偏微分方程数值解

中国科学技术大学 数学学院

张 梦 萍

办公室：东区–管理科学楼1227室

0551-63601855；mpzhang@ustc.edu.cn

付 杨 鑫

（办公室：东区–管理科学楼1212室）

李　顺

（办公室：东区–管理科学楼1212室）

第一部分：一维线性偏微分方程初值问题的有限差分方法

第二章：模型方程—对流方程

本章以模型方程的初值问题为例，介绍有限差分方法的构造，及其基本概念、性质和理论

1 对流方程的初值问题

1.1 相关回顾

一、 函数的Fourier级数的收敛性

Theorem 1.1 假设$f \in C^1_{(-\infty,\infty)}$是$2\pi$周期的周期函数，则$f(x)$可由如下*Fourier*级数表示：$f(x) = \frac{1}{\sqrt[2]{2\pi}} \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x}$。
其中，*Fourier*系数$\hat{f}(\omega)$为：$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt[2]{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-i\omega x} dx$。
且该*Fourier*级数一致收敛性于$f(x)$

Theorem 1.2 假设f是2π周期、分片C^1函数。若在$a < x < b$上$f \in C^1_{(a,b)}$，则在(a,b)上的任意子区间$a < \alpha \leq x \leq \beta < b$上，其*Fourier* 级数一致收敛性于$f(x)$。在间断点$x$处，*Fourier*级数收敛性于$\frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0))$

Theorem 1.3 若$g(x)$是2π周期函数，假设它的p阶导数是分片C^1函数，则其*Fourier*系数满足：

$$|\hat{g}(\omega)| \leq constant/(|\omega|^{p+1} + 1)$$

二、 函数的标量内积与L_2模

- 函数 f 与 g 的内积：$(f,g)=\int_0^{2\pi}\bar{f}(x)g(x)dx$，

- 函数 f 的 L_2 模：$\|f\|_2=(f,f)^{\frac{1}{2}}=(\int_0^{2\pi}\bar{f}(x)f(x)dx)^{\frac{1}{2}}=(\int_0^{2\pi}|f|^2dx)^{\frac{1}{2}}$

- 序列 $\{f_\mu\}_{\mu=1}^{\infty}$ 在平均意义下（L_2 模意义下）收敛于 f，即：$\lim_{\mu\to\infty}\|f_\mu-f\|=0$

Lemma 1.1 指数函数 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}$, $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$ 关于 L_2 标量内积是标准正交的，即：

$$(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx},\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{imx})=\begin{cases}0 & \text{当} m\neq n; \\ 1 & \text{当} m=n\end{cases}$$

Theorem 1.4 （*Bessel*不等式）

对所有的 N，有：$\sum_{\omega=-N}^{N}|\hat{f}(\omega)|^2\leq\|f\|^2$（即*Bessel*不等式）。

此外，当且仅当*Parseval*关系成立（即：$\sum_{\omega=-\infty}^{\infty}|\hat{f}(\omega)|^2=\|f\|^2$）时，有：

$\lim_{N\to\infty}\|f-S_N\|^2=\lim_{N\to\infty}(\|f\|^2-\sum_{\omega=-N}^{N}|\hat{f}(\omega)|^2)=0$；

其中 $S_N=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{\omega=-N}^{N}\hat{f}(\omega)e^{i\omega x}$，$\hat{f}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi}e^{-i\omega x}f(x)dx$。

Theorem 1.5 任意分片连续地函数 f 都能展开成在 L_2 模意义下收敛于 f 的*Fourier*级数，即：$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{\omega=-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{i\omega x}$，$\hat{f}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi}e^{-i\omega x}f(x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(e^{-i\omega x},f(x))$；且*Parseval*关系成立。

三、 三角插值

Lemma 1.2 指数函数$e^{i\nu x}$, $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \frac{N}{2}$关于离散内积是正交的，即：

$$(e^{i\nu x}, e^{i\mu x})_h = \begin{cases} 0, & 0 < |\nu - \mu| \le N; \\ 2\pi, & \nu = \mu \end{cases}$$

Theorem 1.6 满足$u_j = \phi(x_j)$，$j = 0, 1, \cdots, N$，的三角插值：

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\omega=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \tilde{u}(\omega) e^{i\omega x}$$

是唯一的。

Theorem 1.7 若$\phi(x)$、$\psi(x)$分别满足：$\phi(x_j) = u_j$，$\psi(x_j) = v_j$，$j = 0, 1, \cdots, N$，的三角插值；$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\omega=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \tilde{u}(\omega) e^{i\omega x}$，$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\omega=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \tilde{v}(\omega) e^{i\omega x}$；则有：

