# 偏微分方程数值解

中国科学技术大学 数学学院

张 梦 萍

办公室：东区–管理科学楼1227室

0551-63601855；mpzhang@ustc.edu.cn；2024-09

# 第一部分：一维线性偏微分方程初值问题的有限差分方法

# 第四章：偏微分方程初值问题的适定性

本章通过考虑几个模型方程初值问题的解和性质，提出适定性概念，并用于一般情况。

## 1 适定性定义

1. 一些模型方程初值问题的解的特点

1) 标量方程：

前面章节已经表明：模型方程（对流方程、扩散方程）的初值问题的解的 $L_2$ 模，对所有的时间都可以用初值数据的 $L_2$ 模控制，即：

$$\| u(\cdot,t) \|_{L_2} \leq \| u(\cdot,0) \|_{L_2} \qquad (*1)$$

(*1)保证了：初始数据的微小变化，带来的解的变化也是微小的；即：解连续地依赖于初值

2) 带源项的标量方程：

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_t = u_x + \alpha u, \quad \alpha = constant, & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & -\infty < x < \infty \end{array} \right. ;$$

其中 $f(x)$ 为 $2\pi$ 周期函数。

$\Rrightarrow$：解仍然连续依赖于初始数据。

3) 对称的方程组:

考虑：$\begin{cases} u_t = Au_x, & u = (u^{(1)}, u^{(2)})^T,\ -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & -\infty < x < \infty \end{cases}$；

其中 $f(x) = (f_1(x),\ f_2(x))^T$ 为 $2\pi$ 周期函数，且 $A = \begin{pmatrix} 0 & d \\ d & 0 \end{pmatrix}$, $d = constant$。

对称的、双曲型方程初值问题都有估计：

$$\| u(\cdot,t) \|^2 = \| u(\cdot,0) \|^2$$

$\Rrightarrow$：解仍然连续依赖于初始数据。

4) 非对称双曲方程组

考虑：$\begin{cases} u_t = Bu_x, & u = (u^{(1)}, u^{(2)})^T,\ -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & -\infty < x < \infty \end{cases}$；

其中 $f(x) = (f_1(x),\ f_2(x))^T$ 为 $2\pi$ 周期函数，

$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ d^2 & 0 \end{pmatrix}$, $d = constant > 0$。

$\Rrightarrow$：解仍然连续依赖于初始数据。

由上述问题的共同特征，可见：

若初始时刻设置为：$t = t_0$ 时刻，则都有：

$$\| u(\cdot,t) \| \leq K \| u(\cdot,t_0) \| \qquad (*3)$$

2. 适定性定义

下面针对一般的PDE组初值问题，引入适定性(Well-posed)概念：考虑一般的PDE组：

$$\begin{cases} u_t = P(x,t,\frac{\partial}{\partial x})u, & t > t_0 \\ u(x,t_0) = f(x) & -\infty < x < \infty \end{cases} \qquad (*4)$$

其中 $u = (u^{(1)}, \cdots, u^{(m)})^T$， $x = (x^{(1)}, \cdots, x^{(n)})^T$， $P(x,t,\frac{\partial}{\partial x})$ 是一个一般的 $p$ 阶空间算子，可以写为：
$P(x,t,\frac{\partial}{\partial x}) = \sum_{|\nu| \le p} A_\nu(x,t)(\frac{\partial}{\partial x^{(1)}})^{\nu_1} \cdots (\frac{\partial}{\partial x^{(n)}})^{\nu_n}$， $\nu = (\nu_1, \cdots, \nu_n)$ 是非负整数的多重指标，且 $|\ \nu\ | = \sum_i \nu_i$， $A_\nu = A_{\nu_1 \cdots \nu_n}$ 是 $m \times m$ 矩阵函数。为方便起见，假设 $A_\nu(x,t) \in C^\infty_{(x,t)}$，且系数和数据对空间维都是 $2\pi$ 周期的。

**Definition 1.1** 若对每个 $t_0$ 和 $f \in C^\infty(x)$，有：

- 存在唯一的解 $u(x,t) \in C^\infty(x,t)$，它关于每个空间维数都是 $2\pi$ 周期的
- 存在与 $t_0$ 无关的常数 $\alpha$ 和 $K$，使得：

$$\|\ u(\cdot,t)\ \| \le K e^{\alpha(t-t_0)} \|\ f(\cdot)\ \| \qquad (*5)$$

则：（**4*）是适定的*(Well-posed)*

注意：适定性的定义不是唯一的；如：可以使用不同的模、允许有不同的增长的函数形式。对变系数问题，指数增长也是允许的。
非适定性问题称为不适定的(Ill-posed)。

