偏微分方程数值方法

第二部分：二维线性偏微分方程初值问题的有限差分方法

第六章：二维线性偏微分方程的初值问题

目录

1 二维常系数对流方程的初值问题 1

2 二维变系数对流方程的初值问题 6

3 二维常系数扩散方程的初值问题 7

1 二维常系数对流方程的初值问题

考虑二维常系数对流方程的初值问题

$$\begin{cases} u_t + au_x + bu_y = 0, & (x,y) \in (-\infty,\infty)\times(-\infty,\infty), t>0 \\ u(x,y,0) = f(x,y), & (x,y) \in (-\infty,\infty)\times(-\infty,\infty) \end{cases}$$

其中，a,b 为常数，$u(x,y,t)$、$f(x,y)$ 对 x,y 分别为 2π 周期的周期函数。

方程性质：

- 方程适定性：代入 $u(x,y,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{i(kt+\omega_x x+\omega_y y)}$

  $$k = -a\omega_x - b\omega_y \quad \Rightarrow \quad u(x,y,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{i(-(a\omega_x+b\omega_y)t+\omega_x x+\omega_y y)}$$

  方程适定的条件 $a,b \in \mathbb{R}$。

- 准确解为 $u(x,y,t) = f(x-at, y-bt)$，即初值沿 x 方向以速度 a 传播，沿 y 方向以速度 b 传播。

- 准确解在 $P = (x^*,y^*,t^*)$ 处的解 $u(x^*,y^*,t^*)$ 的依赖区为

  $$D_p = (x_0^*, y_0^*, 0), \quad x_0^* = x^* - at^*, y_0^* = y^* - bt^*$$

- 特征线为直线

  $$\frac{dx(t)}{dt} = a, \frac{dy(t)}{dt} = b \quad \Rightarrow \quad x(t) = x_0 + at, y(t) = y_0 + bt$$

  沿特征线解的值不变

  $$\frac{d}{dt}u(x(t),y(t),t) = u_x x'(t) + u_y y'(t) + u_t = 0$$

数值格式：

一、网格剖分：

- 空间剖分：等距均匀网格，即 Δx 和 Δy 是常数。
  - x 方向：$x_j = j\Delta x, j = \cdots,-1,0,1,\cdots;\ \Delta x = 2\pi/n_x$
  - y 方向：$y_k = k\Delta y, k = \cdots,-1,0,1,\cdots;\ \Delta y = 2\pi/n_y$

- 时间剖分：为方便分析，采用均匀剖分（即 Δt 为常数），且满足稳定性条件

$$t_n = n\Delta t, n \geq 0; \quad \Delta t = cfl \times \min(\Delta x, \Delta y).$$

- (x_j, y_k, t_n) 处准确解：$u(x_j, y_k, t_n) = u_{jk}^n$；数值解：$v_{jk}^n$

二、有限差分格式

- 可以使用差商 $\approx$ 导数。如：FTBS 格式

$$v_{jk}^{n+1} = v_{jk}^n - \frac{a\Delta t}{\Delta x}(v_{jk}^n - v_{j-1,k}^n) - \frac{b\Delta t}{\Delta y}(v_{jk}^n - v_{j,k-1}^n)$$

- 也可以使用前面针对一维问题采用的其他方法构造有限差分格式。如：
  Lax-Friedrich 格式:

$$v_{jk}^{n+1} = \frac{1}{4}(v_{j-1,k}^n + v_{j+1,k}^n + v_{j,k-1}^n + v_{j,k+1}^n) - \frac{a\Delta t}{2\Delta x}(v_{j+1,k}^n - v_{j-1,k}^n) - \frac{b\Delta t}{2\Delta y}(v_{j,k+1}^n - v_{j,k-1}^n)$$

  Lax-Wendroff 格式:

$$\begin{aligned} v_{jk}^{n+1} = & v_{j,k}^n - \frac{a\Delta t}{2\Delta x}(v_{j+1,k}^n - v_{j-1,k}^n) - \frac{b\Delta t}{2\Delta y}(v_{j,k+1}^n - v_{j,k-1}^n) \\ & + \frac{a^2\Delta t^2}{2\Delta x^2}(v_{j+1,k}^n - 2v_{jk}^n + v_{j-1,k}^n) + \frac{b^2\Delta t^2}{2\Delta y^2}(v_{j,k+1}^n - 2v_{jk}^n + v_{j,k-1}^n) \\ & + \frac{ab\Delta t^2}{4\Delta x\Delta y}(v_{j+1,k+1}^n - v_{j+1,k-1}^n - v_{j-1,k+1}^n + v_{j-1,k-1}^n) \end{aligned}$$

