常微分方程

孙天阳

中国科学技术大学数学科学学院

tysun@mail.ustc.edu.cn

2021 年 8 月 5 日

目录

模态分析与谐响应分析

本科水平的微分方程, 不管是常微分方程还是偏微分方程, 不管是理论研究还是数值求解, 大部分内容涉及的是线性微分方程. 线性意味着如果 u_1 和 u_2 是方程的解, 那么二者的线性组合也是方程的解. 反过来说, 我们有机会把复杂的解分解为若干简单的解. 这个论断本身非常好理解, 但却是我们后面许多做法的立足点, 值得反复体会. 下一个问题是什么样的解是简单的解? 我现阶段给出的答案是形如 $\mathrm{e}^{\lambda t}$ 的解, 也就是简谐的解. 为什么? 可能是因为它是微分算子的特征函数.

考虑单质量弹簧系统 $m\ddot{x}=-kx$, 假设解 $x(t)$ 形如 $v\mathrm{e}^{\lambda t}$, 其中 v 是与 t 无关的常数, 代入方程得到 $(k+m\lambda^2)v=0$, 有非平凡解当且仅当 $\lambda^2=-k/m$. 可以看到 λ 是一个纯虚数, 设 $\lambda=\mathrm{i}\omega$, 则得到 $(k-m\omega^2)v=0$, 可以将它看作一个广义特征值问题, 称 ω 为特征频率, $v=1$ 为特征向量. 也就是 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{k/m}t}$ 和 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{k/m}t}$ 都是解, 转化成实数形式就是说 $\cos(\sqrt{k/m}t)$ 和 $\sin(\sqrt{k/m}t)$ 都是解.

考虑带阻尼的系统 $m\ddot{x}=-kx-c\dot{x}$, 依旧假设解形如 $v\mathrm{e}^{\lambda t}$, 代入得到 $(m\lambda^2+c\lambda+k)v=0$, 这是一个二次特征值问题. 另一种处理方法是, 设 $z=(x,\dot{x})$, 得到

$$\dot{z}=\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \ddot{x}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dot{x}\\ -\dfrac{k}{m}x-\dfrac{c}{m}\dot{x}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{c}{m}\end{pmatrix}z=Az$$

这样我们就把一个二阶微分方程转化成了一个一阶微分方程组. 假设解 $z(t)$ 形如 $w\mathrm{e}^{\lambda t}$, 则 $Aw=\lambda w$, 即 λ 是 A 的特征值, 计算 A 的特征多项式得到 $m\lambda^2+c\lambda+k=0$, 与前面的二次特征值问题相同.

$$\lambda_1=\frac{-c+\sqrt{c^2-4mk}}{2m},\quad \lambda_2=\frac{-c-\sqrt{c^2-4mk}}{2m}$$

从 $Aw=\lambda w$ 我们可以得到 w 的第二分量等于 λ 倍第一分量, 所以 λ_i 对应的特征向量可以取为 $(1,\lambda_i)$. 这种方法被称为状态空间法, 实际上是更为系统、标准、严格的方法. 如果仍考虑之前的 $(m\lambda^2+c\lambda+k)v=0$, 会发现不论是 λ_1 还是 λ_2 得到的特征向量 v 都是 1, 这从特征向量的语言来说显然是有问题的, 这个问题出在我们隐去了或者说丢掉了不那么发挥作用的 $\dot{x}$ 的分量, 两个 1 实际上来自于 $(1,\lambda_1)$ 和 $(1,\lambda_2)$ 所以是不同的. 我们能安全丢掉 $\dot{x}$ 的分量是因为通过 $1\cdot\mathrm{e}^{\lambda_i t}$ 可以还原出所有信息. 包括前面不带阻尼的系统的例子也是, 称 $v=1$ 为特征向量是一种简便的而略带不严格的做法. 根据 c^2-4mk 的正负, 可以将带阻尼的系统分为过阻尼、临界阻尼和欠阻尼三种不同的情形.

