g 在 $\overline{B(0,R)}$ 上无零点, 全纯.
由 (1) 只需要对 $g(z)$ 和 $z - z_i$ 证明结论成立即可.

(3) 故 $\log||$

(4) 固定 $|w| < R$, 考虑 $h(z) = z - w$, 只要证

$$\log|w| = \log\frac{|w|}{R} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|Re^{i\theta} - w| d\theta$$

$$\iff \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \big(\log|Re^{i\theta} - w| - \log R\big)\, d\theta = 0$$

$$\iff \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|e^{i\theta} - \frac{w}{R}| d\theta = 0$$

令 $a = \dfrac{w}{R}$, 则即证对于 $|a| < 1$, 有

$$\int_0^{2\pi} \log|e^{i\theta} - a| d\theta = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \log|1-a\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}|\mathrm{d}\theta = 0$$

$$\theta = -\theta, \int_0^{-2\pi} \log|1-a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|\mathrm{d}\theta$$

$$\theta \to \theta + 2\pi, \int_0^{2\pi} \log|1-a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|\mathrm{d}\theta = 0$$

令 $F(z) = 1 - az$, 它是全纯函数, 且在 $\overline{B(0,1)}$ 上无零点. 用上一条,

$$\log|F(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|F(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|\mathrm{d}\theta$$

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|1-a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|\mathrm{d}\theta$$

□

证二. 设 $a \in \mathbb{D}$, 定义 $\varphi_a(z) = \dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$

令 $g(z) = \dfrac{f(z)}{\prod_{j=1}^{N} \varphi_{\frac{z_j}{R}}\left(\frac{z}{R}\right)}$, 则 $g(z)$ 在 $\overline{B(0,R)}$ 上没有零点, 且在 Ω' 上是全纯函数, 代入

$$\log|g(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|g(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|$$

$$\log\frac{|f(0)|}{\prod_{j=1}^{N}|\frac{z_j}{R}|} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\frac{|f(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|}{\prod_{j=1}^{N}|\varphi_{\frac{z_j}{R}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|}\mathrm{d}\theta$$

$$\log|f(0)| = \sum_{j=1}^{N}\log|\frac{z_j}{R}| + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|\mathrm{d}\theta$$

□

Remark.

(1) $f(0) = 0$ 不本质, 可除掉 z^m.

(2) 若 $|a| = 1$, 设 $a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$, 则

$$\int_0^{2\pi} \log|1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\theta)}|\mathrm{d}\theta = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \log|1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|\mathrm{d}\theta = 0$$

令 $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, 则 $\mathrm{d}z = \mathrm{i}z\mathrm{d}\theta$.

$$\operatorname{Re}\int_{|z|=1} \log(1-z)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z} = 0$$

当 $\operatorname{Re} z < 1$ 时,$\log(1-z)$ 有全纯单值分支,γ_ε,γ_1, 令 $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_\varepsilon$

$$\int_\gamma \frac{\log(1-z)}{\mathrm{i}z}\mathrm{d}z = 0.$$

$$\lim_{\varepsilon\to -}\int_{\gamma_1}\frac{\log(1-z)}{\mathrm{i}z}\mathrm{d}z=-\lim_{\varepsilon}$$

令 $\gamma_\varepsilon : z = 1+\varepsilon \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \theta : \frac{3}{2}\pi \to \frac{\pi}{2}$

$$\left|\int_{\gamma_\varepsilon}\frac{\log(1-z)}{\mathrm{i}z}\mathrm{d}z\right| \leqslant \left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\frac{\log(-\varepsilon \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}{\mathrm{i}(1+\varepsilon \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}\varepsilon \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta\right| \leqslant C\varepsilon(|\log\varepsilon|+C)\to 0$$

因此 f 在 $\{|z|=R\}$ 无零点这个条件也可以去掉.

Definition 1.2. $\mathfrak{n}(r)$：全纯函数 $f(z)$ 在 $B(0,r)$ 中的零点个数, 计入重数.

Lemma 1.3.

$$\int_0^R \mathfrak{n}(r)\frac{\mathrm{d}r}{r}=\sum_{k=1}^{N}\log\frac{R}{|z_k|}.$$

证明. 只需注意到 $n(r)$ 是关于 r 的阶梯函数. 定义

$$\eta_k(r)=\begin{cases}1 & r>|z_k|,\\ 0 & r\leqslant |z_k|.\end{cases}$$

则

$$\int_{|z_k|}^R\frac{\mathrm{d}r}{r}=\int_0^R\eta_k(r)\frac{\mathrm{d}r}{r},$$

两侧对 k 求和即得所证. □

Corollary 1.4. 在 *Jensen* 定理的条件下, 我们有

$$\log|f(0)|=-\int_0^R n(r)\frac{\mathrm{d}r}{r}+\frac{1}{2\pi}\log|f(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|\mathrm{d}\theta$$

2 Poisson-Jenson 公式

3 Nevanlinna 第一基本定理

4 Nevanlinna 第二基本定理

5 Holomorphic curves and metrics of negative curvature

5.1 积分公式

基本积分公式

记 $\Delta_s = \{\zeta \in \mathbb{C}\colon |\zeta| < s\}$. 设其上的函数 $h(\zeta)$ 满足

- 存在某点 $\zeta_0 \in \Delta_s$,$h(\zeta)$ 形如

$$h(\zeta) = |\zeta - \zeta_0|^{2\mu} \left(\log|\zeta - \zeta_0|\right)^{2\nu} h_0(\zeta),$$

  其中 $h_0(\zeta)$ 是光滑的且恒正.

-

Proposition 5.1.

$$\frac{1}{4\pi}\int_{|\zeta|=r} \log h \cdot \mathrm{d}\theta + N(D,r) = N(R,r) + \int_0^r \left(\int_{\Delta_\rho} \mathrm{dd}^c \log h\right)\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} + \frac{1}{2}\log h(0), \quad \forall r < s.$$

去心圆盘的一个变式

Jensen 公式

给定整函数 $f(\zeta)$, 圆盘 $|\zeta| < r$ 中方程 $f(\zeta) = a$ 解的个数 $n(r,a)$ 可由 Cauchy 积分公式给出

$$n(r,a) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|\zeta|=r} \frac{f'(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{f(\zeta) - a} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|\zeta|=r} \partial\log\left[f(\zeta) - a\right].$$

上式已经假定了在圆周 $|\zeta| = r$ 上方程 $f(\zeta) = a$ 无解. 其中 log 应理解为全局解析函数, 因为不同分支之间相差的常数在 ∂ 下被消掉, 所以不必声明分支的选择.

下面是我看不懂的地方:

对上式两端取共轭得

$$n(r,a) = -\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|\zeta|=r} \overline{\partial\log\left[f - a\right]}.$$

结合两式有

$$\begin{aligned} n(r,a) &= \frac{1}{4\pi\mathrm{i}}\int_{|\zeta|=r} \partial\log\left[f - a\right] - \overline{\partial\log\left[f - a\right]} \\ &\stackrel{?}{=} \frac{1}{4\pi\mathrm{i}}\int_{|\zeta|=r} \partial\log|f - a|^2 - \bar{\partial}\log|f - a|^2 \end{aligned}$$

主要是不懂 $\overline{\partial\log\left[f - a\right]}$ 是什么、怎么算.

6 Kodaira

6.0汇总

- $n_1(r)$ 是 ξ 的零点的重数.
  - $N_1(r) = \int_0^r n_1(t)\frac{\mathrm{d}t}{2\pi t}$
- $B(r)$
  - $Q(r) = \int_0^r B(r)\frac{\mathrm{d}t}{2\pi t}$
- $A(r)$
  - $T(r) = \int_0^r A(t)\frac{\mathrm{d}t}{2\pi t}$
- $m(r,a)$
- $n(r,a)$
  - $N(r,a) = \int_0^r n(t,a)\frac{\mathrm{d}t}{2\pi t}$
- $M(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{4\pi}\log\xi(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}\theta$
- $m(r,a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_a(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}\theta$

  关系式

- $f^*\omega = \mathrm{d}\mathrm{d}^{\perp}u_a$
- $-\frac{R}{2}f^*\omega = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}\log\xi$
- $\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}\log a_j(w) = -\frac{R(w)}{2}\omega$

  相差常数的算子

- $\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}\bar{z} = -2\mathrm{i}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$
- $\mathrm{d}\mathrm{d}^{\perp} = 2\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}.$

6.1 紧黎曼曲面上的度量

设 W 是一个紧黎曼曲面,$\{(U_J, w_j)\}$ 是其上的一个坐标图册.