  积分方法:
  积分区域取 $[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}] \times [y_{k-1/2}, y_{k+1/2}] \times [t_n, t_{n+1}]$:

$$\begin{aligned} & \int_{y_{k-1/2}}^{y_{k+1/2}} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(x,y,t_{n+1}) - u(x,y,t_n) dydx \\ & + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{y_{k-1/2}}^{y_{k+1/2}} au(x_{j+1/2},y,t) - au(x_{j-1/2},y,t) dydt \\ & + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} bu(x,y_{k+1/2},t) - bu(x,y_{k-1/2},t) dxdt = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad v_{jk}^{n+1} = v_{jk}^n - \frac{a\Delta t}{2\Delta x}(v_{j+1,k}^n - v_{j-1,k}^n) - \frac{b\Delta t}{2\Delta y}(v_{j,k+1}^n - v_{j,k-1}^n) \quad (FTCS)$$

$$or \quad \Rightarrow \quad v_{jk}^{n+1} = v_{jk}^n - \frac{a\Delta t}{\Delta x}(v_{jk}^n - v_{j-1,k}^n) - \frac{b\Delta t}{\Delta y}(v_{jk}^n - v_{j,k-1}^n) \quad (FTBS)$$

- 分裂方法:

$$u_t = Au = A_1 u + A_2 u \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} v^{n+1/2} = (1+\Delta t A_2) v^n \\ v^{n+1} = (1+\Delta t A_1) v^{n+1/2} \end{cases}$$

如分别使用一维 Lax-Wendroff 格式

$$\begin{aligned} v_{jk}^{n+1/2} =& v_{jk}^n - \frac{a\Delta t}{2\Delta x}(v_{j+1,k}^n - v_{j-1,k}^n) + \frac{a^2\Delta t^2}{2\Delta x^2}(v_{j+1,k}^n - 2v_{jk}^n + v_{j-1,k}^n) \\ v_{jk}^{n+1} =& v_{jk}^{n+1/2} - \frac{b\Delta t}{2\Delta x}(v_{j,k+1}^{n+1/2} - v_{j,k-1}^{n+1/2}) + \frac{b^2\Delta t^2}{2\Delta y^2}(v_{j,k+1}^{n+1/2} - 2v_{jk}^{n+1/2} + v_{j,k-1}^{n+1/2}) \end{aligned}$$

三、误差

- 截断误差（FTBS）

$$\begin{aligned} T_{jk}^n =& \frac{u_{jk}^{n+1} - u_{jk}^n}{\Delta t} + a\frac{u_{jk}^n - u_{j-1,k}^n}{\Delta x} + b\frac{u_{jk}^n - u_{j,k-1}^n}{\Delta y} \\ =& O(\Delta t) + O(\Delta x) + O(\Delta y) \end{aligned}$$

格式逐点相容，按最大模相容，且对时间是 1 阶精度，对空间也是 1 阶精度。

- 注意：二维问题:

有限维空间：$U = \{U_{ij}\}_{i=1,j=1}^{n_x,n_y}$

L_2 模（2 模）：$\|U\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{n_y}\sum_{i=1}^{n_x}|U_{ij}|^2}$

$L_{2,\Delta x}$（能量模）：$\|U\|_{2,\Delta x} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n_y}\sum_{i=1}^{n_x}|U_{ij}|^2\Delta x\Delta y}$

L_∞（最大模）：$\|U\|_\infty = \sup_{1\le i\le n_x, 1\le j\le n_y}|U_{ij}|$

无穷维空间：$U = \{U_{ij}\}_{i=-\infty,j=-\infty}^{\infty,\infty}$

L_2 模（2 模）：$\|U\|_2 = \sqrt{\sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{i=-\infty}^{\infty}|U_{ij}|^2}$

$L_{2,\Delta x}$（能量模）：$\|U\|_{2,\Delta x} = \sqrt{\sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{i=-\infty}^{\infty}|U_{ij}|^2\Delta x\Delta y}$

L_∞（最大模）：$\|U\|_\infty = \sup_{-\infty<i<\infty, -\infty<j<\infty}|U_{ij}|$

- 整体误差

令 $e_{ij}^n = v_{jk}^n - u_{jk}^n$，$E^n = \max_{j,k}|e_{jk}^n|$，$r_x = a\Delta t/\Delta x$，$r_y = b\Delta t/\Delta y$。若 $r_x > 0, r_y > 0$ 且 $1 < r_x + r_y \le 1$，则有

$$\Rightarrow \quad E^{n+1} \le E^n + \Delta t T^*$$

其中，$T^* = \max_{j,k,n} |T_{jk}^n| = O(\Delta t) + O(\Delta x) + O(\Delta y)$

$$E^0 = 0 \quad \Rightarrow \quad E^{n+1} \le (n+1)\Delta t T^* = t_{n+1} T^* \quad \Rightarrow \quad (1,1,1) \text{ 阶收敛}$$