- 当 $c^2-4mk>0$ 时, 为过阻尼, 此时有两个实的负特征值, $x(t)=C_1\mathrm{e}^{\lambda_1 t}+C_2\mathrm{e}^{\lambda_2 t}$.
- 当 $c^2-4mk<0$ 时, 为欠阻尼, 此时有两个复的特征值,

  $$\lambda_{1,2}=-\frac{c}{2m}\pm\mathrm{i}\frac{\sqrt{4mk-c^2}}{2m}=-\zeta\omega_n\pm\mathrm{i}\omega_d,\quad \omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}},\zeta=\frac{c}{c_{\text{crit}}}=\frac{c}{2\sqrt{mk}},\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

- 当 $c^2-4mk=0$ 时, 为临界阻尼, 此时有一个二重实特征值 $-c/2m$, 但没有足够的特征向量

为了对这种没有足够特征向量的情况有一个好的理解, 我们回过头来从另一个角度看 A 有两个独立特征向量的情形, 此时任意时刻 z 可由特征向量线性表出, 即有 $z(t)=c_1(t)P_1+c_2(t)P_2$, 代入到 $\dot{z}=Az$, 得到 $\dot{c}_1(t)P_1+\dot{c}_2(t)P_2=\lambda_1c_1(t)P_1+\lambda_2c_2(t)P_2$, 比较系数得到 $\dot{c}_i=\lambda_ic_i$, 解得 $c_i=C_i\mathrm{e}^{\lambda_i t}$, 这样也反过来印证了我们一开始为什么要假设 $z(t)$ 形如 $w\mathrm{e}^{\lambda t}$ 的形式. 根据以上推导, 我们很自然知道没有足够特征向量的时候该怎么做, 即要求助于 Jordan 标准型理论, 寻找广义特征向量作为补充. 在这里, 我们寻找 $(A-\lambda I)P_2=P_1$, 即 $AP_2=\lambda P_2+P_1$. 这样一来我们又有了两个独立的向量,

$$\dot{c}_1(t)P_1+\dot{c}_2(t)P_2=(\lambda c_1(t)+c_2(t))P_1+\lambda c_2(t)P_2\Longrightarrow c_2(t)=C_2\mathrm{e}^{\lambda t},\quad c_1(t)=(C_1+C_2t)\mathrm{e}^{\lambda t}$$

$$z(t)=(C_1+C_2t)\mathrm{e}^{\lambda t}P_1+C_2\mathrm{e}^{\lambda t}P_2=C_1\mathrm{e}^{\lambda t}P_1+C_2\mathrm{e}^{\lambda t}(tP_1+P_2)=\mathrm{e}^{\lambda t}(C_1P_1+C_2P_2)+t\mathrm{e}^{\lambda t}C_2P_1$$

当 $t=0$ 时, $z(0)=C_1P_1+C_2P_2$, 所以可以看出 C_1,C_2 其实是初始条件 $z(0)$ 在基 P_1,P_2 下的坐标. 第一种观点, 关心系统在演化时它在 P_1,P_2 上的分量是如何随时间演化的, 可以看出 P_2 方向自己是一个纯粹的指数衰减, 而 P_1 方向包含了一个更复杂的带因子 t 的衰减. 这是由 P_2 激发的, 是因为 $AP_2=\lambda P_2+P_1$ 而不是 $AP_2=\lambda P_2$ 导致了 $\dot{c}_1(t)=\lambda c_1(t)+c_2(t)$ 而不是 $\dot{c}_1(t)=\lambda c_1(t)$ 所以 c_1 中要有额外的 $t\mathrm{e}^{\lambda t}$ 项. 第二种观点, 按照 C_1,C_2 来整理, 可以认为是两个基本解, 第一个是一个纯粹的沿 P_1 方向的指数衰减, 第二个也是一个指数衰减, 只不过它的向量初始状态是 P_2, 随后按照 tP_1+P_2 的规则收敛至 P_1. 第三种观点, 可以看出 $\mathrm{e}^{\lambda t}(C_1P_1+C_2P_2)=\mathrm{e}^{\lambda t}z(0)$ 是它自身的纯指数衰减, 而后一项可以写成 $t\mathrm{e}^{\lambda t}C_2P_1=t\mathrm{e}^{\lambda t}(A-\lambda I)z(0)$, 我们可以从如下角度去理解, $\dot{z}=Az$ 的解可以简洁地写为 $z(t)=\mathrm{e}^{At}z(0)$, 为了计算 e^{At}, 我们需要计算 A 的 Jordan 标准型 $A=PJP^{-1}$,

$$J=\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\lambda I+N,\quad \mathrm{e}^{Jt}=\mathrm{e}^{\lambda It}\mathrm{e}^{Nt},\quad \mathrm{e}^{Nt}=I+Nt+\frac{(Nt)^2}{2!}+\cdots=I+Nt$$