Definition 6.1. *W 上的一个 Kahler 度量 $\mathrm{d}s^2$ 是指*

$$\mathrm{d}s^2 = a_j(w)|\mathrm{d}w_j|^2.$$

其中 $a_j(w)$ 是 U_j 上的光滑函数

6.2 积分公式

6.3 到亏格 $\geqslant 2$ 的紧黎曼曲面的全纯映射

6.4 到黎曼球的全纯映射

考虑全纯映射 $f\colon \Delta_{r_\infty} \to \mathbb{P}^1$. 取 $\mathbb{P}_1$ 上典范的 Kahler 形式

$$\omega = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\frac{\mathrm{d}w \wedge \mathrm{d}\bar{w}}{(1+|w|^2)^2}.$$

Definition 6.2. $u_a(z) = \dfrac{1}{4\pi}\log\dfrac{(1+|f(z)|^2)(1+|a|^2)}{|f(z)-a|^2} = \dfrac{1}{4\pi}\log\dfrac{1}{d^2(f(z),a)}.$

Proposition 6.3. $\mathrm{dd}^\perp u_a(z) = f^*\omega.$

证明. $\mathrm{dd}^\perp u_a(z) = 2\sqrt{-1}\partial\bar\partial u_a(z) = \dfrac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar\partial\log(1+|f(z)|^2).$

上式是因为 $\partial\bar\partial\log(1+|a|^2)=0$ 且 $\partial\bar\partial\log|f(z)-a|^2 = \partial\bar\partial\left(\log(f(z)-a)+\log\overline{f(z)-a}\right)=0.$

继续计算 $\bar\partial\log(1+|f(z)|^2) = \dfrac{f\frac{\partial\bar f}{\partial\bar z}}{1+|f(z)|^2}\mathrm{d}\bar z = \dfrac{f\bar f'}{1+|f(z)|^2}\mathrm{d}\bar z.$

$\partial\left(\dfrac{f\bar f'}{1+|f(z)|^2}\mathrm{d}\bar z\right) = \dfrac{f'\bar f'(1+|f(z)|^2)-f\bar f' f'\bar f}{(1+|f(z)|^2)^2}\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}\bar z = \dfrac{|f'(z)|^2}{(1+|f(z)|^2)^2}\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}\bar z.$

所以 $\mathrm{dd}^\perp u_a(z) = \dfrac{\sqrt{-1}}{2\pi}\dfrac{|f'(z)|^2}{(1+|f(z)|^2)^2}\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}\bar z = f^*\left(\dfrac{\sqrt{-1}}{2}\dfrac{\mathrm{d}w\wedge\mathrm{d}\bar w}{(1+|w|^2)^2}\right) = f^*\omega.$ □

Definition 6.4. 记

$$\begin{aligned}
&A(r) = \int_{\Delta_r} f^*\omega\\
&T(r) = \int_0^r A(r)\frac{\mathrm{d}t}{2\pi t}\\
&m(r,a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_a(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}\theta\\
&n(r,a) = \text{计重数意义下}f(z)-a\text{在}\Delta_r\text{中零点的个数}\\
&N(r,a) = \int_0^r n(t,a)\frac{\mathrm{d}t}{2\pi t}
\end{aligned}$$

Theorem 6.5. 如果 $f(0)\neq 0$, 那么

$$N(r,a)+m(r,a) = T(r)+m(0,a).$$

证明.

$$A(r) = \int_{\Delta_r} f^*\omega = \int_{\Delta_r}\mathrm{dd}^\perp u_a \xlongequal{\textit{Stokes}} \int_{\partial\Delta_r}\mathrm{d}^\perp u_a - \sum_{\zeta_h(a)\in\Delta_r}\oint_{\zeta_h(a)}\mathrm{d}^\perp u_a$$

$$\int_{\partial\Delta_r}\mathrm{d}^\perp u_a = \int_{\partial\Delta_r}\frac{\partial u_a}{\partial\nu}\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial r}u_a(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})r\mathrm{d}\theta = 2\pi r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}m(r,a)$$

$$=$$

$$A(r) = 2\pi r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}m(r,a) - n(r,a) \Longrightarrow T(r) = m(r,a)-m(0,a)+N(r,a)$$

□

Remark. 因为 $A(t)$ 关于 t 单调递增,

$$T(r) = \int_0^r A(t)\frac{\mathrm{d}t}{2\pi t} \geqslant A(r_0)\int_{r_0}^r\frac{\mathrm{d}t}{2\pi t} = \frac{A(r_0)}{2\pi}\left(\log r - \log r_0\right),$$

从而

$$\liminf_{r\to+\infty}\frac{T(r)}{\log r}>0.$$

Remark. $T(r)=\int_0^r A(t)\frac{\mathrm{d}t}{2\pi t}=$

6.5 亏量关系

考虑全纯映射 $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{P}_1$.

Definition 6.6. 设 $a \in \mathbb{P}_1$. 称

$$\delta(a) = \liminf_{r\to+\infty} \frac{m(r,a)}{T(r)}$$

是 f 在 a 处的亏量.

Definition 6.7. 称 $a \in \mathbb{P}_1$ 是 f 的例外值如果 $f(z) \neq a, \forall\ z \in \mathbb{C}$.

Remark. 由第一主要定理*6.5,*

$$\frac{m(r,a)}{T(r)} = 1 - \frac{N(r,a)}{T(r)} + \frac{m(0,a)}{T(r)}.$$

因此

$$\delta(a) = 1 - \limsup_{r\to+\infty} \frac{N(r,a)}{T(r)}$$

Definition 6.8. $\delta_1 = \liminf\limits_{r\to+\infty} \dfrac{N_1(r)}{T(r)}$.

Theorem 6.9 (亏量关系)**.** 设 $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{P}_1$ 是一个非常值全纯映射满足

Definition 6.10. $\Psi(r) = \displaystyle\int_{\Delta_r} f^*(\rho\omega)$.

Lemma 6.11. $\lambda \displaystyle\sum_{k=1}^{q} m(r,a_k) + M(r) \leqslant \frac{1}{4\pi}\log\alpha_\lambda + \frac{1}{4\pi}\log\Phi(r)$.

证明. 由 ρ 和 $u_a(z)$ 的定义,

$$\log\rho(f(z)) = -\log\alpha_\lambda + 4\pi\lambda\sum_{k=1}^{q} u_{a_k}(z).$$

在 $\partial\Delta_r$ 上取平均, 得

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\rho(f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}))\mathrm{d}\theta = -\log\alpha_\lambda + 4\pi\lambda\sum_{k=1}^{q} m(r,a_k).$$

$\square$

7 Schwarz-Kobayashi 引理

Chapter 4

Multi-Valued Toda Map

Toda map $f\colon U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathrm{SU}(n+1)$ is a map gotten from a set of solution of $\mathfrak{su}(n+1)$- Toda euqation. It plays an important role when we establish the correspondence between the solutions to the $\mathfrak{su}(n+1)$-Toda equation and nondegenerate totally unramified holomorphic curves into $\mathbb{CP}^n$.

In this chapter, we will define multi-valued Toda map and examine its monodromy behaviour. Our main result is

Theorem 0.1. *Let μ be the natural group action (which will be defined later) by* $\mathrm{SU}(n+1)$ *on the set of multi-valued Toda maps. Then*

(1) *The isotropy group is conjugate to the image of the monodromy representation.*

(3) *The multi-valued Toda map is single-valued iff the monodromy representation is trivial.*

In section 1, we quickly review the local existence of Toda map. In section 2, we define the multi-valued Toda map. In section 3, we define the monodromy representation and prove the main theorem.

1 Local existence of Toda map

Suppose $\{u_i\}_{i=1}^n$ is a set of solution to the $\mathfrak{su}(n+1)$-Toda equation

$$-\frac{1}{4}\Delta u_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mathrm{e}^{u_j}$$

on a region $U \subset \mathbb{R}^2$, where $\{a_{ij}\}$ is the Cartan matrix of $\mathfrak{su}(n+1)$.

Define

$$\begin{cases} w_0 = -\dfrac{\sum_{i=1}^n (n-i+1)u_i}{2(n+1)} \\ w_i = w_0 + \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{j=1}^{i} u_j & 1 \leqslant i \leqslant n, \end{cases}$$

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} (w_0)_z & & & \\ & (w_1)_z & & \\ & & \ddots & \\ & & & (w_N)_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & & & \\ \mathrm{e}^{w_1-w_0} & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \mathrm{e}^{w_N-w_{N-1}} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{V} = -\begin{pmatrix} (w_0)_{\bar{z}} & & & \\ & (w_1)_{\bar{z}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & (w_N)_{\bar{z}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{e}^{w_1 - w_0} & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & \mathrm{e}^{w_N - w_{N-1}} \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

and

$$\alpha = \mathcal{U}\mathrm{d}z + \mathcal{V}\mathrm{d}\bar{z}.$$

Then the $\mathfrak{su}(n+1)$-Toda equation is equivalent to the structure equation

$$\mathrm{d}\alpha + \frac{1}{2}[\alpha, \alpha] = 0.$$

Theorem 1.1. *For any $p \in U$ there exists a neighborhood Ω of p and $f \colon \Omega \to \mathrm{SU}(n+1)$ such that $\alpha \mid_\Omega = f^*\omega$, where $\omega = g^{-1}\mathrm{d}g$ is the Maurer-Cartan form of $\mathrm{SU}(n+1)$. And for any such f_1, f_2 there exists $g \in \mathrm{SU}(n+1)$ such that $f_1 = g \cdot f_2$.*

For later use, we prove theorem 1.1 in a more general version

Theorem 1.2. *Let G be a Lie group with Lie algebra $\mathfrak{g}$. Let α be a $\mathfrak{g}$-valued 1-form on the smooth manifold M satisfying the structural equation $\mathrm{d}\alpha + \frac{1}{2}[\alpha, \alpha] = 0$. Then, for each point $p \in M$, there is a neighborhood Ω of p and a smooth map $f \colon \Omega \to G$ such that $\alpha\big|_\Omega = f^*\omega_G$, where ω_G is the Maurer-Cartan form of G.*