四、稳定性– Fourier 分析方法

- 令 $v_{jk}^n = \hat{v}^n e^{i(\omega_x x_j + \omega_y y_k)}$, $\hat{v}^{n+1} = \hat{Q}\hat{v}^n$，代入格式得到放大因子 $\hat{Q}$

$$\Rightarrow \quad \hat{Q} = 1 - r_x(1 - e^{-i\omega_x \Delta x}) - r_y(1 - e^{-i\omega_y \Delta y})$$

令 $\eta_x = \omega_x \Delta x$，$\eta_y = \omega_y \Delta y$

$$\hat{Q} = (1 - r_x - r_y) + r_x \cos\eta_x + r_y \cos\eta_y - i(r_x \sin\eta_x + r_y \sin\eta_y)$$

若 $r_x > 0, r_y > 0$ 且 $0 < r_x + r_y \le 1$，则有 $|\hat{Q}| \le 1$，即格式稳定.

作业：参考书 2：P246, Example 5.8.3

五、CFL 条件

- 若取 $P^* = (x_j, y_k, t_{n+1})$，则有依赖区域 $D_p = (x_j - a t_{n+1}, y_k - b t_{n+1}, 0)$
  其 FTBS 格式的数值解的依赖区域为

$$N_p = [x_{j-n-1}, x_j] \times [y_{k-n-1}, y_k]$$

CFL 条件为 $D_p \subset N_P$

$$\begin{cases} x_{j-n-1} \le x_j - a t_{n+1} \le x_j, & \Rightarrow \quad 0 \le r_x \le 1 \\ y_{k-n-1} \le y_k - b t_{n+1} \le y_k, & \Rightarrow \quad 0 \le r_y \le 1 \end{cases}$$

- 注意：CFL 条件是收敛的必要条件，不充分；该 FTCS 格式稳定的充要条件是 $r_x > 0, r_y > 0$ 且 $0 < r_x + r_y \le 1$。

- 构造迎风格式

$$v_{jk}^{n+1} = v_{jk}^n - \Delta t D_x v_{jk}^n - \Delta t D_y v_{jk}^n$$

$$D_x v_{jk}^n = \begin{cases} \frac{1}{\Delta x}(v_{jk}^n - v_{j-1,k}^n), & a > 0 \\ \frac{1}{\Delta x}(v_{j+1,k}^n - v_{jk}^n), & a < 0 \end{cases} \qquad D_y v_{jk}^n = \begin{cases} \frac{1}{\Delta y}(v_{jk}^n - v_{j,k-1}^n), & b > 0 \\ \frac{1}{\Delta y}(v_{j,k+1}^n - v_{jk}^n), & b < 0 \end{cases}$$

或

$$
\begin{aligned}
v_{jk}^{n+1} = v_{jk}^{n} - \frac{a\Delta t}{\Delta x}\left(\frac{1+sgn(a)}{2}(v_{jk}^{n}-v_{j-1,k}^{n})+\frac{1-sgn(a)}{2}(v_{j+1,k}^{n}-v_{jk}^{n})\right) \\
-\frac{b\Delta t}{\Delta y}\left(\frac{1+sgn(b)}{2}(v_{jk}^{n}-v_{j,k-1}^{n})+\frac{1-sgn(b)}{2}(v_{j,k+1}^{n}-v_{jk}^{n})\right)
\end{aligned}
$$

或

$$
\begin{aligned}
v_{jk}^{n+1} = v_{jk}^{n} - \frac{a\Delta t}{2\Delta x}(v_{j+1,k}^{n}-v_{j-1,k}^{n})+\frac{|a|\Delta t}{2\Delta x}(v_{j+1,k}^{n}-2v_{jk}^{n}+v_{j-1,k}) \\
-\frac{b\Delta t}{2\Delta y}(v_{j,k+1}^{n}-v_{j,k-1}^{n})+\frac{|b|\Delta t}{2\Delta y}(v_{j,k+1}^{n}-2v_{jk}^{n}+v_{j,k-1})
\end{aligned}
$$

作业：参考书 2：P251, Example 5.8.7

2 二维变系数对流方程的初值问题

$$u_t + a(x,y,t)u_x + b(x,y,t)u_y = 0$$

特征线方程

$$\frac{dx}{dt} = a(x,y,t),\ \frac{dy}{dt} = b(x,y,t), \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}u(x(t),y(t),t) = 0$$

特征线维互不相交曲线，解沿着特征线保持不变。

数值格式:

可将常系数对流方程的 FDM 推广到变系数方程，如逆风格式

$$\begin{aligned} v_{jk}^{n+1} = v_{jk}^n - \frac{a_{jk}^n \Delta t}{\Delta x}\left(\frac{1+sgn(a_{jk}^n)}{2}(v_{jk}^n - v_{j-1,k}^n) + \frac{1-sgn(a_{jk}^n)}{2}(v_{j+1,k}^n - v_{jk}^n)\right) \\ - \frac{b_{jk}^n \Delta t}{\Delta y}\left(\frac{1+sgn(b_{jk}^n)}{2}(v_{jk}^n + v_{j,k-1}^n) - \frac{1-sgn(b_{jk}^n)}{2}(v_{j,k+1}^n - v_{jk}^n)\right) \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} v_{jk}^{n+1} = v_{jk}^n - \frac{a_{jk}^n \Delta t}{2\Delta x}(v_{j+1,k}^n - v_{j-1,k}^n) + \frac{|a_{jk}^n|\Delta t}{2\Delta x}(v_{j+1,k}^n - 2v_{jk}^n + v_{j-1,k}) \\ - \frac{b_{jk}^n \Delta t}{2\Delta y}(v_{j,k+1}^n - v_{j,k-1}^n) + \frac{|b_{jk}^n|\Delta t}{2\Delta y}(v_{j,k+1}^n - 2v_{jk}^n + v_{j,k-1}) \end{aligned}$$

截断误差: 使用 Taylor 展开

稳定性分析: 能量法、冻结系数法

3 二维常系数扩散方程的初值问题

考虑二维常系数对流方程的初值问题

$$\begin{cases} u_t = au_{xx} + bu_{yy}, & (x,y) \in (-\infty,\infty) \times (-\infty,\infty), t > 0 \\ u(x,y,0) = f(x,y), & (x,y) \in (-\infty,\infty) \times (-\infty,\infty) \end{cases}$$

其中，$a,b \in \mathbb{R}$ 为常数，$u(x,y,t)$、$f(x,y)$ 对 x,y 分别为 2π 周期的周期函数。

方程性质：

- 方程适定性：代入 $u(x,y,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i(kt+\omega_x x+\omega_y y)}$

$$ik = -a\omega_x^2 - b\omega_y^2 \quad \Rightarrow \quad u(x,y,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(a\omega_x^2+b\omega_y^2)t+i(\omega_x x+\omega_y y)}$$

  方程适定的条件 $a,b > 0$。

数值格式：

- 空间剖分：等距均匀网格，即 Δx 和 Δy 是常数。
  - x 方向：$x_j = j\Delta x, j = \cdots, -1, 0, 1, \cdots$；$\Delta x = 2\pi/n_x$
  - y 方向：$y_k = k\Delta y, k = \cdots, -1, 0, 1, \cdots$；$\Delta y = 2\pi/n_y$
- 时间剖分：为方便分析，采用均匀剖分（即 Δt 为常数），且满足稳定性条件

$$t_n = n\Delta t, n \geq 0.$$

- (x_j, y_k, t_n) 处准确解：$u(x_j,y_k,t_n) = u_{jk}^n$；数值解：$v_{jk}^n$

一、使用一维问题的方法构造有限差分格式：如：

1. FTCS 格式：

$$v_{jk}^{n+1} = v_{jk}^n + \frac{a\Delta t}{\Delta x^2}(v_{j+1,k}^n - 2v_{jk}^n + v_{j-1,k}^n) + \frac{b\Delta t}{\Delta y^2}(v_{j,k+1}^n - 2v_{jk}^n + v_{j,k-1}^n)$$

- 截断误差、相容性

$$T_{jk}^n = \frac{u_{jk}^{n+1} - u_{jk}^n}{\Delta t} - \frac{a}{\Delta x^2}(u_{j+1,k}^n - 2u_{jk}^n + u_{j-1,k}^n) - \frac{b}{\Delta y^2}(u_{j,k+1}^n - 2u_{jk}^n + u_{j,k-1}^n)$$

$$=O(\Delta t)+O(\Delta x^2)+O(\Delta y^2)$$

格式逐点相容；对时间是 1 阶精度，对空间是 2 阶精度。

- 整体误差、收敛性

  令 $e^n_{jk}=v^n_{jk}-u^n_{jk}$, $E^n=\max_{j,k}|e^n_{jk}|$, $\mu_x=\frac{a\Delta t}{\Delta x^2}$, $\mu_y=\frac{b\Delta t}{\Delta y^2}$。若 $0<\mu_x+\mu_y\le\frac{1}{2}$，则有

$$E^{n+1}\le E^n+\Delta t T^*,\quad T^*=\max_{j,k,n}|T^n_{jk}|=O(\Delta t+\Delta x^2+\Delta y^2)$$

