代数几何

孙天阳

2024 年 7 月 20 日

目录

Chapter 1

仿射代数集

1 知识准备

- ring, commutative, with identity

  domain: ring without zero divisors

  e.g. $\mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}[x], \mathbb{C}[x], \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

  field: any nonzero element is invertible

- ideal: R =ring, $I \subset R$

  - $\forall\ a, b \in I \Longrightarrow a \pm b \in I$
  - $\forall r \in R, a \in I \Longrightarrow ra \in I$

  Then we call that I is an ideal of R

  $R/I = \{r + I \mid r \in R\}$

- R, S =ring. A map $f\colon R \to S$ is called a ring homomorphism if f preserves $" + ", " \cdot ", "1"$.

- $R \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} R/I$

  FACT:

  (1)

  $$\{J \triangleleft R/I\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{\mathfrak{a} \triangleleft R \mid \mathfrak{a} \supset I\}$$

  (2)

  $$Hom_{ring}(R/I, S) \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{\varphi \in Hom_{ring}(R, S) \mid I \subset \ker\varphi\}$$
  $$R/I \overset{\varphi}{\to} S \quad \psi \circ \pi$$

- An ideal $I \triangleleft R$ is called prime, if for any $a, b \in R$

  $$a \cdot b \in I \Longrightarrow a \in I \quad \text{or} \quad b \in I.$$

An proper ideal $I \lhd R$ is called maximal, if for any ideal J

$$I \subset J \subset R \Longrightarrow I = J \quad \text{or} \quad J = R.$$

Fact:$I \lhd R$

(1) I =prime $\Longleftrightarrow R/I$ =domain

(2) I =maximal $\Longleftrightarrow R/I$ =field

- characteristic R =ring

  $\mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi} R, n \mapsto n1_R$

  $\exists\ n$ s.t. $\ker\varphi = (n)$, $\mathrm{char}(R) := n \geqslant 0$

  $\mathrm{char}(R) = 0 \Longleftrightarrow \mathbb{Z} \hookrightarrow R$

  $\mathrm{char}(R) = n \Longleftrightarrow$
  $$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, two heads] & R \\ \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

  用环映射来定义 char 的好处是容易推广, 相比用 1_R 相加为零的最小个数.

- R =domain

  $Frac(R) = \{(a,b) \mid a \in R, b \in R \backslash \{0\}\} / \sim$,where $(a,b) \sim (c,d) \Longleftrightarrow ad = bc$.

  - $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad+bc}{bd}$
  - $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{b} = \dfrac{ac}{bd}$

  典范映射 $R \hookrightarrow Frac(R), r \mapsto \dfrac{r}{1}$

  泛性质,R =domain, K =field

  $$\mathrm{Hom}_{ring}(Frac(R), K) \xleftrightarrow{1:1} \{\varphi \in \mathrm{Hom}_{ring}(R,K) \mid \varphi \text{injective}\}$$

- R = ring

  $$R[x_1, \cdots, x_n] = \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}^n} a_i x^i \mid a_i \neq 0 \text{for finite} i \in \mathbb{N}^n \right\}$$

  其中 $x^i = x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n}, \deg(X^i) := |i| := \sum_{k=1}^{n} i_k$

  $\forall\ F \in R[x_1, \cdots, x_n]$,

  $$F = F_0 + F_1 + \cdots + F_d$$

  $F \in Rx_1, \cdots, x_n$, F is called homogeneous or a form, if $\exists\ d \geqslant 0$ s.t. $a_i = 0$ for i s.t. $|i| \neq d$

  规定 0 的次数为任意次.

  $V_d := \{F = \text{form} \mid \deg F = d\}$

  $\dim V_d = \dbinom{d+n-1}{n-1}$

Fact:$R \to S$ ring homomorphism.

$$\mathrm{Hom}_{R-alg}(R[x_1,\cdots,x_n],S) \overset{1:1}{\longleftrightarrow} S^n$$

$$\psi \mapsto (\psi(x_1),\psi(x_2),\cdots,\psi(x_n))$$

- A field k is called an algebraically closed field, if for any non constant polynomial $F \in k[x]\setminus\{k\}$, F has zeros.

  $\forall a \in k, \forall F \in k[x]$

  $$F = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_d(x-a)^d$$

  $F(a) = 0 \Longleftrightarrow (x-a) \mid F$

  Fact:$k = \bar{k}$ is algebraically closed. Then

  (1) $\forall F \in k[x]\backslash k, F = a\prod_{i=1}^{r}(x-a_i)^{l_i}$

  (2) $\deg(F) = \sum_{i=1}^{r} l_i$

  Fact:$k = \bar{k} \Longrightarrow \#k = \infty$

  证明. Suppose not, $k = \{a_1,\cdots,a_n\}$

  $f(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)+1$ has no root. Controdiction. □

- Unique factorization domain

  R = domain. $r \in R$. r is called irreducible if $r \neq 0, r \notin R^\times$ and for any $r = r_1r_2$, we have $r_1 \in R^\times$ or $r_2 \in R^\times$.