(1) $(u, v)_h = \sum_{\omega=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \bar{\tilde{u}}(\omega) \tilde{v}(\omega) = (\phi, \psi)$

(2) $\|\phi\|^2 = \sum_{\omega=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} |\tilde{u}(\omega)|^2 = \|u\|_h^2$

(3) $\|D_+^l u\|_h^2 \le \|\frac{d^l}{dx^l}\phi\|^2 \le (\frac{\pi}{2})^{2l} \|D_+^l u\|_h^2$，$l = 0, 1, \cdots$。

四、 $\hat{u}(\omega)$与$\tilde{u}(\omega)$ 关系

Theorem 1.8 假设u 是2π周期的周期函数，其*Fourier*系数满足下列关系：$|\hat{u}(\omega)| \le \frac{c}{|\omega|^m}$，$\omega \ne 0$，$m > 1$；则有：

$\|u(\cdot) - \phi(\cdot)\|_\infty \le \frac{2c}{\sqrt{2\pi}} (\frac{N}{2})^{1-m} (\frac{1}{m-1} + \frac{2(N+1)}{N} B_m)$，

其中$B_m = \sum_{j=1}^{\infty} (\frac{1}{2j-1})^m$，$u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} \hat{u}(\omega) e^{i\omega x}$，

$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\omega=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \tilde{u}(\omega) e^{i\omega x}$，$\|u(\cdot)\|_\infty = sup_{0 \le x \le 2\pi} |u(x)|$。

推论：存在常数C_l，使得：

$\|\frac{d^l}{dx^l} u(x) - \frac{d^l}{dx^l} \phi(x)\|_\infty \le C_l (\frac{N}{2})^{1+l-m}$，$1 + l < m$

1.2 对流方程的初值问题的解

考虑常系数的对流方程的初值问题：

$$\begin{cases} u_t = u_x & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & -\infty < x < \infty \end{cases} \tag{*}$$

其中 $f(x)$ 是光滑的 2π 周期的周期函数

1. 初值是一个谐波，对流方程的初值问题(*)的解

2. 一般情况的初值（如：初值为 2π 周期的光滑函数），对流方程的初值问题(*)的解

3. 对流方程的初值问题(*)解的特性

   $\Rrightarrow$：问题(*)存在特征线，且特征线为直线,解沿特征线是不变的。初值沿特征线以有限速度传播。

2 对流方程的初值问题的有限差分方法—二层格式

1. 剖分

   由于本问题是 2π 周期的，所以将区域 $[0, 2\pi]$ 用 $N+1$ 个节点 x_j 均匀剖分，即：$x_j = j \cdot h$，$j = 0, 1, \cdots, J$；空间步长为：$h = \frac{2\pi}{J}$；时间离散：均匀剖分，取时间步长为 Δt，$t_n = n \cdot \Delta t$，$n = 0, 1, \cdots, N$。

   格点函数值：解 $u(x,t)$ 在 (x,t) 平面上的格点 $P = (x_j, t_n)$ 处的值记为：$u_j^n = u(x_j, t_n)$；近似值记为：$v_j^n \simeq u_j^n$；

   由于 u 是 2π 周期的，所以 v 也是 2π 周期的；故有：$v_j^n = v_{j+J}^n$

2. 方程离散—差商近似微商：

1阶导数≈ 1阶差商（前差-F、后差-B、中心差-C）

$FTCS$格式（有限差分方法、有限差分方程、离散方程）：

$$\left\{\begin{array}{l} v_j^{n+1} = v_j^n + \frac{\Delta t}{2h}(v_{j+1}^n - v_j^n) = (I + \Delta t D_0)v_j^n \equiv Q v_j^n \\ v_j^0 = f_j = f(x_j), \qquad j = 0, \cdots, J \end{array}\right. \qquad (*1)$$

3. 差分方程(*1)的解

a. 初值是一个谐波，(*1)的近似解

b. 初值可以用一个三角插值表示，(*1)的近似解

c. 讨论初值出现小扰动时，(*1)的近似解的变化。

d. 稳定性

在实际计算中，误差是不可避免的。

Definition 2.1 ：考虑一种数值方法，若满足：

$\lim_{\Delta t, h \to 0} \sup_{0 \le t_n \le T} |\hat{Q}^n| \le K(T)$，则称该方法是稳定的

e. FTCS格式的修正–加人工粘性

f. 二种常用的格式

Lax-Friedrich 格式：（取：$\sigma = \frac{h}{2\Delta t} = \frac{1}{2\lambda}$，$\lambda = \frac{\Delta t}{h}$）

$$v_j^{n+1} = \frac{1}{2}(v_{j-1}^n + v_{j+1}^n) + \Delta t D_0 v_j^0 = (I + \Delta t D_0)v_j^n + \frac{h^2}{2} D_+ D_- v_j^n$$