$$\mathrm{e}^{Jt}=(\mathrm{e}^{\lambda t}I)(I+Nt)=\mathrm{e}^{\lambda t}(I+Nt)=\mathrm{e}^{\lambda t}\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\lambda t} & t\mathrm{e}^{\lambda t}\\ 0 & \mathrm{e}^{\lambda t}\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{e}^{At}=P(\mathrm{e}^{\lambda t}(I+Nt))P^{-1}=\mathrm{e}^{\lambda t}(I+t(PNP^{-1}))=\mathrm{e}^{\lambda t}(I+t(P(J-\lambda I)P^{-1}))=\mathrm{e}^{\lambda t}(I+t(A-\lambda I))$$

$$\mathrm{e}^{At}=\mathrm{e}^{\lambda t}I+t\mathrm{e}^{\lambda t}(A-\lambda I),\quad z(t)=\mathrm{e}^{At}z(0)=\mathrm{e}^{\lambda t}z(0)+t\mathrm{e}^{\lambda t}(A-\lambda I)z(0).$$

通过以上讨论, 我们已经对特征模态和特征模态的缺失有了很好的理解, 接下来我们再举一个例子, 研究如下的双质量弹簧系统, 设两个质量块偏离平衡位置的位移分别为 x_1 和 x_2

$$\text{墙}|---k---[m]---k_c---[m]---k---|\text{墙}$$

取向右为正方向, 当 $x_1>0$ 时, 左侧的弹簧给左侧质量块向左的拉力, 所以应该是 $-kx_1$, 当 $x_2>0$ 时, 右侧的弹簧给右侧质量块向左的推力, 所以应该是 $-kx_2$, 当 $x_2-x_1>0$ 时, 中间的弹簧处于拉伸状态, 给左侧质量块向右的力, 给右侧质量块向左的力. 所以可以列出如下方程组

$$\begin{cases} m\dfrac{\mathrm{d}^2x_1}{\mathrm{d}t^2}=-kx_1+k_c(x_2-x_1)\\ m\dfrac{\mathrm{d}^2x_2}{\mathrm{d}t^2}=-kx_2-k_c(x_2-x_1)\end{cases}$$

设 $(x_1,x_2)^T=(v_1,v_2)^T\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$, 将上式代入到微分方程中, 得到

$$\begin{cases}-m\omega^2v_1=-(k+k_c)v_1+k_cv_2\\ -m\omega^2v_2=k_cv_1-(k+k_c)v_2\end{cases}\iff\begin{pmatrix}k+k_c & -k_c\\ -k_c & k+k_c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}=m\omega^2\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}$$

$$(k+k_c-m\omega^2)^2-k_c^2=0\Longrightarrow m\omega_1^2=k,\vec{v}_1=(1,1),\quad m\omega_2^2=k+2k_c,\vec{v}_2=(1,-1)$$

系统的第一个固有频率 ω_1 与中间弹簧 k_c 无关, $\vec{v}_1=(1,1)$ 说明两个质量块的振幅相等, 方向相同, 它们像一个整体一样, 同进同退, 中间弹簧的长度始终没有变化, 既不被压缩也不被拉伸, 系统的行为就好像中间弹簧不存在一样. 系统的第二个固有频率 ω_2 依赖于中间弹簧 k_c, $\vec{v}_2=(1,-1)$ 意味着两个质量块的振幅相等, 但方向相反. 在这种反向运动中, 中间的弹簧经历了剧烈的压缩和拉伸, 使得系统振荡得非常快, 因此频率更高. 任何这个双质量弹簧系统的自由振动, 无论初始条件如何, 都可以被看作是基本模态按不同比例的叠加.

$$x(t)=(A\cos(\omega_1t)+B\sin(\omega_1t))\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}+(C\cos(\omega_2t)+D\sin(\omega_2t))\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$$

通过四个初始条件 $x_1(0), x_1'(0), x_2(0), x_2'(0)$ 可以唯一确定系数 A, B, C, D. 从上面这个例子可以看出, 对特征模态的研究是非常有用的, 它可以让我们理解系统本身, 还可以得到所有自由振动的解.