  $r \neq$ is called prime if $r \mid ab \Longrightarrow r \mid a$ or $r \mid b$

  prime$\Longrightarrow$ irr

  R is called a UFD, if for any $r \in R\setminus\{0\}$, there exists $r = \alpha\pi_1\pi_2\cdots\pi_n$, $\alpha \in R^\times, \pi_i =$ irreducible and if $r = \alpha\pi_1\cdots\pi_n = \alpha'\pi_1'\cdots\pi_m'$ then $m = n$ and $\exists\sigma \in S_n$ s.t. $\pi_i \sim \pi'_{\sigma(i)}$.

  Fact:R = UFD

  (1) $\forall r_1, r_2 \in R\setminus\{0\}$, we may define $\gcd(r_1,r_2), \mathrm{lcm}(r_1r_2)$.

  (2) $R[x]$ = UFD.($\Longrightarrow R[x_1,\cdots,x_n]$ = UFD)

  (3) $f \in R[x], f$ = irreducible $\Longleftrightarrow f \in R$ and f irreducible in R or $f \notin R$.
  $f = r_0 + r_1x + \cdots + r_dx^d$ and $\gcd(r_0,r_1,\cdots,r_d) = 1$ and f irreducible in $K[x]$ where $K = Frac(R)$.

  (4) $\forall r_1, r_2 \in R[x], \gcd(r_1,r_2) = 1$ in $R[x] \Longrightarrow \gcd(r_1,r_2) = 1$ in $K[x]$

  (5)

2 多项式的公共零点

记号. 设 k 是域, 记 $\mathbb{A}^n := \mathbb{A}^n(k) := k^n = \underbrace{k \times k \times \cdots \times k}_{n}$. 称为域 k 上的 n 维仿射空间.

定义 2.1. 设 $S \subset k[x_1, \cdots, x_n]$, 定义

$$\mathscr{V}(S) := \{(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{A}^n \mid F(a_1, \cdots, a_n) = 0, \forall F \in S\}.$$

设 $X \subset \mathbb{A}^n$, 如果存在 S 使得 $X = \mathscr{V}(S)$ 则称 X 为仿射代数集.

命题 2.2.

(1) $\mathscr{V}(0) = \mathbb{A}^n, \mathscr{V}(1) = \varnothing, \mathscr{V}(x_1 - a_1, \cdots, x_n - a_n) = \{(a_1, \cdots, a_n)\}$.

(2) $\mathscr{V}$ 与集合的包含运算的关系: $S_1 \subset S_2 \Longrightarrow \mathscr{V}(S_2) \subset \mathscr{V}(S_1)$.

(3) $\mathscr{V}$ 与集合的交运算的关系: $\mathscr{V}(\cup_\alpha S_\alpha) = \cap_\alpha \mathscr{V}(S_\alpha)$.

(4) $\mathscr{V}$ 与集合的并运算的关系: $\mathscr{V}(S_1) \cup \mathscr{V}(S_2) \subset \mathscr{V}(S_1 \cap S_2)$.

(5) 设 I 是由 S 生成的理想, 则 $\mathscr{V}(S) = \mathscr{V}(I)$. 说明问题可以约化到理想.

(6) 设 I, J 是理想, 则 $\mathscr{V}(IJ) = \mathscr{V}(I \cap J) = \mathscr{V}(I) \cup \mathscr{V}(J)$.

证明. 只证 (6). 由 (2), (4) 和 $IJ \subset I \cap J$, 我们有

$$\mathscr{V}(I) \cup \mathscr{V}(J) \subset \mathscr{V}(I \cap J) \subset \mathscr{V}(IJ).$$

下面只需证明 $\mathscr{V}(IJ) \subset \mathscr{V}(I) \cup \mathscr{V}(J)$. 假设 $a \in \mathscr{V}(IJ)$ 满足存在 $i \in I$ 和 $j \in J$ 使得 $i(a) \neq 0$ 且 $j(a) \neq 0$, 则 $ij(a) \neq 0$, 矛盾. 所以要么 I 中所有多项式零化 a, 要么 J 中所有多项式零化 a. □

由该命题可以看出, 仿射代数集满足拓扑中闭集的公理, 称这个拓扑为 Zariski 拓扑.

例 2.3. 仿射直线 $\mathbb{A}^1 = k$ 中的任意真仿射代数子集都是有限集.

证明. 设 $\mathscr{V}(S) \subsetneq \mathbb{A}^1$, 那么存在 $F \neq 0 \in S$, 从而 $\mathscr{V}(S) \subset \mathscr{V}(F)$, 从而

$$\#\mathscr{V}(S) \leqslant \#\mathscr{V}(F) \leqslant \deg(F) < \infty.$$

□

例 2.4. 由上例可以看出, $\mathbb{C}$ 中的圆不是仿射代数集. 但 $\mathbb{R}^2$ 中的圆是仿射代数集 $\mathscr{V}(x^2 + y^2 - 1)$.

例 2.5. 判断 $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ 中由 $r = \sin\theta$ 确定的子集是不是仿射代数集.