Lax-Wendroff格式：（取：$\sigma = \frac{1}{2}\lambda = \frac{\Delta t}{2h}$）

$$v_j^{n+1} = v_j^n + \Delta t D_0 v_j^n + \frac{\Delta t^2}{2} D_+ D_- v_j^n$$

g. 考虑一般的差分近似（单步格式）

$$\begin{cases} v_j^{n+1} = Q v_j^n, \ Q = \sum_{\mu=-r}^{s} A_\mu(\Delta t, h) E^\mu \\ v_j^0 = f_j \end{cases}$$

其中A_μ是Δt，h的有理函数，$r, s \geq 0$，且是整数；即：用$r + s + 1$个函数$v_{j-r}^n, \cdots, v_{j+s}^n$计算$v_j^{n+1}$。

Theorem 2.1 在有限时间区域$0 \leq t \leq T$，考虑$\Delta t, h \to 0$时，差分近似：$v_j^{n+1} = Q v_j^n$，$Q = \sum_{\mu=-r}^{s} A_\mu(\Delta t, h) E^\mu$，$v_j^0 = f_j$，假设：

(a) 初值f是（分片连续）可展开为*Fourier*级数（$\in L_2$），且其三角插值收敛于f

(b) 差分近似是稳定的，即存在常数K_s，使得对所有的Δt和h有：

$\sup_{0 \leq t_n \leq T} |\hat{Q}^n| \leq K_s$

(c) 差分近似是相容的，即对每个固定的ω，有：

$\lim_{\Delta t, h \to 0} \sup_{0 \leq t_n \leq T} |\hat{Q}^n(\xi) - e^{i\omega t_n}| = 0$

则：差分近似解的三角插值收敛于微分方程的解，即：

$$\lim_{\Delta t, h \to 0} \sup_{0 \leq t_n \leq T} \|u(\cdot, t_n) - \psi_N(\cdot)\| = 0$$

其中 $u(\cdot,t_n)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega(x_j+t_n)}\hat{u}^n(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega x_j}\hat{f}(\omega)$

，差分近似解的三角插值为：

$\psi_N=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}e^{i\omega x_j}\hat{v}^n(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}e^{i\omega x_j}\hat{Q}^n\hat{f}(\omega)$。

证明：

由于初值 f 是（分片连续）可展开为Fourier级数（$\in L_2$），

根据定理1.5，可见Parseval关系成立

$\sum_{\omega=-\infty}^{\infty}|\hat{f}(\omega)|^2=\|f\|^2$

取 M，使得 $0<M<\frac{N}{2}$，则：

$$\|u(\cdot,t_n)-\psi_N(\cdot)\|^2=\sum_{\omega=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}|e^{i\omega t_n}\hat{f}(\omega)-\hat{Q}^n\tilde{f}(\omega)|^2+\sum_{|\omega|>\frac{N}{2}}|\hat{f}(\omega)|^2$$

$$\leq\sum_{\omega=-M}^{M}|e^{i\omega t_n}\hat{f}(\omega)-\hat{Q}^n\tilde{f}(\omega)|^2+\sum_{M<|\omega|\leq\frac{N}{2}}|e^{i\omega t_n}\hat{f}(\omega)-\hat{Q}^n\tilde{f}(\omega)|^2$$
$$+\sum_{|\omega|>\frac{N}{2}}|\hat{f}(\omega)|^2$$

$$(|a-b|^2\leq|a|^2+|b|^2=2|a|\cdot|b|\leq2(|a|^2+|b|^2))$$

$$\leq I+2\sum_{M<|\omega|\leq\frac{N}{2}}|\hat{Q}^n\tilde{f}(\omega)|^2+2\sum_{M<|\omega|\leq\frac{N}{2}}|\hat{f}|^2+\sum_{|\omega|>\frac{N}{2}}|\hat{f}(\omega)|^2$$

$$\sum_{M<|\omega|\leq\frac{N}{2}}+\sum_{|\omega|>\frac{N}{2}}=\sum_{|\omega|>M}$$

$$=I+2\sum_{M<|\omega|\leq\frac{N}{2}}|\hat{Q}^n\tilde{f}(\omega)|^2+\sum_{M<|\omega|\leq\frac{N}{2}}|\hat{f}|^2+\sum_{|\omega|>M}|\hat{f}(\omega)|^2$$

