

有限元方法

孙天阳

中国科学技术大学数学科学学院

`tysun@mail.ustc.edu.cn`

2024 年 12 月 1 日

目录

目录	1
1 笔记	2
1.1 回顾有限差分方法	2
1.2 两点边值问题、变分问题、极小化问题	3
1.3 有限元方法的基本思想	6
1.4 基循环 \rightarrow 单元循环	7
1.5 误差估计	7
1.6 二维 Poisson 方程的有限元方法	9
1.7	11
1.8 Neumann 边值问题	11
1.9	13
1.10 10 月 8 日-二维情形下的编程实现	14
1.11 本质边界条件	17
1.12	18
1.13	19
1.14 非协调有限元	20
1.15 三角形 CR 元的误差估计	21
2 作业	22
2.1 第一周书面作业	22
2.2 第二周书面作业	25
2.3 第三周书面作业	26
2.4 第六周书面作业	28
2.5 第七周书面作业	30

Chapter 1

笔记

1.1 回顾有限差分方法

考虑两点边值问题

$$(P) : \begin{cases} -u''(x) = f(x), & 0 < x < 1, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

为了使用有限差分方法求解这个问题, 我们首先将区间 $[0, 1]$ 离散化. 假设将区间划分为 $n + 1$ 个等距节点, 步长为 $h = \frac{1}{n+1}$, 节点的坐标为 $x_i = ih$, 其中 $i = 0, 1, 2, \dots, n+1$. 记 $u_i = u(x_i)$, 根据边界条件, $u_0 = u_{n+1} = 0$, 所以我们只需要求解内部节点 u_1, u_2, \dots, u_n . 为此我们需要将 $u''(x)$ 离散化. 对 $u(x+h)$ 和 $u(x-h)$ 进行泰勒展开:

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) + \frac{h^3}{6}u^{(3)}(x) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(x) + \dots$$

$$u(x-h) = u(x) - hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) - \frac{h^3}{6}u^{(3)}(x) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(x) - \dots$$

将 $u(x+h)$ 和 $u(x-h)$ 相加:

$$u(x+h) + u(x-h) = 2u(x) + h^2u''(x) + \frac{h^4}{12}u^{(4)}(x) + \dots$$

将上面的式子进行整理:

$$u(x+h) + u(x-h) = 2u(x) + h^2u''(x) + O(h^4)$$

进一步, 得到二阶导数的表达式:

$$u''(x) \approx \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2}$$

在离散化过程中, 二阶导数 $u''(x)$ 可以通过中心差分公式近似为:

$$u''(x_i) \approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}.$$

因此, 微分方程 $-u''(x) = f(x)$ 在离散化后对于每个内部节点 x_i 可以表示为:

$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = f(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

整理后可以得到以下的线性代数方程：

$$u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1} = -h^2 f(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

这组方程可以写成一个线性系统的矩阵形式：

$$A\mathbf{u} = \mathbf{b},$$

其中, $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_n]^T$ 是待求的未知向量, $\mathbf{b} = [-h^2 f(x_1), -h^2 f(x_2), \dots, -h^2 f(x_n)]^T$ 是已知的右端项向量. 矩阵 A 是一个 $n \times n$ 的三对角矩阵, 形式为:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

通过求解该线性系统, 我们可以得到节点处的近似解 \mathbf{u} , 进而构造出整个区间上的解的近似值. 有限差分方法虽然简单且易于实现, 但也存在一些明显的缺点:

1. **** 几何区域的局限性 ****: 有限差分方法通常适用于规则的几何区域, 例如矩形或正方形等. 对于复杂的几何区域, 网格划分和离散化变得非常困难, 且需要进行特殊处理, 这可能会导致精度下降或者方法变得非常复杂.

2. **** 边界条件的处理困难 ****: 有限差分方法对于简单的边界条件 (如 Dirichlet 边界条件或 Neumann 边界条件) 较为容易处理. 然而, 当遇到更复杂的边界条件 (如 Robin 边界条件或不规则边界), 有限差分方法的实现将变得更加复杂, 可能需要特殊的技巧或近似处理, 甚至影响求解的精度和稳定性.

3. **** 高维问题的计算复杂度 ****: 在高维问题 (例如三维的偏微分方程) 中, 有限差分方法需要对空间进行离散化, 导致离散化点数目急剧增加. 对于大规模问题, 生成的线性方程组的规模很大, 导致计算代价和存储需求显著增加, 且矩阵的稀疏性可能不如其他数值方法 (如有限元方法) 处理得好.

4. **** 适应性较差 ****: 有限差分方法在网格生成上较为僵硬, 通常依赖于均匀的网格划分, 因此对于局部特征变化较大的问题 (如边界层或奇异点附近), 需要全局细化网格, 导致大量不必要的计算. 而像有限元方法那样可以采用自适应网格来集中计算精度的局部区域, 有限差分方法则较难实现.

这些缺点使得有限差分方法在处理复杂几何或边界条件时不如有限元方法和有限体积方法那样灵活. 因此, 有限差分方法通常适用于简单几何形状上的基本边值问题, 而在处理实际工程问题或复杂边界条件时, 往往需要考虑其他数值方法.

1.2 两点边值问题、变分问题、极小化问题

首先, 原始的两点边值问题是:

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), & 0 < x < 1, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

我们通过引入弱解的思想, 将其转化为变分问题. 以下是等价的变分形式的步骤:

1. ** 测试函数空间的定义 ** : 定义合适的函数空间 V , 通常选择满足边界条件的函数集:

$$V = \{v \in C^1([0, 1]) \mid v(0) = v(1) = 0\}.$$

这是包含所有在区间 $[0, 1]$ 上连续且可微, 并且在边界处 $x = 0$ 和 $x = 1$ 为零的函数的空间.

2. ** 弱解的定义 ** : 对于每一个测试函数 $v \in V$, 将方程的二阶导数部分进行积分, 通过分部积分, 将二阶导数的微分方程变为一阶导数的形式. 目标是消除对二阶导数的依赖.

从原始方程 $-u''(x) = f(x)$ 出发, 对整个区间 $[0, 1]$ 做积分:

$$\int_0^1 -u''(x)v(x) dx = \int_0^1 f(x)v(x) dx.$$

通过分部积分并结合边界条件 $u(0) = u(1) = 0$, 可以将左边的项转化为:

$$\int_0^1 u'(x)v'(x) dx = \int_0^1 f(x)v(x) dx.$$

3. ** 变分问题的等价形式 ** : 因此, 两点边值问题的弱解 (即变分问题的形式) 为:

** 寻找 ** $u \in V$, 使得对于任意的 $v \in V$, 满足以下条件:

$$\int_0^1 u'(x)v'(x) dx = \int_0^1 f(x)v(x) dx.$$

这就是两点边值问题的等价变分形式. 通过这个过程, 我们将原来的二阶微分方程转化为一阶导数的积分形式, 适用于弱解的概念.

结合课程板书, 继续介绍极小化问题.

从变分问题的弱形式出发, 我们可以进一步将其理解为一个极小化问题. 具体来说, 变分问题的弱解可以通过极小化某个能量泛函来得到.

假设我们定义如下的能量泛函:

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 |u'(x)|^2 dx - \int_0^1 f(x)u(x) dx,$$

那么, 可以证明, 解变分问题的函数 u 也是极小化该能量泛函的函数. 换句话说, 寻找方程的解 u 相当于寻找一个使得能量泛函 $J(u)$ 取最小值的函数.

因此, 变分问题可以转化为以下的极小化问题:

** 寻找 ** $u \in V$ 使得:

$$J(u) = \min_{v \in V} J(v),$$

其中 V 是满足边界条件的函数空间.