证明. Let $\pi_G \colon G \times M \to G$ and $\pi_M \colon G \times M$ denote the canonical projections. Let $\Psi = \pi_M^*\alpha - \pi_G^*\omega_G$ and let $\mathcal{D}$ be the distribution defined by the kernel of Ψ. Calculating the exterior derivative of Ψ, we get

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\Psi &= \mathrm{d}\pi_M^*\alpha - \mathrm{d}\pi_G^*\omega_G = \pi_M^*(\mathrm{d}\alpha) - \pi_G^*(\mathrm{d}\omega_G) \\ &= \pi_M^*(-\frac{1}{2}[\alpha, \alpha]) - \pi_G^*(-\frac{1}{2}[\omega_G, \omega_G]) \\ &= -\frac{1}{2}[\pi_M^*\alpha, \pi_M^*\alpha] + \frac{1}{2}[\pi_G^*\omega_G, \pi_G^*\omega_G] \end{aligned}$$

Now make the replacement $\pi_M^*\alpha = \pi_G^*\omega_G + \Omega$ so that

$$\mathrm{d}\Psi = -\frac{1}{2}[\pi_G^*\omega_G, \Psi] - \frac{1}{2}[\Psi, \pi_G^*\omega_G] - \frac{1}{2}[\Omega, \Omega].$$

Thus, $\mathrm{d}\Psi(X, Y) = 0$ whenveve $\Psi(X) = \Psi(Y) = 0$. Therefore, by Frobenius theorem, the distribution $\mathcal{D}$ is integrable. Finally, we are going to construct, for each $p \in M$, a neighborhood Ω of p in M and a smooth map $f \colon \Omega \to G$ such that $\alpha\big|_\Omega = f^*\omega_G$. Let $\mathcal{L}$ be a leaf through the point $(p, g) \in M \times G$. The derivative of the restriction of π_M to $\mathcal{L}$ intuces isomorphism $\pi_{M*} \colon \mathcal{D}_{(g,p)} \to T_pM$ and so the restriction of π_M to $\mathcal{L}$ is a local diffeomorphism of a neighborhood of (p, g) to some neighborhood of (p, g) to some neighborhood Ω of $p \in M$. Let $F \colon \Omega \to \mathcal{L}$ be the inverse map. Since $\pi_M F = \mathrm{Id}_\Omega$, F must have the form $F(p) = (p, f(p))$ where $f \colon \Omega \to G$. Now $F^*\Psi = \Psi F_* = 0$, thus we have

$$0 = F^*\Psi = F^*(\pi_M^*\alpha) - F^*(\pi_G^*\omega_G) = \alpha - f^*\omega_G.$$

As for the uniqueness, Let $h \colon \Omega \to G$ given by $h(x) = f_2(x)f_1(x)^{-1}$. Then $h^*\omega_G = \mathrm{Ad}(f_1)(f_2^*\omega_G - f_1^*\omega_G)$, where $\mathrm{Ad} \colon G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ is the adjoint representation of G. Since the later expression vanishes by assumption and $h^*\omega_G = \omega_G h_*$, we see that $h_*\colon TM \to TG$ induces the zero map on each tangent space. It follows that h is the constant map. In particular, $f_2(x) = g \cdot f_2(x)$ for all $x \in \Omega$ where g is some fixed element of G. $\square$

When $G = \mathrm{SU}(n+1)$ and $M = U \subset \mathbb{R}^2$ we get theorem 1.1.

2 Multi-Valued Toda map

With the local existence in hand we can define the multi-valued Toda map as the procedure when we try to define Log on the whole $\mathbb{C}^*$.

Let (Ω, f) represents that $f\colon \Omega \to \mathrm{SU}(n+1)$ is a Toda map. Then we say (Ω_1, f_1) and (Ω_2, f_2) are direct continuations of each other if $\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \varnothing$ and $f_1 = f_2$ on $\Omega_1 \cap \Omega_2$. More specifically, (Ω_2, f_2) is called a direct continuation of (Ω_1, f_1) to the region Ω_2.

Regarding theorem 1.1, for any (Ω_1, f_1) and (Ω_2, f_2) satisfing $\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \varnothing$ there exists $g \in G$ such that (Ω_1, f_1) and $(\Omega_2, g \cdot f_2)$ are direct continuations of each other.

We say (Ω_n, f_n) is a continuation of (Ω_1, f_1) if there exists a series of $(\Omega_1, f_1), \cdots, (\Omega_n, f_n)$ such that (Ω_k, f_k) and (Ω_{k+1}, f_{k+1}) are direct continuations of each other for any $1 \leqslant k \leqslant n-1$.

It is easy to check that this defines an equivalence relation. We call the equivalence classes multi-valued Toda maps.

3 Monodromy representation

In this section we fix $\{u_i\}_{i=1}^n$ a set of solution to $\mathfrak{su}(n+1)$-Toda equation on $U \subset \mathbb{R}^2$ and α the 1-form we get from $\{u_i\}_{i=1}^n$ as the procedure in section 1. Let $\mathscr{M}$ be the set of all multi-valued Toda map on U corresponding to $\{u_i\}_{i=1}^n$. Then there is a left group action on $\mathscr{M}$ by $\mathrm{SU}(n+1)$

$$\begin{aligned} \mu\colon \mathrm{SU}(n+1) \times \mathscr{M} &\longrightarrow \mathscr{M} \\ g, [(\Omega, f)] &\longmapsto [(\Omega, g \cdot f)] \end{aligned}$$

It is easy to see that if (Ω_1, f_1) and (Ω_2, f_2) are direct continuation of each other, then $(\Omega_1, g \cdot f_1)$ and $(\Omega_2, g \cdot f_2)$ are also direct continuation of each other. So μ is well-defined.

We are curious about that when (Ω, f) and $(\Omega, g \cdot f)$ represent the same multi-valued Toda map. In particular, we see that if $[(\Omega, f)] \neq [(\Omega, g \cdot f)]$ for any $g \in \mathrm{SU}(n+1)$, then $[(\Omega, f)]$ is actually single-valued. To do this, we need to examine the behaviour of the Toda map when we travel along a closed curve. Precisely, we need

Lemma 3.1. *Given any smooth curve $\sigma\colon (I = [a, b], \partial I) \to (U, x)$. Then for any $g \in \mathrm{SU}(n+1)$ there exists a unique $\tilde{\sigma}\colon (I, a) \to (\mathrm{SU}(n+1), g)$ such that $\tilde{\sigma}^*\omega = \sigma^*\alpha$, where ω is the Maurer-Cartan form on $\mathrm{SU}(n+1)$. Recall $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ means that f is a map from X to Y such that $f(A) \subset B$.*

证明. Since I is a manifold of dimension 1, any 1-form on it satisyies the structural equation. Apply theorem 1.2, for any $t \in I$ we can find an open neiborhood V_t of t and $\tilde{\sigma}_t\colon V_t \to \mathrm{SU}(n+1)$ such that $\tilde{\sigma}_t^*\omega = \sigma^*\alpha\big|_{V_t}$. We can assume V_t is connected, it can always be done by taking the connected component of V_t containing t. By the compactness of I, we can find finite $t_1 < t_2 < \cdots < t_l$ such that $\{V_{t_i}\}_{i=1}^l$ covers I. We can assume V_{t_i} only intersect with $V_{t_{i-1}}$ and $V_{t_{i+1}}$ for $2 \leqslant i \leqslant l-1$. On V_{t_1}, we choose $\tilde{\sigma}_{t_1}$ such that $\tilde{\sigma}_{t_1}(a) = g$. On V_{t_2}, we choose $\tilde{\sigma}_{t_2}$ such that $\tilde{\sigma}_{t_1} = \tilde{\sigma}_{t_2}$ on $V_{t_1} \cap V_{t_2}$. In this way, we can paste all $\tilde{\sigma}_{t_i}$ into a global map $\tilde{\sigma}$ defined on I such that $\tilde{\sigma}(a) = g$ and $\tilde{\sigma}^*\omega = \sigma^*\alpha$. □

We call such that $\tilde{\sigma}$ the development of α along σ starting at g. This terminology follows [**?**]. Suppose $\tilde{\sigma}_0$ is the development of α along σ starting at e. Then by the uniqueness part of theorem 1.2 we can see $\tilde{\sigma} = g \cdot \tilde{\sigma}_0$. So

$$\tilde{\sigma}(a)^{-1}\tilde{\sigma}(b) = \tilde{\sigma}_0(a)^{-1} \cdot g^{-1} \cdot g \cdot \tilde{\sigma}_0(b) = \tilde{\sigma}_0(a)^{-1}\tilde{\sigma}_0(b) = \tilde{\sigma}_0(b).$$

In this way we see that the value of $\tilde{\sigma}(a)^{-1}\tilde{\sigma}(b)$ does not depend on the choice of $\tilde{\sigma}(a)$. We denote it by g_σ. It is obvious that $g_\sigma = \tilde{\sigma}_0(b)$.