$$\leq I+2(\sum_{M<|\omega|\leq\frac{N}{2}}+\sum_{|\omega|>\frac{N}{2}})|\hat{Q}^n\tilde{f}(\omega)|^2+(\sum_{M<|\omega|\leq\frac{N}{2}}+\sum_{|\omega|>\frac{N}{2}})|\hat{f}|^2$$
$$+\sum_{|\omega|>M}|\hat{f}(\omega)|^2$$

$$=I+2\sum_{M<|\omega|}|\hat{Q}^n\tilde{f}(\omega)|^2+2\sum_{M<|\omega|}|\hat{f}|^2=I+II+III$$

$I=\sum_{\omega=-M}^{M}|e^{i\omega t_n}\hat{f}(\omega)-\hat{Q}^n\tilde{f}(\omega)+\hat{Q}^n\hat{f}(\omega)-\hat{Q}^n\hat{f}(\omega)|^2$
$\leq 2\sum_{\omega=-M}^{M}(|\hat{Q}^n(\tilde{f}-\hat{f})|^2+|\hat{f}|^2|\hat{Q}^n-e^{i\omega t_n}|^2)$

（由假设（a）和（c）可得：）

$\lim_{M\to\infty}I\leq 2\lim_{M\to\infty}\sum_{\omega=-M}^{M}(|\hat{Q}^n(\tilde{f}-\hat{f})|^2+|\hat{f}|^2|\hat{Q}^n-e^{i\omega t_n}|^2)$
$=2\lim_{M\to\infty}\sum_{\omega=-M}^{M}|\hat{Q}^n(\tilde{f}-\hat{f})|^2+2\lim_{M\to\infty}\sum_{\omega=-M}^{M}|\hat{f}|^2|\hat{Q}^n-e^{i\omega t_n}|^2=0$

（由假设（a）可得：）

$\lim_{M\to\infty}II=2\lim_{M\to\infty}\sum_{M<|\omega|}|\hat{f}|^2=0$

（由假设（b）可得：）

$\lim_{M\to\infty}III=2\lim_{M\to\infty}\sum_{M<|\omega|}|\hat{Q}^n|^2\cdot|\tilde{f}(\omega)-\hat{f}+\hat{f}|^2$
$\leq 4K_s^2\lim_{M\to\infty}\sum_{M<|\omega|}(|\tilde{f}-\hat{f}|^2+|\hat{f}|^2)$
$=4K_s^2(\lim_{M\to\infty}\sum_{M<|\omega|}|\tilde{f}-\hat{f}|^2+\lim_{M\to\infty}II)$
$=0$。証毕

3 对流方程的初值问题的有限差分格式—多层格式

一、 常系数对流方程的初值问题的常见的有限差分格式：

考虑常系数的对流方程的初值问题：

$$\begin{cases} u_t = u_x & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & -\infty < x < \infty \end{cases}$$

其中 $f(x)$ 是 2π 周期的周期函数。

1. 显示格式：由已知层的函数值直接得到未知层的函数值

2. 隐式格式：不能由已知层的函数值直接得到未知层的函数值

3. 单步格式（二层格式）：格式只涉及二个时间层

4. 多步格式（三层、及三层以上格式）格式：涉及三个，或三个以上时间层

二、 蛙跳格式（即：CTCS格式）

$$\begin{cases} v_j^{n+1} = v_j^{n-1} & + \frac{\Delta t}{h}(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n) \\ v_j^0 = f_j = f(x_j) \end{cases}$$ 。

这儿 v_j^1 需要通过其它单步格式得到，如FTCS格式，即：$v_j^1 = v_j^0 + \frac{\Delta t}{2h}(v_{j+1}^0 - v_{j-1}^0)$，$v_j^0 = f_j$。

三、 带源项的PDE初值问题 $\begin{cases} u_t = u_x - au & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & -\infty < x < \infty \end{cases}$ 的蛙跳格式

这儿$a > 0$，且为常数。

作业–20240923：参考书1：P50：2.1.1–2.1.3

大作业–20240923 针对下述偏微分方程初值问题：

$$\begin{cases} u_t = u_x, \ -\infty < x < \infty \ t > 0, \\ u(x,0) = sin(2\pi x), \ -\infty < x < \infty, \\ Periodic\,boundary\,condition, T = 1. \end{cases}$$

该方程的精确解为$u(x,t) = sin(2\pi(x+t))$。

对时空区域做均匀剖分，其中$x_j = j \cdot h, \ j = 0,1,2,...,J$，时间步长$h = \frac{1}{J}$。令$r = \frac{\Delta t}{h}$。