这个极小化问题的物理意义可以理解为寻找系统的最低能量状态. 在这个背景下, 弱解就是使能量泛函最小的函数. 这种方法在许多物理和工程问题中非常常见, 尤其是在弹性力学、电磁学等领域.

通过求解极小化问题, 我们可以得到与两点边值问题等价的数值解. 具体的数值方法, 如有限元法, 通常就是基于这个极小化框架来进行离散化和求解的. 也成为 Ritz 意义下的弱解

**** 变分问题的解是极小化问题的解 ****

假设 u 是变分问题 (W) 的解. 对于任意 $v \in V$, 要证 $J(u) \leq J(v)$.

令 $w = v - u$, 则 $v = u + w$. 直接计算有

$$\begin{aligned} J(v) &= J(u + w) = \frac{1}{2}a(u + w, u + w) - (f, u + w) \\ &= \frac{1}{2}(u', u') + \frac{1}{2}(w', w') + (u', w') - (f, u) - (f, w) \end{aligned}$$

因为 u 是 (W) 的解, 且 $w \in V$, 由定义知

$$(u', w') - (f, w) = 0$$

故

$$J(v) = J(u) + \frac{1}{2}(w', w') \geq J(u).$$

**** 极小化问题的解是变分问题的解 ****

对于任意 $v \in V$, 有 $u + \varepsilon v \in V$,

$$J(u) \leq J(u + \varepsilon v)$$

令

$$\begin{aligned} g(\varepsilon) &= J(u + \varepsilon v) = \frac{1}{2}a(u + \varepsilon v, u + \varepsilon v) - (f, u + \varepsilon v) \\ &= \frac{1}{2}(u', u') + \varepsilon(u', v') + \frac{\varepsilon^2}{2}(v', v') - (f, u) - \varepsilon(f, v) \end{aligned}$$

由于 $g(\varepsilon)$ 在 $\varepsilon = 0$ 时取极小值, 故有

$$g'(0) = (u', v') - (f, v) = 0.$$

**** 变分问题的 C^2 解是两点边值问题的解 ****

设 $u \in C^2[0, 1]$ 是变分问题 (W) 的解, 对任意 $v \in V$,

$$0 = \int_0^1 u'v' dx - \int_0^1 f v dx = - \int_0^1 u''v dx + [u'(1)v(1) - u'(0)v(0)] - \int_0^1 f v dx$$

由于边界条件 $v(0) = v(1) = 0$, 上述表达式化简为:

$$- \int_0^1 u''v dx = \int_0^1 f v dx, \quad \forall v \in V \implies -u'' = f.$$

**** 变分问题解的唯一性 ****

假设 u_1, u_2 是 (W) 问题的解, 则

$$a(u_1 - u_2, v) = 0, \quad \forall v \in V$$

取 $v = u_1 - u_2$, 则

$$a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = \int_0^1 (u_1' - u_2')^2 dx = 0 \implies u_1' - u_2' \equiv 0$$

故 $u_1 - u_2$ 为常数. 又因边界条件 $u_1(0) = u_2(0)$, 故 $u_1 = u_2$.

1.3 有限元方法的基本思想

首先将两点边值问题转化为弱化的变分问题或极小化问题, 然后用有限维求解空间 $V_h \subset V$ 代替无限维求解空间 V , 得到变分问题或极小化问题的有限维近似版本的解 u_h , 期待 u_h 收敛于 u .

下面我们以 Baby 问题为例, 展示求解过程. 首先把区间 $[0, 1]$ 分成

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N < x_{N+1} = 1$$

一共 N 个中间分点, $N+1$ 个区间, 记 $I_j = (x_{j-1}, x_j)$, $h_j = x_j - x_{j-1}$, $h = \max h_i$. 定义连续分段一次多项式函数空间 (实际上这个空间依赖于区间的剖分, 但我们在记号上只体现出最大区间长度 h)

$$V_h = \{v \in C[0, 1] \mid v(0) = v(1) = 0, v|_{I_j} \in \mathbb{P}_1(I_j), j = 1, \dots, N+1\}$$

考虑变分问题, 我们也就是要寻找 $u_h \in V_h$ 使得

$$a(u_h, v_h) = (f, v_h), \quad \forall v_h \in V_h$$

如果我们能找到 V_h 的一组基 $\{\phi_i\}_{i=1}^N$, 那么上述要求等价于 (我还没说明 V_h 的维数就是 N , 但这里就这样用了)

$$a(u_h, \phi_i) = (f, \phi_i), \quad i = 1, \dots, N.$$

如果我们将 u_h 按基展开 $u_h = u_i \phi_i$, 那么上述要求等价于

$$u_i a(\phi_i, \phi_j) = (f, \phi_j), \quad j = 1, \dots, N \iff AU = F.$$

我们使用如下的基函数

$$\phi_j(x) = \frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}, x \in [x_{j-1}, x_j] \quad \frac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j}, x \in [x_j, x_{j+1}], \quad j = 1, \dots, N.$$

容易想明白 $\{\phi_i\}_{i=1}^N$ 确实构成 V_h 的一组基, 并且对于 $v \in V_h$, 有

$$v(x) = v(x_j) \phi_j(x).$$

接下来我们计算矩阵 A 的系数

$$A_{ij} = a(\phi_i, \phi_j) = \int_0^1 \phi_i' \phi_j' dx$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} & -\frac{1}{h_2} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{h_2} & \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} & -\frac{1}{h_3} & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{h_3} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & -\frac{1}{h_N} \\ 0 & \cdots & & -\frac{1}{h_N} & \frac{1}{h_N} + \frac{1}{h_{N+1}} \end{pmatrix}$$

1.4 基循环 \rightarrow 单元循环

此处的循环指的是我们在代码中组装刚度矩阵 A 的方式, 在前面的分析中, 我们是从方程组 $(u_h, \phi_j) = (f, \phi_j)$ 出发, 通过遍历基函数 ϕ_j 来依次得到 A 的第 j 行. 这种想法非常自然, 但在推广到高维的时候会比较困难, 因为比如三角网格上的基函数会比较复杂, 为此我们接下来考虑另一种循环方式, 用单元作循环, 为此我们需要考虑某个单元对整体刚度矩阵 A 的贡献. 为此, 我们需要把基函数 ϕ_j 拆成不同单元上的部分, 比较自然的思路是记号的下标来记录这是第几个单元, 因此 ϕ_j 应该被拆成一个下标为 j 的函数和一个下标为 $j+1$ 的函数, 另外其实每个单元上一共只有两种行为, 要么斜向下一条线段, 要么斜向上一条线段, 我们用上标 0 来表示斜向下的, 上标 1 表示斜向上的, 这样我们定义了局部基函数

$$\psi_j^0 = \frac{x_j - x}{x_j - x_{j-1}} = \frac{1}{h_j}(x_j - x), \quad \psi_j^1 = \frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} = \frac{1}{h_j}(x - x_{j-1})$$

要注意上面两个函数其实并不落在 V_h 中, 但因为我们不用他们来做理论的分析, 只是做运算, 所以没关系. 这样一来我们就有

$$\phi_j(x) = \psi_j^1(x) + \psi_{j+1}^0(x)$$

所以看到 ψ_j 出现在 $\phi_j(x)$ 的 $\psi_j^1(x)$ 部分和 $\phi_{j-1}(x)$ 的 $\psi_j^0(x)$ 部分, 所以第 j 个单元对刚度矩阵 A 的贡献出现在

$$\begin{pmatrix} a(\phi_{j-1}(x), \phi_{j-1}(x)) & a(\phi_{j-1}(x), \phi_j(x)) \\ a(\phi_j(x), \phi_{j-1}(x)) & a(\phi_j(x), \phi_j(x)) \end{pmatrix}$$

这些位置, 如果只把其中第 j 个单元带来的贡献写出来的话就是

$$\begin{pmatrix} a(\psi_j^0(x), \psi_j^0(x)) & a(\psi_j^0(x), \psi_j^1(x)) \\ a(\psi_j^1(x), \psi_j^0(x)) & a(\psi_j^1(x), \psi_j^1(x)) \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} k_j^{00} & k_j^{01} \\ k_j^{10} & k_j^{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{h_j} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =: K_j$$

这个小矩阵应该被加到 A 的第 $j-1, j$ 行与 $j-1, j$ 列的交叉位置, 有两个情形是例外, 首先是 $j=1$ 的情形, 此时我们考虑第一个区间的贡献, 它只对左上角的位置有贡献, 其次是 $j=N+1$ 的情形, 此时我们考虑最后一个区间的贡献, 它只对右下角的位置有贡献.

