Notes on Griffiths 1974

孙天阳

2023 年 7 月 14 日

目录

1 Maurer-Cartan 形式

2 $E(n)$

$E(n)$ 中的元素常被表示为

$$F = (x, A) = (x, e_1, \cdots, e_n)$$

这样决定了映射

$$x\colon E(n) \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad e_i\colon E(n) \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

作为流形间的映射, 我们可以考虑他们的切映射（我们将 $\mathbb{R}^n$ 每点处的切空间与 $\mathbb{R}^n$ 本身进行等同）

$$\mathrm{d}x\colon T(E(n)) \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad \mathrm{d}e_i\colon T(E(n)) \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

$\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}e_i$ 也可以看作是向量值的微分形式. 如果读者不熟悉向量值微分形式的语言, 可以阅读 GTM275 的第 21 小节. 对于向量值微分形式比如说 ω, 我们常用的一个操作是选定其取值的线性空间比如说 $\mathbb{R}^n$ 的一组基比如说 $\{E_i\}$, 然后将 ω 写成

$$\omega = \sum \omega_i \otimes E_i$$

的样子. 其中 ω_i 就是流形上普通的微分形式, 它吞切向量的方式是, 先用 ω 吞, 然后再将吐出的结果在选定的基 $\{E_i\}$ 下进行分解, 第 i 个分量就是用 ω_i 吞的结果. 但我们这里不这样做, 而是

$$\mathrm{d}x = \sum \omega_i \otimes e_i, \quad \mathrm{d}e_i = \sum \omega_{ij} \otimes e_j.$$

依旧是将 $\mathrm{d}x$ 作用在切向量上然后将结果在基下进行分解, 但是这时基不再是提前选定的一组基, 而是看吞的这个切向量属于哪个点的切空间, 比如属于某点 $F \in E(n)$, 别忘了

$$F = (x, e_1, \cdots, e_n)$$

中的 $\{e_i\}$ 可是一组幺正基, 我们就在这组基下进行分解. 具体来说, 设 $v \in T_F E(n)$, 那么

$$\mathrm{d}x(v) \in \mathbb{R}^n, \quad \omega_i(v) = \langle \mathrm{d}x(v), e_i(F) \rangle$$

我们用 $e_i(F)$ 来强调 e_i 对 v 所属的切空间的 F 的依赖性. 如果你熟悉向量丛及其截面的语言, 上面这些都是废话, x 和 $\{e_i\}$ 可看作平凡丛 $E(n) \times \mathbb{R}^n$ 的截面, 而

$$\mathrm{d}x, \mathrm{d}e_i \in \Gamma(T^*(E(n)) \otimes (E(n) \times \mathbb{R}^n)) = \Gamma(T^*(E(n))) \otimes \Gamma(E(n) \times \mathbb{R}^n)$$

作为一组整体的标架, 我们当然可以写

$$\mathrm{d}x = \sum \omega_i \otimes e_i, \quad \mathrm{d}e_i = \sum \omega_{ij} \otimes e_j.$$

一个令人震惊的事实是, 如上定义出的 ω_i 和 ω_{ij} 正是 $E(n)$ 上的 Maurer-Cartan 形式的分量. 为了说明这一点, 我们首先证明,

命题 2.1. *设 $\psi\colon E(n) \to \mathbb{R}^n$ 是光滑映射. 如果 ψ 是等变的, 即*

$$\psi(F \cdot F') = F \cdot \psi(F').$$

那么 $\mathrm{d}\psi = \sum \psi_i \otimes e_i$ 中的 ψ_i 是左不变的微分形式.

证明. 将等变的条件翻译为

$$\psi \circ L_F = F \circ \psi.$$

两边求切映射, 由链式法则有（原谅我同时采用了 $\mathrm{d}f$ 和 f_* 两种切映射的记号）

$$\mathrm{d}\psi \circ (L_F)_* = F_* \circ \mathrm{d}\psi$$

$$\left(\sum \psi_i \otimes e_i\right) \circ (L_F)_* = F_* \circ \left(\sum \psi_i \otimes e_i\right) = A \circ \left(\sum \psi_i \otimes e_i\right)$$

其中 A 是 F 的正交部分（$F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, y \mapsto Ay + b \Longrightarrow F_*\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, y \mapsto Ay$）.