  $E^0=0\quad\Rightarrow\quad E^{n+1}\le(n+1)\Delta t T^*$，具有 (1,2,2) 阶收敛

- 稳定性 – Fourier 分析

  令 $v^n_{jk}=\hat{v}^n e^{i(\omega_x x_j+\omega_y y_k)}$, $\hat{v}^{n+1}=\hat{Q}\hat{v}^n$，代入格式得到放大因子 $\hat{Q}$

$$\hat{Q}=1-4\mu_x\sin^2(\omega_x\Delta x/2)-4\mu_y\sin^2(\omega_y\Delta y/2)$$

  要使 $|\hat{Q}|\le 1$，则有 $\mu_x+\mu_y\le\frac{1}{2}$，格式稳定

2、Crank-Nicolson 格式

令空间算子 $\delta_x^2=E^1-2E^0+E^{-1}=\Delta x^2D_+D_-$

$$\frac{v^{n+1}_{jk}-v^n_{jk}}{\Delta t}=\frac{a}{2\Delta x^2}\delta_x^2(v^n_{jk}+v^{n+1}_{jk})+\frac{b}{2\Delta y^2}\delta_y^2(v^n_{jk}+v^{n+1}_{jk})$$

$$\Rightarrow\quad(1-\frac{1}{2}\mu_x\delta_x^2-\frac{1}{2}\mu_y\delta_y^2)v^{n+1}_{jk}=(1+\frac{1}{2}\mu_x\delta_x^2+\frac{1}{2}\mu_y\delta_y^2)v^n_{jk}$$

- 截断误差

$$\begin{aligned}T_j^{n+1/2}=&\frac{u^{n+1}_{jk}-u^n_{jk}}{\Delta t}-\frac{a}{2\Delta x^2}\delta_x^2(u^n_{jk}+u^{n+1}_{jk})-\frac{b}{2\Delta y^2}\delta_y^2(u^n_{jk}+u^{n+1}_{jk})\\=&O(\Delta t^2)+O(\Delta x^2)+O(\Delta y^2)\end{aligned}$$

- 稳定性：Fourier 分析

  $v^n_{jk}=\hat{v}^n e^{i(\omega_x x_j+\omega_y y_k)}$, $\hat{v}^{n+1}=\hat{Q}\hat{v}^n$，得到放大因子

$$\hat{Q}=\frac{(1-2\mu_x\sin^2(\omega_x\Delta x/2)-2\mu_y\sin^2(\omega_y\Delta y/2))}{(1+2\mu_x\sin^2(\omega_x\Delta x/2)+2\mu_y\sin^2(\omega_y\Delta y/2))}$$

$$|\hat{Q}|\le 1\quad\Rightarrow\quad\text{无条件稳定}$$

作业：证明 Crank-Nicolson 格式的阶段误差、分析其稳定性。

3. 积分近似方法

- 积分区域 $[x_{j-1/2},x_{j+1/2}]\times[y_{k-1/2},y_{k+1/2}]\times[t_n,t_{n+1}]$

$$
\begin{aligned}
&\int_{y_{k-1/2}}^{y_{k+1/2}}\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(x,y,t_{n+1})-u(x,y,t_n)dydx\\
&+\int_{t_n}^{t_{n+1}}\int_{y_{k-1/2}}^{y_{k+1/2}} au_x(x_{j+1/2},y,t)-au_x(x_{j-1/2},y,t)dydt\\
&+\int_{t_n}^{t_{n+1}}\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} bu_y(x,y_{k+1/2},t)-bu_y(x,y_{k-1/2},t)dxdt=0
\end{aligned}
$$

采用中心积分公式

$$\Rightarrow\quad (1-\frac{1}{2}\mu_x\delta_x^2-\frac{1}{2}\mu_y\delta_y^2)v_{jk}^{n+1}=(1+\frac{1}{2}\mu_x\delta_x^2+\frac{1}{2}\mu_y\delta_y^2)v_{jk}^n \qquad (CN)$$

二、ADI 方法

- 主要思想：引入过渡层，交替使用隐式/显式
- Step 1, $t_n\to t_{n+1/2}$: 关于 x 的导数使用隐式，关于 y 的导数使用显式（或者反过来）

$$\frac{v_{jk}^{n+1/2}-v_{jk}^n}{\Delta t/2}=\frac{a}{\Delta x^2}\delta_x^2 v_{jk}^{n+1/2}+\frac{b}{\Delta y^2}\delta_y^2 v_{jk}^n$$

$$\Rightarrow\quad (1-\frac{1}{2}\mu_x\delta_x^2)v_{jk}^{n+1/2}=(1+\frac{1}{2}\mu_y\delta_y^2)v_{jk}^n \qquad (1)$$

- Step 2, $t_{n+1/2}\to t_{n+1}$: 关于 y 的导数使用隐式，关于 x 的导数使用显式

$$\frac{v_{jk}^{n+1}-v_{jk}^{n+1/2}}{\Delta t/2}=\frac{a}{\Delta x^2}\delta_x^2 v_{jk}^{n+1/2}+\frac{b}{\Delta y^2}\delta_y^2 v_{jk}^{n+1}$$

$$\Rightarrow\quad (1-\frac{1}{2}\mu_y\delta_y^2)v_{jk}^{n+1}=(1+\frac{1}{2}\mu_x\delta_x^2)v_{jk}^{n+1/2} \qquad (2)$$