Proposition 3.2. *The following are equivalent*

(1) *(Ω, f) and $(\Omega, g \cdot f)$ are continuations of each other.*

(2) *There exists smooth curve $\sigma\colon (I, \partial I) \to (U, x)$ such that $x \in \Omega$ and $g = f(x)g_\sigma f(x)^{-1}$.*

证明. First assume the equivalence is true when $f(x) = e$. Then for general (Ω, f), we have

(Ω, f) and $(\Omega, g \cdot f)$ are continuations of each other

$\Longleftrightarrow(\Omega, f(x)^{-1}\cdot f)$ and $(\Omega, f(x)^{-1}gf(x)f(x)^{-1}\cdot f)$ are continuations of each other

$\Longleftrightarrow\exists\ \sigma$ s.t. $f(x)^{-1}gf(x) = g_\sigma$

Now we prove the proposition for $f(x) = e$.

- (1) $\Longrightarrow$ (2) By definition, there exists $(\Omega_0, f_0) = (\Omega, f), (\Omega_1, f_1), \cdots, (\Omega_n, f_n) = (\Omega, g\cdot f)$ such as (Ω_i, f_i) and (Ω_{i+1}, f_{i+1}) are direct continuation of each other for $0 \leqslant i \leqslant n-1$. We can find $x_0 = x, x_1, \cdots, x_n, x_{n+1} = x$ such that $x_i \in \Omega_{i-1}\cap\Omega_i$ for $1 \leqslant i \leqslant n$. We can find a closed smooth curve σ with base point x such that it pass through all x_i for $1 \leqslant i \leqslant n$.

  Since $f_i^*\omega = \alpha$ and $\sigma^*\alpha = \tilde{\sigma}^*\omega$, we have $(f_i\circ\sigma)^*\omega = \tilde{\sigma}^*\omega$. By uniqueness of Toda map we know that $f_i\circ\sigma$ and $\tilde{\sigma}$ can differ at most up to a left multiplication. We assume $f_i\circ\sigma$ agrees with $\tilde{\sigma}$, then the fact that f_i agrees with f_{i+1} on $\Omega_i\cap\Omega_{i+1}$ implies $f_{i+1}\circ\sigma$ also agrees with $\tilde{\sigma}$. Now we select $\tilde{\sigma}$ such that it starts at e, then it agrees with (f_0, Ω_0). By the transitivity it agrees with (f_n, Ω_n), i.e. $g_\sigma = \tilde{\sigma}(b) = g$.

- (2) $\Longrightarrow$ (1) For any $t \in I$, there is (Ω_t, f_t) such that $\sigma(t) \in \Omega_t$. Set $\Omega_0, \Omega_n = \Omega$, by the compactness of $\sigma(I)$ we can find $\{\Omega_i\}_{i=1}^{n-1}$ such that $\Omega_i\cap\Omega_{i+1} \neq \varnothing$ for all $0 \leqslant i \leqslant n-1$ and $\sigma(I) \subset \cup_{i=0}^{n-1}\Omega_i$. Set $(\Omega_0, f_0) = (\Omega, f)$, select proper f_i such that (Ω_i, f_i) and (Ω_{i+1}, f_{i+1}) are direct continuation of each other for $0 \leqslant i \leqslant n-1$. Then $(\Omega, f) \sim (\Omega, f_n)$, by the uniqueness there exists g such that $f_n = g\cdot f$. By the same argument in (1) $\Longrightarrow$ (2) we see that $g = g_\sigma$.

□

For (Ω, f) such that $f(x) = e$, we have diagram as follows

$$\begin{tikzcd}
(\Omega, f) \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\gamma"] \arrow[dr, "\gamma\star\sigma"] & (\Omega, g_\sigma\cdot f) \\
(\Omega, g_\gamma\cdot f) \arrow[r, "\sigma"] & (\Omega, g_\gamma g_\sigma\cdot f)
\end{tikzcd}.$$

Now we define the monodromy representation for given base point $x \in U$

$$\begin{aligned}\Phi_x\colon \pi_1(U, x) &\longrightarrow \mathrm{SU}(n+1)\\ [\sigma] &\longmapsto g_\sigma\end{aligned}$$

The well-definedness of Φ_x is guaranteed by the fact that $\mathrm{d}\alpha + \dfrac{1}{2}[\alpha, \alpha] = 0$. Precisely we have

Proposition 3.3. *Let $\sigma_1, \sigma_2\colon (I, \partial I) \to (U, x)$ be smooth homotopic curves. Then the development $\tilde{\sigma}_i$ of α along σ_i starting at g has the same endpoint, where $i = 1, 2$.*

证明. Let $h\colon (I\times I, a\times I\cup b\times I) \to (U, x)$ be the smooth homotopy joining σ_1 and σ_2. The first parameter of h refers to the position on one particular curve and the second parameter of h refers to which curve we are talking about. Now $h^*\alpha$ is a $\mathfrak{su}(n+1)$ valued 1-form on $I\times I$ that satisfies the strucural equation. Apply similar argument as lemma 3.1 twice, first to all interval looks like $I\times\{t\}$, we get a map $H\colon I\times I \to \mathrm{SU}(n+1)$ such that $H(a, a) = g$ and $H^*\omega = h^*\alpha$. We show $H(b, t)$ is constant for any t by showing $H_*(0, v) = 0$ for any tangent vector $(0, v)$ at any point (b, t). Since the Maurer-Cartan form ω is isomorphic between tangent vector spaces when restricted to one point $H_*(0, v) = 0$ is equivalent to $0 = \omega(H_*(0, v)) = *\omega(0, v) = h^*\alpha(0, v)$. This is true since $h(b, t)$ is constant for t. $\square$

From the diagram above we see that Φ_x is a group homomorphism.

Suppose (Ω, f) satisfy $f(x) = e$, we determine the isotropy group of $[(\Omega, f)]$. We see from above that $(\Omega, f) \sim (\Omega, g \cdot f)$ iff $g \in \operatorname{Im}\Phi$. By the transitivity we have $[(\Omega, f)] = [(\Omega, g \cdot f)]$ iff $(\Omega, f) \sim (\Omega, g \cdot f)$. So the isotropy group of $[(\Omega, f)]$ is $\operatorname{Im}\Phi_x$.

For general (Ω, f), by similar argument, the isotroy group is equal to $f(x)\operatorname{Im}\Phi_x f(x)^{-1}$, the conjugate subgroup by $f(x)$ of $\operatorname{Im}\Phi_x$ in $\mathrm{SU}(n+1)$.

Actually we have proved

Theorem 3.4. *Let μ be the group action by $\mathrm{SU}(n+1)$ on the set of multi-valued Toda maps. Then*

(1) *Any isotropy group is conjugate to the image of the monodromy representation.*

(3) *The multi-valued Toda map is single-valued iff the monodromy representation is trivial.*

Chapter 5

度量与曲率

1 共形度量

参考资料:

- 王作勤老师 16 年黎曼几何讲义第 1 讲和第 9 讲
- Conformal metrics on Riemann surfaces
- Wiki:Conformal map
- Wiki:Conformal geometry
- On the existence of local isothermal coordinates on a surface

Definition 1.1. 设 M 是光滑流形,g 和 g' 都是 M 上的黎曼度量. 如果存在 $u \in C^\infty(M)$ 使得

$$g' = \mathrm{e}^u g,$$

则称 g' 共形于 g.

容易看出共形是等价关系, 因此我们可以考虑度量的共形等价类. 著名的 Yamabe 问题就是说, 设 (M, g) 是 n 维紧黎曼流形, 其中 $n \geqslant 3$, 在 g 的共形等价类中是否存在常**数量**曲率的度量?

Definition 1.2. 设 (M, g) 是黎曼流形, 称它是局部共形平坦的, 如果对任意 $p \in M$, 存在坐标卡 (U, x) 使得 $g\big|_U = \mathrm{e}^u(\mathrm{d}x^1 \otimes \mathrm{d}x^1 + \cdots + \mathrm{d}x^n \otimes \mathrm{d}x^n)$, 即 $g\big|_U$ 共形等价于平坦度量. 称 (U, x) 为等温坐标系.

Theorem 1.3. 二维黎曼流形局部上总是存在等温坐标系.

证明. □

设 M 是二维光滑流形, 给定其上的黎曼度量 g, 由上述定理, 其上存在一坐标图册, 每个坐标卡都是到欧氏空间开区域的共形映射. 保定向的共形映射是全纯的, 因此该坐标图册也给出复流形结构 J. 此时人们又称 g 是黎曼曲面 (M, J) 上的共形度量.

问题：我们是否需要挑出保定向的一部分？毕竟, 任给两个等温坐标系, 它们之间的转移映射不一定是保定向的吧.

问题：给定黎曼曲面 (M, J), 是否存在共形度量 g 使得 g 按上述过程诱导的复结构就是 (M, J)? 若存在, 是否唯一？

2 去心圆盘上的度量

我们来看一个去心圆盘上的度量, 设其局部表达为 $\dfrac{\sqrt{-1}}{2}\mathrm{e}^u\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}\bar{z}$.（这是否已经是一个假设？因为在圆盘上我们知道, 共形度量总能局部上写成这个样子, 但是一旦穿孔, 还能有这样的整体表达么？）我们关心这个度量在原点处的行为. 目前我们一共关心两种可能，第一种就是实际上很好，这是整个圆盘上的光滑度量；第二种可能就是一个锥奇点, 之前我们已经介绍过 $z\mapsto z^n$ 的拉回度量就是一个锥度量, 严格定义来说就是 $u-\gamma\ln|z|$ 是一个连续函数.