3. 例子

**Example 1.1** $\left\{\begin{array}{ll} u_t = u_x & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & -\infty < x < \infty \end{array}\right.$ 。

**Example 1.2** $\left\{\begin{array}{ll} u_t = u_x + u & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & -\infty < x < \infty \end{array}\right.$ 。

**Example 1.3** $\left\{\begin{array}{ll} u_t = -u_{xx} & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x,0) = e^{i\omega x}\hat{f}(\omega) & -\infty < x < \infty,\ 2\pi\ periodic \end{array}\right.$ 。

**Example 1.4** $\left\{\begin{array}{ll} u_t = u_{xx} + 100u & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{i\omega x}\hat{f}(\omega) & -\infty < x < \infty \end{array}\right.$ 。

# 2 一维常系数标量偏微分方程

考虑:

$$\left\{\begin{aligned} u_t = au_{xx} + bu_x + cu, \qquad & t > t_0 \\ u(x,t_0) = f(x) \qquad & -\infty < x < \infty,\ 2\pi\, periodic \end{aligned}\right. \tag{**1}$$

其中$a$、$b$、$c$是复常数。下面讨论：若(**1)是适定的，$a$、$b$、$c$应该满足的条件

由于做时间变换$t' = t - t_0$，常系数总是不变的，所以可以设$t_0 = 0$

**Theorem 2.1** *(**1)是适定的(Well-posed)*，当且仅当：有一个实常数$\alpha$，使得对所有的实数$\omega$，有:

$$ReK \le \alpha,\ \ K = -a\omega^2 + ib\omega + c, \tag{**2}$$

(**2)的意义:

1. 常数$c$的影响（即：非导数项是否影响问题的适定性？）

   将$\alpha + c$代替$\alpha$，则(**2)为：$Re\,(K - c) = Re\,(-a\omega^2 + ib\omega) \le \alpha$

   $\Rrightarrow$：$c$对条件(**2)无影响。即：偏微分方程(**1)中非导数项不影响问题的适定性

   注意：对一般的偏微分方程也是如此。

2. 抛物型方程

   若$a_r = Re\,(a) > 0$，则称该方程为抛物型方程

   此时，由于$(|b| - 2a_r|\omega|)^2 \ge 0)$，所以有:

   $Re\,K \le -a_r\omega^2 + |b| \cdot |\omega| \le \frac{|b|^2}{4a_r}$

$\Rrightarrow$：对所有的$b$，该问题是适定的

对一般抛物型方程也是如此，这是其特有的，即：高阶导数项决定问题的适定性

3. $Re\,a = 0$，即$Re\,K = -\omega Im\,b$

   若$Im\ b \neq 0$，则问题不是适定的（因为可选择$\omega$的符号，使得$ReK$可以变得任意大）

   $\Rrightarrow$：适定问题存在的形式为：

   $u_t = ia_i u_{xx} + b_r u_x$，其中$a = ia_i$，$b = b_r$；$a_i, b_r$是实数。

   若$a_i \neq 0$，则称该方程为Schrodinger方程；

   若$a_i = 0$，则该方程为双曲型方程

4. $Re\,a < 0$，则对任意的$b$，$ReK \geq |a_r|\omega^2 - |b| \cdot |\omega|$没有上界

   $\Rrightarrow$：该问题不适定

# 3 一维常系数1阶偏微分方程组

考虑：

$$\left\{\begin{array}{ll} u_t = Au_x, & -\infty < x < \infty,\ t > 0 \\ u(x,t_0) = f(x) & -\infty < x < \infty,\ 2\pi\ \ periodic \end{array}\right. \qquad (***1)$$

其中 $A = (a_{ij})_{m\times m}$， $u = (u^{(1)}(x,t), \cdots, u^{(m)}(x,t))^T$ 。

1. 定理

**Theorem 3.1** 当且仅当 $A$ 的特征值是实数，且有完备的特征向量，则*(***1)*是适定的

证明：

1) 首先证明：$A$ 的特征值是实数，才有(***1)是适定的可能性

2) 设 $A$ 的特征值都是实数，且有完备的特征向量组时，该问题是适定的。

3) 设 $A$ 的特征值都是实数，但特征向量组不完备，则问题不适定

a) 讨论一个典型情况：$u_t = Au_x = (\lambda I + J)u_x$

b) 讨论一般情况：存在可逆矩阵$S$，使得：

$$S^{-1}AS=\begin{pmatrix}\lambda_1 I+J_1 & & \\ & \cdots & \\ & & \lambda_r I+J_r\end{pmatrix}$$

