复几何

孙天阳

2023 年 11 月 2 日

目录

Chapter 1

复流形

1 代数准备

1.1 复结构

定义 1.1. 设 V 是一个实线性空间. V 上的一个复结构是指一个映射 $J \in \mathrm{End}(V)$ 满足 $J^2 = -\mathrm{Id}_V$.

给定 V 上的一个复结构 J, 我们可以赋予 V 一个复线性空间结构. 因为 V 已经是一个实线性空间, 因此要想知道 V 如何是一个复线性空间, 我们只需要知道 i 如何乘在 V 中的元素上. 定义

$$\mathrm{i}v := J(v)$$

可以验证 V 成为一个复向量空间, 记作 V^J. 反之, 每个复向量空间都决定其底空间上的一个复结构.

例子 1.2. 设 V 是实线性空间, J 是 V 上的复结构, 则 $-J$ 也是 V 上的复结构, 且 $V_{-J} = \overline{V_J}$.

例子 1.3. 设 V 是实线性空间, J 是 V 上的复结构. 定义 V^* 上的复结构如下, 仍记作 J,

$$J\colon V^* \longrightarrow V^*, \quad \alpha \longmapsto J(\alpha), \quad J(\alpha)(v) := \alpha(J(v)).$$

1.2 复化

定义 1.4. 设 V 是实线性空间, 定义 $V_{\mathbb{C}} := V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

定义 1.5. 设 V 是复线性空间. 称反线性映射 $f\colon V \to V$ 是共轭映射, 如果 $f \circ f = \mathrm{Id}_V$.

例子 1.6. $\iota\colon V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}, v \otimes z \mapsto v \otimes \bar{z}$ 是共轭映射.

命题 1.7. 设 V 是复线性空间, f 是其上的共轭映射. 设

$$W = \{v \in V \mid f(v) = v\}.$$

则有 $V \cong W \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

命题 1.8. 复化与张量积的交换性

命题 1.9. 复化与外积的交换性

1.3 复结构与复化

设 V 是实线性空间, J 是 V 上的复结构, 则 J 自然诱导 $V_{\mathbb{C}}$ 上的一个复结构

$$J\colon V_{\mathbb{C}} \longrightarrow V_{\mathbb{C}}, \quad v\otimes z \longmapsto J(v)\otimes z.$$

J 的最小多项式为 x^2+1, 没有重根, 因此 $V_{\mathbb{C}}$ 有直和分解

$$V_{\mathbb{C}} \cong V^{1,0}\oplus V^{0,1}$$

其中 $V^{1,0}$ 和 $V^{0,1}$ 分别代表 J 的以 i 和 $-\mathrm{i}$ 为特征值的特征子空间. 假设 $v\otimes z\in V^{1,0}$, 那么

$$J(v\otimes z) = J(v)\otimes z = i(v\otimes z) = v\otimes iz.$$

引理 1.10.

$$\bigwedge^k (V\oplus W) = \bigoplus_{i=0}^{k} \varphi_i\left(\bigwedge^i V\otimes \bigwedge^{k-i} W\right).$$

证明. 对于 $0\leqslant i\leqslant k$, 我们有

$$\bigwedge^i V\times \bigwedge^{k-i} W \longrightarrow \bigwedge^k (V\oplus W), \quad (v_1\wedge\cdots\wedge v_i, w_1\wedge\cdots\wedge w_{k-i}) \longmapsto v_1\wedge\cdots\wedge v_i\wedge w_1\wedge\cdots\wedge w_{k-i}$$

它诱导了

$$\bigwedge^i V\otimes \bigwedge^{k-i} W \longrightarrow \bigwedge^k (V\oplus W)$$

□

命题 1.11. (V,J) 与 $V^{1,0}$ 自然同构.

命题 1.12. *wedge* 的分解.

注记. 有一些书很讨厌是这样的.