证明. 需要把方程转化为关于 x, y 的方程. 因为 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, 所以

$$r = \sin\theta \Longleftrightarrow r^2 = r\sin\theta \Longleftrightarrow x^2 + y^2 = y.$$

□

例 2.6. 判断 $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ 中由 $y = \sin x$ 确定的子集是不是仿射代数集.

证明. 设 $X = \{(x, y) \in \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \mid y = \sin x\}$. 假设 $X = \mathscr{V}(I)$, 任取 $F \in I$. 任取 $t_0 \in [-1, 1]$, 展开

$$F(x, y) = f_0(x) + f_1(x)(y - t_0) + \cdots + f_d(x)(y - t_0)^d,$$

因为 $F(x, t_0)$ 有无穷多解, 所以 $f_0(x) = 0$, 所以 $y - t_0 \mid F(x, y)$, 所以 $F = 0$. $\square$

3 点集的零化多项式

在上一节最后的例子中, 我们实际上计算了零化点集 X 的多项式. 一般的,

定义 3.1. 设 $X \subset \mathbb{A}^n$, 定义

$$\mathscr{I}(X) := \{F \in k[x_1, \cdots, x_n] \mid F(a) = 0, \forall\ a \in X\}.$$

因此我们得到了两个映射

$$\begin{array}{cccc} & \mathbb{A}^n\text{的子集} & & k[x_1,\cdots,x_n]\text{的子集} \\ \mathscr{V}: & \mathscr{V}(S) & \longleftarrow & S \\ \mathscr{I}: & X & \longrightarrow & \mathscr{I}(X) \end{array}$$

如下命题是可以料想到一定会有的

命题 3.2.

(1) 包含关系在映射下反向: $X_1 \subset X_2 \Longrightarrow \mathscr{I}(X_2) \subset \mathscr{I}(X_1)$. $S_1 \subset S_2 \Longrightarrow \mathscr{V}(S_2) \subset \mathscr{V}(S_1)$.

(2) 从某一侧出发, 两次映射后会变大: $S \subset \mathscr{I}(\mathscr{V}(S))$. $X \subset \mathscr{V}(\mathscr{I}(X))$.

(3) 从某一侧的像出发, 两次映射后不变: $\mathscr{V}(S) = \mathscr{V}(\mathscr{I}(\mathscr{V}(S)))$. $\mathscr{I}(X) = \mathscr{I}(\mathscr{V}(\mathscr{I}(X)))$.

证明. 只证 $\mathscr{V}(S) = \mathscr{V}(\mathscr{I}(\mathscr{V}(S)))$.

- 对外层的两个映射使用 (2), 得到 $\mathscr{V}(S) \subset \mathscr{V}(\mathscr{I}(\mathscr{V}(S)))$.
- 对内层的两个映射使用 (2), 得到 $S \subset \mathscr{I}(\mathscr{V}(S))$. 再由 (1), $\mathscr{V}(\mathscr{I}(\mathscr{V}(S))) \subset \mathscr{V}(S)$.

□

由上述命题的 (3) 我们可以得到一个双射

$$\operatorname{Im}\mathscr{V} \subset \mathbb{A}^n\text{的子集} \underset{\mathscr{V}}{\overset{\mathscr{I}}{\longleftrightarrow}} \operatorname{Im}\mathscr{I} \subset k[x_1, \cdots, x_n]\text{的子集}.$$

$\operatorname{Im}\mathscr{V}$ 就是我们定义的仿射代数集的全体, 下面我们希望给出 $\operatorname{Im}\mathscr{I}$ 的刻画.

定义 3.3. 设 $I \lhd R$. 定义

$$\sqrt{I} := \{r \in R \mid \exists\ n \in \mathbb{N} \text{ s.t. } r^n \in I\}.$$

容易验证 $\sqrt{I} \lhd R$, 称作 I 的根. 如果 $I = \sqrt{I}$, 则称 I 为根理想.

命题 3.4. $\mathscr{I}(X)$ 是理想, 且是根理想.

证明. 设 $f \in \sqrt{\mathscr{I}(X)}$, 则存在 $n \in \mathbb{N}^*$, 对任意的 $x \in X$ 有 $f^n(x) = 0 \Longrightarrow f(x) = 0$. □

于是我们猜测 $\operatorname{Im}\mathscr{I}$ 就是 $k[x_1, \cdots, x_n]$ 中根理想的全体. 遗憾的是

例 3.5. 设 $k = \mathbb{R}$, 考虑 $\mathbb{A}^2$, 则 $I = (x^2 + y^2)$ 是根理想. 假设 $I = \mathscr{I}(X)$, 则

$$I = \mathscr{I}(\mathscr{V}(I)) = \mathscr{I}(\{(0, 0)\}) = (x, y).$$

幸运的是

定理 3.6 (Hilbert 强零点定理)**.** 设 k 是代数闭域. 则 $\sqrt{I} = \mathscr{I}(\mathscr{V}(I))$.