下面我们再研究第 j 个区间对列向量 F 的贡献, 因为第 j 个区间涉及到第 $j-1$ 和第 j 个基函数, 所以对 F_{j-1} 和 F_j 的值有贡献.

$$\begin{aligned} \int_{x_{j-1}}^{x_j} f \cdot \psi_j^0 dx &= \int_{x_{j-1}}^{x_j} f \cdot \frac{x_j - x}{x_j - x_{j-1}} dx =: b_j^0 \\ \int_{x_{j-1}}^{x_j} f \cdot \psi_j^1 dx &= \int_{x_{j-1}}^{x_j} f \cdot \frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} dx =: b_j^1 \end{aligned}$$

1.5 误差估计

设 $u \in V = H_0^1(I)$ 是如下变分问题的解,

$$a(u, v) = (f, v), \quad \forall v \in V$$

取 $V_h \in V$, 设 $u_h \in V_h$ 是如下有限元问题的解,

$$a(u_h, v_h) = (f, v_h), \quad \forall v_h \in V_h.$$

u 当然满足如上等式, 但 u 不一定在子空间 V_h 中, 所以我们期待 u_h 作为 u 在子空间 V_h 中的投影, 当子空间 V_h 逼近 V , u_h 也逼近 u . 投影的说法在数学上可以严格化为如下误差方程

$$a(u - u_h, v_h) = 0, \quad \forall v_h \in V_h$$

当 a 定义了空间 V 上的内积时, u_h 就是 u 在 V_h 上的正交投影. 本节的标题误差估计说的就是对 $u - u_h$ 的范数进行估计, 做了这个估计之后我们才知道用 u_h 来近似 u 的效果怎么样, 并且我们希望这个估计能与区间最大长度 h 建立起联系.

定理 1.5.1. $\|(u - u_h)'\|_{L^2} \leq \|(u - v)'\|_{L^2}, \forall v \in V_h$.

证明. $((u - u_h)', (u - u_h)') = ((u - u_h)', (u - v)' + (v - u_h)') = ((u - u_h)', (u - v)') \leq \|(u - u_h)'\|_{L^2} \|(u - v)'\|_{L^2}$. \square

推论 1.5.2. $\|(u - u_h)'\|_{L^2} = \inf_{v \in V_h} \|(u - v)'\|_{L^2}$

上述推论的好处在于, 我们已经在前面的课程中研究过一个函数 u 及其分段线性插值 u_I 之间的误差估计, 而 u_I 又恰恰落在 V_h 中, 结合上述推论, 对 $u - u_I$ 的估计可以直接给出 $u - u_h$ 的估计.

定理 1.5.3. 分段线性插值的一阶导数的 L^2 误差: $\|(u - u_I)'\|_{L^2} \leq Ch\|u''\|_{L^2}$, 其中 C 是一个与 u, h 无关的常数.

证明. 由 Rolle 中值定理, 存在 $\xi_j \in (x_j, x_{j+1})$ 使得 $(u - u_I)'(\xi_j) = 0$. 对任意 $x \in (x_j, x_{j+1})$,

$$(u - u_I)'(x) = \int_{\xi}^x (u - u_I)''(t) dt = \int_{\xi}^x u''(t) dt \leq |x - \xi|^{\frac{1}{2}} \|u''\|_{L^2[\xi, x]} \leq |x - \xi|^{\frac{1}{2}} \|u''\|_{L^2[x_j, x_{j+1}]}$$

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} (u - u_I)'(x)^2 dx \leq \|u''\|_{L^2[x_j, x_{j+1}]}^2 \int_{x_j}^{x_{j+1}} |x - \xi| dx \leq h^2 \|u''\|_{L^2[x_j, x_{j+1}]}^2 \implies \|(u - u_I)'\|_{L^2}^2 \leq h^2 \|u''\|_{L^2}^2$$

\square

定理 1.5.4. 有限元方法近似解的 L^2 误差: $\|u - u_h\|_{L^2} \leq Ch^2\|u''\|_{L^2}$, 其中 C 是一个与 u, h 无关的常数.

证明. 考虑对偶方程

$$\begin{cases} -w'' = u - u_h \\ w(0) = w(1) = 0 \end{cases}$$

我们有

$$\|u - u_h\|_{L^2}^2 = (u - u_h, u - u_h) = (u - u_h, -w'') = ((u - u_h)', w')$$

由误差方程, 对任意的 $v_h \in V_h$ 有

$$\|u - u_h\|_{L^2}^2 = ((u - u_h)', (w - v_h)') \leq \|(u - u_h)'\|_{L^2} \|(w - v_h)'\|_{L^2}$$

取 $v_h = w_I$, 则有

$$\|u - u_h\|_{L^2}^2 \leq h \|(u - u_h)'\|_{L^2} \|w''\|_{L^2} = h \|(u - u_h)'\|_{L^2} \|u - u_h\|_{L^2}$$

所以

$$\|u - u_h\|_{L^2} \leq h \|(u - u_h)'\|_{L^2} \leq h^2 \|u''\|_{L^2}$$

\square

定理 1.5.5.

$$\|u - u_h\|_\infty \leq Ch^2 \|u''\|_\infty$$

证明. 定义 Green 函数满足

$$LG(x, s) = \delta(s - x)$$

其中

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx &= 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) \delta(s - x) ds = f(x) \\ (LG(x, s), f(s))_s &= (\delta(s - x), f(s))_s = f(x) = Lu(x) \end{aligned}$$

$$(G(x, s), f(s))_s = (G(x, s), Lu(s))_s = (LG(x, s), u(s))_s = (\delta(s - x), u(s))_s = u(x)$$

$$u(x) = (G(x, s), f(s))_s$$

$$u(x) = (G(x, s), f(s))_s = (G(x, s), -u'(s))_s = - \int_0^1 G(x, s) \frac{d^2}{ds^2} = \int_0^1 \frac{d}{ds} G(x, s) \frac{d}{ds} u(s) ds = a(G(x, s), u(s))_s$$

$$u_h(x) = a(G(x, s), u_h(s))_s$$

$$u(x) - u_h(x) = a(G(x, s), u(s) - u_h(s))_s$$

$$(u - u_h)(x_j) = a(G(x_j, s), u(s) - u_h(s))_s = 0$$

$$\implies u_h(x) = u_I(x)$$

$$\|u - u_I\|_\infty \leq Ch^2 \|u''\|_\infty$$

$$G(x_j, t) = \begin{cases} (x_j - 1)t & t < x_j \\ x_j(t - 1) & t \geq x_j \end{cases}$$