1.4 复结构与对偶空间

设 J 是 V 上的复结构, 则其诱导了对偶空间 V^* 上的复结构, 仍记作 J

$$J\colon W\longrightarrow W, \quad f\longmapsto J(f), \quad J(f)(v) := f(J(v)).$$

从而我们有两个直和分解

$$V_{\mathbb{C}} = V^{1,0}\oplus V^{0,1}, \quad V_{\mathbb{C}}^* = (V^*)^{1,0}\oplus (V^*)^{0,1}.$$

命题 1.13.

$$(V^*)^{1,0} = (V^{1,0})^*, \quad (V^*)^{0,1} = (V^{0,1})^*.$$

证明. 设 $f\in (V^*)^{1,0}$, 任取 $w\in V^{0,1}$, 按定义有

$$Jf = \mathrm{i}f, \quad Jw = -\mathrm{i}w.$$

所以

$$\mathrm{i}f(w) = Jf(w) = f(Jw) = f(-\mathrm{i}w) = -\mathrm{i}f(w) \Longrightarrow f(w) = 0.$$

□

考虑

$$W^{1,1} = W^{1,0} \otimes_{\mathbb{C}} W^{0,1} \subset W_{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{C}} W_{\mathbb{C}}.$$

考虑

$$\bigwedge_{\mathbb{R}}^{2} W \hookrightarrow \bigwedge_{\mathbb{C}}^{2} W_{\mathbb{C}} \hookrightarrow W_{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{C}} W_{\mathbb{C}},$$

第一个嵌入是说, 每个交错函数

$$V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

都可以复线性（注意，这里的复线性指的是复化带来的复结构, 而不是 V 自身的复结构延拓至 $V \otimes \mathbb{C}$ 的复结构）延拓成交错函数

$$V_{\mathbb{C}} \times V_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{C}.$$

记

2 复流形与全纯向量丛

定义 2.1. 设 M 是 Hausdorff 且第二可数的拓扑空间. 称 M 是复流形, 如果存在同胚

$$\varphi_\alpha\colon U_\alpha \subset M \longrightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{C}^n$$

使得 $\{U_\alpha\}$ 构成 M 的开覆盖且对任意 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ 有 $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ 是全纯映射.

例子 2.2. $\mathbb{CP}^n = \mathbb{C}^{n+1} \backslash \{0\} / \sim$ 是复流形.

证明. 设 $0 \leqslant i, j \leqslant n$, 不妨设 $i < j$.

$$\varphi_i\colon U_i = \{[z_0, \cdots, z_n] \mid z_i \neq 0\} \longrightarrow \mathbb{C}^n, \quad [z_0, \cdots, z_n] \longmapsto \left(\frac{z_0}{z_i}, \cdots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \cdots, \frac{z_n}{z_i}\right)$$

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}\colon \varphi_j(U_i \cap U_j) \to \varphi_i(U_i \cap U_j), \quad (\xi_1, \cdots, \xi_n) \mapsto \left(\cdots, \frac{\xi_{i-1}}{\xi_i}, 1, \frac{\xi_{i+1}}{\xi_i}, \cdots, \frac{\xi_{j-1}}{\xi_i}, \frac{1}{\xi_i}, \frac{\xi_{j+1}}{\xi_i}, \cdots\right)$$

□

例子 2.3. $Gr(n,k)$ 是复流形. 该例子是上一个例子的推广, 因为 $\mathbb{CP}^n = Gr(n+1, 1)$.