即使在我们建立不起仿射代数集与根理想之间的双射的时候, 我们仍有

$$\mathscr{I}: \text{仿射代数集} \longrightarrow \text{根理想}$$

是单射, 即 $\mathscr{I}(V) = \mathscr{I}(W) \Longrightarrow V = W$. 取 p 为仿射代数集 V 外的任意一点, 则 $V \cup \{p\}$ 也为仿射代数集. 由包含关系在 $\mathscr{I}$ 下反向知 $\mathscr{I}(V \cup \{p\}) \subset \mathscr{I}(V)$. 由 $\mathscr{I}$ 是单射知 $\mathscr{I}(V \cup \{p\}) \subsetneq \mathscr{I}(V)$, 即存在多项式 f 零化 V 但 $f(p) \neq 0$. 取 $V = \{p_1, \cdots, p_{m-1}\}$, 则我们可以找到一个多项式 f 在 $p_1, \cdots, p_{m-1}$ 上取值为 0, 在 p_m 上取值为 1.

命题 3.7. 设 $\{p_1, \cdots, p_m\} \subset \mathbb{A}^n$ 是有限点集, 则存在多项式 $f \in k[x_1, \cdots, x_n]$ 使得

$$f(p_1) = a_1, \cdots, f(p_n) = a_n$$

其中 $a_i \in k$ 为任意指定的值.

4 Hilbert 基定理

我们关心代数集的分类问题.（虽然我们现在还不知道什么样的两个代数集应该被视为相同的.）

代数集的定义是 $\mathscr{V}(S)$, 前面的简单论证告诉我们, 不必考虑任意的子集 $S \subset k[x_1, \cdots, x_n]$, 只需考虑所有的理想 $I \lhd k[x_1, \cdots, x_n]$, 因为 $\mathscr{V}(S) = \mathscr{V}(I_S)$, 其中 I_S 是由 S 生成的理想.

本节的定理告诉我们, $k[x_1, \cdots, x_n]$ 是 Noether 环, 即任意理想 $I \lhd k[x_1, \cdots, x_n]$ 是有限生成的. 也就是说, 对任意的代数集, 我们都可以用有限多个多项式来表达它.

定理 4.1 (Hilbert 基定理)**.** *设 R 是 Noether 环, 则 $R[x]$ 也是 Noether 环.*

证明. 任取 $I \lhd R[x]$, 对任意的 $m \geqslant 0$, 定义

$$J_m := \{I\text{中次数为}m\text{的多项式的首项系数}\} \cup \{0\} \subset R.$$

容易看出 $J_m \lhd R$ 且 $J_m \subset J_{m+1}$. 我们说这个包含可能是真包含, 让我们稍微体会一下这件事情为什么有可能发生. 首先看 J_0 是什么, J_0 是 $I \cap R \lhd R$. $I \cap R$ 是 R 吗？不一定. 这就给机会了. 设 $b \in R$ 但 $b \notin I \cap R$, 如果有 $bx \in I$——这完全可以——那么 J_1 就严格比 J_0 大了. 这样的过程会一直进行下去吗？不会, 因为 R 是 Noether 的. 所以这样的过程一定在有限步内终止.

我们说这样就能找到 I 的生成元了, 为什么呢？回忆我们证明域的一元多项式环是 PID 的过程, 我们找到了一个次数最低的多项式（它就是生成元）, 然后开始拿它去除其他的多项式, 因为域的一元多项式环是欧式整环所以有带余除法可以一步到位得到一个次数更低的多项式, 然后由最初的多项式已经次数最低了推出实际上除干净了.

我们这里因为 $R[x]$ 不一定是欧式整环所以不一定能一次性除干净, 但其实为了达到生成这个目的, 我们只需要保证每次都能把最高次项消掉, 重复做有限次就生成出来了. 而且我们允许使用有限多个多项式去生成. 考虑 J_0 一直到 J_N 的生成元

$$\{a_i^0\}, \cdots, \{a_i^N\}$$

他们来自于

$$\{f_i^0\}, \cdots, \{f_i^N\}$$

其中 f_i^j 是以 a_i^j 为首项系数的 j 次多项式. 我们说这些多项式并起来就可以生成 I.

任取一个 m 次多项式 g, 其首项系数为 b. 考虑 J_m（如果 $m > N$ 那么 $J_m = J_N$）, 那么 J_m 的生成元可以拼凑出 b 来, 从而对应的多项式可以拼凑出 f 的首项, 这样我们就把 f 的次数降下来了. 反复去做, 我们就把 f 生成出来了. 从而 I 是有限生成的. □

5 代数集的不可约分支

我们知道对于两个代数集 V_1, V_2, 他们的并 $V = V_1 \cup V_2$ 也是代数集.

现在我们问对于给定的代数集 V, 是否可以非平凡地拆成两个的代数集的并.

定义 5.1. 称 V 是可约的如果存在代数集 $V_i \neq V$ 使得 $V = V_1 \cup V_2$. 否则称 V 为不可约的.

命题 5.2. V 不可约当且仅当 $\mathscr{I}(V)$ 是素理想.

证明.

$\Longrightarrow$ 设 $fg \in \mathscr{I}(V)$, 则 fg 在 V 上消失, 假设 $f, g \notin \mathscr{I}$, 则 $V = (V \cap \mathscr{V}(f)) \cup (V \cap \mathscr{V}(g))$.