取 $v \in T_{F'}E(n)$, 先算右侧,

$$\left(\sum \psi_i \otimes e_i\right)(v) = \sum \psi_i(v) e_i(F')$$

这是以 $\psi_i(v)$ 为系数的 $e_i(F')$ 的线性组合,A 作用上去的时候, 由于其是个线性映射, 系数直接提出去了, 断言

$$A \cdot e_i(F') = e_i(F \cdot F')$$

右侧

$$A(A'y + b') + b = AA'y + Ab' + b$$

结果为 AA' 的第 i 列, 左侧为 A 作用在 A' 的第 i 列, 是一回事. 所以

$$A \circ \left(\sum \psi_i \otimes e_i\right)(v) = \sum \psi_i(v) e_i(F \cdot F').$$

接下来计算

$$\left(\sum \psi_i \otimes e_i\right) \circ (L_F)_*(v) = \sum \psi_i((L_F)_* v) e_i(F \cdot F').$$

比较系数告诉我们

$$\psi_i(v) = \psi_i((L_F)_* v) = L_F^* \psi_i(v).$$

即 ψ_i 是左不变的微分形式. $\square$

为了对 x 和 e_i 使用上述命题, 我们简单验证一下他们都是等变的.

$$x(F \cdot F') = Ab' + b, \quad F \cdot x(F') = Ab' + b.$$

$$e_i(F \cdot F') = (AA')_i, \quad F \cdot e(F') = A(A')_i.$$

因此 $\omega_i, \omega_{ij}, \tilde{\omega}_i, \tilde{\omega}_{ij}$ 都是左不变的微分形式, 要想验证它们对应相等, 只需要在李群的单位元处验证.

设 $v \in T_e E(n)$, 注意 $e_i(e) = E_i$. 其中 e 表示李群的单位元, 记号稍微有一点点冲突. 按定义容易看出 $\omega_i(v) = \tilde{\omega}_i(v)$, 它们都表示切向量 v 的平移分量在 E_i 上的投影. 接下来计算一下 $\omega_{ij}(v)$, 假设有一条经过单位元的曲线 $F(t)$ 以 v 为切向量, 那么

$$\mathrm{d}e_i(v) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_0 e_i \circ F(t)$$

3 $\mathbb{R}^n$ 中的曲线

设 $x\colon I \to \mathbb{R}^n$ 是一条弧长参数化的正则曲线.

定义 3.1. 称 x 是非退化的, 如果 $x(I)$ 不落在 $\mathbb{R}^n$ 的任何真线性子空间中.

例 3.2. 当 $n = 2$ 时，一条不经过原点的直线按照该定义是非退化的.

命题 3.3. x 是非退化的当且仅当 $x(s) \wedge x'(s) \cdots \wedge x^{(n-1)}(s)$ 不恒为零.

证明. 等价于证 x 是退化的当且仅当 $x(s) \wedge x'(s) \cdots \wedge x^{(n-1)}(s)$ 恒为零.

- 假设 x 是退化的, 则 $x(I)$ 至少落在某个 $n-1$ 维线性子空间中, 则 x 的各阶导数也都落在该线性子空间中, 则 $x(s) \wedge x'(s) \wedge \cdots \wedge x^{(n-1)}(s) \equiv 0$.
- 反之, 假设 $x(s) \wedge x'(s) \wedge \cdots \wedge x^{(n-1)}(s) \equiv 0$. 对每个 s, $x^{(n-1)}(s)$ 都落在由 $x(s), x'(s), \cdots, x^{(n-2)}(s)$ 这 $n-1$ 个向量张成的子空间中. 考察曲线

  $$s \longmapsto x(s) \wedge x'(s) \wedge \cdots \wedge x^{(n-2)}(s)$$

  对其求导得

  $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} x(s) \wedge x'(s) \wedge \cdots \wedge x^{(n-2)}(s) = f(s) x(s) \wedge x'(s) \wedge \cdots \wedge x^{(n-2)}(s).$$

  所以 $x(s), x'(s), \cdots, x^{(n-2)}(s)$ 张成的一直是同一个 $n-1$ 维子空间.