证明. 任取 $V \in Gr(n,k)$, 任取 $\{v_1, \cdots, v_k\}$ 是 V 的一组基, 该组基在 $\mathbb{C}^n$ 的标准基下可表示为

$$A = \begin{pmatrix} v_{11} & \cdots & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ v_{k1} & \cdots & \cdots & v_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1, \cdots, e_n \end{pmatrix}$$

其中 $\cdot$ 表示内积. 设 $\{\tilde{v}_1, \cdots, \tilde{v}_k\}$ 是 V 的另一组基, 则存在唯一的元素 $g \in \mathrm{GL}(k, \mathbb{C})$ 使得

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} \tilde{v}_1 \\ \vdots \\ \tilde{v}_k \end{pmatrix} \Longrightarrow A = g\tilde{A}.$$

因为 A 是 k 个线性无关向量 $\{v_1, \cdots, v_k\}$ 的矩阵表示, 所以 A 存在不为零的 k 阶子式. 反之, 每给定一个行满秩的 $k \times n$ 阶矩阵 A, 我们就得到一个 k 维线性空间 V, 其中 V 是由 A 的行向量张成的. A 与 $\tilde{A}$ 决定同一个 V 当且仅当它们相差 $\mathrm{GL}(k, \mathbb{C})$ 中的一个元素. 一个观察是, 如果 A 的某个 k 阶子式不为零, 那么与它决定同一个 V 的 $\tilde{A}$ 的那个 k 阶子式也不为零. 坐标化 $Gr(n,k)$ 的思路是, 我们挑出矩阵表示的第 I 个 k 阶子式不为零的那些 V, 选取一个典范的矩阵表示, 即第 I 个子矩阵为单位阵的矩阵表示, 我们便可以用该矩阵表示的其他坐标分量来坐标化 $Gr(n,k)$ 中的元素.

设 $I = \{i_1, \cdots, i_k\} \subset \{1, \cdots, n\}$. 设 $V_{I^\circ} = \mathrm{span}\{e_j \mid j \notin I\}$, 它是一个 $n-k$ 维子空间. 记

$$U_I = \{V \in Gr(n,k) \mid V \cap V_{I^\circ} = \{0\}\}.$$

断言 U_I 中的元素就是那些矩阵表示的第 I 个 k 阶子式不为零的 V. 承认断言. 定义

$$\varphi_I\colon U_I \longrightarrow \mathbb{C}^{k(n-k)}.$$

□

引理 2.4. $V \in U_I$ 当且仅当 V 的矩阵表示的第 I 个 k 阶子式不为零.

证明. $V \in U_I \Longleftrightarrow V \cap V_{I^\circ} = \{0\} \Longleftrightarrow \{v_1, \cdots, v_k, e_j \mid j \notin I\}$ 线性无关. □

定义 2.5. 全纯映射

例子 2.6. $\pi\colon \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{CP}^n$ 是全纯映射.

定义 2.7. 全纯向量丛

参考文献

- 石亚龙复几何第 1 章
- GTM275 第 7.1 节
- G-H 第 0 章第 5 节
- Hatcher 向量丛和 K 理论
- 陈省身第 3 章第 1 节

例子 2.8. 全纯切丛

例子 2.9. 全纯余切丛

例子 2.10. 重言丛.

设

$$S = \left\{(\Delta, v) \mid \Delta \in \mathbb{CP}^n, v \in \Delta \subset \mathbb{C}^{n+1}\right\} \subset \mathbb{CP}^n \times \mathbb{C}^{n+1}$$

3 Grassmannian

定义 3.1. 定义 Plücker 嵌入如下

$$
\begin{aligned}
\iota\colon Gr(n,k) &\longrightarrow \bigwedge^k \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbf{P}(\bigwedge^k \mathbb{C}^n) \\
E \quad &\longmapsto e_1\wedge\cdots\wedge e_k \longmapsto [e_1\wedge\cdots\wedge e_k]
\end{aligned}
$$

其中 $\{e_1,\cdots,e_k\}$ 是 E 的任意一组基.