$\Longleftarrow$ 设 $V = V_1 \cup V_2$ 且 $V_i \neq V$. 因为 $\mathscr{I}$ 是单射所以存在 f_i 零化 V_i 但不零化 V. 但 $f_1 f_2$ 零化 V.

□

6 平面中的代数集

命题 6.1. 设 $F, G \in k[x, y]$ 满足 $\gcd(F, G) = 1$, 那么 $\#\mathscr{V}(F, G) < \infty$.

命题 6.2. 设 $F \in k[x, y]$ 是不可约元. 假定 $\#\mathscr{V}(F) = \infty$, 那么

$$\mathscr{I}(\mathscr{V}(F)) = (F).$$

从而 $\mathscr{V}(F)$ 不可约.

证明. 设 $G \in \mathscr{V}(\mathscr{I}(F))$, 即 G 在 $\mathscr{I}(F)$ 上消失, 从而 $\mathscr{V}(F, G) = \mathscr{V}(F)$.

由条件和命题6.1,$\gcd(F, G) \neq 1$. 因为 F 是不可约元, 所以 $F \mid G$.

因为 $k[x, y]$ 是 UFD, 所以不可约元 F 是素元, 所以 (F) 是素理想, 所以 $\mathscr{V}(F)$ 不可约. $\square$

7 Hilbert 零点定理

8 模和有限性条件

9 整元

定义 9.1. 设 $R \leqslant S$ 是子环, 称 $s \in S$ 在 R 上是整的, 如果存在首一多项式 $F \in R[x]$ 使得 $F(s) = 0$.

命题 9.2. 设 $R \leqslant S$ 是子环,$s \in S$, 则下列等价

(1) s 在 R 上是整的

(2) $R[s]$ 是有限生成 R-模

(3) 存在子环 $R[s] \leqslant R' \leqslant S$ 使得 R' 是有限生成 R-模

证明. □

10 域扩张

命题 10.1. 设 L/k 是域扩张, 若 L 作为 k-代数是有限生成的, 那么 L 作为 k-模也是有限生成的.

证明. $L = k[\alpha_1, \cdots, \alpha_n] \supset k(\alpha_1)$

$L = k(\alpha_1)[\alpha_2, \cdots, \alpha_m]$, 由归纳假设, 它是有限生成 $k(\alpha_1)$ 模

$\alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 在 $k(\alpha_1)$ 上是整的.

存在 $g \in k[\alpha_1]$, 使得 $g\alpha_i$ 在 $k[\alpha_1]$ 上是整的.

考虑

$$\overline{k[\alpha_1]} = \left\{\beta \in L \mid \beta\text{在}k[\alpha_1]\text{上整}\right\}$$

是 L 的子环.

$g\alpha_1, \cdots, g\alpha)m \in \overline{k[\alpha_1]}$

任取 $f \in L = k[\alpha_1, \cdots, \alpha_m], f = F(\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$

设 $\deg f = d$, 那么 $g^d f = g^d F(\alpha_1, \cdots, \alpha_m) = G(g\alpha_1, \cdots, g\alpha_m) \in \overline{k[\alpha_1]}$

(1) α_1 在 k 上整

$k(\alpha_1) = k[\alpha_1]$

所以 L 是有限生成 k-模

(2) α_1 在 k 上不整

取 $f = \dfrac{1}{(g+1)\alpha_1} \in L$

$g^d f$ 在 $k[\alpha_1]$ 不整.

□

Chapter 2

仿射代数簇

1 坐标环

$V \subset \mathbb{A}^n$ 代数集

称 V 是仿射代数簇如果 V 是不可约的.

V 不可约 $\Longrightarrow \mathscr{I}(V)$ 是素理想 $\Longrightarrow k[x_1, \cdots, x_n]/\mathscr{I}(V)$ 是整环

称 $\Gamma(V)$ 是 V 的坐标环.

$\left\{W \subset \mathbb{A}^n \mid W\text{是代数簇且}W \subset V\right\} \longleftrightarrow \left\{\mathfrak{p} \triangleleft \Gamma(V) \mid \mathfrak{p}\text{素}\right\}$

$\mathscr{F}(V, k) = \left\{V\text{上的}k\text{值函数}\right\}$

$k[x_1, \cdots, x_n] \longrightarrow \mathscr{F}(V, k)$

$F \mapsto (p \mapsto F(p))$

引理 1.1. $\Gamma \hookrightarrow \mathscr{F}(V, k)$

2 多项式映射

多项式映射的定义

3 坐标变换

4 有理函数和局部环

Chapter 3

平面曲线的局部性质

Chapter 4

射影簇

1 射影空间

2 射影代数集

例 2.1.

Chapter 5

射影平面曲线

定义 0.1. 考虑 $\mathbb{CP}^2 = \{(x:y:z)\}$, 称由一个齐次多项式

$$\sum_{i+j+k=n} a_{ijk} x^i y^j z^k = 0$$

决定的零点集为平面代数曲线. 称 n 为该曲线的次数.