- 将两者结合起来，得到

$$(1-\frac{1}{2}\mu_x\delta_x^2)(1-\frac{1}{2}\mu_y\delta_y^2)v_{jk}^{n+1}=(1+\frac{1}{2}\mu_x\delta_x^2)(1+\frac{1}{2}\mu_y\delta_y^2)v_{jk}^n \qquad (3)$$

- 相容性：格式可以重新改写成

$$(1-\frac{1}{2}\mu_x\delta_x^2-\frac{1}{2}\mu_y\delta_y^2+\frac{1}{4}\mu_x\mu_y\delta_x^2\delta_y^2)v_{jk}^{n+1}=(1+\frac{1}{2}\mu_x\delta_x^2+\frac{1}{2}\mu_y\delta_y^2+\frac{1}{4}\mu_x\mu_y\delta_x^2\delta_y^2)v_{jk}^n$$

$$\frac{v_{jk}^{n+1}-v_{jk}^n}{\Delta t}=\frac{a}{2\Delta x^2}\delta_x^2(v_{jk}^n+v_{jk}^{n+1})+\frac{b}{2\Delta y^2}\delta_y^2(v_{jk}^n+v_{jk}^{n+1})-\frac{ab\Delta t}{4\Delta x^2\Delta y^2}\delta_x^2\delta_y^2(v_{jk}^{n+1}-v_{jk}^n)$$

由此可见，上式除最后一项，即为 Crank-Nicolson 格式

$$\frac{ab\Delta t}{4\Delta x^2\Delta y^2}\delta_x^2\delta_y^2(v_{jk}^{n+1}-v_{jk}^n)=O(\Delta t^2+\Delta t^2\Delta x^2+\Delta t^2\Delta y^2)$$

格式相容的，截断误差为 $O(\Delta t^2+\Delta x^2+\Delta y^2)$

- 稳定性：放大因子为

$$\hat{Q}=\frac{(1-2\mu_x\sin^2(\omega_x\Delta x/2))(1-2\mu_y\sin^2(\omega_y\Delta y/2))}{(1+2\mu_x\sin^2(\omega_x\Delta x/2))(1+2\mu_y\sin^2(\omega_y\Delta y/2))}$$

$|\hat{Q}|\le 1\Rightarrow$ 算法无条件稳定

- 注：两步法 (1)-(2) 也称为 Peaceman-Rachford 格式

- 注：(3) 可以得到其他形式的二步法，如：D'Yakonov 格式

$$\begin{cases}(1-\frac{1}{2}\mu_x\delta_x^2)v_{jk}^*=(1+\frac{1}{2}\mu_x\delta_x^2)(1+\frac{1}{2}\mu_y\delta_y^2)v_{jk}^n\\(1-\frac{1}{2}\mu_y\delta_y^2)v_{jk}^{n+1}=v_{jk}^*\end{cases}$$

三、近似分解方法

- ADI 方法 (3) 的另一种构造思路：
  对 Crank-Nicolson 格式

$$(1-\frac{1}{2}\mu_x\delta_x^2-\frac{1}{2}\mu_y\delta_y^2)v_{jk}^{n+1}=(1+\frac{1}{2}\mu_x\delta_x^2+\frac{1}{2}\mu_y\delta_y^2)v_{jk}^n$$

  在上式左边加上 $\frac{1}{4}\mu_x\mu_y\delta_x^2\delta_y^2v_{jk}^{n+1}$
  在上式右边加上 $\frac{1}{4}\mu_x\mu_y\delta_x^2\delta_y^2v_{jk}^n$
  相当于在差分方程中增加 $\frac{1}{4}\mu_x\mu_y\delta_x^2\delta_y^2(v_{jk}^{n+1}-v_{jk}^n)$，
  该项的量级为 $O(\Delta t^2+\Delta t^2\Delta x^2+\Delta t^2\Delta y^2)$，不影响原来 C-N 格式的精度
  $\Rightarrow$ 新格式：$(1-\frac{1}{2}\mu_x\delta_x^2)(1-\frac{1}{2}\mu_y\delta_y^2)v_{jk}^{n+1}=(1+\frac{1}{2}\mu_x\delta_x^2)(1+\frac{1}{2}\mu_y\delta_y^2)v_{jk}^n$