问题1：取$r = 0.5$，$J = 80$，分别取$T = 0.1, 0.4, 0.8, 1.0$。分别用FTCS、Lax-Friedrich和Lax-Wendroff方法计算其数值解。绘出最大误差随时间变化图；并给出评论。

问题2：取$r = 0.5$，$T = 1.0$，分别取$J = 10, 20, 40, 80, 160$。用Lax-Wendroff 方法计算其数值解，并与精确解画在同一图上进行比较，给出评论。

4 迎风格式与CFL条件

考虑常系数的对流方程的初值问题：

$$\left\{\begin{array}{cc} u_t = u_x & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & -\infty < x < \infty \end{array}\right.$$ ；其解为 $u(x,t) = f(x+t)$。

一、 $u_t = u_x$ 的FTBS格式

$$\left\{\begin{array}{c} v_j^{n+1} = v_j^n + \frac{\Delta t}{2h}(v_j^n - v_{j-1}^n) = (I + \Delta t D_-)v_j^n \equiv Q v_j^n \\ v_j^0 = f_j = f(x_j), \qquad j = 0, \cdots, J \end{array}\right.$$

该格式无法满足稳定性要求；即：该方法是不稳定的

$u_t = u_x$ 的FTBS格式不稳定的原因何在？如何构造稳定的格式？

二、 常系数对流方程初值问题的解的依赖区

沿直线 $x + t = constant$ 解不变。该直线称为特征线。在任意点 $P = (x,t)$ 处的解，由过该点的特征线与 $t = 0$ 的交点 $P_0 = (x_0, 0)$ 点的值 $u|_{P_0}$ 确定，即：$u|_P = u|_{P_0}$。

$D_P = \{P_0\}$ 称为 P 点的解的依赖区。若取 $P = (x_j, t_{n+1})$，则 $x_0 = x_j + t_{n+1}$。

三、 常系数对流方程的初值问题的有限差分格式的数值解的依赖区：

常系数对流方程初值问题的FTCS格式在 $P = (x_j, t_{n+1})$ 点的近似解 v_j^{n+1} 依赖于初始时刻的点：

$x_{j-n-1}, x_{j-n}, \cdots, x_j, \cdots, x_{j+n}, x_{j+n+1}$ 的近似解。

则称 $N_P = \{x_{j-n-1}, x_{j-n}, \cdots, x_j, \cdots, x_{j+n}, x_{j+n+1}\}$ 为 P 点数值解的依赖区；

四、 CFL条件

CFL条件：PDE解的依赖区 D_P 必须被包含在数值解的依赖

区 N_P： $D_P \subseteq N_P$

Theorem 4.1 *CFL*条件是有限差分格式收敛的必要条件

CFL条件适合于变系数情形，甚至是非线性双曲问题；它是这些格式收敛的必要条件！

五、 迎风格式

迎风格式：特征线方向与模板方向一致的格式；逆风格式：特征线方向与模板方向不一致的格式

Example 4.1 讨论 $u_t + au_x = 0$， a 是常数，的迎风格式

作业–20240926：针对方程 $u_t + u_x = 0$，导出其解的依赖区；其蛙跳格式的数值解的依赖区；以及CFL条件

大作业–20240926

针对下述偏微分方程初值问题：

$$\begin{cases} u_t = u_x,\ -\infty < x < \infty\ t > 0, \\ u(x,0) = sin(2\pi x),\ -\infty < x < \infty, \\ Periodic\ boundary\ condition, T = 1. \end{cases} \tag{1}$$

该方程的精确解为 $u(x,t) = sin(2\pi(x+t))$。对时空区域做均匀剖分，其中 $x_j = j \cdot h,\ j = 0,1,2,...,J$, 时间步长 $h = \frac{1}{J}$。令 $\lambda = \frac{\Delta t}{h}$。

问题： 取$T = 1.0$，$J = 80$，分别取$\lambda = 0.5, 1.5$。用CTCS格式（v_j^1用FTFS格式）计算其数值解，并与精确解画在同一图上进行比较，给出评论。

5 隐式格式

一、 BTCS格式

讨论 $\begin{cases} u_t = u_x & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & -\infty < x < \infty \end{cases}$ 的BTCS格式；其中该问题的初值、解均为2π周期的周期函数。