定义 0.2. 设 $C \subset \mathbb{CP}^2$ 是由 n 次齐次多项式 F 决定的平面代数曲线, 称点 $[x:y:z]$ 为奇异点, 如果在点 (x, y, z) 处，有

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

例 0.3. 设 $C \subset \mathbb{CP}^2$ 是非退化二次曲线, 证明在合适的坐标系下

$$C = \left\{[x:y:z] \mid x^2 + y^2 + z^2 = 0\right\}.$$

Chapter 6

Fulton 习题

1 仿射代数集

代数准备 1.1-1.7

1.1(a) 证明齐次多项式的乘积也是齐次多项式. 显然.
1.1(b) 证明齐次多项式的因子也是齐次多项式.

证明. 因式分解, 若存在某个因子不是齐次多项式, 取每个因子的最高次和最低次分别乘一起. □

1.2 设 R 是 UFD, K 是 R 的分式域. 证明每个元素有典范表达. 本科近世代数.
1.3 设 R 是 PID，证明非零素理想由不可约元生成, 且是极大理想. 本科近世代数.
1.4 设 k 是无限域, $F \in k[x_1, \cdots, x_n]$. 设对任意 $(a_1, \cdots, a_n) \in k^n$ 有 $F(a_1, \cdots, a_n) = 0$, 证 $F = 0$.

证明. 当 $n = 1$ 时, 因为 n 次多项式至多有 n 个根. 当 $n = 2$ 时, 取定一个坐标的值化到 $n = 1$. □

1.5 设 k 是域. 证明有无穷多个不可约首一多项式. 和证素数无穷多个的经典方法一样.
1.6 证明代数闭域是无限域.

证明. 代数闭域中不可约多项式都是一次多项式, 由上一题得证. □

1.7(a) 设 k 是域, $F \in k[x_1, \cdots, x_n], (a_1, \cdots, a_n) \in k^n$. 证明

$$F = \sum \lambda_{(i)}(x_1 - a_1)^{i_1} \cdots (x_n - a_n)^{i_n}, \cdots \lambda_{(i)} \in k$$

证明. 在点 $(a_1, \cdots, a_n)$ 处对多项式 F 进行泰勒展开. □

1.7(b) 如果 $F(a_1, \cdots, a_n) = 0$, 证明 F 可以写成 $\sum_{i=1}^{n}(x_i - a_i)G_i$.

证明. $F(a_1, \cdots, a_n) = 0$, 所以在 (a) 的等式中没有常数项, 所以每一项至少有一个 $x_i - a_i$. □

仿射空间和代数集 1.8-1.15

1.8 证明 $\mathbb{A}^1$ 中的仿射代数集只有有限集和 $\mathbb{A}^1$ 本身.

证明. 设 $\mathscr{V}(S) \subsetneq \mathbb{A}^1$, 那么存在 $F \neq 0 \in S$, 从而 $\mathscr{V}(S) \subset \mathscr{V}(F)$, 从而

$$\#\mathscr{V}(S) \leqslant \#\mathscr{V}(F) \leqslant \deg(F) < \infty.$$

□

1.9 如果 k 是有限域, 证明 $\mathbb{A}^n$ 的每个子集都是仿射代数集.

证明. 因为仿射代数集的有限并是仿射代数集, 所以只需证明 $\mathbb{A}^n$ 中的独点集是仿射代数集. □

1.10 举例说明仿射代数集的可列并不一定是仿射代数集.

证明. 利用全纯函数零点的孤立性即可给出反例. □

1.11 证明如下集合是仿射代数集.

(1) $\{(t, t^2, t^3) \in \mathbb{A}^3(k) \mid t \in k\}$.

(2) $\{(\cos(t), \sin(t)) \in \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

(3) $\mathbb{R}^2$ 中极坐标满足 $r = \sin\theta$ 的点集.

1.12
1.13 证明如下集合不是仿射代数集.
1.14 设 $F \in k[x_1, \cdots, x_n]$ 不是常值多项式, k 代数封闭. 证明如果 $n \geqslant 1$ 那么 $\mathbb{A}^n \backslash \mathscr{V}(F)$ 是无限集, 如果 $n \geqslant 2$ 那么 $\mathscr{V}(F)$ 是无限集.
1.15 设 $V \subset \mathbb{A}^n, W \subset \mathbb{A}^m$ 是代数集. 证明 $V \times W$ 是代数集.

点集的理想 1.16-1.21

1.16 设 V, W 是 $\mathbb{A}^n(k)$ 中的代数集. 证明 $V = W$ 当且仅当 $\mathscr{I}(V) = \mathscr{I}(W)$.

证明. $\mathscr{I}$ 限制在 $\{$代数集$\}$ 上是单射. □

1.17

(1) 设 V 是 $\mathbb{A}^n(k)$ 中的代数集. $p \in \mathbb{A}^n(k) \backslash \{V\}$.
证明存在多项式 $F \in k[x_1, \cdots, x_n]$ 使得对任意 $q \in V$ 有 $F(q) = 0$ 但 $F(p) = 1$.