上面我们直接假设 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ 而不是更一般的 $\mathrm{e}^{\lambda t}$, 实际上相当于我们有经验在这种无阻尼的情形 λ 一定是纯虚数所以设成了 $\mathrm{i}\omega$. 上面没有使用特征空间法, 因为对于无阻尼的情形, 只关心位移 x 的话不使用特征空间法也足够了, 我们依然把 $\vec{v}_1 = (1, 1)$ 称为特征向量, 上面已经讨论过这是一种简便而略带不严格的做法, 我们自己心里清楚就好了.

再总结一下到现在为止的结论, 实际上我们涉及到了两类问题, 一个是模态分析, 它研究一个系统的特征模态, 而不研究某个具体的真实发生的过程, 这是在频率域进行求解. 另一个是瞬态分析, 它研究给定初始状态后, 系统的状态随着时间的演化如何, 这是在时域进行求解. 以上两类问题, 有一个共同点, 即它们都是自由的, 而不是受迫的. 二者之间的联系是, 想求解系统状态随时间的演化, 那么就先将系统的初始状态在模态基下进行分解, 再让每个模态的分量按照指数形式独立演化. 当然模态缺失的情形需要另作处理.

受迫的意思是, 微分方程或边界条件中存在不依赖于未知函数的非零项, 它可以理解为一个外部的驱动力或者说源项, 这也是我们常说的非齐次问题. 对于非齐次问题, 我们惯常的做法是先考虑相应的齐次问题, 求得通解, 再求一个特解, 那么非齐次问题的解就是通解加上特解. 现在我们假设该外部激励是简谐的, 除了共振的情况外, 可以假设有一个与外部激励同频率的特解, 这同样是因为 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ 是微分算子的特征函数. 设

$$L = a_n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} + a_{n-1} \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + a_0, \quad H(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$$

其中 $H(s)$ 被称为 L 的特征多项式, 它来自于 $L(\mathrm{e}^{st}) = H(s)\mathrm{e}^{st}$. 考虑 $L(y_p) = F_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$, 设

$$y_p = P\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \Longrightarrow L(P\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}) = PH(\mathrm{i}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} = F_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \Longrightarrow P = F_0 / H(\mathrm{i}\omega)$$

共振的情况就是 $H(\mathrm{i}\omega) = 0$ 的情况. 这样, 在不共振的情况下, 在时域中的受迫瞬态分析就完成了. 如果想在频域中进行谐响应分析, 需要进一步额外假设通解的时间演化是衰减到 0 的, 这样才能分析在特定频率激励下的最终稳态行为. 谐响应分析就是分析 $F_0/H(\mathrm{i}\omega)$ 这个函数. 这里采用了跟之前不同的记号, 我指出其对应关系来方便初学者理解. 这里假设 $y_p = P\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ 相当于之前假设 $x = v\mathrm{e}^{\lambda t}$, 而 $H(\mathrm{i}\omega)$ 相当于 $m\lambda^2 + c\lambda + k$ 中的 λ 取了 $\mathrm{i}\omega$, 不同的是之前模态分析时方程的右侧是 0 而现在方程右侧有了一个 F_0. 在做模态分析和受迫分析时我们都假设了解形如 $P\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ 这种样子, 但其中的逻辑大不相同, 模态分析的逻辑是, 找使得 P 有非零解的 ω, 这是求解特征值和特征向量的问题, 而受迫分析的逻辑是我已知外部的激励频率为 ω 要寻找频率同为 ω 的特解. 这二者必须做好区分.

当发生共振, 也就是 $H(\mathrm{i}\omega) = 0$ 的情形, 我们使用算子湮灭法来求解. 考虑 $m\ddot{x} + kx = F_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_n t}$ 的例子, 记算子 $L = D^2 + \omega_n^2$, 那么原方程可写为 $mLx = F_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_n t}$, 而右侧被算子 L 作用为零, 所以 $mL^2 x = 0$, 我们得到一个更高阶的齐次方程. 但本来的特征方程的单根 $\pm \mathrm{i}\omega_n$ 此时都变成二重根, 所以此时的解为 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_n t}, t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_n t}, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_n t}, t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_n t}$, 为了满足 $mLx = F_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_n t}$, 解为 $t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_n t}, t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_n t}$. 所以这里出现因子 t 的原因与临界阻尼的情形是一样的, 都是特征方程出现了重根, 只不过临界阻尼是系统自身的特征方程 $m\lambda^2 + c\lambda + k = 0$ 出现了重根, 而共振是进行过算子湮灭后的特征方程出现了重根.