引理 3.2. 设 $(\beta_1,\cdots,\beta_k)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_k)A$, 则

$$\beta_1\wedge\cdots\wedge\beta_k=\det(A)\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_k.$$

引理 3.3. 设 $\beta_1\wedge\cdots\wedge\beta_k=\lambda\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_k$, 其中 $\lambda\neq 0$. 那么存在 A 满足 $\det(A)=\lambda$ 使得

$$(\beta_1,\cdots,\beta_k)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_k)A.$$

证明.

$$0=\alpha_i\wedge\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_k=\alpha_i\wedge\beta_1\wedge\cdots\wedge\beta_k\Longrightarrow \operatorname{span}\{\alpha_1,\cdots,\alpha_k\}=\operatorname{span}\{\beta_1,\cdots,\beta_k\}.$$

□

引理 3.2 说明 Plücker 嵌入是良定的, 引理 3.3 说明 Plücker 嵌入是单射.

命题 3.4. $Gr(n,k)$ 是紧的.

证明. □

4 复微分形式

考虑余切空间的复化

$$T_p^*M\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}=\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(T_pM,\mathbb{R})\otimes\mathbb{C}\cong\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(T_pM,\mathbb{C})\cong\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(T_pM\otimes\mathbb{C},\mathbb{C}).$$

在丛的层面上来说,

$$T^M\otimes\mathbb{C}\cong T_{\mathbb{C}}^*M.$$

考虑截面

$$\Gamma(T^*M\otimes\mathbb{C})\cong\Gamma(T^*M)\otimes_{\mathscr{F}(M)}C^\infty(M,\mathbb{C})\cong\Gamma(T^*M)\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}=\Omega(M)\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}=:\Omega_{\mathbb{C}}(M).$$

类似的, 我们定义

$$\Omega^k(M)\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}=:\Omega_{\mathbb{C}}^k(M).$$

考虑链复形

$$C^\infty(M)\xrightarrow{\mathrm{d}}\Omega(M)\xrightarrow{\mathrm{d}}\Omega^2(M)\xrightarrow{\mathrm{d}}\cdots\xrightarrow{\mathrm{d}}\Omega^n(M)\xrightarrow{\mathrm{d}}0$$

每个位置上都张量积上一个 $\mathbb{C}\xrightarrow{\mathrm{Id}}\mathbb{C}$, 得到

$$C^\infty(M,\mathbb{C})\xrightarrow{\mathrm{d}}\Omega_{\mathbb{C}}(M)\xrightarrow{\mathrm{d}}\Omega_{\mathbb{C}}^2(M)\xrightarrow{\mathrm{d}}\cdots\xrightarrow{\mathrm{d}}\Omega_{\mathbb{C}}^n(M)\xrightarrow{\mathrm{d}}0$$

交换代数的知识告诉我们不会得到新的同调群.

这样我们就对一般的流形定义了其上的复微分形式, 并把外微分算子进行了线性延拓. 一个关键的同构是

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(T_pM,\mathbb{C})\cong\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(T_pM\otimes\mathbb{C}),$$

若没有这个同构, 复微分形式就只是简单的允许值取复数而已；当有了这个同构, 我们就可以允许复微分形式吞进切空间的复化中的元素.

当 M 是一个复流形时, T_pM 上有复结构

T_p^*M 上有复结构

$$\mathrm{d}x_i\longmapsto-\mathrm{d}y_i,\quad \mathrm{d}y_i\longmapsto\mathrm{d}x_i$$

因此有分解

$$T_pM\otimes\mathbb{C}=T_p^{(1,0)}M\oplus T_p^{(0,1)}M,\quad T_p^*M\otimes\mathbb{C}=T_p^{*(1,0)}M\oplus T_p^{*(0,1)}M.$$

我们知道,$T_p^{*(1,0)}M$ 就是 $T_p^{(1,0)}M$ 的对偶空间,$T_p^{*(0,1)}M$ 就是 $T_p^{(0,1)}M$ 的对偶空间. 具体来说, $\mathrm{d}z_i$ 是 $\dfrac{\partial}{\partial z^i}$ 的对偶基,$\mathrm{d}\bar{z}_i$ 是 $\dfrac{\partial}{\partial\bar{z}^i}$ 的对偶基. 当我们这里提到 $\mathrm{d}z$ 和 $\mathrm{d}\bar{z}$, 含义是清楚的,z 和 $\bar{z}$ 作为复值的光滑函数, 我们知道该如何对他们求外微分, 即

$$\mathrm{d}z=\mathrm{d}x+\mathrm{i}\mathrm{d}y,\quad \mathrm{d}\bar{z}=\mathrm{d}x-\mathrm{i}\mathrm{d}y.$$