证明. 因为 $\mathscr{I}(V \cup \{p\}) \subsetneq \mathscr{I}(V)$, 存在多项式在 V 上消失但不在 p 上消失. □

(2) 设

1.18

(1) 设 $I \triangleleft R$. 如果 $a^n \in I, b^m \in I$, 证明 $(a+b)^{n+m} \in I$.

(2) 证明 $\sqrt{I} \triangleleft R$.

(3) 证明素理想是根理想.

证明.

(1) 由二项式定理显然.

(2) 回忆 $\sqrt{I} = \{r \mid r^n \in I\}$. 由 (1) 有 $\sqrt{I}$ 对加法封闭. 另一条是显然的.

(3) 设 $\mathfrak{p}$ 是素理想, 任取 $r \in \sqrt{\mathfrak{p}}$, 假设 $r \notin \mathfrak{p}$, 则归纳可证对任意 n 有 $a^n \notin \mathfrak{p}$, 矛盾.

□

1.19 证明 $I = (x^2+1) \lhd \mathbb{R}[x]$ 是素理想（从而是根理想）, 但不存在 $X \subset \mathbb{A}^1(\mathbb{R})$ 使得 $I = \mathscr{I}(X)$.

证明. x^2+1 是 $\mathbb{R}[x]$ 上的不可约多项式, 从而 I 是素理想.

设 $I = \mathscr{I}(X)$, 则 x^2+1 在 X 上消失, 迫使 $X = \varnothing$. 但 $\mathscr{I}(\varnothing) = \mathbb{R}[X]$. □

注记. 这个例子告诉我们,k 不是代数闭域的时候, 根理想有可能不被打满.

这个题目也给我们提供了 1.20 中 $\sqrt{I} \subset \mathscr{I}(\mathscr{V}(I))$ 的真包含的例子.

1.20 证明对于任意理想 $I \lhd k[x_1, \cdots, x_n]$, 成立

$$\mathscr{V}(I) = \mathscr{V}(\sqrt{I}), \quad \sqrt{I} \subset \mathscr{I}(\mathscr{V}(I)).$$

证明. 因为 $I \subset \sqrt{I}$, 所以 $\mathscr{V}(I) \supset \mathscr{V}(\sqrt{I})$.

假设 $p \in \mathscr{V}(I)$, 按定义对任意 $F \in I$ 有 $F(p) = 0$.

任取 $G \in \sqrt{I}$, 按定义存在 n 使得 $G^n \in I$ 从而 $G^n(p) = 0$ 从而 $G(p) = 0$ 从而 $p \in \mathscr{V}(\sqrt{I})$.

$\sqrt{I} \subset \mathscr{I}(\mathscr{V}(\sqrt{I})) = \mathscr{I}(\mathscr{V}(I))$. □

1.21 证明 $I = (x_1 - a_1, \cdots, x_n - a_n) \subset k[x_1, \cdots, x_n]$ 是极大理想.

证明. 定义

$$\varphi\colon k[x_1, \cdots, x_n] \longrightarrow k, \quad f(x_1, \cdots, x_n) \longmapsto f(a_1, \cdots, f_n)$$

容易看出 φ 是满射, 从而 $k[x_1, \cdots, x_n]/\ker\varphi \simeq k$, 从而 $\ker\varphi$ 是极大理想.

下证 $\ker\varphi = (x_1 - a_1, \cdots, x_n - a_n)$. 任取 $f \in \ker\varphi$, 在 $(a_1, \cdots, a_n)$ 处做 Taylor 展开得证. □

Hilbert 基定理 1.22

代数集的不可约分支 1.23-1.29

1.25(a) 证明 $\mathscr{V}(y - x^2) \in \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ 是不可约的.

证明. 因为 $y - x^2$ 是不可约元, 所以是素元, 所以 $(y - x^2)$ 是素理想从而是根理想. 因为 $\mathbb{C}$ 是代数闭域所以 $\mathscr{I}(\mathscr{V}(y - x^2)) = (y - x^2)$, 而 $(y - x^2)$ 是素理想所以 $\mathscr{V}(y - x^2)$ 是不可约的. □

1.25(b) 将 $\mathscr{V}(y^4 - x^2, y^4 - x^2y^2 + xy^2 - x^3) \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ 分解为不可约分支.

证明. □

1.26 证明 $f(x, y) = y^2 + x^2(x-1)^2 \in \mathbb{R}[x, y]$ 是不可约多项式, 但 $\mathscr{V}(f)$ 是可约的.

证明. 设 $f(x,y)=g(x,y)h(x,y)$, 如果 $\deg_y g=2, \deg_y h=0$, 那么 $h \mid 1$. 如果 $\deg_y g=\deg_y h=1$

$$y^2+x^2(x-1)^2=(ya(x)+b(x))(yc(x)+d(x)) \Longrightarrow a(x) \mid 1, c(x) \mid 1$$

不妨设 $a(x)=c(x)=1$, 那么

$$y^2+x^2(x-1)^2=y^2+(b(x)+d(x))y+b(x)d(x) \Longrightarrow b(x)=-d(x)$$

矛盾, 所以 $f(x,y)$ 是不可约多项式. 但 $\mathscr{V}(f)=\{(0,0),(1,0)\}$ 是可约的. □

1.27 设 $V \subset W$, 那么 V 的每个不可约分支都包含在 W 的某个不可约分支中.

