黎曼几何

孙天阳

中国科学技术大学数学科学学院

tysun@mail.ustc.edu.cn

2025 年 11 月 17 日

目录

Chapter 1

黎曼度量

1 黎曼度量

设 $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ 是一条光滑曲线, 我们知道如何定义曲线的长度, 首先计算 γ 的切向量 $\gamma'(t)$, 然后计算其长度 $\|\gamma'(t)\|$, 最后在区间 $[a,b]$ 上进行积分. 学过微分流形的同学都知道, $\gamma'(t)$ 的正确概念是 $\gamma(t)$ 处流形 $\mathbb{R}^3$ 的切空间中的元素, 而数学分析中我们直接将 $\gamma'(t)$ 视为 $\mathbb{R}^3$ 自身中的元素, 能这样做是因为 $\mathbb{R}^3$ 可以被一个典范的坐标卡覆盖, 而这个坐标卡将每点处的切空间都典范同构到 $\mathbb{R}^3$ 自身, 从而我们可以用 $\mathbb{R}^3$ 中长度的概念来衡量 $\gamma'(t)$ 的长度.

现在设 $\gamma\colon [a,b] \to M$ 是到流形 M 中的一条光滑曲线, 为了仍然能够定义 γ 的长度, 我们需要在任意点 $p \in M$ 处的切空间 T_pM 中都能够衡量切向量的长度. 在线性代数中我们知道赋范空间和内积空间, 二者的区别或许在 Banach 空间和 Hilbert 空间的比较中更为明显. 如果我们给每个切空间赋予范数结构, 我们得到的是 Finsler 几何, 如果我们给每个切空间赋予内积结构，我们得到的是黎曼几何. 也就是, 每点处, 是切空间上的对称正定双线性函数.

定义 1.1. *流形 M 上的一个黎曼度量 g 是指一个 $g \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M)$ 满足*

$$g(X,Y) = g(Y,X), \quad g(X,X) \geqslant 0, \quad g_p(X(p),X(p)) = 0 \Longleftrightarrow X(p) = 0, \quad X,Y \in \Gamma^\infty(M).$$

例子 1.2. 这是一个非常经典的结果，它展示了球面 S^2 *(在 $n=2$ 的情况下)* 在 ** 球极平面投影 ** *(Stereographic Projection)* 坐标系下的度量。

我们将使用 ** 拉回度量 ** *(Pullback Metric)* 的方法来推导。

我们的目标是推导 S^2 在球极投影坐标 (x^1,x^2) 下的度量张量 (g_{ij})。

我们考虑一个嵌入在三维欧几里得空间 $\mathbb{R}^3$ 中的单位球面 S^2。设 $\mathbb{R}^3$ 的坐标为 (X,Y,Z)，则 S^2 上的点满足 $X^2+Y^2+Z^2=1$。

球极投影（通常指北极投影）是一个从 S^2 除去北极点 $N=(0,0,1)$ 到赤道平面 $Z=0$ 的映射。我们将 $Z=0$ 平面等同于 $\mathbb{R}^2$，其坐标为 (x^1,x^2)。

这个推导的关键是找到 ** 逆映射 **,即从坐标 (x^1,x^2) 出发,反算出球面上对应的点 (X,Y,Z)。这个逆映射 $\Phi\colon\mathbb{R}^2\to S^2\setminus\{N\}$ 就是我们需要的参数化。

设 $r^2=(x^1)^2+(x^2)^2$。从 $\mathbb{R}^2$ 中的点 $p=(x^1,x^2,0)$ 和北极 $N=(0,0,1)$ 作一条直线，这条直线与 S^2 的交点 $P=(X,Y,Z)$ 就是我们要求的值。

通过相似三角形或直线参数方程可以推导出（这里我们直接给出结果）：* $X(x^1,x^2)=\dfrac{2x^1}{1+r^2}$ * $Y(x^1,x^2)=\dfrac{2x^2}{1+r^2}$ * $Z(x^1,x^2)=\dfrac{r^2-1}{1+r^2}$

为方便起见，我们令 $S=1+r^2=1+(x^1)^2+(x^2)^2$。我们的参数化 $\Phi(x^1,x^2)$ 为：$\Phi(x^1,x^2)=\left(\dfrac{2x^1}{S},\dfrac{2x^2}{S},\dfrac{S-2}{S}\right)$ *(注意 $r^2-1=(1+r^2)-2=S-2$)*

S^2 上的度量 g 是从 $\mathbb{R}^3$ 中的标准欧几里得度量 δ（即 $dS^2=dX^2+dY^2+dZ^2$）拉回得到的。

在 (x^1,x^2) 坐标下，度量张量的分量 g_{ij} *(其中 $i,j\in\{1,2\}$)* 由下式给出：$g_{ij}=\left\langle\dfrac{\partial\Phi}{\partial x^i},\dfrac{\partial\Phi}{\partial x^j}\right\rangle_{\mathbb{R}^3}=\dfrac{\partial X}{\partial x^i}\dfrac{\partial X}{\partial x^j}+\dfrac{\partial Y}{\partial x^i}\dfrac{\partial Y}{\partial x^j}+\dfrac{\partial Z}{\partial x^i}\dfrac{\partial Z}{\partial x^j}$

首先，我们计算 S 对 x^i 的偏导数：$\dfrac{\partial S}{\partial x^1}=2x^1\dfrac{\partial S}{\partial x^2}=2x^2$

现在，我们计算 X,Y,Z 对 x^1 和 x^2 的偏导数（使用除法法则）：

** 对 x^1 求导：** * $\dfrac{\partial X}{\partial x^1}=\dfrac{(2)(S)-(2x^1)(\frac{\partial S}{\partial x^1})}{S^2}=\dfrac{2S-2x^1(2x^1)}{S^2}=\dfrac{2(1+(x^1)^2+(x^2)^2)-4(x^1)^2}{S^2}=\dfrac{2-2(x^1)^2+2(x^2)^2}{S^2}$ * $\dfrac{\partial Y}{\partial x^1}=\dfrac{(0)(S)-(2x^2)(\frac{\partial S}{\partial x^1})}{S^2}=\dfrac{-2x^2(2x^1)}{S^2}=\dfrac{-4x^1x^2}{S^2}$ * $\dfrac{\partial Z}{\partial x^1}=\dfrac{(\frac{\partial r^2}{\partial x^1})(S)-(r^2-1)(\frac{\partial S}{\partial x^1})}{S^2}=\dfrac{(2x^1)S-(r^2-1)(2x^1)}{S^2}=\dfrac{2x^1(S-(r^2-1))}{S^2}=\dfrac{2x^1((1+r^2)-(r^2-1))}{S^2}=\dfrac{4x^1}{S^2}$

** 对 x^2 求导：** *(通过对称性,交换 x^1 和 x^2 即可)* * $\dfrac{\partial X}{\partial x^2}=\dfrac{-4x^1x^2}{S^2}$ * $\dfrac{\partial Y}{\partial x^2}=\dfrac{2+2(x^1)^2-2(x^2)^2}{S^2}$ * $\dfrac{\partial Z}{\partial x^2}=\dfrac{4x^2}{S^2}$

1. 计算 g_{11}： $g_{11}=\left(\dfrac{\partial X}{\partial x^1}\right)^2+\left(\dfrac{\partial Y}{\partial x^1}\right)^2+\left(\dfrac{\partial Z}{\partial x^1}\right)^2 S^4g_{11}=(2-2(x^1)^2+2(x^2)^2)^2+(-4x^1x^2)^2+(4x^1)^2$ $S^4g_{11}=4(1-(x^1)^2+(x^2)^2)^2+16(x^1)^2(x^2)^2+16(x^1)^2$ 展开 $((1+(x^2)^2)-(x^1)^2)^2$：$S^4g_{11}=4[(1+(x^2)^2)^2-2(x^1)^2(1+(x^2)^2)+(x^1)^4]+16(x^1)^2(x^2)^2+16(x^1)^2S^4g_{11}=4[1+2(x^2)^2+(x^2)^4-2(x^1)^2-2(x^1)^2(x^2)^2+(x^1)^4]+16(x^1)^2(x^2)^2+16(x^1)^2$ $S^4g_{11}=4+8(x^2)^2+4(x^2)^4-8(x^1)^2-8(x^1)^2(x^2)^2+4(x^1)^4+16(x^1)^2(x^2)^2+16(x^1)^2$ 合并同类项：$S^4g_{11}=4+8(x^2)^2+4(x^2)^4+8(x^1)^2+8(x^1)^2(x^2)^2+4(x^1)^4S^4g_{11}=4[1+2(x^2)^2+(x^2)^4+2(x^1)^2+2(x^1)^2(x^2)^2+(x^1)^4]$ 这个方括号内的表达式 [...] 正是 $(1+(x^1)^2+(x^2)^2)^2$，即 S^2。$S^4g_{11}=4S^2g_{11}=\dfrac{4S^2}{S^4}=\dfrac{4}{S^2}=\dfrac{4}{(1+(x^1)^2+(x^2)^2)^2}$

2. 计算 g_{22}： 由于 (x^1,x^2) 的对称性，我们交换 x^1 和 x^2，可以立即得到与 g_{11} 相同的结果：$g_{22}=\dfrac{4}{S^2}=\dfrac{4}{(1+(x^1)^2+(x^2)^2)^2}$

3. 计算 g_{12} (和 g_{21})： $g_{12} = \frac{\partial X}{\partial x^1}\frac{\partial X}{\partial x^2} + \frac{\partial Y}{\partial x^1}\frac{\partial Y}{\partial x^2} + \frac{\partial Z}{\partial x^1}\frac{\partial Z}{\partial x^2}$ $S^4 g_{12} = (2-2(x^1)^2+2(x^2)^2)(-4x^1x^2)+(-4x^1x^2)(2+2(x^1)^2-2(x^2)^2)+(4x^1)(4x^2)$ $S^4 g_{12} = (-4x^1x^2)[(2-2(x^1)^2+2(x^2)^2)+(2+2(x^1)^2-2(x^2)^2)]+16x^1x^2$ $S^4 g_{12} = (-4x^1x^2)[4]+16x^1x^2$ $S^4 g_{12} = -16x^1x^2+16x^1x^2 = 0$ 因此 $g_{12}=0$。由于度量张量是对称的，$g_{21}=g_{12}=0$。

我们将 g_{ij} 的分量组合成一个矩阵：$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{S^2} & 0 \\ 0 & \frac{4}{S^2} \end{pmatrix}$

将 $\frac{4}{S^2}$ 因子提出来：$(g_{ij}) = \frac{4}{S^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