好, 我们一般会给度量加上条件，首先是面积有限条件（以后还会讨论多项式级别增长）

$$\frac{\sqrt{-1}}{2}\int_{D^*}\mathrm{e}^u\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}\bar{z}<+\infty$$

也就是说 e^u 是 L1 可积的.

3 黎曼球上常 Gauss 曲率度量与 Liouville 方程的解

设 g 是 $\mathbb{S}^2$ 上常 Gauss 曲率为 K 的度量.

Remark. *由 Gauss-Bonet 公式,$K > 0$. 易知这样的度量是存在的, 我想也是唯一的, 但我不知道怎么说明它是唯一的.*

取等温坐标系 (U, x), 即在该坐标系下 g 有 $g = \mathrm{e}^u \left(\mathrm{d}x^1 \otimes \mathrm{d}x^1 + \mathrm{d}x^2 \otimes \mathrm{d}x^2\right)$ 的形式. 在等温坐标系下,Gauss 曲率

$$K = -\frac{\Delta u}{2\mathrm{e}^u} \Longrightarrow \Delta u + 2K\mathrm{e}^u = 0.$$

很自然地, 在单连通域 Ω 上, 如果 $f : \Omega \to \mathbb{C} \cup \{\infty\} \simeq \mathbb{S}^2$ 是一个全纯映射 (可能会有极点), 那么 $e^v|\mathrm{d}z|^2 = f^*\mathrm{d}s^2$ 时, 容易验证 v 也满足 (2). 一个方法是直接写出 v 的表达式

$$v = \log \frac{|f'|^2}{(1 + K/4|f|^2)^2}. \tag{5.1}$$

Remark. *称这样的 f 为展开映射.*

事实上 (3) 给出了全部解的一个表达形式:

Theorem 3.1. *Liouville 方程在单连通域上的解一定形如*

$$u = \log \frac{|f'|^2}{(1 + K/4|f|^2)^2}, \tag{5.2}$$

其中 f 是一个仅有一阶极点的亚纯函数.

Remark. *如果 $u(x, y) = u(z, \overline{z})$ 是一个解, 那么*

$$G(z, \overline{z}) = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$$

是一个全纯函数, 并且是 f 的 Schwarzian 导数.

同时, 当 $K < 0$ 时, Liouville 方程不在整个平面上有解.

4 常曲率度量的展开映射

参考资料

- 太平洋论文
- Peterson 黎曼几何第二版
-

5 锥奇点

Definition 5.1. 设 Σ 是紧黎曼曲面,p 是 Σ 上的一点,$\mathrm{d}\sigma^2$ 是 Σ 上的共形度量. 称 $\mathrm{d}\sigma^2$ 在 p 点有一个角度为 $2\pi\alpha > 0$ 的锥奇点, 如果在以 p 点为中心的某个坐标卡 (U, z) 内,

$$\mathrm{d}\sigma^2 = \mathrm{e}^{2\varphi}|\mathrm{d}z|^2,$$

且其中 $\varphi - (\alpha - 1)\ln|z|$ 在邻域 U 内连续.

- 关于锥奇点的定义中存在的一个细节是 $\mathrm{d}\sigma^2$ 其实并不是 Σ 上传统意义下的度量, 而是 $\Sigma\setminus\{p\}$ 上的度量.
- 因为二维黎曼流形局部上总是存在等温坐标系, 所以局部上总可以写成 $\mathrm{e}^u|\mathrm{d}z|^2$ 这种样子. 但这个局部应该说并不包含 p 点. 所以首先 p 点周围可以写成这个样子本身似乎就挺强的.
- 问题：角度的概念是否良定, 比如会不会同时存在坐标卡 (V, w) 和其上的函数 ψ, 使得 $\mathrm{d}\sigma^2 = \mathrm{e}^{2\psi}|\mathrm{d}w|^2$ 且 $\psi - (\beta - 1)\ln|w|$ 在邻域 V 内连续但 $\alpha \neq \beta$.
- φ 在 $0 < |z| < 1$ 满足的方程是
$$\Delta\varphi + K\mathrm{e}^{2\varphi} = 0.$$
  φ 在原点处满足的方程是什么？
- 如何将 α 直观理解为角度？或许可以考虑 $z \mapsto z^\alpha$ 的拉回度量

6 Chou-Wan 论文

Proposition 6.1. 设 $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 满足

(1) u 是方程 $\Delta u + 2K\mathrm{e}^u = 0$ 的解, 其中 $K > 0$ 是常数.

(2) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^u < \infty$.

则 u 形如

$$u(x) = \log \frac{16\lambda^2}{(4 + \lambda^2 K|x - x_0|^2)^2},$$

其中 $x_0 \in \mathbb{R}^2$,$\lambda > 0$ 是常数.

证明.

$$\mathrm{e}^u(\mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}x + \mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}y) = f^* g_K$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^u = \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^u \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y =$$

黎曼度量 $\mathrm{e}^u(\mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}x + \mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}y)$ 诱导体积形式 $\mathrm{e}^u \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$. $\mathrm{e}^u \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上诱导一个测度

按几何测度论那个定理 f 拉回一个测度.

断言这两个测度是一样的. 在承认断言的基础上完成证明.

$$\int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^u = \mu(\mathbb{R}^2) = \int N(f, y) \mathrm{d}y < +\infty.$$

所以 f 在无穷远处不可能是本性奇点. □

7 面积有限条件下去心圆盘上常正曲率度量的局部模型

Proposition 7.1. 设 $\mathrm{d}\sigma^2$ 是去心单位圆盘 $\Delta^* = \{w \in \mathbb{C} \mid 0 < |w| < 1\}$ 上 Gauss 曲率为 1 的度量. 假设 Δ^* 的 $\mathrm{d}\sigma^2$-面积有限. 那么, 存在某 $\Delta_\varepsilon = \{w \in \mathbb{C} \mid |w| < \varepsilon\}$ 上的局部坐标 z 满足 $z(0) = 0$ 和

$$\mathrm{d}\sigma^2\big|_{\Delta_\varepsilon} = \frac{4(\beta+1)^2(z\bar{z}^\beta)}{(1+(z\bar{z})^{\beta+1})^2}|\mathrm{d}z|^2 = \frac{4(\beta+1)^2(x^2+y^2)^\beta}{(1+(x^2+y^2)^{\beta+1})^2}(\mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}x + \mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}y).$$

证明.

(0)
- 验算 $\mathrm{d}\sigma^2$ 确实常曲率 $+1$.
- 计算 $\mathrm{d}\sigma^2$ 在原点处的锥角度.

(1) Δ^* 上多值的展开映射 f. 参见4节.

(2) 因为 f 复合上 PSU(2) 中的一个元素后还是展开映射, 所以可选取一个合适的 PSU(2) 中的元素, 使得 f 复合上它后 monodromy 表现为绕过原点和无穷远点的轴的旋转.

而 $z \mapsto z^\alpha$ 有相同的 monodromy.

所以 $\dfrac{f}{z^\alpha}$ 决定出一个单值亚纯函数 ψ, 即 f 形如 $f = z^\alpha \psi$.

(3) 面积有限条件 $\Longrightarrow$ ψ 在 0 处是孤立奇点, 且至多为极点.

- α 为有理数.Picard 定理
- α 为无理数.Nevanlinna 理论. 参见3章.
  - 不知道 Griffiths 论文中的函数 h 对应到我们这里的谁?
  - 有限面积条件怎么就是 $\displaystyle\int_{\Delta^*} \mathrm{dd}^C(1+|w^\alpha\psi(w)|^2) < +\infty$ 了?
  - 基本积分公式的证明开头做的假定?
  - 为什么可以拆成两部份证?
  - 两部分各自是怎么证的?

(4) 所以, 存在整数 n 使得 $z^{-n}\psi(z)$ 在原点的某个邻域 $U_\rho = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \rho\}$ 上恒不为零.

所以, 存在 U_ρ 上的全纯函数 $g(z)$ 使得 $\psi(z) = z^n \mathrm{e}^{g(z)}$, 对于 $z \in U_\rho$.

所以, 在 U_ρ 上有 $f = z^{\alpha+n}\mathrm{e}^{g(z)}$.

(i) 当 $\alpha + n > 0$ 时. 取 $\beta = \alpha + n - 1$ 和 $z = w\mathrm{e}^{g/(\beta+1)}$

(ii) 当 $\alpha + n < 0$ 时.

(iii) 当 $\alpha + n = 0$ 时.

∎

8 面积有限条件下去心复平面上常正曲率度量的局部模型

Proposition 8.1. 设 $\mathrm{d}\sigma^2$ 是去心复平面 $\mathbb{C}^*$ 上 Gauss 曲率为常值 1 的度量. 假设 $\mathbb{C}^*$ 的 $\mathrm{d}\sigma^2$-面积是有限的.

证明.