□

1.6 二维 Poisson 方程的有限元方法

考虑边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \Gamma \subset \partial\Omega \end{cases}$$

$$u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$$

$$- \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) v dx dy$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} dx dy \right) \\
&\quad - \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x} v \Big|_{x=0}^{x=1} dy - \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial y} v \Big|_{y=0}^{y=1} dx \\
&\quad - \int_{\Omega} \Delta u v d\Omega = \int \nabla u \cdot \nabla v d\Omega - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v dS
\end{aligned}$$

变分问题

$$V = \left\{ w \mid w \in C(\bar{\Omega}), \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y} \text{ 是分片连续函数}, w|_{\Gamma} = 0 \right\}$$

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\Omega, \quad (f, u) = \int_{\Omega} f u d\Omega$$

找到 $u \in V$ 满足

$$a(u, v) = (f, v), \forall v \in V$$

极小化问题

$$J(u) = \frac{1}{2} - (f, u)$$

找到 $u \in V$ 满足

$$J(u) \leq J(v), \quad \forall v \in V$$

若 (W) 的解充分光滑, 则 $W \implies P$

有限元问题 $V_h \subset V$ 找到 $u_h \in V_h$ 满足

$$a(u_h, v_h) = (f, v_h), \quad \forall v_h \in V_h$$

$$J(u_h) \leq J(v_h), \forall v_h \in V_h$$

二维网格剖分设 Ω 的边界分片光滑当 Γ 不是由线段构成, 用截弯取直的方法折线 Γ_h 逼近 Γ
 Γ_h 围成的区域 Ω_h , 将 Ω_h 分成若干个三角形, 每个单元 k , 三角形的顶点, 称为节点, 网格剖分
 记作 τ_n

V_h 分段线性连续函数空间

$$V_h = \{u \in C(\Omega), u|_k \in P'(K), K \in J_n, u|_{\Gamma} = 0\}$$

基函数: 基函数的个数与内部结点的个数相同 $V_h = \text{span} \{\phi_1, \dots, \phi_M\}$

$$\phi_i(P_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

$$u_h(x, y) = \sum_{j=1}^M \eta_j \phi_j(x, y)$$

$$v_h(P_j) = \sum_{j=1}^M \eta_j \phi_j(P_i) = \eta_j$$

$$u_h(x, y) = \sum_{j=1}^M M u_h(P_j) \phi_j(x, y)$$

$$a(u_h, v_h) = a(u_h(P_i) \phi_i, v_h(\phi_j) \phi_j) = V^T A U$$

$$(f, v_h) =$$

$$V = \left\{ \omega \mid \omega \in C(\bar{\Omega}), \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} \text{ 分片连续函数} \right\}$$

1.7

考虑边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f, & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \Gamma \subset \partial\Omega \end{cases}$$

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\Omega + \int_{\Omega} u v d\Omega$$

如果是原来的 $a(u, v)$

$$a(u, u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\Omega$$

对于新的 $a(u, v)$

$$a(u, u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + u^2 d\Omega$$

都可以定义内积, 内积都可以导出范数呀, 为什么强调新的这个可以导出范数呢.

误差方程可以改写成

$$(u - u_h, v_h)_E = 0, \quad \forall v_h \in V_h$$

然后像我之前说的投影

内积都可以导出范数呀, 所以不是内积, 因为常数的括号也为零了

所以 $u - u_h$ 与空间是垂直的. 所以是一种最佳逼近.

1.8 Neumann 边值问题

考虑边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f, & x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g, & x \in \Gamma \subset \partial\Omega \end{cases}$$

这个就对应到导数不为 0

现在解空间怎么取

$$\int_{\Omega} -\Delta u \cdot v d\Omega = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\Omega - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} \cdot v ds$$

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} u v d\Omega = \int_{\Omega} f v d\Omega + \int_{\Gamma} g v ds$$

$$a(u, v)$$

$$F(v) = \int_{\Omega} f u d\Omega + \int_{\Gamma} g v ds$$

极小化问题

$$J(u) = \frac{1}{2} a(v, v) - F(v)$$

例 1.8.1.

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0, & x \in \Gamma \subset \partial\Omega \end{cases}$$

现在解没有唯一性了

$$\int_{\Omega} f d\Omega = \int_{\Omega} -\Delta u d\Omega = \int_{\Omega} \nabla u d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} ds$$

对解空间提一个额外的要求, $\int_{\Omega} \omega d\Omega = 0$

Neumann 边界条件也可以转化为

$$a(u, v) = (f - \tilde{f}, v)$$

实际编程求解, 寻找 $u \in H^1(\Omega), \lambda \in \mathbb{R}$

$$a(u, v) + (\lambda, v) = (f, v), \forall v \in V, \quad (u, \mu) = 0, \forall \mu \in \mathbb{R}$$

1.9

三角形单元表示

N_p 是对 Ω 做三角剖分时的节点个数

$P_k, k = 1, \dots, N_p$

任取三角形 $K = \Delta P_i P_j P_m$, 三个节点的编号未必是相邻的

需要结点编号信息, 单元编号信息, 每个单元对应的结点信息

每个单元的对应的邻居单元的信息

一个点是内部结点还是外部结点

1.10 10 月 8 日-二维情形下的编程实现

$$-\Delta u = f, x \in \Omega, \quad u = 0, x \in \Gamma_0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = g, x \in \Gamma_1, \quad \partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1, \quad \Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset.$$

通过讨论 Γ_0, Γ_1 是否非空以及 σ 是否为 0 我们能得所有三类边界条件.

$$\begin{aligned} -\int_{\Omega} \Delta u \cdot v d\Omega &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\Omega - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v ds = \int_{\Omega} f v d\Omega \\ \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\Omega - \int_{\Gamma_0} \frac{\partial u}{\partial n} v dS + \int_{\Gamma_1} \sigma u v dS &= \int_{\Omega} f v d\Omega + \int_{\Gamma_1} g v dS \end{aligned}$$

取

$$V = \{v \in H^1(\Omega) \mid v(x) = 0, x \in \Gamma_0\}$$

我们得到变分问题, 找到 $u \in V$, 满足

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\Omega + \int_{\Gamma_1} \sigma u v dS = (f, v) = \int_{\Omega} f v d\Omega + \int_{\Gamma_1} g v dS, \quad \forall v \in V$$

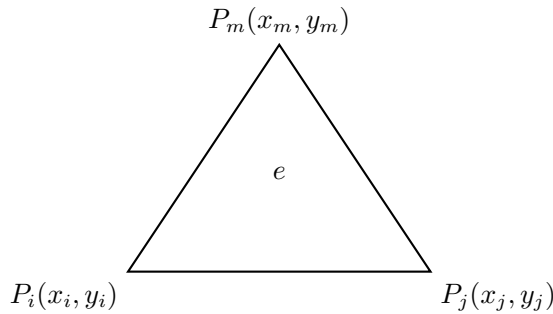
构造结点, 构造剖分, 选择使用分片线性函数空间来逼近, 逻辑, 一个分片线性函数由它在结点处的值完全确定, 上述积分可以分片进行计算, 每片上的函数的函数值都只由这个片的三个端点决定. 所以我们先研究一片上的情形

$$V_h = \left\{u \mid u \in C^1(\bar{\Omega}), u \in P^1(K), K \in \mathcal{T}_n, u|_{\Gamma_0} = 0\right\}$$

找到 $u_h \in V_h$ 满足

$$a(u_h, v_h) = F(v_h), \quad \forall v_h \in V_h$$

先看每个单元上的基函数, 类似于 1 维的 local 基函数



局部单元形函数, 假设在每个单元上是线性函数, $u \in V_h$

$$u(x, y) = ax + by + c$$

假设三角顶点的函数值 u_i, u_j, u_m

$$\begin{cases} ax_i + by_i + c = u_i \\ ax_j + by_j + c = u_j \\ ax_m + by_m + c = u_m \end{cases}$$