我们知道 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 是克罗内克 δ *(Kronecker delta)* (δ_{ij}) 的矩阵表示,并且 $S = 1+(x^1)^2+(x^2)^2 = 1+\sum_{i=1}^{2}(x^i)^2$。

因此，我们得到了最终的表达式：$(g_{ij}) = \frac{4}{(1+\sum_{i=1}^{2}(x^i)^2)^2}(\delta_{ij})$ （这与你给出的 $n=2$ 时的公式完全一致。）

好的，这个推导过程与 S^2 的球极投影非常相似，但我们将使用一个不同的环境空间：** 闵可夫斯基空间 (Minkowski space)**。

你所求的度量是 ** 庞加莱圆盘 (Poincaré Disk)** 模型的度量，它是双曲几何（具有恒定负曲率的空间）的一种共形模型。我们将通过将其视为嵌入在 $\mathbb{R}^{2,1}$ 闵可夫斯基空间中的 ** 双曲面模型 (Hyperboloid Model)** $\mathbb{H}^2$ 的投影来实现。

我们考虑 $\mathbb{R}^3$，但其度量不是欧几里得度量，而是闵可夫斯基度量 η。设 $\mathbb{R}^3$ 的坐标为 (X^1, X^2, Z)，闵可夫斯基内积定义为：$\langle V, W\rangle_{\mathbb{R}^{2,1}} = V^1W^1 + V^2W^2 - V^ZW^Z$ 对应的"距离"平方为 $ds^2 = (dX^1)^2 + (dX^2)^2 - (dZ)^2$。

双曲面模型 $\mathbb{H}^2$ (的 $n = 2$ 的情况) 定义为 $\mathbb{R}^{2,1}$ 中的一个曲面，满足：$(X^1)^2 + (X^2)^2 - Z^2 = -1$ (即 $Z^2 - (X^1)^2 - (X^2)^2 = 1$)，并且我们取其 ** 上叶 ** (upper sheet)，即 $Z \geq 1$。

$\mathbb{H}^2$ 上的黎曼度量 g 是从 $\mathbb{R}^{2,1}$ 中拉回 (pullback) 的度量 η。

我们将 $\mathbb{H}^2$ 通过一种"球极投影"映射到 $Z = 0$ 平面上的 ** 单位圆盘 ** $\mathbb{D}^2$。$\mathbb{D}^2$ 的坐标为 (x^1, x^2)，满足 $(x^1)^2 + (x^2)^2 < 1$。

这个投影是从"南极"点 $N = (0, 0, -1)$ 发出的（注意，这个点不在 $\mathbb{H}^2$ 上）。设 $P = (X^1, X^2, Z)$ 是 $\mathbb{H}^2$ 上的一点，连接 N 和 P 的直线与 $Z = 0$ 平面的交点即为 $p = (x^1, x^2, 0)$。

通过相似三角形，我们有：$\dfrac{x^1}{X^1} = \dfrac{x^2}{X^2} = \dfrac{1}{Z+1}$ (总高度差是 $Z - (-1) = Z + 1$，从 N 到 $Z = 0$ 的高度差是 1) 因此，$x^1 = \dfrac{X^1}{Z+1}$ 且 $x^2 = \dfrac{X^2}{Z+1}$。

** 关键步骤：** 找到 ** 逆映射 ** $\Phi\colon \mathbb{D}^2 \to \mathbb{H}^2$，即从 (x^1, x^2) 反解出 (X^1, X^2, Z)。令 $r^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2$。$r^2 = \dfrac{(X^1)^2 + (X^2)^2}{(Z+1)^2}$ 利用 $\mathbb{H}^2$ 的定义 $(X^1)^2 + (X^2)^2 = Z^2 - 1 = (Z-1)(Z+1)$，我们代入上式：$r^2 = \dfrac{(Z-1)(Z+1)}{(Z+1)^2} = \dfrac{Z-1}{Z+1}$

现在我们从 r^2 反解 Z:$r^2(Z+1) = Z-1 \implies r^2Z + r^2 = Z-1 \implies 1 + r^2 = Z(1-r^2)Z = \dfrac{1+r^2}{1-r^2}$

接下来解 X^1 和 X^2：$X^1 = x^1(Z+1)Z + 1 = \dfrac{1+r^2}{1-r^2} + 1 = \dfrac{(1+r^2)+(1-r^2)}{1-r^2} = \dfrac{2}{1-r^2}$ $X^1 = \dfrac{2x^1}{1-r^2}$ 同理，$X^2 = \dfrac{2x^2}{1-r^2}$

为了方便，我们令 $S' = 1 - r^2 = 1 - (x^1)^2 - (x^2)^2$。我们的参数化 $\Phi(x^1, x^2)$ 为：$\Phi(x^1, x^2) = \big(X^1, X^2, Z\big) = \left(\dfrac{2x^1}{S'}, \dfrac{2x^2}{S'}, \dfrac{1+r^2}{S'}\right)$

圆盘 $\mathbb{D}^2$ 上的度量 g 是 $\mathbb{H}^2$ 上度量的拉回，而 $\mathbb{H}^2$ 的度量又是 $\mathbb{R}^{2,1}$ 中度量 η 的拉回。因此 g_{ij} (其中 $i, j \in \{1, 2\}$) 由下式给出：$g_{ij} = \left\langle \dfrac{\partial\Phi}{\partial x^i}, \dfrac{\partial\Phi}{\partial x^j} \right\rangle_{\mathbb{R}^{2,1}} = \dfrac{\partial X^1}{\partial x^i}\dfrac{\partial X^1}{\partial x^j} + \dfrac{\partial X^2}{\partial x^i}\dfrac{\partial X^2}{\partial x^j} - \dfrac{\partial Z}{\partial x^i}\dfrac{\partial Z}{\partial x^j}$ ** 注意：** Z 项前面是 ** 负号 **。

首先，$S' = 1-(x^1)^2-(x^2)^2$，有 $\dfrac{\partial S'}{\partial x^1} = -2x^1$ 且 $\dfrac{\partial S'}{\partial x^2} = -2x^2$。$r^2 = (x^1)^2+(x^2)^2$，有 $\dfrac{\partial(r^2)}{\partial x^1} = 2x^1$。

** 对 x^1 求导：** * $\dfrac{\partial X^1}{\partial x^1} = \dfrac{(2)(S') - (2x^1)(\frac{\partial S'}{\partial x^1})}{(S')^2} = \dfrac{2S' - 2x^1(-2x^1)}{(S')^2} = \dfrac{2S' + 4(x^1)^2}{(S')^2}\dfrac{\partial X^1}{\partial x^1} = \dfrac{2(1-(x^1)^2-(x^2)^2) + 4(x^1)^2}{(S')^2} = \dfrac{2 + 2(x^1)^2 - 2(x^2)^2}{(S')^2}$ * $\dfrac{\partial X^2}{\partial x^1} = \dfrac{(0)(S') - (2x^2)(\frac{\partial S'}{\partial x^1})}{(S')^2} = \dfrac{-2x^2(-2x^1)}{(S')^2} = \dfrac{4x^1x^2}{(S')^2}$ * $\dfrac{\partial Z}{\partial x^1} = \dfrac{(\frac{\partial(1+r^2)}{\partial x^1})(S') - (1+r^2)(\frac{\partial S'}{\partial x^1})}{(S')^2} = \dfrac{(2x^1)(S') - (1+r^2)(-2x^1)}{(S')^2}\dfrac{\partial Z}{\partial x^1} = \dfrac{2x^1S' + 2x^1(1+r^2)}{(S')^2} = \dfrac{2x^1((1-r^2)+(1+r^2))}{(S')^2} = \dfrac{4x^1}{(S')^2}$

** 对 x^2 求导：** (通过对称性) * $\frac{\partial X^1}{\partial x^2} = \frac{4x^1x^2}{(S')^2}$ * $\frac{\partial X^2}{\partial x^2} = \frac{2+2(x^2)^2-2(x^1)^2}{(S')^2}$ * $\frac{\partial Z}{\partial x^2} = \frac{4x^2}{(S')^2}$

1. 计算 g_{11}： $g_{11} = \left(\frac{\partial X^1}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial X^2}{\partial x^1}\right)^2 - \left(\frac{\partial Z}{\partial x^1}\right)^2 (S')^4 g_{11} = (2+2(x^1)^2-2(x^2)^2)^2 + (4x^1x^2)^2 - (4x^1)^2$ $(S')^4 g_{11} = 4(1+(x^1)^2-(x^2)^2)^2 + 16(x^1)^2(x^2)^2 - 16(x^1)^2$ 展开 $((1-(x^2)^2)+(x^1)^2)^2$：$(S')^4 g_{11} = 4[(1-(x^2)^2)^2 + 2(x^1)^2(1-(x^2)^2) + (x^1)^4] + 16(x^1)^2(x^2)^2 - 16(x^1)^2 (S')^4 g_{11} = 4[1-2(x^2)^2 + (x^2)^4 + 2(x^1)^2 - 2(x^1)^2(x^2)^2 + (x^1)^4] + 16(x^1)^2(x^2)^2 - 16(x^1)^2$ $(S')^4 g_{11} = 4 - 8(x^2)^2 + 4(x^2)^4 + 8(x^1)^2 - 8(x^1)^2(x^2)^2 + 4(x^1)^4 + 16(x^1)^2(x^2)^2 - 16(x^1)^2$ 合并同类项：$(S')^4 g_{11} = 4 - 8(x^2)^2 + 4(x^2)^4 - 8(x^1)^2 + 8(x^1)^2(x^2)^2 + 4(x^1)^4 (S')^4 g_{11} = 4[1-2(x^2)^2 + (x^2)^4 - 2(x^1)^2 + 2(x^1)^2(x^2)^2 + (x^1)^4]$ 这正是 $4(1-(x^1)^2-(x^2)^2)^2$，即 $4(S')^2$。(验证: $(1-a-b)^2 = 1+a^2+b^2-2a-2b+2ab$。令 $a=(x^1)^2, b=(x^2)^2$，得 $1+(x^1)^4+(x^2)^4-2(x^1)^2-2(x^2)^2+2(x^1)^2(x^2)^2$。这与我们上面括号内的表达式 [...] 一致。)

$(S')^4 g_{11} = 4(S')^2 g_{11} = \frac{4(S')^2}{(S')^4} = \frac{4}{(S')^2} = \frac{4}{(1-(x^1)^2-(x^2)^2)^2}$

2. 计算 g_{22}： 由于 (x^1, x^2) 的对称性，我们立即得到：$g_{22} = \frac{4}{(S')^2} = \frac{4}{(1-(x^1)^2-(x^2)^2)^2}$