容易验证 $\mathrm{d}z_i$ 是 $\dfrac{\partial}{\partial z^i}$ 的对偶基,$\mathrm{d}\bar{z}_i$ 是 $\dfrac{\partial}{\partial\bar{z}^i}$ 的对偶基.

k 次复微分形式的 (p,q)-型分解

在一点处

$$\left(\bigwedge^k T_p^* M\right) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \bigwedge^k \left(T_p^* M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}\right) = \bigwedge^k \left(T_p^{(1,0)} M \oplus T_p^{(0,1)} M\right) = \bigoplus_{i=0}^k \left(\bigwedge^i T_p^{(1,0)} M \otimes \bigwedge^{k-i} T_p^{(0,1)} M\right)$$

∂ 和 $\bar{\partial}$

5 近复结构和 (p,q) 型微分形式

定义 5.1. 近复结构

引理 5.2. 复矩阵的实行列式等于它的复行列式的模长的平方

引理 5.3. 有近复结构的流形是可定向的

注记. 偶维数, 可定向, 不一定有近复结构, 比如 S^4.

Chapter 2

层论

1　集合的层

定义 1.1. 设 X 是拓扑空间. X 上的一个集合的层是指到 X 的一个局部同胚 $\pi\colon \mathscr{S} \to X$.

命题 1.2. 设 $\pi\colon \mathscr{S} \to X$ 是局部同胚, 则 π 是开映射.

证明. 任给 $\mathscr{S}$ 中开集 U, 要证 $\pi(U)$ 是 X 中开集. 任取 $q \in \pi(U)$, 能找到一个原像 $p \in U$. 因为 π 是局部同胚, 按定义存在 p 的开邻域 V 满足 $\pi(V)$ 是 X 中开集且 π 限制在 V 上是同胚. 因为 $U \cap V \subset V$ 是开集, 所以 $\pi(U \cap V)$ 是开集. 且 $q = \pi(p) \in \pi(U \cap V) \subset \pi(U)$. □

命题 1.3. 设 $\pi\colon \mathscr{S} \to X$ 是局部同胚, 则茎 $\mathscr{S}_x := \pi^{-1}(x)$ 是闭集, 且其子空间拓扑为离散拓扑.

定义 1.4. 设 $(\mathscr{S}', \pi'), (\mathscr{S}, \pi)$ 是 X 上的层. 称连续映射 $\varphi\colon \mathscr{S}' \to \mathscr{S}$ 是层同态如果下列图表交换.

$$\begin{tikzcd} \mathscr{S}' \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi'"'] & & \mathscr{S} \arrow[dl, "\pi"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

命题 1.5. 设 $\varphi\colon \mathscr{S}' \to \mathscr{S}$ 是层同态, 则 φ 也是局部同胚.

容易看出恒等映射是层同态, 层同态的复合还是层同态. 因此 X 上的层构成一个范畴.

例子 1.6. 设 M 是一个赋予离散拓扑的集合, 那么 $\pi\colon X \times M \to X$ 是 X 上的层.

例子 1.7. 设 $Y \subset X$. 则 $\pi\colon \pi^{-1}(Y) \to Y$ 是 Y 上的层. 其中 Y 和 $\pi^{-1}(Y)$ 都赋予子空间拓扑.

定义 1.8. 称 $\mathscr{T} \subset \mathscr{S}$ 是 $\mathscr{S}$ 的子层, 如果 $\pi\colon \mathscr{T} \to X$ 是 X 上的层.