行列式不为零, 解出 a, x, y

$$u(x, y) = N_i(x, y)u_i + N_j(x, y)u_j + N_m(x, y)u_m$$

在这个单元上写成了节点值的线性组合的形式

其实和我们

$$u = \sum u_i \phi_i$$

再放到局部是一样的, 只不过这里没有得到整体的, 直接写出了局部的.

$$N_i(x, y) = \frac{i}{2\Delta_k} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix} = \frac{1}{2\Delta_k} (a_i x + b_i y + c_i)$$

$$a_i = \begin{vmatrix} y_i & 1 \\ y_m & 1 \end{vmatrix}, b_i = - \begin{vmatrix} x_i & 1 \\ x_m & 1 \end{vmatrix}, c_i = \begin{vmatrix} x_j & y_j \\ x_m & y_m \end{vmatrix}$$

性质类似于 Larange 插值基函数

$$N_i(P_l) = \begin{cases} 1 & i = l \\ 0 & i \neq l \end{cases}$$

下面计算局部基函数在当前单元的积分值

$$u_h(x, y) = N_i u_i + N_j u_j + N_m u_m$$

$$v_h(x, y) = N_i v_i + N_j v_j + N_m v_m$$

$$\nabla u_h = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_h}{\partial x} \\ \frac{\partial u_h}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial u_h}{\partial x} = \frac{1}{2\Delta_k} (a_i u_i + a_j u_j + a_m u_m)$$

$$\frac{\partial u_h}{\partial y} = \frac{1}{2\Delta_k} (b_i u_i + b_j u_j + b_m u_m)$$

$$B = \frac{1}{2\Delta_k} \begin{pmatrix} a_i & a_j & a_m \\ b_i & b_j & b_m \end{pmatrix}, \vec{u} = \begin{pmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \end{pmatrix}$$

这样一来

$$\nabla u_h = B \vec{u}_k, \quad \nabla v_h = B \vec{v}_k$$

$$\vec{N}(x, y) = \begin{pmatrix} N_i \\ N_j \\ N_m \end{pmatrix}$$

$$u_h(x, y) = \vec{N}(x, y)^T \vec{u}_k$$

下面表示我们需要表示的

$$\begin{aligned}\nabla u_h \cdot \nabla v_h &= (B\vec{u}_k)^T B\vec{v}_k = \vec{u}_k^T B^T B\vec{v}_k = u_k^T A_k^1 \vec{v}_k \\ \sigma uv &= \sigma(\vec{N}^T \vec{u}_k)(\vec{N}^T \vec{v}_k) = \sigma u_k^T \vec{N} \vec{N}^T u_k = \sigma \vec{u}_k^T A_k^0 \vec{v}_k \\ f v_h &= f \vec{N}^T \vec{v}_k \\ g v_h &= g \vec{N}^T \vec{v}_k\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a(u_h, v_h) &= \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v_h d\Omega + \int_{\Gamma_1} \sigma uv dS \\ &= \sum_{k \in \mathcal{T}_h} \int_K \nabla u_h \cdot \nabla v_h d\Omega + \sum_{k \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K \cap \Gamma_1} \sigma uv dS \\ &= \sum_{k \in \mathcal{T}_h} \vec{u}_k^T A_k^1 \vec{v}_k + \sum_{k \in \mathcal{T}_h} u_k^T A_k^0 \vec{v}_k = \sum u_k^T A_k \vec{v}_k \\ A_k^1 &= \int_K B^T B d\Omega, \quad A_k^0 = \int_{\partial K \cap \Gamma_1} N_k N_k^T dS \\ F(v_h) &= \int_{\Omega} f v_h d\Omega + \int_{\Gamma_1} g v_h dS \\ &= \sum_{k \in \mathcal{T}_h} \int_K f \vec{N}_k(x, y) v_k d\Omega + \sum \int_{\partial K \cap \Gamma_1} g \vec{N}^T \vec{v}_k dS \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (b_k^1)^T \vec{v}_k + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\vec{b}_k^0)^T \vec{v}_k = \sum b_k v_k \\ b_k^1 &= \int_K f N_k(x, y) d\Omega, \quad b_k^0 = \int_{\partial K \cap \Gamma_1} g \vec{N}_k dS \\ \sum_K u_k^T A_k v_k &= \sum_K b_k^T v_k\end{aligned}$$

整体刚度矩阵

设 N_p 是对 Ω 作三角剖分时的节点个数 $u_h(x, y)$ 在结点上的函数值

$$\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_{N_p})^T$$

$$\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_{N_p})^T$$

类似一维, 将 3×3 矩阵和 3×1 向量扩充为 N_p 维矩阵和 N_p 维的向量

设 K 是 $P_i P_j P_m$, 设

$$A_k^1 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$$

1.11 本质边界条件

$$V = \{v \in H^1(\Omega), v|_{\Gamma_0} = 0\}$$

$$M = \{v \in H^1(\Omega), v|_{\Gamma_0} = \alpha(x, y)\}$$

检验函数仍取 $v \in V$, 但找 $u \in M$, 这个时候二者不在同一个空间

$$V_h = \{v \in C(\bar{\Omega}), v \in P^1(K), v|_{\Gamma_0} = 0\}$$

$$M_h = \{v \in C(\bar{\Omega}), v \in P^1(K), v|_{\Gamma_0} = \alpha(x, y)\}$$

有限元解

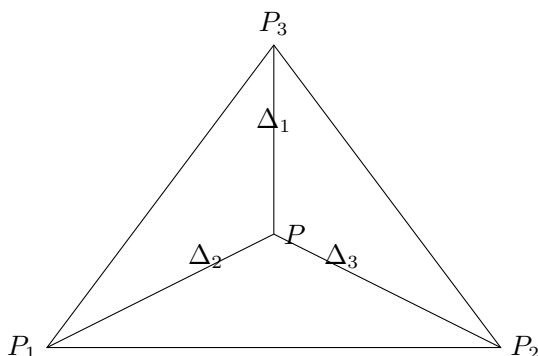
找到 $u_h \in M_h$

$$a(u_h, v_h) = F(v_h), \quad \forall v_h \in V_h$$

重要的是 $a(u, v) = (b, v)$ 这个式子是一直对的, 然后分析 u 和 v 在哪个空间. 再看 u 的哪些分量是自由度

下一步是算积分

$$\int_K \nabla u_h \cdot \nabla v_h dK$$



面积坐标是由线性基函数引入的, 但是不选线性基函数的时候, 我们还是会选择面积坐标

他把一个普通的三角形变成一个标准的三角形, 有利于我们积分

任何一个关于 x, y 的 k 次多项式, 都是 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 的 k 次齐次多项式, 所以不是线性基函数也可以转化

后面还会反复用到, 只需要构造出标准单元上的基函数, 变换回去就可以得到任意的.