3. 计算 g_{12} (和 g_{21})： $g_{12} = \frac{\partial X^1}{\partial x^1}\frac{\partial X^1}{\partial x^2} + \frac{\partial X^2}{\partial x^1}\frac{\partial X^2}{\partial x^2} - \frac{\partial Z}{\partial x^1}\frac{\partial Z}{\partial x^2}$ $(S')^4 g_{12} = (2+2(x^1)^2 - 2(x^2)^2)(4x^1x^2) + (4x^1x^2)(2+2(x^2)^2-2(x^1)^2) - (4x^1)(4x^2)(S')^4 g_{12} = (4x^1x^2)[(2+2(x^1)^2-2(x^2)^2) + (2+2(x^2)^2-2(x^1)^2)] - 16x^1x^2$ $(S')^4 g_{12} = (4x^1x^2)[4] - 16x^1x^2 (S')^4 g_{12} = 16x^1x^2 - 16x^1x^2 = 0$ 因此 $g_{12} = 0$。

我们将 g_{ij} 的分量组合成一个矩阵：$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{(S')^2} & 0 \\ 0 & \frac{4}{(S')^2} \end{pmatrix}$

$(g_{ij}) = \frac{4}{(S')^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

我们知道 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (\delta_{ij})$ 并且 $S' = 1-(x^1)^2-(x^2)^2 = 1 - \sum_{i=1}^{2}(x^i)^2$。

因此，我们得到了最终的表达式：$(g_{ij}) = \frac{4}{(1-\sum_{i=1}^{2}(x^i)^2)^2}(\delta_{ij})$ （这与你给出的 $n=2$ 时的公式完全一致。）

定理 1.3. *A smooth manifold has a Riemannian metric.*

Extrinsic proof. Whitney embedding

$f : M^n \to N^{n+k}$ smooth immersion ($\mathrm{d}f_p$ is injective)

Let (N, g_N) be a Riemannian metric

Pull-back metric $f^* g_N$ on M

$$(f^* g_N)_p(X_p, Y_p) = g_N(\mathrm{d}f_p(X_p), \mathrm{d}f_p(Y_p))$$

□

Intrinsic proof. U_p coordinate neighborhood.$\{U_p, p \in M\}$ open cover.

paracompact$\Longrightarrow$ WLOG,let $\{U_\alpha\}$ be a locally finite covering of M by coordinate neighborhood.

Partition of unity $\{\varphi_\alpha\}$ subordinate to $\{U_\alpha\}$.

$x\colon U_\alpha \to x(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$

$g_p(X, Y) = \sum\limits_\alpha \varphi_\alpha(p)(g_\alpha)_p(X, Y).$ □

定义 1.4. *Let $(M, g_M), (N, g_N)$ be two Riemannian manifolds. $\varphi\colon M \to N$ is called an* ***isometry*** *if φ is a diffeomorphism and $\varphi^* g_N = g_M$.*

2 弧长泛函

在数学分析中, 我们已经知道了提到曲线时, 我们指的是一个映射 $\gamma\colon [a,b] \to M$ 而不是这个映射的像集. 只看像集会丢失很多信息, 比如像集都是一个圆, 但实际上可能是顺时针绕也可能是逆时针绕, 可能是绕一圈也可能是绕两圈, 而这对环绕数等概念非常重要. 但我们又觉得, 比如 (t,t) 和 $(2t,2t)$, 这我们感觉上就是同一条曲线嘛, 所以我们又引入了重新参数化的概念, 如果两条曲线只相差一个重新参数化, 我们认为它们是同一条曲线.

在黎曼几何中, 我们不仅要求曲线是光滑的, 还进一步要求曲线是正则的, 即 $\gamma'(t) \neq 0$. 从古典微分几何的角度来看, 这排除了 (t^2,t^3) 这种带有无法定义切向量和曲率的奇点的曲线; 从微分流形的角度来看, 这其实是限制我们自己研究浸入子流形.

研究正则光滑曲线的好处是它可以进行弧长参数化, 而弧长参数化的好处是切向量的长度恒为 1, 这会为后面的推导与计算带来方便. 我们后面可能会用带参数的曲线, 来指一条光滑正则曲线 $\gamma\colon [a,b] \to M$, 用不带参数的曲线, 来指 γ 在重新参数化下的等价类. 而在一个等价类中, 我们最喜欢的代表元就是弧长参数化的. 设 γ 是一条参数曲线, 定义其长度为

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \mathrm{d}t := \int_a^b \sqrt{g(\gamma'(t),\gamma'(t))} \mathrm{d}t.$$

容易证明重新参数化不会改变曲线的长度.

3 黎曼流形上的距离

流形 M 上的黎曼度量 g 可以诱导流形 M 上的一个度量或者说距离 d. 任取两点 p, q, 考虑

$$C_{p,q} = \left\{\gamma : [a, b] \to M \mid \gamma \text{ 是分片光滑正则曲线满足 } \gamma(a) = p, \gamma(b) = q\right\}.$$

定义 $d(p, q) = \inf\{L(\gamma) \mid \gamma \in C_{p,q}\}$. 那么我们立即就可以问许多问题: $C_{p,q}$ 是否是空集? $d(p, q)$ 是否是一个有限数? 这样定义的 d 是不是一个度量? 定义中的下确界能否被达到?

Let $E_p = \{q \in M : p, q \text{ can be connected by a curve} \in C_{p,q}\}$. It is easy to show by connectedness argument that $E_p = M$. So $C_{p,q}$ could not be empty.

Take $\gamma \in C_{p,q}$, we can cover it by finite coordinate charts. So we just need to show any piecewise smooth curve contained in a coordinate chart has finite length.

$$Length(\gamma) = \int_a^b \sqrt{g_{ij} \frac{\partial x^i \circ \gamma}{\partial t} \frac{\partial x^j \circ \gamma}{\partial t}} \mathrm{d}t$$

引理 3.1.

Next we show $d(p, q)$ is a metric. It is obvious from definition that $d(p, q) \geqslant$ and $d(p, q) = d(q, p)$. Because we consider piesewise smooth curve, triangle inequality is also easy. If $p \neq q$, we can find a coordinate chart U of p such that $q \notin U$.

https://mathoverflow.net/questions/45154/riemannian-metric-induced-by-a-metric

4 商流形的黎曼度量

1

2

Chapter 2

测地线

1 最短线问题

本章中我们研究 $d(p,q)=\inf\{L(\gamma)\mid\gamma\in C_{p,q}\}$ 的下确界能否被达到的问题. 从理论力学的视角来看, 弧长泛函其实是作用量, 我们要研究它取到极值点的条件, 研究它的欧拉-拉格朗日方程. 但弧长泛函 L 的定义中出现了根号, 给变分的计算带来麻烦. 为此我们考虑能量泛函 $E(\gamma)$,

$$L(\gamma)=\int_a^b\sqrt{g(\gamma'(t),\gamma'(t))}\mathrm{d}t,\quad E(\gamma)=\frac{1}{2}\int_a^b g(\gamma'(t),\gamma'(t))\mathrm{d}t.$$

引理 1.1.

$$L(\gamma)^2\leqslant 2(b-a)E(\gamma).$$

等号成立当且仅当 $\|\gamma'(t)\|$ 是常值.

证明.

$$L(\gamma)=\int_a^b\|\gamma'(t)\|\overset{\text{Hölder}}{\leqslant}\sqrt{\int_a^b 1^2\mathrm{d}t}\sqrt{\int_a^b\|\gamma'(t)\|^2\mathrm{d}t}=\sqrt{b-a}\sqrt{2E(r)}.$$

□

我们之前提到过, 重新参数化不改变曲线的弧长. 所以如果 γ 使得 $d(p,q)$ 这个下确界被达到, 那么跟 γ 处在同一个等价类中的曲线也会使得下确界被达到, 我们的目的是找到一条这样的曲线, 所以我们不妨限制自己考察 $\|\gamma'(t)\|$ 是常值的那些曲线, 因为你总能通过重新参数化实现这一点. 接着我们不妨限制自己考察定义域为 $[a,b]$ 的 $\|\gamma'(t)\|$ 是常值的那些曲线, 这件事还是可以通过弧长参数化得到. 对于这些曲线来说, $L(\gamma)^2=2(b-a)E(\gamma)$, 它们彼此之间 $L(\gamma)$ 的比较可以被公平转化为 $E(\gamma)$ 的比较. 所以现在问题约化到, 在 $C_{p,q}$ 中且定义域为 $[a,b]$ 的 $\|\gamma'(t)\|$ 是常值的这样的曲线类中, 寻找 $E(\gamma)$ 的极值点. 这对于学过理论力学的同学来说是非常熟悉的. 只不过在这个例子中, 欧拉-拉格朗日方程被称为测地线方程, 满足方程的曲线被称为测地线.

需注意, 这是最短线问题的一个必要条件, 即最短线一定是测地线.

先考虑 p,q,γ 都落在一个坐标卡 (U,x) 中的情形, 设 γ 在 (U,x) 中的坐标表示为 $x(t)$. 任给定义在 $[a,b]$ 上的向量值函数 $y(t)$ 满足 $y(a)=y(b)=0$, 则

$$x_\varepsilon(t)=x(t)+\varepsilon y(t)$$

是一族定义在 $[a,b]$ 上, 且端点都为 p,q 的曲线, 且当 ε 充分小时 x_ε 落在 U 中. 记

$$S(\varepsilon)=2E(x_\varepsilon)=\int_a^b g_{ij}(x(t)+\varepsilon y(t))\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x^i(t)+\varepsilon y^i(t))\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x^j(t)+\varepsilon y^j(t))\mathrm{d}t.$$

假设 γ 是连接 p,q 的最短线, 则

$$0=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0}2E(\gamma_\varepsilon)=\int_a^b g_{ij,k}(x)y^k\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t+\int_a^b g_{ij}(x)\frac{\mathrm{d}y^i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t+\int_a^b g_{ij}(x)\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}y^j}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$$

用分部积分处理后两项, 过程中利用到了 $y(a)=y(b)=0$.

$$\int_a^b g_{ij}(x)\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}y^j}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=-\int_a^b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(g_{ij}(x)\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\right)y^j\mathrm{d}t=-\int_a^b g_{ij,k}(x)\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}y^j\mathrm{d}t-\int_a^b g_{ij}(x)\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}t^2}y^j\mathrm{d}t$$

$$\int_a^b g_{ij}(x)\frac{\mathrm{d}y^i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=-\int_a^b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(g_{ij}(x)\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}\right)y^i\mathrm{d}t=-\int_a^b g_{ij,k}(x)\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}y^i\mathrm{d}t-\int_a^b g_{ij}(x)\frac{\mathrm{d}^2x^j}{\mathrm{d}t^2}y^i\mathrm{d}t$$

代回得

$$\int_a^b\left(g_{ij,k}(x)\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}-g_{ik,j}(x)\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}-g_{kj,i}(x)\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}-2g_{ik}(x)\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}t^2}\right)y^k\mathrm{d}t=0.$$

由 $y(t)$ 的任意性, 我们得到对任意的 k, 有

$$g_{ij,k}(x)\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}-g_{ik,j}(x)\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}-g_{kj,i}(x)\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}-2g_{lk}(x)\frac{\mathrm{d}^2x^l}{\mathrm{d}t^2}=0$$

整理指标得, 对于任意的 l, 有

$$\frac{\mathrm{d}^2x^l}{\mathrm{d}t^2}+\frac{1}{2}g^{kl}(g_{ik,j}+g_{kj,i}-g_{ij,k})\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}=0.$$

记 $\Gamma_{ij}^k=\dfrac{1}{2}g^{kl}(g_{jl,i}+g_{il,j}-g_{ij,l})$, 称作第二类 Christoffel 符号.