若所有块矩阵都是标量（即$J_j$是标量，且为0），则意味着$A$ 可对角化，且有完备的特征向量组；此外，若至少有一个块矩阵不是标量，则问题就不可能是适定的（见前面讨论）

2. 低阶项不影响强双曲方程组初值问题的适定性

对$u_t=Au_x$：

- 若$A$的特征值是实数，且互不相等，则该方程组是严格双曲的
- 若$A$的特征值是实数，且具有完备的特征向量，则该方程组是强双曲的
- 若$A$的特征值是实数，则该方程组是弱双曲的

**Definition 3.1** 对$u_t = Au_x$，若$A$ 是一个*Hermite*矩阵*(*即：$A = A^*=\bar{A}^T$*)*，则称$u_t=Au_x$ 是对称双曲的

$\Rrightarrow$：对称双曲和严格双曲是强双曲的特殊情况

$\Rrightarrow$：强双曲方程组的初值问题是适定的；弱双曲方程组的初值问题是不适定的

**Lemma 3.1** 若$y\in C^1$，且满足不等式$\frac{dy}{dt}\le \alpha y$，$t\ge 0$；则：$y(t)\le e^{\alpha t}y(0)$

**Theorem 3.2** 考虑带有非导数项的扰动的强双曲问题：

$$\begin{cases} u_t = Au_x + Bu, & -\infty < x < \infty,\ t > 0 \\ u(x, t_0) = f(x) & -\infty < x < \infty,\ 2\pi\ periodic \end{cases}$$

若 $B$ 是 $m \times m$ 常数矩阵，则该问题是适定的

**作业–20241024：**

参考书1：P113: 4.1.1

参考书1：P115: 4.2.1

参考书1：P122: 4.3.1

# 4 一维常系数抛物型偏微分方程组

考虑：$\begin{cases} u_t = Au_{xx} + Bu_x + Cu = Pu, & -\infty < x < \infty,\ t > 0 \\ u(x, t_0) = f(x) & -\infty < x < \infty,\ 2\pi\ \ periodic \end{cases}$

其中 $A$、$B$、$C$ 均为常系数矩阵，$P$ 是空间算子。

**Definition 4.1** 若 $A$ 的特征值 $\lambda$ 满足：$Re\,\lambda \geq \delta$，$\delta > 0$ 是一个常数，则称 $u_t = Au_{xx} + Bu_x + Cu = Pu$ 是抛物型的

$A \geq 0$（即 $A$ 半正定的）$\Leftrightarrow$ $A$ 的特征值大于等于0，即 $\lambda(A) \geq 0$

若 $A$ 为Hermite矩阵，且对于任意的矢量 $v$，有 $< Av, v > \geq 0$，则称 $A \geq 0$，

若 $A$、$B$ 均为Hermite（？）矩阵，且 $A - B \geq 0$，则称 $A \geq B$。$\Rightarrow$：$B \leq |B| \cdot I$

若 $A = A^*$，则称 $A$ 为Hermite矩阵。

若 $A$ 为Hermite矩阵，则其特征值是实数，且存在酉阵，使其对角化

**Theorem 4.1** 抛物型方程组的初值问题是*Well-Posed*

证明：

(一) 解的稳定性与存在性

1、初值为一谐波，解的存在性与稳定性

假设 $A + A^* \geq \delta I,\ \delta > 0$（这个假设最后是需要证明的！）

2、初值是分片连续的的，解的存在性与稳定性

3、证明：对于抛物型方程，总可以通过变换，使得：$A + A^* \geq \delta I,\ \delta > 0$

**Lemma 4.1** *Schur*引理：对为一个固定的矩阵 $A$，存在唯一的一个矩阵 $U$，使得 $U^*AU$ 是一个上三角矩阵

(二) 解的唯一

令$u(x,t)$是问题的任一光滑解，它可以展开成收敛的Fourier级数，即：

$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Sigma_{\omega=-\infty}^{\infty}e^{i\omega x}\hat{u}(\omega,t)$，其中$\hat{u}(\omega,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(e^{i\omega x},u(x,t))$，$\hat{u}(\omega,0)=\hat{f}(\omega)$

（目标是要证明：$\left\{\begin{array}{c}\hat{u}(\omega,t)_t=\hat{P}\hat{u}\\ \hat{u}(\omega,0)=\hat{f}(\omega)\end{array}\right.$）