当进入偏微分方程, 如上概念也依然是存在的. 考虑 $[0, 1]$ 区间上的一维波动方程 $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$. 该方程与前面方程的一个首要区别是该方程系统的自由度不再是有限个而是无限个, 对每个时刻 t, 弹簧系统需要求解出每个质量块的位置, 而一维波动方程需要得到一个 $[0, 1]$ 区间上的函数. 第二个区别是该方程会有边界条件的概念, 这是弹簧系统中不存在的, 这也导致该方程的非齐次可能来自于方程右端的非零项或者边界条件中的非零项. 这里我们考虑 Dirichlet 边界条件 $x(0) = x(1) = 0$. 设

初值 $u(x,0)=\varphi(x), u_t(x,0)=\psi(x)$. 这里我们带读者回忆一下标准的分离变量法的过程, 首先假设解 $u(x,t)$ 形如 $X(x)T(t)$, 然后代入方程,

$$u(x,t)=X(x)T(t)\Longrightarrow X(x)T''(t)-a^2X''(x)T(t)=0\Longrightarrow \frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda$$

$$T''(t)+\lambda a^2T(t)=0,\quad X''(x)+\lambda X(x)=0,\quad X(0)=0,\quad X(l)=0$$

- 当 $\lambda<0$ 时, $X(x)=C_1\mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}x}+C_2\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}x}$, 满足边值条件的只有平凡解.
- 当 $\lambda=0$ 时, $X(x)=C_1x+C_2$, 满足边值条件的只有平凡解.
- 当 $\lambda>0$ 时, $X(x)=C_1\cos\sqrt{\lambda}x+C_2\sin\sqrt{\lambda}x$. 由 $X(0)=0$ 得到 $C_1=0$.
  由 $X(l)=0$ 得到 $C_2\sin\sqrt{\lambda}l=0$, 要想得到非平凡解, 就必须

$$\sqrt{\lambda}l=k\pi\Longrightarrow\lambda_k=(\frac{k\pi}{l})^2,\quad k=1,2,\cdots\Longrightarrow X_k(x)=\sin\frac{k\pi}{l}x,\quad k=1,2,\cdots$$

再考虑时间部分的方程, 相应求解得到

$$T_k(t)=A_k\cos\frac{ak\pi}{l}t+B_k\sin\frac{ak\pi}{l}t,$$

其中 A_k,B_k 是待确定的常数. 这样我们就得到了级数解

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}X_k(x)T_k(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos\frac{ak\pi}{l}t+B_k\sin\frac{ak\pi}{l}t\right)\sin\frac{k\pi}{l}x.$$

下面适当选择 A_k,B_k 以满足初值条件

$$u(x,0)=\sum_{k=1}^{\infty}A_k\sin\frac{k\pi}{l}x=\varphi(x),\quad u_t(x,0)=\sum_{k=1}^{\infty}B_k\frac{ak\pi}{l}\sin\frac{k\pi}{l}x=\psi(x).$$

从模态分析的角度来看以上过程, 我们发现其实是非常熟悉的. 我们假设解形如 $X(x)T(t)$, 就是假设解形如 $v\mathrm{e}^{\lambda t}$, 我们寻找使得 $X(x)$ 有非零解的 λ, 就是寻找使得 $(m\lambda^2+c\lambda+k)v=0$ 有非零解的 λ, 常微分时我们能直接假设时间部分是 $\mathrm{e}^{\lambda t}$, 是因为我们通过假设 $z(t)=c_1(t)P_1+c_2(t)P_2$ 得到了 $c_i=C_i\mathrm{e}^{\lambda_i t}$, 所以敢这样直接假设, 偏微分这里只是没有预先假定这个形式然后把它重新求了一遍. 通过 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 确定 A_k,B_k 和常微分时通过初始条件确定系数是一样的.

而在我研究的声学问题中, 施加的左入射右出射的边界条件, 实际上是一个简谐的外部激励, 所以我们要寻找一个与外部激励同频率的特解. 所以这是谐响应分析.