函数 $F(x, y)$ 在单元 $K = \Delta P_1 P_2 P_3$ 上的积分

$$\int_K F(x, y) dx dy = \int_{\hat{K}} F(\lambda_1, \lambda_2) \left\| \frac{D(x, y)}{D(\lambda_1, \lambda_2)} \right\|$$

若 $F(x, y)$ 是 x, y 的多项式

如果被积函数 $F(x, y)$ 不是 x, y 的多项式形式, 仍然可以化成面积坐标,

$$\int_K F(x, y) dx dy =$$

采用数值积分

下面看边上的积分

1.12

1.13

1.14 非协调有限元

1.15 三角形 CR 元的误差估计

$$\begin{cases} -\Delta u = f \\ u|_{\Gamma=0} \end{cases}$$

变分问题, 找到 $u \in V = H_0^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned} a(u, v) &= L(v), \quad v \in V \\ a(u, v) &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx, \quad L(v) = \int_{\Omega} f v dx \end{aligned}$$

有限元问题

$$V_h = \{v \mid v \in P^1(K), v \text{ 在单元中点连续}, v|_{\Gamma} = 0\}$$

此时 $V_h \subset V$, 双线性形式

$$a_h(u_h, v_h) = \sum_{K \in \Gamma_h} \int_K \nabla u_h \cdot \nabla v_h dx$$

找到 $u_h \in V_h$, 满足

$$a_h(u_h, v) = L(v), \quad \forall v \in V_h$$

定义

$$\|v\|_h = \sqrt{a_h(v, v)}$$

变分问题的解不满足有限元方程

$$E(u, v) = a_h(u, v) - L(v), \quad \forall v \in V_h$$

$$a_h(u, v) = E(u, v) + L(v)$$

这是准确解满足的方程, 下面是数值解满足的方程

$$a_h(u_h, v) = L(v)$$

二者做差得到

$$a_h(u - u_h, v) = E(u, v),$$

对应原来的误差方程. Strang Lemma 告诉我们

$$\|u - u_h\|_h \leq C \left(\inf_{v \in V_h} \|u - v\|_h + \sup_{w \in V_h \setminus \{0\}} \frac{|E(u, w)|}{\|w\|_h} \right)$$

插值误差估计

$$\inf_{v \in V_h} \|u - v\|_h \leq \|u - \Pi u\|_h \leq Ch|u|_{H^2(\Omega)}$$

Chapter 2

作业

2.1 第一周书面作业

1. 假设

$$V = \{w \mid w \in C[0, 1], w' \text{ 是 } [0, 1] \text{ 中分片连续有界函数}, w(0) = w(1) = 0\},$$

假设 $w \in C[0, 1]$ 并且满足

$$\int_0^1 wv \, dx = 0, \quad \forall v \in V.$$

证明:

$$w(x) = 0, \quad \forall x \in [0, 1].$$

证明. 假设 $w(x_0) \neq 0$, 不妨设 $w(x_0) > 0$. 由 w 连续性知, $\exists \delta > 0$, 使得在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 上

$$w(x) > \frac{1}{2}w(x_0).$$

取 $v \in V$ 满足 v 在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 上大于 0, 且在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 外恒等于 0. 则

$$\int_0^1 wv \, dx > 0.$$

□

考虑微分方程

$$-u'' = f, \quad x \in [0, 1]$$

乘上测试函数 v 后在 $[0, 1]$ 上积分并做分部积分得到

$$\int_0^1 u'v' \, dx - u'(1)v(1) + u'(0)v(0) = \int_0^1 fvd \, x$$

我们要根据边值条件来确定测试函数到底落在哪个空间里, 私以为有三条要求

- 对 v 的要求结合 u 的边值条件要使得边界项消失
- 解 u 也要落在测试函数空间中
- 如无必要, 不要增加额外的限制

有两种情形是我们目前能够处理的. 比如 $u(0) = 0$, 那么我们就要求 $v(0) = 0$, 这样一方面因为 $u'(0)$ 的存在我们必须让 $v(0) = 0$, 另一方面测试函数空间满足这个限制的话我们从测试函数空间中找到的解 u 就必然满足边值条件 $u(0) = 0$. 但其他情形比如 $u(0) = 1$, 我们暂时就没招了, 因为 $u'(0)$ 的存在我们还是要让 $v(0) = 0$, 但是这样从测试函数空间中找解的话解就满足错误的边值条件 $u(0) = 0$ 而不是 $u(0) = 1$. 另一个我们能处理的情形是 $u'(0) = 0$, 这样与 $u'(0)$ 有关的边界项自然消失了, 所以我们不需要对 $v(0)$ 提要求. 但我们会想此时需要要求 $v'(0) = 0$ 吗? 不然从测试函数空间中找到的解 u 怎么满足边值条件 $u'(0) = 0$ 呢? 后面我们会看到不需要要求 $v'(0) = 0$, 解 u 自动就会满足 $u'(0) = 0$, 因此我们将 $u'(0) = 0$ 这个边值条件称为自然边值条件.

2. 假设 $f(x)$ 是光滑函数, 给出两点边值问题

$$\begin{cases} -u'' + u = f, & 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

对应的变分问题.

解. 取测试函数空间

$$V = \{v \in C[0, 1] \mid v' \text{ 是 } [0, 1] \text{ 中分片连续函数, } v(0) = v(1) = 0\}.$$

则变分问题为: 找 $u \in V$ 满足

$$\int_0^1 u'v' dx + \int_0^1 uv dx = \int_0^1 f v dx, \quad \forall v \in V.$$

假设 $u \in V$ 是变分问题的解且 $u \in C^2[0, 1]$, 由 1 相同论证可知 u 也是原两点边值问题的解. \square

3. 假设 $a(x), f(x)$ 是光滑函数, 给出两点边值问题

$$\begin{cases} -(a(x)u'(x))' + u(x) = f(x), & 0 < x < 1 \\ u(0) = u'(1) = 0, \end{cases}$$

对应的变分问题.

解. 取测试函数空间

$$V = \{v \in C[0, 1] \mid v' \text{ 是 } [0, 1] \text{ 中分片连续函数, } v(0) = 0\}.$$

则变分问题为: 找 $u \in V$ 满足

$$\int_0^1 au'v' dx + \int_0^1 uv dx = \int_0^1 f v dx, \quad \forall v \in V.$$

假设 $u \in V$ 是变分问题的解且 $u \in C^2[0, 1]$, 分部积分得

$$a(1)u'(1)v(1) - a(1)u'(0)v(0) - \int_0^1 (au')'v dx + \int_0^1 uv dx = \int_0^1 f v dx, \quad \forall v \in V$$

因为 $v \in V$ 所以自然有

$$a(1)u'(1)v(1) - \int_0^1 (au')'v dx + \int_0^1 uv dx = \int_0^1 f v dx, \quad \forall v \in V.$$

考虑 $v \in V \cap \{v \mid v(1) = 0\}$ 则

$$-\int_0^1 (au')'v dx + \int_0^1 uv dx = \int_0^1 f v dx, \quad \forall v \in V \cap \{v \mid v(1) = 0\}.$$

由 1 相同论证可知

$$-(a(x)u'(x))' + u(x) = f(x), \quad 0 < x < 1.$$

接下来还需要证明 $u'(1) = 0$. 这是因为

$$a(1)u'(1)v(1) = 0, \quad \forall v \in V \implies u'(1) = 0.$$

□

4. 假设函数 $f(x)$ 是分片线性的, $f(x) = \sum_{j=1}^N f_j \phi_j(x)$, 证明: 求解边值问题的有限元方法可以写成如下形式

$$AU = MF$$

其中 M 是质量矩阵.

证明.

$$a(u_h, v_h) = (f, v_h), \quad \forall v_h \in V_h \iff a(u, \phi_j) = (f, \phi_j), \quad \forall 1 \leq j \leq N$$

代入 $u = \sum_{j=1}^N u_j \phi_j(x)$, $f = \sum_{j=1}^N f_j \phi_j(x)$, 得

$$u_i a(\phi_i, \phi_j) = f_j (\phi_i, \phi_j), \quad \forall 1 \leq j \leq N.$$

这等价于线性方程组

$$AU = MF,$$

其中 $U = (u_1, \dots, u_N)^T$, $F = (f_1, \dots, f_N)^T$, $A = (a(\phi_i, \phi_j))_{N \times N}$, $M = ((\phi_i, \phi_j))_{N \times N}$.