- We have multi-valued development map $f\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{P}^1$.
- There exists $\alpha \in [0,1)$ and meromorphic function $\psi\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{P}$ such that $f = z^\alpha \psi$.
- We know f is nondegenerate,i.e. $\mathrm{d}f \neq 0$ on $\mathbb{C}^*$.
  - We assume ψ is also nondegenerate on $\mathbb{C}^*$. This is true when $\alpha = 0$. The general case is still unclear for me.

    By Bryant, ψ have at most poles at 0 and ∞. So we can extend ψ to holomorphic map $\psi\colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ which can only degenerate at 0 and ∞. By complex analysis we know holomorphic maps form $\mathbb{P}^1$ to $\mathbb{P}^1$ are rational functions. Suppose ψ is a n-sheeted ramified covering and the ramification indexes of 0 and ∞ are d_0 and d_∞. Then by R-H formula we have

    $$\chi(\mathbb{P}^1) = n\chi(\mathbb{P}^1) - (d_0 - 1) + (d_\infty - 1) \Longrightarrow d_0 + d_\infty = 2n.$$

    Conbined with obvious conditions $d_0 \leqslant n$ and $d_\infty \leqslant n$, we have $d_0 = d_\infty = n$. And we know $\psi(0) \neq \psi(\infty)$ otherwise $d_0 + d_\infty = 2n > n$, a contradiction. After composing a Mobius transformation, we can assume $\psi(0) = 0$ and $\psi(\infty) = \infty$.

    Suppose $\psi = \dfrac{P}{Q}$ where P and Q are polynomials, we seek the form of ψ

    * Since ψ is n-sheeted, $\psi(\infty) = \infty$ and $d_\infty = n$, there is no point $p \in \mathbb{C}$ such that $\psi(p) = \infty$. As a consequent Q is a nonzero constant.
    * Since ψ is n-sheeted, $\psi(0) = 0$ and $d_0 = n$, there is no point $p \in \mathbb{C}^*$ such that $\psi(p) = 0$. As a consequent $P = z^n$ up to a nonzero constant.
    * So $\psi = \lambda z^n$, where $\lambda \in \mathbb{C}^*$ is a constant.

    Next step, we study what the metric pulled back by $f = \lambda z^{\alpha+n}$ is.

□

9 11 月 20 日学长报告

老师说原点的奇性蕴含局部的面积有限条件？

10 Fuchsian 方程

11 李柏的本科毕业论文

Chapter 6

Open $\mathfrak{su}(n+1)$-Toda 方程与全纯曲线

我们将在本章中建立单连通区域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 上 $\mathrm{SU}(n+1)$-Toda 方程的解与 Ω 到 $\mathbb{CP}^n$ 中的线性满全纯曲线之间的一一对应.

1 Fubini-Study 度量

2 title

$$\begin{cases} u_1 = 2w_1 - 2w_0 \\ u_2 = 2w_2 - 2w_1 \\ u_3 = 2w_3 - 2w_2 \\ w_0 + w_1 + w_2 + w_3 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} u_1 = 4w_1 + 2w_2 + 2w_3 \\ u_2 = 2w_2 - 2w_1 \\ u_3 = 2w_3 - 2w_2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

$$\Delta \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{u_1} \\ \mathrm{e}^{u_2} \\ \mathrm{e}^{u_3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \Delta \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{u_1} \\ \mathrm{e}^{u_2} \\ \mathrm{e}^{u_3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Delta \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{u_1} \\ \mathrm{e}^{u_2} \\ \mathrm{e}^{u_3} \end{pmatrix}$$

$$\Delta \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{u_1} \\ \mathrm{e}^{u_2} \\ \mathrm{e}^{u_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{u_1} \\ \mathrm{e}^{u_2} \\ \mathrm{e}^{u_3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \Delta w_1 = -\mathrm{e}^{2w_1 - 2w_0} + \mathrm{e}^{2w_2 - 2w_1} \\ \Delta w_2 = -\mathrm{e}^{2w_2 - 2w_1} + \mathrm{e}^{2w_3 - 2w_2} \\ \Delta w_3 = -\mathrm{e}^{2w_3 - 2w_2} \\ \Delta w_0 = \mathrm{e}^{2w_1 - 2w_0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_i = w_0 + \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{j=1}^{i} u_j \\ w_0 = -\dfrac{1}{2(n+1)} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (n-i+1) u_i \end{cases}$$

令

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} (w_0)_z & & & \\ \mathrm{e}^{w_1 - w_0} & (w_1)_z & & \\ & \mathrm{e}^{w_2 - w_1} & (w_2)_z & \\ & & \mathrm{e}^{w_3 - w_2} & (w_3)_z \end{pmatrix}, \quad \mathcal{V} = -\begin{pmatrix} (w_0)_{\bar z} & \mathrm{e}^{w_1 - w_0} & & \\ & (w_1)_{\bar z} & \mathrm{e}^{w_2 - w_1} & \\ & & (w_2)_{\bar z} & \mathrm{e}^{w_3 - w_2} \\ & & & (w_3)_{\bar z} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{U}_{\bar z} = \begin{pmatrix} (w_0)_{z\bar z} & & & \\ (w_1-w_0)_{\bar z}\mathrm{e}^{w_1-w_0} & (w_1)_{z\bar z} & & \\ & (w_2-w_1)_{\bar z}\mathrm{e}^{w_2-w_1} & (w_2)_{z\bar z} & \\ & & (w_3-w_2)_{\bar z}\mathrm{e}^{w_3-w_2} & (w_3)_{z\bar z} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{V}_z = -\begin{pmatrix} (w_0)_{z\bar z} & (w_1-w_0)_z\mathrm{e}^{w_1-w_0} & & \\ & (w_1)_{z\bar z} & (w_2-w_1)_z\mathrm{e}^{w_2-w_1} & \\ & & (w_2)_{z\bar z} & (w_3-w_2)_z\mathrm{e}^{w_3-w_2} \\ & & & (w_3)_{z\bar z} \end{pmatrix}$$

3 到复射影空间的全纯映射的提升

Proposition 3.1. 设 Σ 是黎曼曲面, $f\colon \Sigma \to \mathbb{CP}^n$ 是全纯映射. 对任意 $x \in \Sigma$, 存在邻域 U 和全纯映射 $\tilde{f}\colon U \to \mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}$ 使得下列图表交换

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\} \arrow[d] \\ U \arrow[ur] \arrow[r] & \mathbb{CP}^n \end{tikzcd}$$

Proposition 3.2. 设 Σ 是黎曼曲面, $F\colon \Sigma \to \mathbb{C}^{n+1}$ 至多只有孤立零点, 则可以定义 $f\colon \Sigma \to \mathbb{CP}^n$.

Proposition 3.3. 设 Σ 是非紧黎曼曲面, $f\colon \Sigma \to \mathbb{CP}^n$ 是全纯映射. 那么存在整体提升.

4 伴随曲线

设 Σ 是黎曼曲面, $f\colon \Sigma \to \mathbb{CP}^n$ 是全纯映射, $v\colon U \to \mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}$ 是 f 在 U 上的局部提升. 设 (U,z) 是 U 上的一个全纯坐标卡, 对于 $0 \leqslant k \leqslant n$, 定义

$$\Lambda_k(v) = v \wedge \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z} \wedge \cdots \wedge \frac{\mathrm{d}^k v}{\mathrm{d}z^k} \in \mathrm{HoloMap}\left(U, \bigwedge^{k+1} \mathbb{C}^{n+1}\right).$$

我们知道, 如果 $\Lambda_k(v)$ 至多有孤立零点, 我们就可以考虑

$$f_k(v)(z) := [v(z) \wedge \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}(z) \wedge \cdots \wedge \frac{\mathrm{d}^k v}{\mathrm{d}z^k}(z)].$$

那么, 什么时候 $\Lambda_k(v)$ 至多有孤立零点呢?

Proposition 4.1. 设 Σ 是黎曼曲面, $f\colon \Sigma \to \mathbb{CP}^n$ 是全纯映射. 如下两条等价:

(1) $\mathrm{Im}\, f$ 不被包含在任何超平面中. 我们称这样的 f 是线性满的.

(2) 对任意局部提升 $v\colon U \to \mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}$ 和任意全纯坐标卡 (U,z),

$$v \wedge \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z} \wedge \cdots \wedge \frac{\mathrm{d}^n v}{\mathrm{d}z^n}$$

在 U 上至多有孤立零点.

证明.

- 假设 $v \wedge v' \wedge \cdots \wedge v^{(n)} \equiv 0$, 那么 $v^{(n)} \equiv 0 \mod (v, \cdots, v^{(n-1)})$. 那么

$$\begin{aligned}\big(v(z) \wedge \cdots \wedge v^{(n-1)}(z)\big)' &= v(z) \wedge \cdots \wedge v^{(n-2)}(z) \wedge v^{(n)}(z) \\ &= \lambda(z) \cdot v(z) \wedge \cdots \wedge v^{(n-1)}(z)\end{aligned}$$

  因此 $\mathrm{Im}\, f$ 落在 $\mathbb{CP}^n$ 的 $n-1$ 维平面中, 与 f 线性满的假设矛盾.

- 假设 $\mathrm{Im}\, f$ 落在某超平面中, 即某提升的像 $\mathrm{Im}\, v$ 落在余 1 维子空间中, 那么 v 的各阶导数的像也落在该余 1 维子空间中, 那么 $v \wedge v' \wedge \cdots \wedge v^{(n)} \equiv 0$, 矛盾.