BTCS格式：$\begin{cases} v_j^{n+1} = v_j^n + \frac{\Delta t}{2h}(v_{j+1}^{n+1} - v_{j-1}^{n+1}) \\ v_j^0 = f(x_j),\ \ j = 0, 1, \cdots, J v_j^n = v_{j+J+1}^n \end{cases}$ $\Rrightarrow$ 要得到问题的解，则需要在每个时间步求解一个$J+1$阶线性代数方程组。

$\Rrightarrow$：该格式是无条件稳定的——这是一个典型的隐式格式；对时间步长没有约束，可以选择较大的时间步长。大多数全隐式格式都是无条件稳定的

二、 Crank-Nicolson格式

$u_t = u_x = \frac{1}{2}u_x + \frac{1}{2}u_x$，

$(I - \frac{\Delta t}{2}D_0)v_j^{n+1} = (I + \frac{\Delta t}{2}D_0)v_j^n$， $j = 0, \cdots, J$

$\Rrightarrow$：该格式是无条件稳定的，且对所有的ω（频率），振幅不变。

三、 θ–方法

$u_t = u_x = \theta u_x + (1-\theta)u_x$，

$(I - \Delta t\theta D_0)v_j^{n+1} = (I + \Delta t(1-\theta)D_0)v_j^n$， $j = 0, \cdots, J$，其中$0 \le \theta \le 1$。

$\Rrightarrow$：$\theta \ge \frac{1}{2}$时，该格式是无条件稳定的。通常取：$\frac{1}{2} \le \theta \le 1$。

6 误差

预备知识——Taylor展开定理：

$f(x \pm h) = f(x) \pm hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \cdots + \frac{(-h)^k}{k!}f^{(k)}(x) + \frac{(-h)^{k+1}}{(k+1)!}f^{(k+1)}(\xi)$

，其中：ξ 介于x与$x+h$之间。

一、 截断误差

Definition 6.1 截断误差：

与差分方程等价的*PDE*与源*PDE*的差。即：差分方程中近似解v_j^n用精确解u_j^n代替后得到的与差分方程等价的*PDE*与源*PDE*的差。

$\Rrightarrow$：截断误差是数值方法精度的度量。

二、 格式（方法）的精度

Definition 6.2 数值格式的精度：

若数值格式的截断误差为：$T = O(h^p + \Delta t^q)$，则称该数值格式是(p,q)阶精度的；即：该格式对空间是p阶精度，对时间是q阶精度。

三、 整体误差

整体误差：数值解与精确解之间的差，即：$e_j^n = v_j^n - u_j^n$

作业–20240930：参考书1：P58, 2.3.1；P61：2.4.1–2.4.2

7　基于PDE的积分形式的有限差分格式的构造

常见的数值积分公式（回顾）

- 端点均为积分节点

  $n=1$ （梯形公式）：

  $\int_{x_0}^{x_1} f(x)=\frac{h}{2}(f(x_0)+f(x_1))-\frac{h^3}{12}f''(\xi)$，$h=x_1-x_0$，$\xi\in(x_0,x_1)$

  $n=2$ （Simpson公式）：

  $\int_{x_0}^{x_2} f(x)=\frac{h}{3}(f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2))-\frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi)$，

  $h=x_2-x_1=x_1-x_0$，$\xi\in(x_0,x_2)$

- 端点均不为积分节点

  $n=0$ （中点公式）：

  $\int_{x_{-1}}^{x_1} f(x)=2hf(x_0)+\frac{h^3}{3}f''(\xi)$，$h=x_1-x_0=x_0-x_{-1}$，$\xi\in(x_{-1},x_1)$

  $n=1$ ：

  $\int_{x_{-1}}^{x_2} f(x)=\frac{3h}{2}(f(x_0)+f(x_1))+\frac{3h^3}{4}f''(\xi)$，

  $h=x_2-x_1=x_1-x_0=x_0-x_{-1}$，$\xi\in(x_{-1},x_2)$

- 积分节点仅为一个端点

  $\int_a^b f(x)=(b-a)f(a)+\frac{1}{4}(b-a)^2f'(\xi)$，$\xi\in(a,b)$

针对$u_t+au_x=0$，a为常数，$(x,t)\in\bar{D}=[0,1]\times[0,T]$，基于其积分形式，构造以格点处的函数为未知数的有限差分格式。

一、　剖分

用节点$0=x_0<x_1<\cdots<x_J=1$将$[0,1]$分成J个小区域(cell)；

则涉及格点x_j的cell为：$I_j=[x_{j-\frac{1}{2}},x_{j+\frac{1}{2}}]$，$j=1,\cdots,J-1$。

用节点 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T$ 将 $[0, T]$ 分成 N 个小区域 $[t_n, x_{n+1}]$，$n = 0, \cdots, N-1$。