□

2.2 第二周书面作业

1. 验证

$$(f, \phi_i) = \frac{1}{2}(h_i + h_{i+1})(f(x_i) + \mathcal{O}(h)).$$

证明.

$$(f, \phi_i) - \frac{1}{2}(h_i + h_{i+1})f(x_i) = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (f(x) - f(x_i))\phi_i(x)dx \leq \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \phi_i(x)dx \cdot \max_{x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]} |f'(x)| \cdot h$$

□

2. 证明

$$\|u - u_I\|_{L^2} \leq Ch^2 \|u''\|_{L^2}.$$

证明. 结合定理 0.4.5, 我们只需要证明存在与 h, u 无关的常数 C' 使得

$$\|u - u_I\|_{L^2} \leq C'h \|(u - u_I)'\|_{L^2}$$

变形后这等价于

$$\int_0^1 w(x)^2 dx \leq c' \int_0^1 w'(x)^2 dx$$

其中 $w(0) = 0$.

$$|w(x)| = \left| \int_0^x w'(t) dt \right| \leq \int_0^x |w'(t)| dt \leq \left(\int_0^1 w'(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

□

2.3 第三周书面作业

1. 设 V 表示空间

$$V = \{v \in L^2(0, 1) \mid a(v, v) < \infty, v(0) = 0\}$$

其中 $a(\cdot, \cdot)$ 为双线性形式

$$a(u, v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)dx.$$

证明以下的强制性结果:

$$\|v\|^2 + \|v'\|^2 \leq Ca(v, v), \quad \forall v \in V.$$

给出 C 的一个取值.

证明. □

2. 证明如下版本的 Sobolev 不等式

$$\|v\|_{max}^2 \leq Ca(v, v), \quad \forall v \in V.$$

给出 C 的一个取值.

3. 当 Ω 是一个正方形时, 为

$$\begin{cases} -\Delta u = f & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \Gamma \end{cases}$$

构造一个差分方法, 使用以下差分近似:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) \approx \frac{u(x_1 + h, x_2) - 2u(x_1, x_2) + u(x_1 - h, x_2)}{h^2}.$$

与例 1.1 进行比较.

4. 证明

$$\langle u - u_h, v \rangle = 0, \quad \forall v \in V_h$$

等价于

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq \|u - v\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall v \in V_h$$

5. 证明以下问题

$$-u'' = f \quad \text{在 } I = (0, 1) \text{ 上,}$$

$$u(0) = u'(1) = 0,$$

可以表示成如下变分形式: 寻找 $u \in V$ 使得

$$(u', v') = (f, v), \quad \forall v \in V,$$

其中 $V = \{v \in H^1(I) : v(0) = 0\}$. 使用分段线性函数为该问题构造一个有限元方法, 并且在均匀划分的情况下求出相应的线性方程组. 特别地, 研究边界条件 $u'(1) = 0$ 是如何被该方法近似的.

6. 证明 M 和 V 是等价的

7. 设 Ω 是平面内的有界区域, 并且其边界 Γ 被分为两个部分 Γ_1 和 Γ_2 . 给出以下问题的变分形式

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{在 } \Omega \text{ 内,} \\ u = u_0 & \text{在 } \Gamma_1, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{在 } \Gamma_2, \end{cases}$$

其中 f, u_0, g 是已知函数. 然后为该问题构造一个有限元方法, 并给出该问题在力学或物理中的解释.

2.4 第六周书面作业

1. 设 Ω 是有界的, 且 $1 \leq p \leq q \leq \infty$. 证明 $L^q(\Omega) \subseteq L^p(\Omega)$. 给出例子说明当 $p < q$ 时该包含关系是严格的, 并且当 Ω 无界时该包含关系是错误的.

证明. 由 Hölder 不等式,

$$\int_{\Omega} |u|^p dx \leq \|u\|_{L^{\frac{q}{p}}}^p \|1\|_{L^{\frac{q}{q-p}}}.$$

取 $\Omega = (0, 1)$, 数学分析中熟知 $x^{-\alpha}$ 在 Ω 上可积当且仅当 $\alpha < 1$, 取 $1/q < \alpha < 1/p$ 即可.

取 $\Omega = (1, +\infty)$, 则 $1/x$ 是 L^2 可积的但不是 L^1 可积的. \square

2. 证明在区域 Ω 上有界的连续函数全体在范数 $\|\cdot\|_{L^\infty(\Omega)}$ 下构成一个 Banach 空间.

证明. 此时 L^∞ 范数就是最大模范数, 对于 Cauchy 列, 每个点 x 处先由于 \mathbb{R} 的完备性得到一个序列极限, 再由于收敛是一致收敛得到这个序列极限也是连续函数, 所以空间是完备的. \square

3. 假设 Ω 是有界的, 并且在 $L^p(\Omega)$ 中 $f_j \rightarrow f$. 使用 Hölder 不等式证明

$$\int_{\Omega} f_j(x) dx \rightarrow \int_{\Omega} f(x) dx \quad \text{当 } j \rightarrow \infty.$$

证明.

$$\left| \int_{\Omega} f_j(x) - f(x) dx \right| \leq \int_{\Omega} |f_j(x) - f(x)| dx \leq \|f_j - f\|_{L^p(\Omega)} \|1\|_{L^q(\Omega)} = \|f_j - f\|_{L^p(\Omega)}.$$

\square

4. 问题如下:

设 $\Omega = [0, 1]$, 且 $1 \leq p < \infty$. 证明在 (1.1.12) 中定义的函数 f 属于 $L^p(\Omega)$, 并且

$$\|f - f_j\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0 \quad \text{当 } j \rightarrow \infty$$

(提示: 首先证明 $\log x \in L^p(\Omega)$, 然后使用 $L^p(\Omega)$ 是一个 Banach 空间的事实.)

证明思路:

1. ** 证明 $\log x \in L^p(\Omega)$: 首先考虑 $\log x$ 在 $L^p(\Omega)$ 空间中的可积性. 我们需要计算:

$$\int_0^1 |\log x|^p dx$$

由于 $\log x$ 在 $x = 1$ 附近是有限的, 我们重点分析积分在 $x = 0$ 附近的行为. 在 x 趋近于 0 时, $\log x$ 趋于 $-\infty$, 因此我们需要验证该积分是否收敛.

对于 $x \in (0, 1]$, 我们有

$$\int_0^1 |\log x|^p dx = \int_0^1 (-\log x)^p dx$$

令 $x = e^{-t}$, 则 $dx = -e^{-t} dt$, 积分上限从 0 变为 ∞ , 于是积分变为:

$$\int_0^{\infty} t^p e^{-t} dt$$

这个积分是伽玛函数 $\Gamma(p+1)$, 它是有限的, 因此 $\log x \in L^p(\Omega)$ 对于任意 $1 \leq p < \infty$ 成立.