命题 1.2.

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k.$$

命题 1.3.

$$g_{ij,k} = g_{lj}\Gamma_{ki}^l + g_{il}\Gamma_{kj}^l$$

证明.

$$\begin{aligned} RHS &= \frac{1}{2} g_{lj} g^{lp}(g_{kp,i} + g_{pi,k} - g_{ki,p}) + \frac{1}{2} g_{il} g^{lp}(g_{kp,j} + g_{pj,k} - g_{kj,p}) \\ &= \frac{1}{2}(g_{kj,i} + g_{ji,k} - g_{ki,j}) + \frac{1}{2}(g_{ki,j} + g_{ij,k} - g_{kj,i}) = g_{ij,k} \end{aligned}$$

□

命题 1.4. $\widetilde{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{\alpha\eta}^\gamma \dfrac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^i} \dfrac{\partial x^\eta}{\partial \tilde{x}^j} \dfrac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^\gamma} + \dfrac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^\gamma} \dfrac{\partial^2 x^\gamma}{\partial \tilde{x}^i \partial \tilde{x}^j}$

命题 1.5.

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^k}{\mathrm{d}t^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t} = 0$$

是定义在流形上的方程, 称为测地线方程, 方程的解称为测地线.

注意到测地线方程是一个二阶非线性常微分方程, 因此我们只能得到解的局部存在唯一性,

定理 1.6. 对 M 上的任意一点 p 和任意一个切向量 $v \in T_pM$, 存在 $\varepsilon > 0$ 和唯一一条测地线

$$\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$$

使得 $\gamma(0) = p$ 且 $\gamma'(0) = v$.

定理 1.7. 对 M 上的任意一点 p, 存在开集 $V \subset M$ 和 $\delta > 0$ 和

$$\mathcal{U}_{V,\delta} = \{(q, v) \mid q \in V, v \in T_qM, \|v\| < \delta\}$$

和 $\varepsilon > 0$ 和一个光滑映射

$$\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \times \mathcal{U}_{V,\delta} \longrightarrow M$$

使得对任意的 $(q, v) \in \mathcal{U}_{V,\delta}$, 曲线

$$\gamma_{(q,v)}\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M, \quad t \longmapsto \gamma(t, q, v)$$

是满足 $\gamma(0, q, v) = q, r'(0, q, v) = v$ 的测地线.

命题 1.8. 测地线的切向量长度为常值.

证明.

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(g_{ij}(x(t)) \frac{\mathrm{d}x^i(t)}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}x^j(t)}{\mathrm{d}t}\right) &= g_{ij,k} \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t} + g_{ij} \frac{\mathrm{d}^2 x^i}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t} + g_{ij} \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}^2 x^j}{\mathrm{d}t} \\ &= g_{ij,k} \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t} + g_{ij}\left(-\Gamma_{kl}^i \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}t}\right) \frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t} + g_{ij} \frac{dx^i}{\mathrm{d}t}\left(-\Gamma_{kl}^j \frac{\mathrm{d}x^k}{d\ t} \frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}t}\right) \\ &= \left(g_{ij,k} - g_{lj}\Gamma_{ki}^l - g_{il}\Gamma_{kj}^l\right) \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t} = 0 \end{aligned}$$

□

引理 1.9 (Homogeneity of geodesic)**.** *If the geodesic $\gamma(t, q, v)$ is defined on $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, then the geodesic $\gamma(t, q, \lambda v)$,$\lambda \in \mathbb{R}^+$ is defined on the interval $t \in (-\dfrac{\varepsilon}{\lambda}, \dfrac{\varepsilon}{\lambda})$ and*

$$\gamma(t, q, \lambda v) = \gamma(\lambda t, q, v).$$

2 指数映射

要根据一点附近的测地线的性质，来确定一个坐标系，使得测地线在这个坐标映射下投到欧氏区域后是直线.

其实拿切空间来做坐标区域应该是个挺自然的想法，毕竟切空间是该处的一阶线性近似

$$\begin{aligned}\exp_p : T_pM &\longrightarrow M\\ v &\longmapsto \gamma(1, p, v)\end{aligned}$$

- 选取 1 能够使测地线走的长度等于 $\|v\|_g$.

指数映射的定义域

3 月 4 日 52 分 30 秒

$V_p := \{v \in T_pM \mid \text{the geodesic } \gamma(t, p, v) \text{ is defined on } [0, 1]\}$.

为了 $\exp_p$ 成为坐标映射，我们希望 V_p 至少包含以 O 为心的一个开球!

3 月 4 日 55 分 45 秒

命题 2.1.

(1) V_p *is star-shaped aroud* $O \in T_pM$*, i.e.*$\forall\ v \in V_p, \forall\ \lambda \in [0, 1]$*, then* $\lambda v \in V_p$.

(2) $\forall\ p, \exists\ \varepsilon = \varepsilon(p)$*,* s.t. $\gamma(t, p, v)$ *is defined on* $[0, 1]$ *once* $\|v\| < \varepsilon$.

3 月 4 日 1 小时 1 分 0 秒，反函数定理

3 月 4 日 1 小时 5 分 2 秒

命题 2.2. $\mathrm{d}\exp_p = \mathrm{Id}_{T_pM}$.

由逆映射定理，存在 p 点的一个邻域 U 使得 $\exp_p^{-1}: U \to T_pM$ 是微分同胚.

距离 $\exp_p^{-1}$ 成为坐标映射只差 T_pM 到 $\mathbb{R}^n$ 的一个同构，任取 T_pM 的一组基即可.

命题 2.3. $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$.

命题 2.4. 选取 T_pM 的一组基 $\{v_1, \cdots, v_n\}$. 断言 g 在坐标映射 $\exp_p^{-1}: U \to T_pM \cong \mathbb{R}^n$ 下的分量在 O 处的取值 $g_{ij}(O) = g(v_i, v_j)$.

定义 2.5. 选取 T_pM 的一组标准正交基，此时的 $(\exp_p^{-1}, U)$ 称为 p 的一个法坐标.

3 月 4 日 1 小时 17 分 45 秒

证明. $0 = \dfrac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}t^2} + \Gamma_{jk}^i(x(t))\dfrac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t}$ □

极坐标

A curve $c(t) = (r(t), \varphi^1(t), \cdots, \varphi^{n-1}(t))$
$c'(t) = (\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}\varphi^1}{\mathrm{d}t}, \cdots, \frac{\mathrm{d}\varphi^{n-1}}{\mathrm{d}t}) =: (v^1, v^2, \cdots, v^n)$
$\|c'(t)\| = g_{ij}(c(t))v^i v^j = \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \underbrace{\sum_{i,j=1}^{n-1} g_{\varphi^i\varphi^j}\frac{\mathrm{d}\varphi^i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\varphi^j}{\mathrm{d}t}}_{\geqslant 0}$

3 月 8 日第二段 11 分 20 秒

推论 2.6. *For any $p \in M$,$\exists\ \rho > 0$ s.t. $\forall\ q$ with $d(p,q) = \rho$, there exists a unique shortest curve $\in C_{p,q}$.*

证明. $\exists\ \rho > 0$ s.t. $B(p, 2\rho)$ lies in a Riemannian polar coordinate neighborhood.

For any curve $c \in C_{p,q}$

$$c : [0,T] \to M, c(0) = p, c(T) = q$$

□

推论 2.7. 最短线是光滑的.

3 一致邻域

3 月 8 日 25 分 20 秒

3 月 8 日 28 分 56 秒

定义 3.1. *totally normal neighborhood.*

$\forall\ p \in M$, if $W\ \ni p$, W is a normal neighborhood of every point $q \in W$, then W is cassled a **totally normal neighborhood**.

3.1 totally normal neighborhood 的存在性

3 月 8 日第二段 35 分 4 秒

引理 3.2.

$$\mathrm{d}\exp(p, 0_p) : T_{p,0_p}(TM) \longrightarrow T_{p,p}(M \times M)$$

is non sigular.

3 月 8 日第二段 1 小时 3 分 54 秒

定理 3.3. *For any $p \in M$, $\exists$ a neighborhood W of p, and a $\delta > 0$ such that $\forall q \in W$, $\exp_q$ is a diffeomorphism on $B(0_q, \delta) \subset T_qM$ and*

3 月 8 日第二段 1 小时 14 分 7 秒

推论 3.4.

4 Cut locus 1

3 月 8 日第二段 1 小时 25 分 32 秒，总结

测地线的最大存在区间的端点是开的

3 月 8 日第二段 1 小时 28 分 5 秒

给定 $p \in M, v \in T_pM$，有测地线 $\gamma(t,p,v) = \exp_p tv$.

假设 $[0,b]$ 是 γ 的最大存在区间. 记 $q = \gamma(b,p,v), w = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=b} \gamma(t,p,v)$.

存在经过 q，以 w 为初始切向量的测地线 $\tilde{\gamma}$，$\tilde{\gamma}$ 在某区间 $(-\varepsilon,\varepsilon)$ 上有定义.

断言 $\gamma\big|_{(b-\varepsilon,b]}$ 的反转与 $\tilde{\gamma}\big|_{(-\varepsilon,0]}$ 的反转都是以 q 为起点，以 $-w$ 为初始切向量的测地线.

这是由链式法则与测地线方程的特点保证的.

由存在唯一性知 γ 与 $\tilde{\gamma}$ 在公共定义域上重合. 这与 $[0,b]$ 是 γ 的最大存在区间矛盾.

测地线是最短线的最大区间相对测地线的最大存在区间是闭的

3 月 8 日第二段 1 小时 31 分 7 秒

由最短线也是连接其上任意两点的最短线，知测地线是最短线的点是个区间.

$A = \{t > 0 \mid d(p,\gamma(t)) = t\|v\|_g\}$ 是闭的.