二、 方程离散

取时空区域 $\Omega_j^n = [t_n, t_{n+1}] \times [x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}]$ 为控制区域（控制体）。

讨论控制体 Ω_j^n 上，$u_t + au_x = 0$ 的积分形式：

$$\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} (u^{n+1} - u^n)dx + \int_{t_n}^{t_{n+1}} a(u_{j+\frac{1}{2}} - u_{j-\frac{1}{2}})dt = 0$$

该方程式是精确成立的。用不同的数值积分公式对上述方程中的积分做近似，得到不同的有限差分格式

取时空区域 $\Omega_j^n = [t_{n-1}, t_{n+1}] \times [x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}]$ 为控制区域（控制体）。

讨论控制体 Ω_j^n 上，$u_t + au_x = 0$ 的积分形式：

$$\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} (u^{n+1} - u^{n-1})dx + \int_{t_n}^{t_{n+1}} a(u_{j+\frac{1}{2}} - u_{j-\frac{1}{2}})dt = 0$$

该方程式精确成立的。用不同的数值积分公式对上述方程中的积分做近似，得到不同的有限差分格式

8 变系数对流方程

$$u_t + a(x,t)\cdot u_x = 0, \quad (x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$$

。其中 $a(x,t)$ 为已知的连续函数。其初值问题的解稳定、存在唯一。

特征线方程：

$$\frac{dx}{dt} = a(x,t), \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}u(x(t),t) = 0.$$

特征线为互不相交的曲线，解 $u(x,t)$ 沿着特征线保持不变

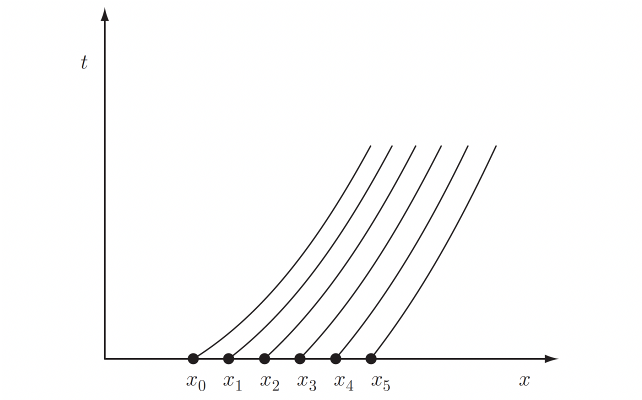

Fig. 4.1. Typical characteristics for $u_t + a(x,t)u_x = 0$.

可以将常系数对流方程的FDM推广到变系数方程

- Lax-Friedrichs格式

$$v_j^{n+1} = \frac{1}{2}(v_{j-1}^n + v_{j+1}^n) - \frac{1}{2}ra_j^n(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n)$$

或： $v_j^{n+1} = \frac{1}{2}(1+a_j^n r)v_{j-1}^n + \frac{1}{2}(1-a_j^n r)v_{j+1}^n$

具有（2，1）阶局部截断误差。

由于 $a_j^n = a(x_j,t_n)$ 随 j,n 改变，所以不能直接用Fourier方法分析其稳定性。可采用能量法分析其稳定性。

若$|\frac{\partial a}{\partial x}| \le M,\ x \in \mathbf{R}, t \in [0,T] \Rightarrow$: $|a_{j+1}^n - a_{j-1}^n| \le 2Mh$（中值定理），则有：

$$||v^{n+1}||_h^2 \le (1 + M\Delta t)||v^n||_h^2 \le \cdots \le e^{MT}||v^0||_h^2 = e^{MT}||u^0||_h^2$$

此时，格式稳定

对变系数线性对流方程的有限差分方法，除用能量法分析稳定性外，简单实用的“冻结系数法”也是分析其稳定性的常用方法。

- 迎风格式

  $v_j^{n+1} = v_j^n - \frac{a_j^n r}{2}(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n) + \frac{|a_j^n| r}{2}(v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n)$

  具有（1，1）阶局部截断误差。用“冻结系数法”可得其稳定性条件为：$\max_j |a_j^n| r \le 1$

9 一阶线性偏微分方程组

9.1 常系数一阶线性偏微分方程组

考虑常系数一阶偏微分方程组:

$$U_t + A \cdot U_x = 0 \tag{$*$}$$

其中$U = U(x,t) = (u^{(1)}, \cdots, u^{(p)})^T$, $A \in \mathbb{R}^{p\times p}$为常系数矩阵