Chapter 1

初等积分法

1.1 一阶线性方程

定理 1.1.1 (Gronwall 不等式). 设 $\psi(t)$ 满足

$$\psi(t) \leqslant \alpha(t) + \int_0^t \beta(s)\psi(s)\mathrm{d}s, \forall t \geqslant 0 \tag{1.1}$$

其中 $\beta(t)$ 非负, 那么

$$\psi(t) \leqslant \alpha(t) + \int_0^t \alpha(s)\beta(s)\mathrm{e}^{\int_s^t \beta(r)\mathrm{d}r}\mathrm{d}s, \forall t \geqslant 0 \tag{1.2}$$

证明. 首先想到的是考虑等式的情形,

$$\psi(t) = \alpha(t) + \int_0^t \beta(s)\psi(s)\mathrm{d}s, \forall t \geqslant 0 \tag{1.3}$$

希望能在此时推出

$$\psi(t) = \alpha(t) + \int_0^t \alpha(s)\beta(s)\mathrm{e}^{\int_s^t \beta(r)\mathrm{d}r}\mathrm{d}s, \forall t \geqslant 0 \tag{1.4}$$

对 (1.3) 两侧求导, 移项, 得到一个非齐次线性微分方程

$$\psi'(t) - \beta(t)\psi(t) = \alpha'(t) \tag{1.5}$$

选取它的一个积分因子

$$\mathrm{e}^{-\int_0^t \beta(s)\mathrm{d}s} \tag{1.6}$$

乘到 (1.5) 的两边, 得到

$$\left(\mathrm{e}^{-\int_0^t \beta(s)\mathrm{d}s}\psi(t)\right)' = \mathrm{e}^{-\int_0^t \beta(s)\mathrm{d}s}\alpha'(t) \tag{1.7}$$

将 (1.7) 两侧从 0 到 t 进行积分, 得

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-\int_0^t \beta(s)\mathrm{d}s}\psi(t) - \psi(0) &= \int_0^t \mathrm{e}^{-\int_0^s \beta(r)\mathrm{d}r}\alpha'(s)\mathrm{d}s && (1.8)\\
&= \int_0^t \mathrm{e}^{-\int_0^s \beta(r)\mathrm{d}r}\mathrm{d}\alpha(s) && (1.9)\\
&= \mathrm{e}^{-\int_0^s \beta(r)\mathrm{d}r}\alpha(s)\Big|_0^t - \int_0^t \alpha(s)\mathrm{d}\mathrm{e}^{-\int_0^s \beta(r)\mathrm{d}r} && (1.10)
\end{aligned}$$

$$= \mathrm{e}^{-\int_0^t \beta(r)\mathrm{d}r}\alpha(t) - \alpha(0) + \int_0^t \alpha(s)\beta(s)\mathrm{e}^{-\int_0^s \beta(r)\mathrm{d}r}\mathrm{d}s \tag{1.11}$$

在 (1.3) 中令 $t = 0$, 得 $\psi(0) = \alpha(0)$, 所以有

$$\mathrm{e}^{-\int_0^t \beta(r)\mathrm{d}r}\psi(t) = \mathrm{e}^{-\int_0^t \beta(r)\mathrm{d}r}\alpha(t) + \int_0^t \alpha(s)\beta(s)\mathrm{e}^{-\int_0^s \beta(r)\mathrm{d}r}\mathrm{d}s \tag{1.12}$$

$$\psi(t) = \alpha(t) + \int_0^t \alpha(s)\beta(s)\mathrm{e}^{\int_s^t \beta(r)\mathrm{d}r}\mathrm{d}s \tag{1.13}$$

等式的情形得证.

对于不等式的情形, 我们希望能照搬上面的证明, 但令人遗憾的是, 我们无法从积分的不等式直接得到微分的不等式.

但幸运的是, 如果记 (1.1) 式右侧的部分为 $\varphi(t)$, 即

$$\varphi(t) = \alpha(t) + \int_0^t \beta(s)\psi(s)\mathrm{d}s \tag{1.14}$$

那么我们有

$$\varphi'(t) = \alpha'(t) + \beta(t)\psi(t) \tag{1.15}$$

$$\leqslant \alpha'(t) + \beta(t)\varphi(t) \tag{1.16}$$

能这样放缩是因为我们预先假定了 $\beta(t) \geqslant 0$.