Either $A = (0,b)$ or $A = (0,a]$ for some $0 < a < b$.

定义 4.1.

- *如果* $A = (0,a]$，*则称* $\gamma(a)$ *是* p *沿测地线* γ *的割点.*
- *如果* $A = (0,b)$，*则称* p *沿测地线* γ *没有割点.*
- *称割点的全体为* p *的割迹，记作* $C(p)$.
- *定义* τ: $\{v \in T_pM \mid \|v\|_g = 1\} \to \mathbb{R}, \tau(v) = \begin{cases} a & \textit{if } \exp_p(av) \textit{ is a cut point of } p \\ b & \textit{if } p \textit{ has no cut point along } t \mapsto \exp_p(tv) \end{cases}$

定义 4.2.

- *Define a map* $\tau : S_p \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

  $\forall v \in S_p, \tau(v) = \begin{cases} a & \textit{if } \exp_p(av) \textit{is a cut point ofp} \\ \infty & \textit{ifphas no cut point alongt} \mapsto \exp_p(tv) \end{cases}$

  $E(p) = \{tv \mid v \in S_p, 0 \leqslant t < \tau(v)\}$

  $\tilde{C}(p) = \{tv \mid v \in S_p, t = \tau(v)\}$

  $C(p) = \{\textit{cut points ofp}\} = \exp_p(\tilde{C}(p))$

$[0,b)$ is the maximal interval on which $t \mapsto \exp_p tv$ is defined.

命题 4.3. $\forall\ p,q \in M, \exists$ *two shortest curve connecting* p *and* q*,*

推论 4.4. $\exp_p : E(p) \to \exp_p(E(P)) \subset M$ *is injective.*

证明. Suppose $\exists V, W \in E(p)$ s.t. $\exp_p(V) = \exp_p(W) = q$.

$t \mapsto \exp_p\left(t\frac{v}{\|v\|}\right)$

$t \mapsto \exp_p\left(t\frac{w}{\|w\|}\right)$

Contradiction. □

推论 4.5. $\exp_p(E(P)) \cap C(p) = \varnothing$.

证明. Suppose $\exists\, v \in \tilde{C}(p), W \in E(p)$ s.t. $\exp_p V = \exp_p W = q$

Contradiction. □

Question: $\exp_p(E(p)) \cup C(p) = M$?

$\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

$\forall q \in \exp_p(E_p) \cup C(p) = M$?

5 Hopf-Rinow Theorem

3 月 11 日 27 分 14 秒

任给 $p_0, q \in M, d(p_0, q) = r_0$. 我们想要找 p_0, q 之间的最短线.

我们知道局部上总是可以做的，问题是 p_0, q 可能离得很远.

思路是一步一步走.

选取以 p_0 为中心的一个 normal ball $B(p_0, \rho_0)$，若 $q \in B(p_0, \rho_0)$，结束.

若 $q \notin B(p_0, \rho_0)$，假设 p_0, q 之间存在最短线 γ，易知

- $\gamma \cap \partial B(p_0, \rho_0) = \{pt\} =: \{p_1\}$.
- $d(p_0, q) = \min\limits_{p \in \partial B(p_0, \rho_0)} d(p, q)$.

从 p_1 出发，我们可以找一个 normal ball $B(p_1, \rho_1)$，并重复上述操作.

问题是：(1) p_0 到 p_2 的分段曲线是最短的吗？(2) 最终能达到 q 吗？

- $d(p_1, q) = r_0 - \rho_0$
  - 假如 $d(p_1, q) < r_0 - \rho_0$，那么可以找到一条连接 p_0, q 的长度小于 r_0 的曲线，矛盾.
  - 假如 $d(p_1, q) > r_0 - \rho_0$. 任选连接 p_0, q 的曲线 γ，$Length(\gamma) \geqslant \rho_0 + d(p_1, q)$.
    取下确界，得 $r_0 \geqslant \rho_0 + d(p_1, q) > r_0$，矛盾.
- $d(p_0, p_2) = \rho_0 + \rho_1$
  - $d(p_0, p_2) \leqslant d(p_0, p_1) + d(p_0, p_2) = \rho_0 + \rho_1$.
  - $d(p_0, p_2) \geqslant d(p_0, q) - d(p_2, q) = r - (r - \rho_0 - \rho_1) = \rho_0 + \rho_1$.

因此，走了 n 步之后，p_0 和 p_n 之间的连线仍是最短的.

3 月 11 日 55 分 24 秒名场面：方向决定道路，道路决定命运.

容易举出一些例子使得 (2) 不成立，为此我们附加一些额外的条件.

3 月 11 日 59 分 19 秒

定义 5.1.

- *injective radius at* $p \in M$: $i(p) = \sup \left\{ \rho > 0 \mid \exp_p \big|_{B(O,\rho)} \text{ is a diffeomorphism} \right\}$.
- *injective radius of* M : $i(M) = \inf\limits_{p \in M} i(p)$.

M compact $\Longrightarrow i(M) > 0$.

3 月 11 日 1 小时 4 分 52 秒

Given $p \in M$,

1. Assumption I: $\overline{B_p(r)}$ is compact($\Longleftrightarrow$All closed bounded subsets of M is compact).
2. Assumption II: (M, g) is a complete metric space.
3. Assumption III: $\exp_p(p)$ is defined on the whole space T_pM.

这三个条件都可以保证 (2). 下面用 Assupmtion III 推 (2).

3 月 21 日 1 小时 11 分 43 秒

证明. $p, V \in T_pM$ $c(t) = \exp_p tV$

Aim:$c(r) = \exp_p(rV) = q$

Consider the set $I := \{t \in [0, r] \mid d(c(t), q) = r - t\}$

□

1 小时 24 分 33 秒

事实上，上面几种假定是等价的，这就是 Hopf-Rinow 定理.

3 月 15 日 2 分 31 秒

定理 5.2 (Hopf-Rinow,1931)**.** *Let (M, g) be a Riemannian manifold, TFAE*

(1) *(M, d_g) is a complete metric space.*

(2) *All closed bounded subsets of M is compact.*

(3) $\exists\ p \in M$, $\exp_p$ *is defined on the whole* T_pM*.*

(4) $\forall\ p \in M$, $\exp_p$ *is defined on the whole* T_pM*.*

Moreover, each of the statements $(1)-(4)$ *implies*

(5) $\forall\ p, q \in M$ *can be joined by a shortest curve.*

注记. 原始论文：*Ueber den Begriff der vollständigen differentialgeometrischen Fläche*.

证明.

- $(3) \implies (2)$

  Claim:$\forall\ r > 0, \overline{B(p, r)}$ is compact.

  For any bounded closed subset K, $\exists\ r_k$ such that $K \subset \overline{B(p, r_k)}$.

  FACT:$\overline{B(p, r)} = \exp_p(\overline{B(Op, r)})$

  - $\exp_p(\overline{B(O_p, r)}) \subset \overline{B(p, r)}$

    $\forall\ v \in \overline{B(O_p, r)}, d(p, \exp_p V) \leqslant r \implies \exp_p V \in \overline{B(p, r)}$
  - $\forall q \in \overline{B(p, r)}$,

- $(2) \implies (1)$

- $(1) \implies (4)$

  Suppose $\exists\ p \in M$ and $v \in T_pM$ such that the geodesic $t \mapsto \exp_p tv$ is defined on the maximal interval $[a, b), b < \infty$.

  For any $\{t_n\} \subset [a, b)$ such that $t_n \to b$, $d(\exp_p t_n v, \exp_p t_m v) \leqslant \|v\|_g |t_n - t_m|$ and then $\{\exp_p t_n v\}$ is a Cauchy sequence.

  $\exists\ p_0 \in M$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \exp_p t_n v = p_0$,i.e. $\forall \delta > 0, \exists N$ such that $\exp_p t_n v \in B(p_0, \delta), \forall n \geqslant N$.

□

引理 5.3. 内容...

6 Cut locus 2

3 月 15 日 39 分 24 秒

定理 6.1. *Let (M, g) be a complete Riemannian manifold, then*

$$M = \exp_p(E(p)) \sqcup c(p).$$

定理 6.2. *Let (M, g) be a complete Riemannian manifold.*

Let $\gamma\colon [a, b] \to M$ be a normal geodesic with $p = \gamma(0)$, v

证明. Choose a sequence of parameters

$$a_1 > a_2 > a_3 > \cdots, \quad \lim_{i\to+\infty} a_i = a.$$

By completeness, $\exists v_i \in T_pM, \|v_i\| = 1$ such that

$$\gamma_i(t) = \exp_p tv_i, t \in [0, b_i]$$

is a shortest curve form p to $\gamma(a_i)$, where $b_i = d(p, \gamma(a_i))$.

Notice that $v_i \neq v$.

$\lim_{i\to+\infty} p_i =$ □

7 黎曼覆盖映射

8 Existence of shortest curves in given homotopy class

- isometry：微分同胚，度量等于拉回
-

3 月 15 日 1 小时 26 分 15 秒

定理 8.1. *Let (M, g) be compact.*

Then every homotopy class of closed curves in M contains a curve which is shortest in its homotopy class and a geodesic.

引理 8.2. *Let (M, g) be compact, $\exists \rho_0 > 0$ such that for any $\gamma_0, \gamma_1 \colon S^1 \to M$ be closed curves with $d(\gamma_0(t), \gamma_1(t)) \leqslant \rho_0, \forall\ t \in S_1$ we have γ_0 and γ_1 are homotopic.*

引理 8.3. *A shortest curve in a homotopy class is geodesic.*

证明. Let $(\gamma)n_{n\in\mathbb{N}}$ is a minimizing sequence for length in the homotopy class.

All are parametrized proportional to arc length.

We can find $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < t_{n+1} = 2\pi$ with the property that

$$Length(\gamma_n\mid_{t_i,t_{i+1}}) \leqslant \frac{\rho_0}{2}$$

□

9 title

9.1 前情回顾

Riemannian Covering map

$\pi : (\tilde{M}, \pi^* g) \to (M, g)$ smooth map

locally Riemannian isometry

isometry $\varphi \colon (M, g_M) \to (N, g_N)$ is called an isometry if φ is diffeomorphism and $g_M = \varphi^* g_N$

locally isometry $\varphi \colon (M, g_M) \to (N, g_N)$ smooth map, $\forall p \in M \exists U \in p$such that $\varphi\big|_U \colon U \to \varphi(U)$ is an isometry 问题：对 $\varphi(U)$ 有没有要求

locally Riemannian isometry $\varphi \colon (M, g_M) \to (N, g_N)$ smooth map, $\forall\ p \in M, \mathrm{d}\varphi_p : T_p M \to T_{\varphi(p)} N$ is a linear isometry.