- Dougles-Rachford 格式

  对于 BTCS 格式
  $$(1-\mu_x\delta_x^2-\mu_y\delta_y^2)v_{jk}^{n+1}=v_{jk}^n$$
  希望左边变成 $(1-\mu_x\delta_x^2)(1-\mu_y\delta_y^2)v_{jk}^{n+1}$，为此需要在左边增加 $\mu_x\mu_y\delta_x^2\delta_y^2v_{jk}^{n+1}$
  为等式两边平衡，则需要在右边增加 $\mu_x\mu_y\delta_x^2\delta_y^2v_{jk}^n$
  相当于在格式两边增加 $\mu_x\mu_y\delta_x^2\delta_y^2(v_{jk}^{n+1}-v_{jk}^n)$，该项是 $O(\Delta t^2)$，不影响原格式的相容性和精度
  ⇒Dougles-Rachford 格式
  $$(1-\mu_x\delta x^2)(1-\mu_y\delta_y^2)v_{jk}^{n+1}=(1+\mu_x\mu_y\delta_x^2\delta_y^2)v_{jk}^n$$
  及其计算中的等价格式
  $$\begin{cases}(1-\mu_x\delta_x^2)v_{jk}^*=(1+\mu_y\delta_y^2)v_{jk}^n\\(1-\mu_y\delta_y^2)v_{jk}^{n+1}=v_{jk}^*-\mu_y\delta_y^2v_{jk}^n\end{cases}$$
  格式放大因子
  $$\hat{Q}=\frac{1+16\mu_x\mu_y\sin^2(\omega_x\Delta x/2)\sin^2(\omega_y\Delta y/2)}{(1+4\mu_x\sin^2(\omega_x\Delta x/2))(1+4\mu_y\sin^2(\omega_y\Delta y/2))}$$
  格式无条件稳定。

- ADI 方法处理非齐次方程
  $$u_{tt}=au_{xx}+bu_{yy}+F(x,y,t)$$
  其对应的 CN 格式为
  $$\frac{v_{jk}^{n+1}-v_{jk}^n}{\Delta t}=\frac{a}{2\Delta x^2}\delta_x^2(v_{jk}^n+v_{jk}^{n+1})+\frac{b}{2\Delta y^2}\delta_y^2(v_{jk}^n+v_{jk}^{n+1})+F_{jk}^{n+1/2}$$
  或
  $$\frac{v_{jk}^{n+1}-v_{jk}^n}{\Delta t}=\frac{a}{2\Delta x^2}\delta_x^2(v_{jk}^n+v_{jk}^{n+1})+\frac{b}{2\Delta y^2}\delta_y^2(v_{jk}^n+v_{jk}^{n+1})+\frac{1}{2}(F_{jk}^n+F_{jk}^{n+1})$$

对源项直接进行分解或增加高阶量

$$\begin{cases}(1-\frac{1}{2}\mu_x\delta_x^2)v_{jk}^{n+1/2}=(1+\frac{1}{2}\mu_y\delta_y^2)v_{jk}^n+\frac{\Delta t}{2}F_{jk}^{n+1/2}\\(1-\frac{1}{2}\mu_y\delta_y^2)v_{jk}^{n+1}=(1+\frac{1}{2}\mu_x\delta_x^2)v_{jk}^{n+1/2}+\frac{\Delta t}{2}F_{jk}^{n+1/2}\end{cases}$$

或

$$\begin{cases}(1-\frac{1}{2}\mu_x\delta_x^2)v_{jk}^{n+1/2}=(1+\frac{1}{2}\mu_y\delta_y^2)v_{jk}^n+\frac{\Delta t}{2}F_{jk}^{n}\\(1-\frac{1}{2}\mu_y\delta_y^2)v_{jk}^{n+1}=(1+\frac{1}{2}\mu_x\delta_x^2)v_{jk}^{n+1/2}+\frac{\Delta t}{2}F_{jk}^{n+1}\end{cases}$$

- 3 维问题 $u_t=u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}$
  3 维 Peaceman-Rachford 格式（以 $\Delta t/3$ 为时间步长三步走），条件稳定，且截断误差为 $O(\Delta t+\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2)$
  从 CN 格式出发

$$(1-\frac{1}{2}\mu_x\delta_x^2-\frac{1}{2}\mu_y\delta_y^2-\frac{1}{2}\mu_z\delta_z^2)v_{jkl}^{n+1}=(1+\frac{1}{2}\mu_x\delta_x^2+\frac{1}{2}\mu_y\delta_y^2+\frac{1}{2}\mu_z\delta_z^2)v_{jkl}^n$$

为使得左边形如 $(1-\frac{1}{2}\mu_x\delta_x^2)(1-\frac{1}{2}\mu_y\delta_y^2)(1-\frac{1}{2}\mu_z\delta_z^2)v_{jkl}^{n+1}$，需要增加

$$(\frac{1}{4}\mu_x\mu_y\delta_x^2\delta_y^2+\frac{1}{4}\mu_y\mu_z\delta_y^2\delta_z^2+\frac{1}{4}\mu_x\mu_z\delta_x^2\delta_z^2)(v_{jkl}^{n+1}-v_{jkl}^n)-\frac{1}{8}\mu_x\mu_y\mu_z\delta_x^2\delta_y^2\delta_z^2(v_{jkl}^{n+1}+v_{jkl}^n)$$