证明. 因为 $V_i \subset W=\cup_{j=1}^k W_j$, 所以 $V_i=\cup_{j=1}^k V_i \cap W_j$. 因为 V_i 不可约所以存在 j 使得 $V_i \subset W_j$. □

1.28 代数集 V 不可约分解为 $V_1 \cup \cdots \cup V_r$, 证明 $V_i \not\subset \cup_{j\neq i} V_j$.

证明. 假设 $V_i \subset \cup_{j\neq i} V_j$, 那么 $V_i=\cup_{j\neq i} V_i \cap V_j$. 因为 V_i 不可约所以存在 j 使得 $V_i \subset V_j$, 矛盾. □

1.29 证明如果 k 是无限集那么 $\mathbb{A}^n(k)$ 是不可约的.

证明. 因为 k 是无限集, 所以 $\mathscr{I}(\mathbb{A}^n(k))=\{0\}$, 这是一个素理想, 所以 $\mathbb{A}^n(k)$ 不可约. □

平面代数集 1.30-1.31

1.30 设 $k=\mathbb{R}$.

(1) 证明 $\mathscr{I}(\mathscr{V}(X^2+Y^2+1))=(1)$.

(2) 证明 $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ 中的每个代数集等于某个 $\mathscr{V}(F)$, 其中 $F \in \mathbb{R}[X,Y]$.

证明.

(1) $\mathscr{V}(X^2+Y^2+1)=\varnothing, \mathscr{I}(\varnothing)=(1)$.

(2) 设 V 是代数集, 由 Hlibert 基定理,$V=\mathscr{V}(F_1,\cdots,F_n)$, 则 $V=\mathscr{V}(F_1^2+\cdots+F_n^2)$.

□

1.31 将 $\mathscr{V}(F)$ 分别在 $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ 和 $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ 中进行不可约分解

(1) $F=Y^2-XY-X^2Y+X^3$

(2) $F=Y^2-X(X^2-1)$

(3) $F=X^3+X-X^2Y-Y$

解. 内容... □

Hilbert 零点定理 1.32-1.40

模和有限性条件 1.41-1.45

整元 1.46-1.50

域扩张 1.51-1.54

Hilber 基定理

代数集的不可约分支

1.25

(1) 证明 $\mathscr{V}(Y-X^2)\subset\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ 是不可约的；事实上,$\mathscr{I}(\mathscr{V}(Y-X^2))=(Y-X^2)$.

(2) 将 $\mathscr{V}(Y^4-X^2,Y^4-X^2Y^2+XY^2-X^3)\subset\mathbb{A}^2(\mathbb{C}^2)$ 分解为不可约分支.

证明.

(1) 用一下 1.6 节推论 1.

(2) $\mathscr{V}(Y^4-X^2)=\mathscr{V}(Y^2+X)\cup\mathscr{V}(Y^2-X)$
$\mathscr{V}(Y^4-X^2Y^2+XY^2-X^3)=\mathscr{V}(Y-X)\cup\mathscr{V}(Y+X)\cup\mathscr{V}(Y^2+X)$
$\mathscr{V}(Y^4-X^2,Y^4-X^2Y^2+XY^2-X^3)=\mathscr{V}(Y^2+X)\cup(\mathscr{V}(Y^2-X)\cap\mathscr{V}(Y^2-X^2))$
$=\mathscr{V}(Y^2+X)\cup\{(1,1)\}\cup\{(1,-1)\}$

□

1.26 证明 $F=Y^2+X^2(X-1)^2\in\mathbb{R}[X,Y]$ 是不可约多项式, 但是 $V(F)$ 是可约的.

注记. 首先我们来看看这道题目想告诉我们什么. 之前有命题告诉我们, 代数集 V 的不可约性, 等价于 $\mathscr{I}(V)$ 的素性. 我们自然会问, 理想 I 的素性, 是否等价于 $\mathscr{V}(I)$ 的不可约性呢?

证明一. 将 F 视作 $\mathbb{R}[X][Y]$ 中的元素, 假设 F 是可约, 那么

$$F=(Y+f(X))(Y+g(X))=Y^2+(f+g)(X)Y+fg(X).$$

比较系数有

$$\begin{cases} f+g=0 \\ fg=X^2(X-1)^2 \end{cases}$$

这在 $\mathbb{R}[X]$ 中无解. 从而 F 是不可约的. □

证明二. 在 $\mathbb{C}[X,Y]$ 中有分解

$$F=(Y+\mathrm{i}X(X-1))(Y-\mathrm{i}X(X-1)).$$

假设在 $\mathbb{R}[X,Y]$ 中有非平凡分解 $F=F_1F_2$, 则这也是 $\mathbb{C}[X,Y]$ 中的非平凡分解. 由 $\mathbb{C}[X,Y]$ 是 UFD, 不妨设 F_1 相伴于 $(Y+\mathrm{i}X(X-1))$, 而这是矛盾的. □