# 5 一般常系数微分方程组

考虑:

$$\left\{\begin{array}{ll} u_t = P(\frac{\partial}{\partial x})u, & -\infty < x < \infty,\ t > 0 \\ u(x,t_0) = f(x) & -\infty < x < \infty,\ 2\pi\ \ periodic \end{array}\right. \tag{1}$$

其中 $x = (x^{(1)}, \cdots, x^{(d)})^T$、$u = (u^{(1)}, \cdots, u^{(m)})^T$、$\omega = (\omega^{(1)}, \cdots, \omega^{(d)})^T$。
假设初值为: $f(x) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} e^{i<\omega,x>} \hat{f}(\omega)$, $<\omega, x>= \Sigma_{j=1}^{d} \omega_j x^{(j)}$
构造谐波解为: $u(x,t) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} e^{i<\omega,x>} \hat{u}(\omega, t)$, 代入源方程得:

$$\left\{\begin{array}{l} \hat{u}(\omega,t)_t = \hat{P}(i\omega)\hat{u}(\omega,t) \\ \hat{u}(\omega,0) = \hat{f}(\omega) \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$: $\hat{u}(\omega,t) = e^{\hat{P}t}\hat{f}(\omega)$, 其中 $\hat{P}(i\omega)$ 是 $m \times m$ 矩阵。

**Theorem 5.1** 偏微分方程组的初值问题(*1*)是*Well-Posed*$\Leftrightarrow$(当且仅当)对所有的 $\omega$, 存在常数 $K$ 和 $\alpha$, 使得:

$$|e^{\hat{P}(i\omega)t}| \leq K \cdot e^{\alpha t} \tag{2}$$

**Theorem 5.2** 偏微分方程组的初值问题(*1*)是*Well-Posed*的必要条件是: 对任意的 $\omega$, $\hat{P}(i\omega)$ 的特征值 $\lambda$, 满足 $Re\,\lambda \leq \alpha$

**Theorem 5.3** 假设满足上面定理的条件, 且对于任意 $\omega$, 存在常数 $K$ 和变换矩阵 $S(\omega)$, 使得 $|S(\omega)|\cdot|S^{-1}(\omega)| \leq K$; 同时, $S^{-1}\hat{P}(i\omega)S$ 是对角阵, 则该偏微分方程组的初值问题(*1*)是*Well-Posed*。

**Theorem 5.4** 若对于任意 $\omega$, 存在常数 $\alpha$, 使得 $\hat{P}(i\omega) + \hat{P}^*(i\omega) \leq 2\alpha I$; 则该偏微分方程组的初值问题(*1*)是*Well-Posed*。

**Definition 5.1** 若对所有的光滑函数 $w(x)$, 有常数 $\alpha$, 使得 $(w, Pw) + (Pw, w) \leq 2\alpha(w, w)$; 则称微分算子 $P(\frac{\partial}{\partial t})$ 为半有界算子(*semibounded*)

注意：本定义并不意味：微分算子$P(\frac{\partial}{\partial t})$是有界的

**Theorem 5.5** 微分算子$P(\frac{\partial}{\partial t})$为半有界算子$\Leftrightarrow$（当且仅当）：$\hat{P}(i\omega)+\hat{P}^*(i\omega)\leq 2\alpha I$。

**Theorem 5.6** 若$P$是半有界算子，则（*1*）的解满足：

$$||u(\cdot,t)||\leq e^{\alpha t}||u(\cdot,0)||$$

若$A=A^*$，则称$A$为Hermite矩阵。

若$A$为Hermite矩阵，则其特征值是实数，且存在酉阵，使其对角化

若$A$的元素为实数时，则Hermite矩阵就是实对称矩阵

若$U^*U=I$，则称$U$为酉阵。

若$U$的元素为实数时，则酉阵就是正交矩阵

**Example 5.1** 讨论$\frac{\partial}{\partial t}u=A_1\frac{\partial}{\partial x}u+A_2u$的适定性。其中：$A_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$，$A_2=\begin{pmatrix}2&1\\7&\pi\end{pmatrix}$

**作业–20241029：**

参考书1：P126: 4.4.1；4.4.2

参考书1：P134: 4.5.1；4.5.2

**补充作业：**试证：若对于任意$\omega$，存在常数$\alpha$，使得$\hat{P}(i\omega)+\hat{P}^*(i\omega)\leq 2\alpha I$；则该偏微分方程组的初值问题（1）是Well-Posed。