一、 Lax-Friedrichs格式

$$V_j^{n+1} = \frac{1}{2}(V_{j-1}^n + V_{j+1}^n) - \frac{\Delta t}{2h}A(V_{j+1}^n - V_{j-1}^n)$$

稳定性分析:

取谐波解: $V_j^n = \hat{V}^n e^{i\omega jh}$代入上式，得: $\hat{V}^{n+1} = \hat{G}\cdot\hat{V}^n = \cdots = \hat{G}^n\cdot\hat{V}^0$; 其中增长矩阵（放大因子）为:

$\hat{G} = \frac{1}{2}(e^{i\omega h} + e^{-i\omega h})I - \frac{\Delta t}{2h}(e^{i\omega h} - e^{-i\omega h})A = (\cos\omega h)I - i(r\sin\omega h)A$

其中I为p阶单位矩阵。若A的特征值为λ_m，则G的特征值为: $\mu_m = \cos\omega h - i(r\sin\omega h)\lambda_m$, $m = 1,\cdots,p$; 即: $|\mu_m|^2 = 1-(1-r^2\lambda_m^2)(\sin\omega h)^2$

$\Rightarrow$: 若$r\rho(A) \le 1$; 则有$\rho(\hat{G}) \le 1$; 即该方法稳定。其中$\rho(\hat{G})$, $\rho(A)$分别是矩阵$\hat{G}$, A的谱半径

Lax-Wendroff格式:

$$V_j^{n+1} = V_j^n - \frac{\Delta t}{2h}A(V_{j+1}^n - V_{j-1}^n) + \frac{\Delta t^2}{2h^2}A(V_{j+1}^n - 2V_j^n + V_{j-1}^n)$$

类似上述分析，可得到相同的稳定性条件

二、 迎风格式

Definition 9.1 若A的特征值是实的，且存在非奇异矩阵S使得$\Lambda = S^{-1}AS = diag\{\lambda_1, \cdots, \lambda_p\}$，其中$\lambda_j,\ j = 1, \cdots, p$ 为A的特征值，则称$(*)$为双曲型方程组。若除此之外，A的特征值互不相等，则称$(*)$为严格双曲型方程组

假设$(*)$为双曲型方程组，取$W = S^{-1}U = (w^{(1)}, \cdots, w^{(p)})^T$，则由$(*)$可得：

$$W_t + \Lambda \cdot W_x = 0 \tag{$*1$}$$

$(*1)$称为$(*)$的特征形式。其分量形式为：

$$w_t^{(m)} + \Lambda_m \cdot w_x^{(m)} = 0,\ m = 1, \cdots, p \tag{$*2$}$$

对每个m，按标量对流方程设计迎风格式，即：

$(w^{(m)})_j^{n+1} = (w^{(m)})_j^n - \frac{r}{2}\Lambda((w^{(m)})_{j+1}^n - (w^{(m)})_{j-1}^n)$

$+\frac{r}{2}|\Lambda|((w^{(m)})_{j+1}^n - 2(w^{(m)})_j^n + (w^{(m)})_{j-1}^n)$

其中$|\Lambda| = diag\{|\lambda_1|, \cdots, |\lambda_p|\}$；即：

$$W_j^{n+1} = W_j^n - \frac{r}{2}\Lambda(W_{j+1}^n - WV_{j-1}^n) + \frac{r}{2}|\Lambda|(W_{j+1}^n - 2W_j^n + W_{j-1}^n)$$

；或：

$$V_j^{n+1} = V_j^n - \frac{r}{2}A(V_{j+1}^n - V_{j-1}^n) + \frac{r}{2}|A|(V_{j+1}^n - 2V_j^n + V_{j-1}^n)$$

其中$|A| = S^{-1}|\Lambda|S$。

稳定性分析：

增长矩阵：$\hat{G} = I - i(r\sin\omega h)\Lambda + r(\cos\omega h - 1)|\Lambda|$，其特征值为：

$\mu_m = 1 - i(r\sin\omega h)\lambda_m + r|\lambda_m|(\cos\omega h - 1),\ m = 1, \cdots, p$；即：$|\mu_m|^2 =$

$1-4r|\lambda_m|(1-r|\lambda_m|)(\sin\frac{\omega h}{2})^2$

$\Rightarrow$：若 $r\max|\lambda_m|\le 1$；则有 $\rho(\hat{G})\le 1$；即该方法稳定。

作业–20241010：

补充作业1：针对 $u_t+au_x=0$，a 为常数，基于其积分形式构造时间1阶、空间3阶的有限差分格式

补充作业2：试构造：$U_t+A\cdot U_x=0$ 的迎风格式；其中 $U=(u,v)^T$，

$$A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$