这样我们就得到了想要的微分的不等式

$$\varphi'(t) - \beta(t)\varphi(t) \leqslant \alpha'(t) \tag{1.17}$$

接下来照搬上面的证明

将 (1.6) 乘到 (1.17) 的两边, 得到

$$\left(\mathrm{e}^{-\int_0^t \beta(s)\mathrm{d}s}\varphi(t)\right)' \leqslant \mathrm{e}^{-\int_0^t \beta(s)\mathrm{d}s}\alpha'(t) \tag{1.18}$$

将 (1.18) 两侧从 0 到 t 进行积分, 得

$$\mathrm{e}^{-\int_0^t \beta(s)\mathrm{d}s}\varphi(t) - \varphi(0) \leqslant \int_0^t \mathrm{e}^{-\int_0^s \beta(r)\mathrm{d}r}\alpha'(s)\mathrm{d}s \tag{1.19}$$

$$= \int_0^t \mathrm{e}^{-\int_0^s \beta(r)\mathrm{d}r}\mathrm{d}\alpha(s) \tag{1.20}$$

$$= \mathrm{e}^{-\int_0^s \beta(r)\mathrm{d}r}\alpha(s)\Big|_0^t - \int_0^t \alpha(s)\mathrm{d}\mathrm{e}^{-\int_0^s \beta(r)\mathrm{d}r} \tag{1.21}$$

$$= \mathrm{e}^{-\int_0^t \beta(r)\mathrm{d}r}\alpha(t) - \alpha(0) + \int_0^t \alpha(s)\beta(s)\mathrm{e}^{-\int_0^s \beta(r)\mathrm{d}r}\mathrm{d}s \tag{1.22}$$

在 (1.14) 中令 $t = 0$, 得 $\varphi(0) = \alpha(0)$, 所以有

$$\mathrm{e}^{-\int_0^t \beta(r)\mathrm{d}r}\varphi(t) \leqslant \mathrm{e}^{-\int_0^t \beta(r)\mathrm{d}r}\alpha(t) + \int_0^t \alpha(s)\beta(s)\mathrm{e}^{-\int_0^s \beta(r)\mathrm{d}r}\mathrm{d}s \tag{1.23}$$

$$\varphi(t) \leqslant \alpha(t) + \int_0^t \alpha(s)\beta(s)\mathrm{e}^{\int_s^t \beta(r)\mathrm{d}r}\mathrm{d}s \tag{1.24}$$

而我们又有

$$\psi(t) \leqslant \varphi(t) \tag{1.25}$$

故得证! □

Chapter 2

存在和唯一性定理

2.1 Picard 存在唯一性定理

$$(E):\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y),y(x_0)=y_0$$

$$\text{矩形区域}R:|x-x_0|\leqslant a,|y-y_0|\leqslant b$$

$$I=[x_0-h,x_0+h]$$

$$h=min\{a,\frac{b}{M}\},M>\max_{(x,y)\in R^2}|f(x,y)|$$

定理 2.1.1. *若 f 在 R 上连续并且关于 y 满足 Lipschitz 条件, 则 (E) 在 I 上存在唯一解.*

证明.*Step1* 转化为积分方程

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,y(x))dx$$

一方面, 若 $y=y(x)$ 是 (E) 的解, 则有

$$\frac{dy(x)}{dx}=f(x,y(x)),\forall x\in(x_0-h,x_0+h)$$

两边同时关于 x 从 x_0 到 x 积分, 可得

$$y(x)-y(x_0)=\int_{x_0}^{x}\frac{dy(x)}{dx}dx=\int_{x_0}^{x}f(x,y)dx$$

$$\Rightarrow y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,y(x))dx$$

另一方面, 若 $y=y(x)$ 是积分方程在 (x_0-h,x_0+h) 上的解, 则 $y(x)$ 可导, 于是

$$\frac{dy(x)}{dx}=f(x,y(x)),y(x_0)=y_0$$

Step2 构造 *Picard* 序列 $\{y_n(x)\}$

$$y_{n+1}(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,y_n(x))dx$$

$$y_0(x)=y_0$$

要说明 $\forall x \in [x_0-h, x_0+h], \forall n \in N_0, (x, y_n(x))$ 在矩形 R 里面，才能说明序列的定义是好的

Claim: $|y_n(x)-y_0| \leqslant b$

n=1 时,$|y_1(x)-y_0| = |\int_{x_0}^{x} f(x,y_0)dx| \leqslant M|x-x_0| < Mh \leqslant b$.

设 $n=k$ 时断言成立，则当 $n=k+1$ 时,归纳法用在了哪里呢？需注意，只有前一个 $y_k(x)$ 是定义好的，我们才有下一个 y_{k+1} 可言；这里的归纳法并不是说下一个的证明利用到了前一个的成立，而是下一个的存在依赖于前一个的成立.

$$|y_{k+1}(x)-y_0| = |\int_{x_0}^{x} f(x,y_k(x))dx| \leqslant |\int_{x_0}^{x} Mdx| = M|x-x_0| < b$$

.