命题 1.9. $\mathscr{T} \subset \mathscr{S}$ 是 $\mathscr{S}$ 的子层当且仅当 $\mathscr{T}$ 是 $\mathscr{S}$ 中的开集.

例子 1.10. 设 $(\mathscr{S}', \pi'), (\mathscr{S}, \pi)$ 是 X 上的层. 我们定义

$$\mathscr{S} \oplus \mathscr{S}' := \bigcup_{x \in X} \mathscr{S}_x \times \mathscr{S}'_x$$

在其上赋予 $\mathscr{S} \times \mathscr{S}'$ 的子空间拓扑, 则 $\tilde{\pi}\colon \mathscr{S} \oplus \mathscr{S}' \to X$ 是 X 上的层.

例子 1.11. 帀

2 Čech 上同调

Chapter 3

Kähler 流形

1 厄米度量

我们在本节中厘清一些初学者容易困惑的问题.

我们对于实线性空间上的内积很熟悉, 它是空间上的对称、正定、双线性函数. 我们对于复线性空间上的内积也很熟悉，它是空间上关于第一分量线性、共轭对称、正定的二元函数. 关于线性空间上的 g, h, ω 之间的关系, 我推荐阅读 Huybrechts 的复几何导论的第 1.2 节. 在此我做一个简述

- 设我们有一个复线性空间, 有其上的内积 h. 忘记空间本身的复线性空间结构, 考虑其下的实线性空间结构, 取 g 为 h 的实部, 取 ω 为 h 的负虚部. 则 g 成为实线性空间上的内积, 并且 g 与复结构相容.
- 设我们有一个实线性空间, 有其上的复结构 J, 有其上的内积 g 并且 g 与 J 是相容的. 那么我们定义 $\omega(u,v) = g(Ju,v)$, 定义 $h = g - \mathrm{i}\omega$, 则 h 成为复线性空间上的内积.
  - $h(Ju,v) = g(Ju,v) - \mathrm{i}g(J^2u,v) = \omega(u,v) + \mathrm{i}g(u,v) = \mathrm{i}h(u,v)$.
  - $h(v,u) = g(v,u) - \mathrm{i}g(Jv,u) = g(u,v) - \mathrm{i}g(J^2v,Ju) = g(u,v) + \mathrm{i}g(Ju,v) = \overline{h(u,v)}$.
- 怎么由 ω 得到其他的.

设 M 是 n 维复流形, 则它也是 $2n$ 维实流形. 取 $p \in M$ 的全纯坐标卡

$$(U, z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1, \cdots, z_n = x_n + \mathrm{i}y_n).$$

我们可以得到 M 在 p 处的实切空间

$$T_p^{\mathbb{R}}M = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial y^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n}, \frac{\partial}{\partial y^n}\right\},$$

而 M 的复流形结构自然诱导了 $T_p^{\mathbb{R}}M$ 上的一个复结构.

$$J\colon \frac{\partial}{\partial x^i} \mapsto \frac{\partial}{\partial y^i}, \quad \frac{\partial}{\partial y^i} \mapsto -\frac{\partial}{\partial x^i}$$

我们知道 g 在局部坐标系下一般的表达式为

$$g = e_{\alpha\beta}\mathrm{d}x^\alpha \otimes \mathrm{d}x^\beta + f_{\alpha\beta}\mathrm{d}x^\alpha \otimes \mathrm{d}y^\beta + g_{\alpha\beta}\mathrm{d}y^\alpha \otimes \mathrm{d}x^\beta + h_{\alpha\beta}\mathrm{d}y^\alpha \otimes \mathrm{d}y^\beta$$

$$= \begin{pmatrix} dx^1 & \cdots & dx^n & dy^1 & \cdots & dy^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11} & \cdots & e_{1n} & f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{n1} & \cdots & e_{nn} & f_{n1} & \cdots & f_{nn} \\ g_{11} & \cdots & g_{1n} & h_{11} & \cdots & h_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} & h_{n1} & \cdots & h_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx^1 \\ \vdots \\ dx^n \\ dy^1 \\ \vdots \\ dy^n \end{pmatrix}$$