□

下面, 对于非退化的 x, 我们构造一条与 x 高度相关的曲线

$$\tilde{x}\colon I \longrightarrow E(n).$$

$\tilde{x}$ 的好处在于, 一方面它存储了 x 的信息, 我们可以从 $\tilde{x}$ 还原出 x, 另一方面它是到李群 $E(n)$ 的曲线, 从而我们可以使用与 Maurer-Cartan 形式相关的理论. 具体定义如下

$$\tilde{x}\colon I \longrightarrow E(n), \quad s \longmapsto (x(s), e_1(s), \cdots, e_n(s))$$

其中

$$\begin{aligned}
e_1(s) &:= x'(s) \\
e_2(s) &:= \frac{x''(s) - \langle x''(s), e_1(s) \rangle e_1(s)}{\| x''(s) - \langle x''(s), e_1(s) \rangle e_1(s) \|} \\
&\cdots\cdots \\
e_{n-1}(s) &:= \frac{x^{(n-1)}(s) - \sum_{i=1}^{n-2} \langle x^{(n-1)}(s), e_i(s) \rangle e_i(s)}{\| x^{(n-1)}(s) - \sum_{i=1}^{n-2} \langle x^{(n-1)}(s), e_i(s) \rangle e_i(s) \|}
\end{aligned}$$

取定一个提升 $\tilde{x}$, 我们可以将

$$\begin{cases} \mathrm{d}x = \sum_i \omega_i \otimes e_i \\ \mathrm{d}e_i = \sum_j \omega_{ij} \otimes e_j \end{cases}$$

用 $\tilde{x}$ 进行拉回. 注意这里有一个符号的混用, x 既指从 $E(n)$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的投影映射, 又指从 I 到 $\mathbb{R}^n$ 的非退化正则曲线, 二者之间存在一个关系

$$x = x \circ \tilde{x}$$

其中第一个 x 是后者的含义, 第二个 x 是前者的含义. 搞清楚了这个混用, 我们计算

$$\tilde{x}^* \mathrm{d}x = \mathrm{d}\tilde{x}^* x = \mathrm{d}x \circ \tilde{x} = \mathrm{d}x = \mathrm{d}s \otimes x'(s)$$

类似 x, e_i 上也存在符号的混用, 它既指从 $E(n)$ 到 $\mathbb{R}^\ltimes$ 的映射, 又被用来代表曲线 x 的第 i 个标架, 也就是一个从 I 到 $\mathbb{R}^n$ 的映射. 二者之间也存在一个关系

$$e_i = e_i \circ \tilde{x}$$

其中第一个 e_i 是后者的含义, 第二个 e_i 是前者的含义. 搞清楚了这个混用, 我们计算

$$\tilde{x}^*(\omega_i \otimes e_i) = \tilde{x}^* \omega_i \otimes e_i(s).$$

比较两端系数, 我们得到

$$\tilde{x}^* \omega_1 = \mathrm{d}s, \quad \tilde{x}^* \omega_i = 0, \quad i > 1.$$

第二个式子被拉回得到

$$\mathrm{d}e_i = \sum_j \tilde{x}^* \omega_{ij} \otimes e_j$$

注意到里面出现的 e_i 全都已经是定义域为 I 的曲线. 回顾 e_i 的定义, 发现 $e_i(s)$ 是 $x'(s), \cdots, x^{(i)}(s)$ 的线性组合, 因此我们可以将 e_i 写作

$$e_i = f_1(s) x'(s) + \cdots + f_i(s) x^{(i)}(s)$$

因此微分形式 $\mathrm{d}e_i$ 是 $\mathrm{d}s$ 张量积上 $x'(s)$ 一直到 $x^{(i+1)}(s)$ 的线性组合.

4 全纯曲线

定义 4.1. 一条全纯曲线是指一个从黎曼面到复射影空间的全纯映射 $Z\colon M \to \mathbb{CP}^n$.

定义 4.2. 称全纯曲线是非退化的, 如果它的像集不落在 $\mathbb{CP}^n$ 的任何真子空间中.

5 全纯曲线的唯一性定理

定理 5.1. 一条非退化全纯曲线由 Ω_0 唯一决定.