□

Lemma 4.2. 设 Σ 是黎曼曲面, $f\colon \Sigma \to \mathbb{CP}^n$ 是全纯映射, $v\colon U \to \mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}$ 是 f 在 U 上的局部提升. 设 (U,z) 和 (U,w) 是 U 上的两个全纯坐标卡, 则

$$v \wedge \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}w} \wedge \cdots \wedge \frac{\mathrm{d}^k v}{\mathrm{d}w^k} = \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}w}\right)^{k(k+1)/2} v \wedge \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z} \wedge \cdots \wedge \frac{\mathrm{d}^k v}{\mathrm{d}z^k}.$$

证明. 简单的计算知如下关系成立

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}w} &= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}w} \\ \frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}w^2} &= \frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}z^2}\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}w}\right)^2 + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}w^2} \\ \frac{\mathrm{d}^3 v}{\mathrm{d}w^3} &= \frac{\mathrm{d}^3 v}{\mathrm{d}z^3}\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}w}\right)^3 + 3\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}z^2}\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}w^2}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}w} + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}^3 z}{\mathrm{d}w^3}\end{aligned}$$

$$\cdots\cdots$$

$$\frac{\mathrm{d}^k v}{\mathrm{d}w^k} = \frac{\mathrm{d}^k v}{\mathrm{d}z^k}\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}w}\right)^k + \cdots$$

$\square$

Lemma 4.3. 讨论不同的提升时 Λ 的变换.

Definition 4.4. 设 Σ 是黎曼曲面, $f_0 := f\colon \Sigma \to \mathbb{CP}^n$ 是线性满的全纯映射. 定义

$$f_k\colon \Sigma \to \mathbb{CP}^{N_k}, z \mapsto \left[v(z) \wedge v'(z) \wedge \cdots \wedge v^{(k)}(z)\right], \quad 1 \leqslant k \leqslant n,$$

其中 v 是 f_0 的局部提升, $N_k = \binom{n+1}{k+1} - 1$. 注意到当 $k = n$ 时, $\mathbb{CP}^{N_k}$ 退化为一个点.

5 全纯曲线 → 解

Theorem 5.1 (无穷小版本的 Plücker 公式)**.** *设 Σ 是黎曼曲面, $f_0 := f\colon \Sigma \to \mathbb{CP}^n$ 是线性满的全纯曲线, f_k 是 f 的第 k 条伴随曲线, 其中 $1 \leqslant k \leqslant n-1$. 设 $v\colon U \to \mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}$ 是 f 在坐标卡 (U,z) 上的局部提升, $\Lambda_k(v)$ 如前定义,ω_k 是 $\mathbb{CP}^{N_k}$ 上的 Fubini-Study 度量上的相伴 $(1,1)$-形式, 则*

$$f_k^*(\omega_k) = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\frac{\|\Lambda_{k-1}\|^2\|\Lambda_{k+1}\|^2}{\|\Lambda_k\|^4}\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}\bar{z}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n-1.$$

Remark. *[?] 第 269 页的公式漏了分母上的 π, 究其原因, 是他在第 269 页采用的 ω_k 的定义与他在第 30 页给出的定义相差一个 π. 一个常数无关紧要, 但必须保持一致, 我们这里采用他在第 30 页给出的定义.*

证明. 暂时还没学会, 略去吧. □

由 ω_k 的定义, 我们还有

$$f_k^*(\omega_k) = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}\log\|\Lambda_k\|^2 = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar{z}}\log\|\Lambda_k\|^2\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}\bar{z}.$$

比较系数, 有

$$\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar{z}}\log\|\Lambda_k\|^2 = \frac{\|\Lambda_{k-1}\|^2\|\Lambda_{k+1}\|^2}{\|\Lambda_k\|^4}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n-1.$$

对于 $k=0$ 的情形, 直接计算有

$$\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar{z}}\log\|\Lambda_0\|^2 = \frac{\|\Lambda_1\|^2}{\|\Lambda_0\|^4}.$$

选取合适的提升 v 使得 $\|\Lambda_n\| = 1$. 令

$$t_i = \log\|\Lambda_{i-1}\|^2, \quad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

容易验证

$$(t_i)_{z\bar{z}} = \exp\left(-\sum_{j=1}^n a_{ij}t_j\right),$$

其中 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 是 $\mathrm{SU}(n+1)$ 的 Cartan 矩阵. 作变量代换

$$u_i = -\sum_{j=1}^n a_{ij}t_j,$$

则有

$$-(u_i)_{z\bar{z}} = \sum_{j=1}^n a_{ij}\mathrm{e}^{u_j}.$$

这说明

$$u_i = \log\frac{\|\Lambda_{i-2}\|^2\|\Lambda_i\|^2}{\|\Lambda_{i-1}\|^4}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n$$

是 $\mathrm{SU}(n+1)$-Toda 的一组解, 其中为了写成一个式子补充定义了 $\|\Lambda_{-1}\| \equiv 1$.

6 解 $\to$ 全纯曲线

给定单连通区域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 上 SU$(n+1)$-Toda 的一组解 $\{u_i\}_{i=1}^n$, 设 $\phi\colon \Omega \to \mathrm{SU}(n+1)$ 是解 $\{u_i\}$ 所对应的 Toda 映射, 参见小节??. 令 $\{w_i\}_{i=0}^n$ 为满足

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^n w_i = 0, \\ u_i = 2w_i - 2w_{i-1} \quad 1 \leqslant i \leqslant n. \end{cases}$$

的函数组. 记 $\phi \cdot (\mathrm{diag}(\mathrm{e}^{w_i}))$ 的第 j 个列向量为 $\hat{f}_{j-1}$,$1 \leqslant j \leqslant n+1$.

易知 $w_i = \log \|\hat{f}_i\|$ 且 $\hat{f}_i$ 两两垂直.

Proposition 6.1. 有如下递推关系:

$$\begin{cases} (\hat{f}_k)_z = \hat{f}_{k+1} + (\log|\hat{f}_k|^2)_z \hat{f}_k, \quad 0 \leqslant k \leqslant n-1; \\ (\hat{f}_n)_z = (\log|\hat{f}_n|^2)_z \hat{f}_n; \\ (\hat{f}_k)_{\bar{z}} = -|\hat{f}_k|^2/|\hat{f}_{k-1}|^2 \cdot \hat{f}_{k-1}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n; \\ (\hat{f}_0)_{\bar{z}} = 0. \end{cases}$$

证明. 暂时略去. □

设 $f_0 = \pi \circ \hat{f}_0$, 由 $(\hat{f}_0)_{\bar{z}} = 0$ 知 f_0 全纯, 下证 f_0 非退化.

Lemma 6.2.

$$\hat{f}_0 \wedge \hat{f}_0' \wedge \cdots \wedge \hat{f}_0^{(k)} = \hat{f}_0 \wedge \hat{f}_1 \wedge \cdots \wedge \hat{f}_k.$$

证明. 由命题6.1显然. □

f_0 非退化的证明. 由引理6.2、$\hat{f}_i$ 两两垂直和引理4.1显然. □

7 解 → 全纯曲线,$n=1$

让我们以 $n=1$ 的情形为例具体操作一下上一小节中的过程.

$n=1$ 时,$\mathfrak{su}(2)$-Toda 方程为关于函数 u 的方程

$$-\frac{1}{4}\Delta u = 2\mathrm{e}^u.$$

令

$$\begin{cases} w_0 = -\dfrac{1}{2(1+1)}\displaystyle\sum_1^1 (1-1+1)u = -\dfrac{1}{4}u \\ w_1 = w_0 + \dfrac{1}{2}u = \dfrac{1}{4}u \end{cases}$$

记 $w = w_1 = -w_0$, 令

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} -w_z & 0 \\ \mathrm{e}^{2w} & w_z \end{pmatrix}, \quad \mathcal{V} = \begin{pmatrix} w_{\bar{z}} & -\mathrm{e}^{2w} \\ 0 & -w_{\bar{z}} \end{pmatrix}$$

当 $u = -2\log(1+z\bar{z})$ 时,

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2}\dfrac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} & 0 \\ \dfrac{1}{1+z\bar{z}} & -\dfrac{1}{2}\dfrac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{V} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2}\dfrac{z}{1+z\bar{z}} & -\dfrac{1}{1+z\bar{z}} \\ 0 & \dfrac{1}{2}\dfrac{z}{1+z\bar{z}} \end{pmatrix}$$

令

$$\alpha = \mathcal{U}\mathrm{d}z + \mathcal{V}\mathrm{d}\bar{z}.$$

8 解 $\to$ 全纯曲线 $\to$ 解

在小小节6中, 我们从给定的解 $\{u_i\}_{i=1}^n$ 得到了一条非退化全纯曲线 f_0. 下面说明, 对该 f_0 施以小小节 5 中的操作后得到的解恰为 $\{u_i\}$.