命题 9.1. *Let $\varphi \colon (M, g_M) \to (N, g_N)$ be a locally Riemannian isometry.*

(1) *φ maps geodesics to geodesics.*

(2) *For any $\tilde{p}, \tilde{v} \in T_{\tilde{p}} M$, we have*

$$\varphi \circ (\exp_{\tilde{p}} \tilde{v}) = \exp_{\varphi(\tilde{p})}(\mathrm{d}\varphi_{(\tilde{p})}(\tilde{v})).$$

$$\begin{array}{ccc} T_{\tilde{p}} M & \xrightarrow{\mathrm{d}\varphi(\tilde{p})} & T_{\varphi(\tilde{p})N} \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow \\ M & \xrightarrow{\quad\varphi\quad} & N \end{array}$$

(3) φ *is distance non-increasing.*

$$\forall\ \tilde{p},\tilde{q},d_N(\varphi(\tilde{p}),\varphi(\tilde{q}))\leqslant d_M(\tilde{p},\tilde{q})$$

(4) φ *is bijective, then it is distance preserving.*

定理 9.2. (M,g_M) *complete Riemannian manifold,* $p,q\in M$*. Every homotopy class of paths from* p *to* q *contains a shortest curve.*

证明. Assume that (M,g_M) complete$\Longrightarrow(\tilde{M},\pi^*g)$ is complete.

□

命题 9.3. *Let* $\pi\colon(\tilde{M},\tilde{g})\to(M,g)$ *is a Riemannian covering map, then* (M,g) *complete iff* $(\tilde{M},\tilde{g})$ *complete.*

证明.

ete $\Longrightarrow(\tilde{M},\tilde{g})$complete $\forall\tilde{p}\in\tilde{M},\tilde{v}\in T_{\tilde{p}\tilde{M}},t\mapsto\exp_{\tilde{p}}t\tilde{v}$

$p=\pi(\tilde{p}),v=\mathrm{d}\pi(\tilde{p})(\tilde{v})$

geodesic $t\mapsto\exp_p tv$ is defined on $[0,\infty)$

path liftying, $\exists\tilde{\gamma}$ a path in $\tilde{M}$ such that $\tilde{\gamma(0)}=\tilde{p},\pi\circ\tilde{\gamma}=\gamma$

$\dfrac{\mathrm{d}\tilde{\gamma}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}=\tilde{v}$

ete $\Longrightarrow(M,g)$complete $\forall p\in M,\forall v\in T_pM,t\mapsto\exp_p tv$

□

命题 9.4. *Let* $\pi\colon(\tilde{M},\tilde{g})\to(M,g)$ *is a local Riemannian isometry. Suppose* $(\tilde{M},\tilde{g})$ *complete. Then* (M,g) *is complete and* π *is a Riemannian covering map.*

证明. (1) π is surjective.

$\forall\tilde{p}\in\tilde{M},p=\pi(\tilde{p})\in M$

$\forall q\in M,\exists$ a shortest geodesic γ from p to q.

Let $\tilde{\gamma}$ be the lifting of γ starting at $\tilde{p}=\tilde{\gamma}(0)$

$\pi\circ\tilde{\gamma}=\gamma,q=\gamma(t_0),\pi\circ\tilde{\gamma}(t_0)=\gamma(t_0)=q$

(2) evenly covered

$p\in U,\pi^{-1}(U)=\bigsqcup\limits_{\alpha\in\Lambda}\tilde{U}_\alpha$

$\pi\colon\tilde{U}_\alpha\to U$ diffeomorphism

Normall ball $B(p,\varepsilon)$

$\tilde{U}_\alpha=B(\tilde{p}_\alpha,\varepsilon)$ metric ball

(a) $\tilde{U}_\alpha \cap \tilde{U}_\beta = \varnothing, \forall \alpha \neq \beta$

$d(\tilde{p}_\alpha, \tilde{p}_\beta) \geqslant 2\varepsilon$

(b) $\pi^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} \tilde{U}_\alpha$

- $\forall \tilde{q} \in \tilde{U}_\alpha$ for some $\alpha \in \Lambda$
  $\exists$ a geodesic $\tilde{\gamma}$ of length $< \varepsilon$ from

□

(U, x)

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^i(t)}{\mathrm{d}t^2} + \Gamma^i_{jk}(x(t)) \frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t} = 0, i = 1, \cdots, n$$

10 能量泛函的变分 II

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}s} &= \frac{1}{2}\int_a^b \frac{\partial}{\partial s}\left\langle \frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial t}\right\rangle \mathrm{d}t && \frac{\partial F}{\partial t}\text{视作沿曲线}F(t,\cdot)\text{的向量场}\\
&= \int_a^b \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial t}\right\rangle \mathrm{d}t && \frac{\partial F}{\partial t}\text{视作沿}F\text{的向量场}\\
&= \int_a^b \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial F}{\partial s}, \frac{\partial F}{\partial t}\right\rangle \mathrm{d}t\\
&= \int_a^b \frac{\partial}{\partial t}\left\langle \frac{\partial F}{\partial s}, \frac{\partial F}{\partial t}\right\rangle \mathrm{d}t - \int_a^b \left\langle \frac{\partial F}{\partial s}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial F}{\partial t}\right\rangle \mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

$$
E'(0) = \langle V, T\rangle \Big|_a^b - \int_a^b \langle V, \nabla_T T\rangle \,\mathrm{d}t
$$

3 月 29 日 1 小时 35 分 41 秒

10.1 Gauss 引理

3 月 29 日 1 小时 36 分 33 秒

10.2 第二变分公式

3 月 29 日 1 小时 51 分 30 秒

Chapter 3

Levi-Civita 联络和黎曼曲率张量

关于向量丛上的联络、拉回丛上的拉回联络、联络的曲率形式的知识, 可参考微分流形笔记.

1 仿射联络

2 张量场的协变导数

本节我们从切丛上的一个联络出发, 定义张量丛上的一个联络.

定理 2.1. 设 M 是光滑流形，∇ 是其上的仿射联络，那么存在唯一的映射

$$\nabla\colon \Gamma(TM)\times\Gamma\left(\bigotimes^{r,s} TM\right)\to\Gamma\left(\bigotimes^{r,s} TM\right)$$

满足

(1) $\nabla_{fX+fY}A = f\nabla_X A + g\nabla_Y A$

(2) $\nabla_X(A_1+A_2) = \nabla_X A_1 + \nabla_X A_2$

(3) $\nabla_X(fA) = (Xf)A + f\nabla_X A$

(4) 当 $A\in C^\infty(M)$ 或 $\Gamma(TM)$ 时，∇ 与给定的仿射联络一致.

(5) $\nabla_X(A_1\otimes A_2) = (\nabla_X A_1)\otimes A_2 + A_1\otimes\nabla_X A_2$

(6) $C(\nabla_X A) = \nabla_X(CA)$，其中 $C\colon\Gamma(\bigotimes^{r,s} TM)\to\Gamma(\bigotimes^{r-1,s-1} TM)$

证明. $A\in\Gamma(\bigotimes^{r,s} TM)$
$A = A^{i_1 i_2\cdots i_r}_{j_1 j_2\cdots j_s} Y_{i_1}\otimes Y_{i_2}\otimes\cdots\otimes Y_{i_r}\otimes\omega^{j_1}\otimes\cdots\otimes\omega^{j_s}$
$\nabla_X A = \sum\nabla_X$
$= \sum X(A^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s})Y_{i_1}$
线性，Leibniz
唯一的问题是如何对微分 1 形式求导
$\omega\in\Omega^1(M) = \Gamma(T^*M)$
$\nabla_X\omega$?
$\forall Y\in\Gamma(TM), \omega(Y)\in C^\infty(TM)$
$X(\omega(Y)) = \nabla_X(\omega(Y)) = \nabla_X(C(\omega\otimes Y)) = C(\nabla_X(\omega\otimes Y))$
$C(\nabla_X\omega\otimes Y + \omega\otimes\nabla_X Y)$
$\nabla_X(\omega)Y + \omega(\nabla_X Y)$
$(\nabla_X\omega) = X(\omega(Y)) - \omega(\nabla_X Y)$
$\Longrightarrow$ uniqueness □

注记. (1) *is a consequence of the other assumptions.*
不是那么令人惊讶，这是说在这里是多余的，而不是在仿射联络的最初定义中也是多余的
$\forall X, Y, Z\in\Gamma(TM)$
$f, g\in C^\infty(TM), \omega\in\Gamma(T^*M)$

证明. $(fX+gY)\omega(Z) = \nabla_{fX+gY}\omega(Z) + \omega(\nabla_{fX+gY})Z$
$= fX(\omega(Z)) + gY(\omega(Z))$ □

推论 2.2. $\forall\ A \in \Gamma(\bigotimes^{r,s} TM), \omega_\alpha \in \Gamma(T^*M), \alpha = 1, 2, \cdots, r, Y_j \in \Gamma(TM), j = 1, \cdots, s$

We have $(\nabla_X A)(\omega_1, \cdots, \omega_s; Y_1, \cdots, Y_s)$

$= A(\omega_1, \cdots, \omega_r, Y_1, \cdots, Y_s)$

locality

$\nabla_X A(p)$ only depends on X at p and Y in $U \ni p$.

(M, ∇)

$\varphi\colon V \to W$ isomorphism

$\varphi^*\colon W^* \to V^*$ isomorphism ,$\alpha \mapsto \varphi^*(\alpha)$

$\forall v \in V, \varphi^*(\alpha)(v) := \alpha(\varphi(v))$

$P_{c,0,t}\colon T_{c(0)}M \to T_{c(t)}M$

$\longrightarrow \tilde{P}_{c,0,t}\colon \bigotimes^{r,s} T_{c(0)}M \to \bigotimes^{r,s} T_{c(t)}M$

$v_1 \otimes \cdots \otimes v_r \otimes \omega^1 \otimes \cdots \otimes \omega^r \mapsto P_{c,0,t}(v_1) \otimes \cdots \otimes$

Define $\nabla_{X(p)} A := \lim_{h \to 0} \frac{\tilde{P}}{}$

定义 2.3. 称张量场 A 为平行的如果 $\nabla_X A = 0,\ \forall\ X \in \Gamma(TM)$.