得到

$$(1-\frac{1}{2}\mu_x\delta_x^2)(1-\frac{1}{2}\mu_y\delta_y^2)(1-\frac{1}{2}\mu_z\delta_z^2)v_{jkl}^{n+1}=(1+\frac{1}{2}\mu_x\delta_x^2)(1+\frac{1}{2}\mu_y\delta_y^2)(1+\frac{1}{2}\mu_z\delta_z^2)v_{jkl}^n$$

或

$$(1-\frac{1}{2}\mu_x\delta_x^2)(1-\frac{1}{2}\mu_y\delta_y^2)(1-\frac{1}{2}\mu_z\delta_z^2)(v_{jkl}^{n+1}-v_{jkl}^n)=(\mu_x\delta_x^2+\mu_y\delta_y^2+\mu_z\delta_z^2)v_{jkl}^n+\frac{1}{4}\mu_x\mu_y\mu_z\delta_x^2\delta_y^2\delta_z^2v_{jkl}^n$$

得到 Douglas-Gunn 格式（舍去了最后的高阶项）

$$\begin{cases}(1-\frac{1}{2}\mu_x\delta_x^2)(v_{jkl}^*-v_{jkl}^n)=(\mu_x\delta_x^2+\mu_y\delta_y^2+\mu_z\delta_z^2)v_{jkl}^n\\(1-\frac{1}{2}\mu_y\delta_y^2)(v_{jkl}^{**}-v_{jkl}^*)=(v_{jkl}^*-v_{jkl}^n)\\(1-\frac{1}{2}\mu_z\delta_z^2)(v_{jkl}^{n+1}-v_{jkl}^n)=(v_{jkl}^{**}-v_{jkl}^*)\end{cases}$$

格式无条件稳定，且截断误差为 $O(\Delta t^2+\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2)$

作业：1. 参考书 2：P193，HW4.4.11

2. 构造 $u_t+u_x+u_y=0$ 的 ADI 格式，并推导阶段误差、分析其稳定性。

四、分裂方法

$$u_t=Au=A_1u+A_2u$$

$$\begin{cases} u_t=A_1u & \Rightarrow \quad v^{n+1}=Q_1v^n \\ u_t=A_2u & \Rightarrow \quad v^{n+1}=Q_2v^n \end{cases}$$

- 一阶分裂格式

$$v^{n+1}=Q_2Q_1v^n \quad or \quad \begin{cases} v^{n+1/2}=Q_1v^n \\ v^{n+1}=Q_2v^{n+1/2} \end{cases}$$

假设 Q_1, Q_2 是一阶算子

$$Q_jv=(I+\Delta tA_j)v+O(\Delta t^2)$$

$$\Rightarrow \quad Q_2Q_1v^n=(I+\Delta tA_1+\Delta tA_2)v+O(\Delta t^2)$$

- 二阶分裂格式：假设 Q_1, Q_2 是二阶算子

$$v^{n+1}=Qv^n=Q_1(\frac{\Delta t}{2},t_{n+1/2})Q_2(\Delta t,t_n)Q_1(\frac{\Delta t}{2},t_n)v^n$$

准确解

$$\begin{aligned} u(t_{n+1})=&u(t_n)+\Delta tu_t(t_n)+\frac{1}{2}\Delta t^2u_{tt}(t_n)+O(\Delta t^3) \\ =&u(t_n)+\Delta t(A_1+A_2)u(t_n)+\frac{1}{2}\Delta t^2(A_1^2+A_1A_2+A_2A_1+A_2^2+A_{1,t}+A_{2,t})u(t_n)+O(\Delta t^3) \end{aligned}$$

算子

$$Q_j=I+\Delta t\partial_t+\frac{1}{2}\Delta t^2\partial_{tt}+O(\Delta t^3)=I+\Delta tA_j+\frac{1}{2}\Delta t^2(A_j^2+A_{j,t})+O(\Delta t^3)$$

(如果 A_j 表示为 $A(x,t)\partial_x$，则 $A_{j,t}$ 表示 $(\partial A(x,t)/\partial t)\partial_x$)

$$\begin{aligned} Q=&Q_1(\frac{\Delta t}{2},t_{n+1/2})Q_2(\Delta t,t_n)Q_1(\frac{\Delta t}{2},t_n) \\ =&I+\Delta t(A_1+A_2)+\frac{1}{2}\Delta t^2(A_1^2+A_1A_2+A_2A_1+A_2^2+A_{1,t}+A_{2,t})+O(\Delta t^3) \end{aligned}$$