暂记从 f_0 得到的解为 $\{\tilde{u}_i\}_{i=1}^n$. 记 $\Lambda_k = \hat{f}_0 \wedge \cdots \wedge \hat{f}_0^{(k)}$, 由引理6.2有,

$$\|\Lambda_k\| = \|\hat{f}_0 \wedge \hat{f}_1 \wedge \cdots \wedge \hat{f}_k\| = \|\hat{f}_0\| \cdots \|\hat{f}_k\|, \quad 0 \leqslant k \leqslant n.$$

特别地,$\|\Lambda_n\| = \mathrm{e}^{w_0+\cdots+w_n} = 1$. 所以 $\hat{f}_0$ 正是小小节5中提到的使 $\|\Lambda_n\| = 1$ 的合适提升. 由小小节5,

$$\tilde{u}_i = \log \frac{\|\Lambda_i\|^2/\|\Lambda_{i-1}\|^2}{\|\Lambda_{i-1}\|^2/\|\Lambda_{i-1}\|^2} = 2\log\|\hat{f}_i\| - 2\log\|\hat{f}_{i-1}\| = 2w_i - 2w_{i-1} = u_i.$$

9 全纯曲线 $\to$ 解 $\to$ 全纯曲线

参考资料：

- Griffiths 1974 论文

在小小节5中, 我们由非退化全纯曲线 f 构造了 SU$(n+1)$-Toda 的一组解

$$u_i = \log \frac{\|\Lambda_{i-2}\|^2 \|\Lambda_i\|^2}{\|\Lambda_{i-1}\|^4}.$$

下面说明, 对 $\{u_i\}$ 施以小小节6中的操作后得到的全纯曲线 f_0 恰为 f.

这部分要等到读完该论文才能给出回答.

Chapter 7

Plücker 公式

1 Fubini-Study 度量

$$2H_2O \xlongequal{\text{通电}} 2H_2 \uparrow + O_2 \uparrow$$

2 分歧

Chapter 8

Cartan's Method of Moving Frames

1 Maurer-Cartan form

2 E(n)

E(n) 是一个李群, 从流形上来说,E(n) 是 T(n) 与 O(n) 的直积, 从群上来说,E(n) 是 T(n) 与 O(n) 的半直积. 若仅考虑 E(n) 的李代数的线性空间结构, 这只与 E(n) 的流形结构有关, 它是 $\mathbb{R}^n$ 与 $\mathfrak{o}(n)$ 的直积, 切向量 v 被分解为 $v_1 + v_2$.

考虑 E(n) 中的任意一个元素, 它可以被表达为 $(x; e_1, \cdots, e_n)$. 我们有如下的投影映射

$$\begin{aligned} x\colon \mathrm{E}(n) &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x; e_1, \cdots, e_n) &\longmapsto x \\ e_i\colon \mathrm{E}(n) &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x; e_1, \cdots, e_n) &\longmapsto e_i \end{aligned}$$

将映射的符号记作 x 和 e_i 并非我的意愿, 请初学者小心谨慎.

对 x 和 e_i 取微分, 我们得到向量值微分形式 $\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}e_i$. 对于向量值微分形式, 比如对于 $f\colon M \to V$ 的微分 $\mathrm{d}f$, 我们惯常的做法是**取定** V 的一组基 $\{v_1, \cdots, v_l\}$, 这样一来 $\mathrm{d}f = \mathrm{d}f_i \otimes v_i$. 但我们这里的做法不同, 对于点 $p = (x; e_1, \cdots, e_n) \in \mathrm{E}(n)$,

$$\mathrm{d}x_p\colon T_p\mathrm{E}(n) \longrightarrow T_{x(p)}\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$$

我们选取 $\mathbb{R}^n$ 的一组基是 $\{e_1, \cdots, e_n\}$. 也就是说 $\mathrm{d}x = \omega_i \otimes e_i$, 类似地有 $\mathrm{d}e_i = \omega_{ij} \otimes e_j$.

我们力图说清楚的第一件事情是, 若记 $\omega_{\mathrm{E}(n)} = \omega + \Omega$ 是 E(n) 的 Maurer-Cartan 形式, 取单位元 $(0; E_1, \cdots, E_n)$ 处的切空间的一组基为 $\{E_1, \cdots, E_n\} \cup \{E_{ij}\}_{i<j}$, 其中 E_{ij} 是 (i,j) 元为 1,(j,i) 元为 -1, 其他位置为 0 的矩阵. 则 $\omega = \tilde{\omega}_i \otimes E_i$ 和 $\Omega = \tilde{\omega}_{ij} \otimes E_{ij}$. 我们力图说清楚的第一件事是,

$$\omega_i = \tilde{\omega}_i, \quad \omega_{ij} = \tilde{\omega}_{ij}.$$

我们从上面两种不同的观点来看 Maurer-Cartan 方程.Maurer-Cartan 形式的分量是处处线性无关的左不变矢量场, 它有结构方程

$$\mathrm{d}\omega^i = -\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{r} c^i_{jk}\omega^j \wedge \omega^k, \quad c^i_{jk} + c^i_{kj} = 0.$$

从 $\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}e_i$ 的角度来看, 因为 $\mathrm{dd}x = \mathrm{dd}e_i = 0$, 导出

$$\mathrm{d}\omega_i = \sum_i \omega_{ij} \wedge \omega_i, \quad \mathrm{d}\omega_{ij} = \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{ki}.$$

这两组方程是等价的, 后者只不过把 E(n) 的结构常数算出来了罢了.STERNBERG 的书从向量场的角度直接计算了 E(n) 的结构常数.

Chapter 9

春晖论文

Definition 0.1. (K, ∂) 是微分域, 指

(1) K 是域

(2) $\partial\colon K \to K$ 满足

(i) $\partial(x+y) = \partial x + \partial y$

(ii) $\partial(xy) = x\partial y + y\partial x$

Notation 0.2. $C_K = \{x \in K \mid \partial x = 0\}$.

Lemma 0.3. C_K 是子域, 称作常数域.

Lemma 0.4. 设 (K, ∂) 是微分域,$L = \sum_{i=0}^{n} a_i \partial^i$, 其中 $a_i \in K$,$Lx = 0$ 是 K 上一个 n 阶 ODE, 设 V 是 $Lx = 0$ 的解空间, 则 V 是 C_K 系数线性空间, 且

$$\dim_{C_K} V \leqslant n.$$

Lemma 0.5. $x_1, \cdots, x_n \in K$,$x_1, \cdots, x_n C_K$ 线性相关 $\Longleftrightarrow$

$$W(x_1, \cdots, x_n) = \det(x_i^{(j)})_{1 \leqslant i \leqslant n, 0 \leqslant j \leqslant n-1} = 0$$

设 R 是 Ω 上全纯函数和反全纯函数在普通加法和乘法下构成的环.R 是实解析复值函数环的含幺子环. 只需说明实解析复值函数环是整环.

证明. 连通区域 Ω 上实解析函数的零点集零测. □

(K, ∂_z) 是微分域, 是 K 上的 ODE,$C_K = \{$反全纯函数$\}$
V 是 (3) 在 K 上的解空间,$H \subset V$ 是全纯函数解全体.
V 是 C_K 线性空间,$\dim_{C_K} V \leqslant n+1$,$H$ 是 $\mathbb{C}$ 线性空间.

Lemma 0.6. $\dim_{\mathbb{C}} H \leqslant n+1$

证明. 设 $f_1, \cdots, f_{n+2} \in H$ 是 $\mathbb{C}$-线性无关的.
$W(f_1, \cdots, f_{n+2}) \neq 0$
由此前 lemma 得 $f_1, \cdots, f_{n+2}$ 是 C_k 线性无关. □

Theorem 0.7. $H = span_{\mathbb{C}}\{v_0^n, v_0 v_1, \cdots, v_1^n\}$

证明. 对 n 归纳

v_0, v_1 是 $P^2(\|v\|^{06} f) = 0$ 的解.

□

0.1

设 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 单连通区域,$\{u_i\}_{i=1}^n$ 为 Ω 上 SU$(n+1)$-Toda 系统的解.

取 $\hat{f}_0$ 为 $\{u_i\}$ 对应的一条全纯曲线（可保证 totally unramified）$f_0 \colon \Omega \to \mathbb{P}^n$ 的正规化（即各阶导的 wedge 为 $e_0 \wedge \cdots \wedge e_n$）提升.

令 $K = \mathrm{Frac}\left\{\Omega\text{上的复值实解析函数}\right\}$,$(K, \partial = \dfrac{\partial}{\partial z})$ 为微分域.

问题：由 Toda map 给出 (K, ∂) 上的一个 $(n+1)$ 阶线性 ODE,$Lx = 0$, 其中

$$L = \sum_{j=0}^{n+1} a_j \partial^j, a_j \in K$$

使得 $\hat{f}_0$ 的各分量构成 $\{x \in \mathcal{O}(\Omega) \mid Lx = 0\}$ 的基础解系.

Chapter 10

各次报告

1 12 月 11 日陆斯成报告

Tahar’s Geometric Decomposition

My Motivation

Geometry object $\Longrightarrow$ irreducible standard pieces
triangulation
Recall:Delaunay decomposition , 以所有锥奇点为顶点 $\Longrightarrow$ periodic coordinates
Natural Questions

Basic setting,Bigons

Definition 1.1. *Spherical surface cpt Riemann surface* ,$K \equiv 1$, $n \geqslant 1$ *conical points*
geodesic boundary:Each componet has $\geqslant 1$*conicalpoints*