由于一般的对 g 的对称性的要求, 我们有

$$e_{ij} = e_{ji}, \quad h_{ij} = h_{ji}, \quad f_{ij} = g_{ji}.$$

由于这里要求 g 与复结构 J 是相容的, 我们还有

$$e_{ij} = h_{ij}, \quad f_{ij} = -g_{ij}.$$

因此 g 的表达式可以简化为

$$g = \begin{pmatrix} dx^1 & \cdots & dx^n & dy^1 & \cdots & dy^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11} & \cdots & e_{1n} & 0 & \cdots & f_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{n1} & \cdots & e_{nn} & f_{n1} & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & -f_{1n} & e_{11} & \cdots & e_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -f_{n1} & \cdots & 0 & e_{n1} & \cdots & e_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx^1 \\ \vdots \\ dx^n \\ dy^1 \\ \vdots \\ dy^n \end{pmatrix}$$
$$= e_{\alpha\beta} dx^\alpha \otimes dx^\beta + e_{\alpha\beta} dy^\alpha \otimes dy^\beta + f_{\alpha\beta} dx^\alpha \otimes dy^\beta - f_{\alpha\beta} dy^\alpha \otimes dx^\beta$$

其中 $e_{ij} = e_{ji}, f_{ij} = -f_{ji}$. 在 $n = 1$ 的时候以上式子简化为

$$g = e_{11} dx \otimes dx + e_{11} dy \otimes dy.$$

下面我们计算 $\omega(u, v) = g(Ju, v)$ 的局部表达式

$$\omega(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial}{\partial x^\beta}) = -f_{\alpha\beta}, \quad \omega(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial}{\partial y^\beta}) = e_{\alpha\beta}, \quad \omega(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}, \frac{\partial}{\partial y^\beta}) = -f_{\alpha\beta}$$
$$\omega = -\sum_{\alpha<\beta} f_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta + \sum_{\alpha,\beta} e_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dy^\beta - \sum_{\alpha<\beta} f_{\alpha\beta} dy^\alpha \wedge dy^\beta$$
$$\omega = -f_{\alpha\beta} dx^\alpha \otimes dx^\beta - f_{\alpha\beta} dy^\alpha \otimes dy^\beta + e_{\alpha\beta} dx^\alpha \otimes dy^\beta - e_{\alpha\beta} dy^\alpha \otimes dx^\beta$$

其中 $e_{ij} = e_{ji}, f_{ij} = -f_{ji}$. 在 $n = 1$ 的时候以上式子简化为

$$\omega = e_{11} dx \otimes dy - e_{11} dy \otimes dx = e_{11} dx \wedge dy = \frac{i}{2} e_{11} dz \wedge d\bar{z}$$

下面我们计算 $h = g - i\omega$ 的局部表达式

$$\begin{aligned} h =& e_{\alpha\beta} dx^\alpha \otimes dx^\beta + e_{\alpha\beta} dy^\alpha \otimes dy^\beta + f_{\alpha\beta} dx^\alpha \otimes dy^\beta - f_{\alpha\beta} dy^\alpha \otimes dx^\beta \\ & - i e_{\alpha\beta} dx^\alpha \otimes dy^\beta + i e_{\alpha\beta} dy^\alpha \otimes dx^\beta + i f_{\alpha\beta} dx^\alpha \otimes dx^\beta + i f_{\alpha\beta} dy^\alpha \otimes dy^\beta \\ =& e_{\alpha\beta} dx^\alpha \otimes d\bar{z}^\beta + i e_{\alpha\beta} dy^\alpha \otimes d\bar{z}^\beta + i f_{\alpha\beta} dx^\alpha \otimes d\bar{z}^\beta - f_{\alpha\beta} dy^\alpha \otimes d\bar{z}^\beta \\ =& e_{\alpha\beta} dz^\alpha \otimes d\bar{z}^\beta + i f_{\alpha\beta} dz^\alpha \otimes d\bar{z}^\beta = h_{\alpha\beta} dz^\alpha \otimes d\bar{z}^\beta \end{aligned}$$