设曲线 $c(t)$ 在坐标卡 (U,x) 中表达为 $(c^1(t),\cdots,c^n(t))$. 计算切向量 $c'(t)$ 关于自身的协变导数.

$$\begin{aligned}\frac{Dc'(t)}{\mathrm{d}t} &= \frac{D}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}c^i(t)}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \frac{\mathrm{d}^2c^i(t)}{\mathrm{d}t^2}\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\mathrm{d}c^i(t)}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}c^j(t)}{\mathrm{d}t}\nabla_{\partial_j}\frac{\partial}{\partial x^i} \\ &= \left(\frac{\mathrm{d}^2c^k(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}c^i(t)}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}c^i(t)}{\mathrm{d}t}f_{ij}^k\right)\frac{\partial}{\partial x^k}\end{aligned}$$

其中

$$\nabla_{\partial_j}\frac{\partial}{\partial x^i} = f_{ij}^k\frac{\partial}{\partial x^k}.$$

如果把 f_{ij}^k 取为 Γ_{ij}^k, 那么 $\dfrac{Dc'(t)}{\mathrm{d}t} = 0$ 等价于测地线方程.

注记. *联络就是由 n^3 个函数 f_{ij}^k 给定的. 但显然不是说随便给我 n^3 个函数我都决定联络. 但给你 Γ_{ij}^k 是可以决定联络的. 在这个联络下, 测地线方程就等价于 $\dfrac{Dc'(t)}{\mathrm{d}t} = 0$.*

事实上,Γ_{ij}^k 决定的联络也不是唯一的使得测地线方程等价于 $\dfrac{Dc'(t)}{\mathrm{d}t} = 0$ 的联络,Γ_{ij}^k 决定的联络自身还有一些特殊性,

(1) $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$

(2) $g_{ij,l} = g_{ij}\Gamma_{jl}^k + g_{kj}\Gamma_{il}^k$

这两个式子, 在我们学过联络之后, 可以翻译为

(1) Γ_{ij}^k 决定的联络是无挠的.

(2) g 关于 Γ_{ij}^k 决定的联络是平行的.

满足这两条性质的联络是唯一的.

3 Levi-Civita 联络

定义 3.1. 称仿射联络 ∇ 是 (M,g) 上的 Levi-Civita 联络如果 $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$ 且 $\nabla g = 0$.

命题 3.2. ∇ 是无挠的 $\iff \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

证明. 容易看出 $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k \iff \nabla_{\partial_i}\partial_j = \nabla_{\partial_j}\partial_i$. 那么

$$\begin{aligned}\nabla_X Y &= \nabla_{X^i\partial_i}\left(Y^j\partial_j\right)\\ &= X^i\frac{\partial Y_j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j} + X^iY^j\nabla_{\partial_i}\partial_j\\ &= \nabla_Y X + [X,Y].\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}R_{ijkl} =&\Delta R_{ijkl} + 2(B_{ijkl} - B_{ijlk} - B_{iljk} + B_{ikjl})\\ &- g^{pq}R_{pjkl}R_{qi} + R_{ipkl}R_{qj} + R_{ijpl}R_{qk} + R_{ijkp}R_{ql}\end{aligned}$$

□

命题 3.3. ∇ 是度量相容的 $\iff$ $g_{ij,l} = g_{ik}\Gamma_{jl}^k + g_{kj}\Gamma_{jl}^k$.

证明. □

定理 3.4 (黎曼几何基本定理)**.** 任意黎曼流形 (M,g) 上存在唯一的 *Levi-Civita* 联络.

局部坐标下的证明. 假定存在性. 轮换一下就能说明 $\Gamma_{ij}^k = \dfrac{1}{2}g^{kl}(g_{il,j} + g_{jl,i} - g_{ij,l})$. □

不用坐标的证明. Suppose existence.

Given $X, Y \in \Gamma(TM)$, we can determine $\nabla_X Y$ by determine $\langle\nabla_X Y, Z\rangle$ for any $Z \in \Gamma(TM)$.

$$\begin{aligned}\langle\nabla_X Y, Z\rangle &\overset{(2)}{=} X\langle Y,Z\rangle - \langle Y, \nabla_X Z\rangle\\ &\overset{(1)}{=} X\langle Y,Z\rangle - \langle Y, \nabla_Z X + [X,Z]\rangle\\ &= X\langle Y,Z\rangle - \langle Y,[X,Z]\rangle - \langle Y,\nabla_Z X\rangle\\ &\overset{(2)}{=} X\langle Y,Z\rangle - \langle Y,[X,Z]\rangle - Z\langle Y,X\rangle + \langle\nabla_Z Y, X\rangle\\ &\overset{(1)}{=} X\langle Y,Z\rangle - \langle Y,[X,Z]\rangle - Z\langle Y,X\rangle + \langle\nabla_Y Z + [Z,Y], X\rangle\\ &= X\langle Y,Z\rangle - \langle Y,[X,Z]\rangle - Z\langle Y,X\rangle + \langle X,[Z,Y]\rangle + \langle\nabla_Y Z, X\rangle\\ &\overset{(2)}{=} X\langle Y,Z\rangle - \langle Y,[X,Z]\rangle - Z\langle Y,X\rangle + \langle X,[Z,Y]\rangle + Y\langle Z,X\rangle - \langle Z,\nabla_Y X\rangle\\ &\overset{(1)}{=} X\langle Y,Z\rangle - \langle Y,[X,Z]\rangle - Z\langle Y,X\rangle + \langle X,[Z,Y]\rangle + Y\langle Z,X\rangle - \langle Z,\nabla_X Y + [Y,X]\rangle\\ 2\langle\nabla_X Y, Z\rangle &= X\langle Y,Z\rangle + Y\langle Z,X\rangle - Z\langle X,Y\rangle - \langle X,[Y,Z]\rangle + \langle Y,[Z,X]\rangle + \langle Z,[X,Y]\rangle\end{aligned}$$

□

引理 3.5. 设 (M,g) 是黎曼流形，∇ 是其上与 g 相容的联络. 设 $c\colon(a,b)\to M$ 是光滑曲线，$\dfrac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}$ 是 ∇ 诱导的沿曲线的协变导数. 设 $V(t), W(t)$ 是沿 c 的光滑曲线，那么

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle V(t),W(t)\rangle = \left\langle\frac{DV}{\mathrm{d}t}(t), W(t)\right\rangle + \left\langle V(t), \frac{DW}{\mathrm{d}t}(t)\right\rangle.$$

证明. 设在坐标邻域 (U,x) 中 $V(t)=V^i(t)\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{c(t)}, W(t)=W^j(t)\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_{c(t)}$, 那么

$$
\begin{aligned}
\mathrm{LHS} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(V^i(t)W^j(t)\left\langle \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{c(t)}, \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_{c(t)}\right\rangle\right) \\
&= \left\langle \frac{\mathrm{d}V^i}{\mathrm{d}t}(t)\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{c(t)}, W(t)\right\rangle + \left\langle V(t), \frac{\mathrm{d}W^j}{\mathrm{d}t}(t)\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_{c(t)}\right\rangle + V^i(t)W^j(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\langle \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{c(t)}, \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_{c(t)}\right\rangle \\
&= \left\langle \frac{\mathrm{d}V^i}{\mathrm{d}t}(t)\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{c(t)}, W(t)\right\rangle + \left\langle V(t), \frac{\mathrm{d}W^j}{\mathrm{d}t}(t)\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_{c(t)}\right\rangle + V^i(t)W^j(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{c(t)}, \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_{c(t)}\right) \\
&= \left\langle \frac{\mathrm{d}V^i}{\mathrm{d}t}(t)\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{c(t)}, W(t)\right\rangle + \left\langle V(t), \frac{\mathrm{d}W^j}{\mathrm{d}t}(t)\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_{c(t)}\right\rangle + V^i(t)W^j(t)c'(t)g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \\
&= \left\langle \frac{\mathrm{d}V^i}{\mathrm{d}t}(t)\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{c(t)}, W(t)\right\rangle + \left\langle V(t), \frac{\mathrm{d}W^j}{\mathrm{d}t}(t)\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_{c(t)}\right\rangle + V^i(t)W^j(t)\nabla_{c'(t)}g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \\
&= \left\langle \frac{DV}{\mathrm{d}t}, W\right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{\mathrm{d}t}\right\rangle
\end{aligned}
$$

□

注记.

命题 3.6. 设 (M,g) 是黎曼流形，∇ 是其上的仿射联络. 那么 ∇ 与 g 相容当且仅当任意平行移动是等距同构.

证明. $c\colon [a,b]\to M$ curve

$\mathcal{P}_{c,a,t}\colon T_{c(a)}M \to T_{c(t)}M$

-
- 任意 $X,Y,Z\in\Gamma(TM), \forall p\in M$

□

命题 3.7. 设 ∇ 是 M 上的无挠联络. 设 $s\colon \mathbb{R}^2 \to M \in C^\infty$, V 是沿 s 的光滑向量场. 那么

$$\widetilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x}} s_* \frac{\partial}{\partial y} = \widetilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial y}} s_* \frac{\partial}{\partial x}.$$

证明. 直接在局部坐标下计算. □

4 能量泛函的第二变分公式与曲率张量

5 协变微分与 Ricci 恒等式

4 月 1 日 1 小时 23 分 16 秒

6 协变微分的局部表达式

设 A 是 M 上的 (r,s) 型张量, 在局部坐标卡 (U,x) 内,

$$A = A^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\otimes \mathrm{d}x^{j_1}\otimes\cdots\otimes \mathrm{d}x^{j_s}.$$

我们来计算 $(r,s+1)$ 型张量 ∇A, 设

$$\nabla A = B^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s k}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\otimes \mathrm{d}x^{j_1}\otimes\cdots\otimes \mathrm{d}x^{j_s}\otimes \mathrm{d}x^k.$$

那么

$$\begin{aligned}
B^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s k} &= (\nabla_{\partial_k}A)\left(\mathrm{d}x^{i_1},\cdots,\mathrm{d}x^{i_r},\partial_{j_1},\cdots,\partial_{j_s}\right) = \partial_k\left(A(\mathrm{d}x^{i_1},\cdots,\mathrm{d}x^{i_r},\partial_{j_1},\cdots,\partial_{j_s})\right)\\
&\quad -\sum A(\mathrm{d}x^{i_1},\cdots,\nabla_{\partial_k}\mathrm{d}x^{i_h},\cdots,\mathrm{d}x^{i_r},\partial_{j_1},\cdots,\partial_{j_s}) - \sum A(\mathrm{d}x^{i_1},\cdots,\mathrm{d}x^{i_r},\partial_{j_1},\cdots,\nabla_{\partial_k}\partial_{j_h},\cdots,\partial_{j_s})\\
&= \partial_k A^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s} + A^{i_1\cdots i_{h-1} l i_{h+1}\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}\Gamma^{i_h}_{kl} - A^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_{h-1} l j_{h+1}\cdots j_s}\Gamma^{l}_{k j_h}
\end{aligned}$$

7 音乐同构

$$\flat\colon T_pM \longrightarrow T_p^*M, \quad X \longmapsto \flat X, \quad \flat X(Y) = g(X,Y).$$

$$\sharp\colon T_p^*M \longrightarrow T_pM, \quad \omega \longmapsto \sharp\omega, \quad g(\sharp\omega, Y) = \omega(Y).$$

8 算符

函数的梯度

函数的梯度就是函数的外微分在算符同构下的像. 在局部坐标系下,

$$\operatorname{grad} f = \sharp \mathrm{d}f = \sharp\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i\right) = \frac{\partial f}{\partial x^i} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j}$$

向量场的散度

在欧式空间中, 向量场的散度即为每个分量在各自的方向上求导再求和.