2. ** 证明 $f \in L^p(\Omega)$ **: 根据 (1.1.12), 函数 $f(x)$ 定义为:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \log |x - r_n|$$

由于 $\log x \in L^p(\Omega)$, 并且每一项 $2^{-n} \log |x - r_n|$ 的加权系数 2^{-n} 使得该级数在 $L^p(\Omega)$ 中收敛, 因此 $f(x) \in L^p(\Omega)$ 。

3. ** 证明 $\|f - f_j\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0$ **: 设 $f_j(x)$ 为部分和:

$$f_j(x) = \sum_{n=1}^j 2^{-n} \log |x - r_n|$$

我们要证明:

$$\|f - f_j\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x) - f_j(x)|^p dx \right)^{1/p} \rightarrow 0 \quad \text{当 } j \rightarrow \infty$$

注意到 $f(x) - f_j(x)$ 是从第 $j+1$ 项开始的级数项:

$$f(x) - f_j(x) = \sum_{n=j+1}^{\infty} 2^{-n} \log |x - r_n|$$

由于每一项 $2^{-n} \log |x - r_n|$ 在 $L^p(\Omega)$ 中的范数被 2^{-n} 控制, 因此级数部分和在 $L^p(\Omega)$ 中收敛, 且:

$$\|f - f_j\|_{L^p(\Omega)} \leq \sum_{n=j+1}^{\infty} 2^{-n} \|\log |x - r_n|\|_{L^p(\Omega)}$$

由于级数的尾项趋于 0, 因此 $\|f - f_j\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0$ 。

结论:

我们证明了函数 $f \in L^p(\Omega)$, 并且 $\|f - f_j\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0$ 当 $j \rightarrow \infty$ 。

2.5 第七周书面作业

1. 证明 $(\frac{\partial}{\partial x})^\alpha |x| = x^\alpha/|x|$ 对所有 $x \neq 0$ 和 $|\alpha| = 1$ 成立.

证明.

$$\frac{\partial}{\partial x_i} |x| = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right)^{1/2} = \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right)^{-1/2} \cdot 2x_i = \frac{x_i}{|x|}.$$

□

2. 证明: 设 $\psi \in C^{|\alpha|}(\Omega)$, 那么 ψ 的弱导数 $D_w^\alpha \psi$ 存在, 并且它等于经典意义下的导数 $D^\alpha \psi$.

证明. 通过分部积分, 且使用测试函数 φ 在 Ω 的边界为 0 的性质,

$$\int_{\Omega} D^\alpha \psi \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \psi D^\alpha \varphi dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

□

3. 证明函数 $f(x) = 1 - |x|$ 的更高阶弱导数 $D_w^j f$ 不存在.

证明. 一阶弱导数 g 已经存在, 而我们已知 g 的一阶弱导数不存在, 所以 f 的高阶弱导数不存在. □

4. 设 $f(x) = |x|^r$, 其中 r 是给定的实数. 证明如果 $r > 1 - n$, 则函数 f 在单位球上具有一阶弱导数.

证明. 为了证明这一结论, 假设 $\epsilon > 0$, 并设 $\phi^\epsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 是一个截断函数, 它在 $B_\epsilon(0)$ 内等于 1, 在 $B_{2\epsilon}(0)$ 外等于 0. 那么

$$f^\epsilon(x) = \frac{1 - \phi^\epsilon(x)}{|x|^a}$$

属于 $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, 并且在 $|x| \geq 2\epsilon$ 时 $f^\epsilon = f$. 通过分部积分, 我们得到

$$\int (\partial_i f^\epsilon) \phi dx = - \int f^\epsilon (\partial_i \phi) dx. \quad (3.5)$$

我们有

$$\partial_i f^\epsilon(x) = -\frac{a}{|x|^{a+1}} \frac{x_i}{|x|} [1 - \phi^\epsilon(x)] - \frac{1}{|x|^a} \partial_i \phi^\epsilon(x).$$

由于 $|\partial_i \phi^\epsilon| \leq C/\epsilon$ 且 $|\partial_i \phi^\epsilon| = 0$ 当 $|x| \leq \epsilon$ 或 $|x| \geq 2\epsilon$ 时, 我们有

$$|\partial_i \phi^\epsilon(x)| \leq \frac{C}{|x|}.$$

因此

$$|\partial_i f^\epsilon(x)| \leq \frac{C'}{|x|^{a+1}},$$

其中 C' 是与 ϵ 无关的常数. 此外,

$$\partial_i f^\epsilon(x) \rightarrow -\frac{a}{|x|^{a+1}} \frac{x_i}{|x|}$$

几乎处处点收敛于 $\epsilon \rightarrow 0^+$ 。如果 $|x|^{-(a+1)}$ 是局部可积的, 则通过取 (3.5) 的极限 (当 $\epsilon \rightarrow 0^+$ 时) 并使用勒贝格支配收敛定理, 我们得到

$$\int \left(-\frac{a}{|x|^{a+1}} \frac{x_i}{|x|} \right) \phi dx = - \int f(\partial_i \phi) dx,$$

这证明了该结论。 \square

5. 设 $n = 1$, $\Omega = [a, b]$, 且 $f \in W_1^1(\Omega)$ 。证明:

$$\int_a^b D_w^1 f(x) dx = f(b) - f(a),$$

其中假设 f 在 a 和 b 处是连续的。

证明. \square

证明:

我们将使用弱导数的定义和分部积分公式来证明所给的等式。

1. 弱导数的定义:

弱导数 $D_w^1 f(x)$ 定义为满足:

$$\int_a^b f(x) \varphi'(x) dx = - \int_a^b D_w^1 f(x) \varphi(x) dx \quad \text{对所有 } \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

其中 $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ 是支持在 $[a, b]$ 上的光滑紧支测试函数。

2. 构造逼近函数序列 φ_j :

根据题目提示, 我们需要构造一个函数序列 $\varphi_j \in D(\Omega)$ (即光滑紧支测试函数的空间), 使得 $\varphi_j \rightarrow 1$ 在 $\Omega = [a, b]$ 上。这种函数序列通常可以通过将常数 1 函数在两端逐渐削减为 0 来实现, 例如使用平滑的近似函数。

设 $\varphi_j(x)$ 为一族函数, 它们满足: - $\varphi_j(x) \rightarrow 1$ 在 $[a, b]$ 上, 且在边界 a 和 b 处连续趋向 0。- 对于所有 j , $\varphi_j \in C_c^\infty(\Omega)$ 。

3. 使用分部积分公式:

应用弱导数的定义, 考虑分部积分的公式:

$$\int_a^b D_w^1 f(x) \varphi_j(x) dx = - \int_a^b f(x) \varphi_j'(x) dx$$

当 $j \rightarrow \infty$ 时, $\varphi_j(x) \rightarrow 1$ 在 $[a, b]$ 上, 因此上式极限为:

$$\int_a^b D_w^1 f(x) dx = \lim_{j \rightarrow \infty} \left(- \int_a^b f(x) \varphi_j'(x) dx \right)$$

由于 $\varphi_j(x)$ 在 a 和 b 处逐渐趋向 0, 我们可以通过分部积分计算右侧的极限。

4. 边界项的处理:

考虑分部积分的边界项:

$$- \int_a^b f(x) \varphi_j'(x) dx = f(b) \varphi_j(b) - f(a) \varphi_j(a) + \int_a^b D_w^1 f(x) \varphi_j(x) dx$$

由于 $\varphi_j(b) \rightarrow 1$, $\varphi_j(a) \rightarrow 1$, 而 $\varphi_j(x) \rightarrow 1$ 在 $[a, b]$ 上, 因此当 $j \rightarrow \infty$ 时:

$$f(b) \varphi_j(b) - f(a) \varphi_j(a) \rightarrow f(b) - f(a)$$

5. 结论:

因此, 我们得到:

$$\int_a^b D_w^1 f(x) dx = f(b) - f(a)$$

这证明了所要求的等式。

6. 证明 Sobolev 不等式在 $n = 1$ 时的情形, 设 $\Omega = [a, b]$, 证明 $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\|u\|_{W_1^1(\Omega)}$.

证明. 设 $u \in C^1(\Omega)$,

$$|u(t)| = |u(s) + \int_s^t u'(x) dx| \leq |u(s)| + \|u'\|_{L^1(\Omega)}$$

左边取上确界, 右边取下确界, 得到

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \min_s |u(s)| + \|u'\|_{L^1(\Omega)} \leq \frac{1}{b-a} \|u\|_{L^1(\Omega)} + \|u'\|_{L^1(\Omega)}$$

□