其中 $e_{ij} = e_{ji}, f_{ij} = -f_{ji}$. 在 $n = 1$ 的时候以上式子简化为

$$h = e_{11} dz \otimes d\bar{z}$$

2 代数准备

命题 2.1. 设 V 是复线性空间, h 是其上的内积, 则 $g = \mathrm{Re}\, h$ 是 V 作为实线性空间上的内积.

证明.

(1) 因为只考虑 V 的实线性空间结构, 所以 λ, μ 均为实数.

$$g(\lambda v_1 + v_2, \mu v_3 + v_4) = \lambda\mu g(v_1, v_3) + \lambda g(v_1, v_4) + \mu g(v_2, v_3) + g(v_2, v_4).$$

(2) $h(v_1, v_2) = \overline{h(v_2, v_1)} \Longrightarrow g(v_1, v_2) = g(v_2, v_1)$.

(3) $h(v, v) \in \mathbb{R} \Longrightarrow g(v, v) = h(v, v) \geqslant 0$, 除非 $v = 0$.

□

命题 2.2. 设 J 是由 V 的复线性空间结构诱导的 V 上的复结构, 则 $g(Jv_1, Jv_2) = g(v_1, v_2)$.

证明. $g(Jv_1, Jv_2) = \overline{h(Jv_1, Jv_2)} = \overline{\mathrm{i}(-\mathrm{i})h(v_1, v_2)} = g(v_1, v_2)$. □

命题 2.3. 设 V 是复线性空间, h 是其上的内积, 则 $\omega = -\,\mathrm{Im}\, h$ 是 V 上的反对称双 $\mathbb{R}$-线性函数.

3 代数准备

4 例子

考虑 $\mathbb{C}$, 这是最简单的例子, 我们研究其上的标准厄米度量是什么. 回顾 $\mathbb{R}^2$, 其上有标准内积

$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad ((a,b),(c,d)) \longmapsto ac+bd.$$

那么 $\mathbb{R}^2$ 上的标准黎曼度量, 无非是通过 $\mathbb{R}^2$ 与其各点处的切空间的典范同构, 把 $\mathbb{R}^2$ 上的标准内积搬运到每点处的切空间上. 因此我们考虑 $\mathbb{C}$ 上的标准内积

$$\mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad ((a,b),(c,d)) \longmapsto ac+bd+(bc-ad)i$$

对于 $p \in \mathbb{C}$, 我们有典范同构

$$\mathbb{C} \cong T_p\mathbb{C}, \quad (1,0) \longleftrightarrow \frac{\partial}{\partial x}, \quad (0,1) \longleftrightarrow \frac{\partial}{\partial y}.$$

考虑

$$\mathrm{d}z\colon T_p\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \mathrm{d}\bar{z}\colon T_p\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},$$

将它们视作 $\mathbb{R}$-线性映射, 考虑张量积

$$\mathrm{d}z \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\bar{z}\colon T_p\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} T_p\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

给这个映射前面复合上

$$T_p\mathbb{C} \times T_p\mathbb{C} \longrightarrow T_p\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} T_p\mathbb{C}$$

后面复合上

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},$$

我们得到

$$\mathrm{d}z \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\bar{z}\colon T_p\mathbb{C} \times T_p\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}, c\frac{\partial}{\partial x}+d\frac{\partial}{\partial y}\right) \longmapsto ac+bd+(bc-ad)i$$

即 $\mathbb{C}$ 上的标准厄米度量

$$h = \mathrm{d}z \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\bar{z}$$