在流形上的一种推广方式是, 首先指定流形上的一种求导方式, 即一个仿射联络 ∇, 然后考虑

$$\nabla X = X^i_{;j}\partial_i \otimes \mathrm{d}x^j,$$

然后定义 $\operatorname{div} X = \sum X^i_{;i}$. 因为这个量是 ∇X 作为线性变换时的迹, 因此是不依赖于基的选取的, 也就是不依赖于局部坐标的选取, 从而是良定的. 注意

$$X^i_{;i} = \partial_i X^i + X^h \Gamma^i_{hi}$$

因此实际上我们是对 $\sum \partial_i X^i$ 进行了一些修正得到了一个良定的量.

命题 8.1. *设 ∇ 是 M 上的 Levi-Civita 联络, 那么*

$$\operatorname{div} X = \frac{1}{\sqrt{G}}\partial_i\left(\sqrt{G}X^i\right), \quad G = \det(g_{ij}).$$

证明. $\square$

函数的 Hessian

Laplace-Beltrami 算子

9 Bianchi 恒等式

- 第一 Bianchi 恒等式的 global 版本、证明和局部版本
- 第二 Bianchi 恒等式的 global 版本、证明和局部版本

命题 9.1. 设 M 是光滑流形，∇ 是其上无挠的仿射联络，R 是相应的的曲率张量. 那么对于任意 $X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$，我们有

(1)（第一 *Bianchi* 恒等式）$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0.$

(2)（第二 *Bianchi* 恒等式）$(\nabla_X R)(Y,Z)W$

10 Riemann 曲率张量

11 截面曲率

12 高斯绝妙定理

13 Ricci 曲率

14 数量曲率

例子 14.1. 考虑复平面上的黎曼度量

$$g = \frac{4}{(1+x^2+y^2)^2}(\mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}x + \mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}y) = \frac{4}{(1+|z|^2)^2}|\mathrm{d}z|^2,$$

计算它的 *Gauss* 曲率.

解. 记

$$f = \frac{4}{(1+x^2+y^2)^2}$$

则

$$K = -\frac{\Delta \log f}{2f}.$$

$$\Delta \log f = -2\Delta \log(1+x^2+y^2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\log(1+x^2+y^2) = \frac{2x}{1+x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\log(1+x^2+y^2) = \frac{2(1+x^2+y^2) - 2x \cdot 2x}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{2-2x^2+2y^2}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$\Delta \log(1+x^2+y^2) = \frac{4}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$K = -\frac{1}{2}\frac{(1+x^2+y^2)^2}{4} \cdot (-2) \cdot \frac{4}{(1+x^2+y^2)^2} = 1$$

□

例子 14.2. g 的定义同上, 考虑映射 $F(z)=z^n$, 计算 F^*g 在 $\mathbb{C}^*$ 上的 *Gauss* 曲率.

解. 设 $\zeta=z^n$, 则 $\mathrm{d}\zeta=nz^{n-1}\mathrm{d}z$

$$F^*g=\frac{4}{(1+|z|^{2n})^2}\cdot n^2\cdot|z|^{2n-2}|\mathrm{d}z|^2=n^2\frac{4}{(1+(x^2+y^2)^n)^2}(x^2+y^2)^{n-1}(\mathrm{d}x\otimes\mathrm{d}x+\mathrm{d}y\otimes\mathrm{d}y)$$

记

$$f=n^2\frac{4}{(1+(x^2+y^2)^n)^2}(x^2+y^2)^{n-1}$$

则

$$K=-\frac{\Delta\log f}{2f}.$$

$$\log f=-2\log(1+(x^2+y^2)^n)+(n-1)\log(x^2+y^2)+\mathrm{const}$$

我们在 $\mathbb{C}^*$ 上计算 $\Delta\log f$, 此时 $\Delta\log(x^2+y^2)=0$.

$$\frac{\partial}{\partial x}\log(1+(x^2+y^2)^n)=\frac{n(x^2+y^2)^{n-1}\cdot 2x}{1+(x^2+y^2)^n}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\log(1+(x^2+y^2)^n)&=\frac{(n(n-1)(x^2+y^2)^{n-2}4x^2+2n(x^2+y^2)^{n-1})(1+(x^2+y^2)^n)-n^2(x^2+y^2)^{2n-2}\cdot 4x^2}{(1+(x^2+y^2)^n)^2}\\&=\frac{n(n-1)(x^2+y^2)^{n-2}4x^2+2n(x^2+y^2)^{n-1}}{(1+(x^2+y^2)^n)^2}\\&+\frac{n(n-1)(x^2+y^2)^{2n-2}4x^2+2n(x^2+y^2)^{2n-1}-n^2(x^2+y^2)^{2n-2}\cdot 4x^2}{(1+(x^2+y^2)^n)^2}\\ \Delta\log(1+(x^2+y^2)^n)&=\frac{4n(n-1)(x^2+y^2)^{n-1}+4n(x^2+y^2)^{n-1}}{(1+(x^2+y^2)^n)^2}\\&+\frac{4n(n-1)(x^2+y^2)^{2n-1}+4n(x^2+y^2)^{2n-1}-4n^2(x^2+y^2)^{2n-1}}{(1+(x^2+y^2)^n)^2}\\&=\frac{4n^2(x^2+y^2)^{n-1}}{(1+(x^2+y^2)^n)^2}\end{aligned}$$

$$K=-\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}\frac{(1+(x^2+y^2)^n)^2}{4}\frac{1}{(x^2+y^2)^{n-1}}(-2)\frac{4n^2(x^2+y^2)^{n-1}}{(1+(x^2+y^2)^n)^2}=1$$

□

注记. 让我们分析一下 F^*g 在原点附近的行为.

$$\log f=-2\log(1+(x^2+y^2)^n)+(n-1)\log(x^2+y^2)+\mathrm{const}$$

所以 F^*g 在原点处有一个 $2\pi n$ 的锥角度.

15 Bochner 公式

16 测地曲率

17 Gauss-Bonnet 公式

定理 17.1. 设 M 是紧的二维黎曼流形, 其边界 ∂M 光滑, 则

$$\int_M K \mathrm{d}A + \int_{\partial M} k_g \mathrm{d}s = 2\pi\chi(M).$$

Chapter 4

Jacobi 场

1 Jacobi 场

定义 1.1. 设 $\gamma\colon [a,b] \to M$ 是一条测地线. 对于 $t_0, t_1 \in [a,b]$，如果存在沿 γ 的不恒为零的 *Jacobi* 场 $U(t)$，满足 $U(t_0) = U(t_1) = 0$，则称 t_0, t_1 是沿 γ 的共轭值. 将所有这样的 *Jacobi* 场与恒为零的向量场所构成的线性空间的维数称作 t_0 和 t_1 作为共轭值的重数. 称 $\gamma(t_0)$ 和 $\gamma(t_1)$ 为沿 γ 的共轭点.

2 Morse 指标定理

3 Cartan-Hadamard 定理

4 空间形式

定义 4.1. 称常截面曲率的完备黎曼流形为空间型.

引理 4.2. 内容...

定理 4.3. 设 (M_i^n, g_i) 是单连通、截面曲率为 c 的空间型. 设 $p_i \in M_i$，$\left\{e_i^1, \cdots, e_i^n\right\}$ 是 $T_{p_i}M_i$ 的标准正交基，那么存在唯一的保距映射 $\varphi\colon M_1 \to M_2$ 使得 $\varphi(p_1) = p_2, \varphi_{*,p}(e_1^j) = e_2^j$.

5 单连通空间形式的等距群

5.1 $\mathbb{R}^n$

命题 5.1. $Iso(\mathbb{R}^n) \cong T(n) \rtimes O(n)$.

证明. 假设 $f \in Iso(\mathbb{R}^n)$ 满足 $f(0)=0$，否则考虑 $\tilde{f} = f - f(0)$.

(1) f 保持内积. 因为 f 保持距离，所以对任意 $x, y \in \mathbb{R}^n$，有

$$\|f(x)-f(y)\|^2 = \|x-y\|^2 \Longrightarrow \langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle .$$

(2) f 是线性的.

- $\|f(ax)-af(x)\|^2 = \|f(ax)\|^2 + \|af(x)\|^2 - 2\langle f(ax), af(x)\rangle = \|ax\|^2 + \|ax\|^2 - 2\|ax\|^2 = 0.$
- $\|f(x+y)-f(x)-f(y)\|^2 \overset{\text{展开}}{=\!=\!=} \cdots \overset{\text{脱}f}{=\!=\!=} \cdots \overset{\text{合并}}{=\!=\!=} \|x+y-x-y\|^2 = 0.$

(3) $f \in O(n)$.

□

注记. 证明了稍稍强一点的事：等距 $\Longrightarrow$ 双射.

5.2 $\mathbb{S}^n$

命题 5.2. $Iso(\mathbb{S}^n) \cong \mathrm{O}(n+1)$.

证明. https://math.stackexchange.com/questions/130193/isometries-of-mathbbsn □

5.3 $\mathbb{H}^n$

6 Killing-Hopf 定理

7 距离函数

Chapter 5

比较定理

1 Sturm 比较定理

2 Rauch 比较定理

3 Hessian 比较定理

4 Laplacian 比较定理

5 体积比较定理

Chapter 6

规范理论

Chapter 7

调和映射

1　泛函与变分

定义 1.1. 设 $c\colon [a,b] \to M$ 是一条光滑曲线. c 的一个（单参数）变分是指一个光滑映射

$$F\colon [a,b] \times (-\varepsilon,\varepsilon) \to M, \quad (t,s) \mapsto F(t,s)$$

满足 $F(t,0) = c(t)$. 记 $\dfrac{\partial F}{\partial t} = \mathrm{d}F\left(\dfrac{\partial}{\partial t}\right), \dfrac{\partial F}{\partial s} = \mathrm{d}F\left(\dfrac{\partial}{\partial s}\right)$（注意该记法与将 $\mathrm{d}c\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)$ 记作 $c'(t)$ 的习惯相同）. 称沿 c 的向量场 $V(t) := \dfrac{\partial F}{\partial s}(t,0)$ 为变分场.