Step3 Picard 序列的收敛性

$$y_n(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k(x) - y_{k-1}(x) + y_0$$

要证 $\{y_n(x)\}$ 收敛，只要证明级数 $\sum_{k=1}^{\infty} y_k(x) - y_{k-1}(x)$ 绝对收敛感觉这里的各种收敛乱乱的 $\cdots$ 先不管了吧... 淑芬学完了再说

要证明级数 $\sum_{n=0}^{\infty} |y_{n+1}(x) - y_n(x)|$ 在 I 上一致收敛

$$n=0, |y_1(x)-y_0(x)| \leqslant M|x-x_0|$$

$$\begin{aligned}
n=1, |y_2(x)-y_1(x)| &= \left|\int_{x_0}^{x} f(x,y_1(x))dx - \int_{x_0}^{x} f(x,y_0(x))dx\right| \\
&\leqslant \left|\int_{x_0}^{x} |f(x,y_1(x)) - f(x,y_0(x))|dx\right| \\
&\leqslant \left|\int_{x_0}^{x} L|y_1(x)-y_0(x)|dx\right| \\
&\leqslant \left|\int_{x_0}^{x} ML|x-x_0|dx\right| \\
&\leqslant ML\frac{|x-x_0|^2}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n=2, |y_3(x)-y_2(x)| &= \left|\int_{x_0}^{x} f(x,y_2(x))dx - \int_{x_0}^{x} f(x,y_1(x))dx\right| \\
&\leqslant \left|\int_{x_0}^{x} |f(x,y_2(x)) - f(x,y_1(x))|dx\right| \\
&\leqslant \left|\int_{x_0}^{x} L|y_2(x)-y_1(x)|dx\right| \\
&\leqslant \left|\int_{x_0}^{x} ML^2\frac{|x-x_0|^2}{2}dx\right| \\
&\leqslant ML^2\frac{|x-x_0|^3}{3!}
\end{aligned}$$

Claim:

$$|y_n(x)-y_{n-1}(x)| \leqslant ML^{n-1}\frac{|x-x_0|^n}{n!}$$

用归纳法, 假设 $n=k$ 时结论成立, 则当 $n=k+1$ 时,

$$\begin{aligned}|y_{k+1}(x)-y_k(x)| &= \left|\int_{x_0}^{x} f(x,y_k(x))dx-\int_{x_0}^{x} f(x,y_{k-1}(x))dx\right| \\ &\leqslant \left|\int_{x_0}^{x} |f(x,y_k(x))-f(x,y_{k-1}(x))|dx\right| \\ &\leqslant \left|\int_{x_0}^{x} L|y_k(x)-y_{k-1}(x)|dx\right| \\ &\leqslant \left|\int_{x_0}^{x} ML^n\frac{|x-x_0|^n}{n!}dx\right| \\ &\leqslant ML^n\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}\end{aligned}$$

因此,

$$\sum_{n=0}^{\infty}|y_{n+1}(x)-y_n(x)|\leqslant\frac{M}{L}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(L|x-x_0|)^n}{n!}\leqslant\frac{M}{L}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(Lh)^n}{n!}<+\infty$$

因此,$\exists\phi(x)s.t.y_n(x)\to\phi(x)$ 在 I 上一致收敛. 由于 $y_n(x)$ 在 I 上是连续的, 故 $\phi(x)$ 在 I 上也连续.

再由

$$y_{n+1}(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,y_n(x))dx$$

关于 n 取极限得

$$\phi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,y_n(x))dx$$

即 $y=\phi(x)$ 是 (E) 在 I 上的解.

Step4 唯一性

令 $y=u(x)$ 和 $y=v(x)$ 是 (E) 的两个不同的解, 它们共同的存在区间是 (x_0-d,x_0+d)

令 $w(x)=u(x)-v(x)$, 则

$$\begin{aligned}|u(x)-v(x)| &= \left|\int_{x_0}^{x} |f(x,u(x))-f(x,v(x))|dx\right| \\ &\leqslant \int_{x_0}^{x} L|u(x)-v(x)|dx \\ &\leqslant Lk|x-x_0|\end{aligned}$$

将第三行得到的不等式带入到第二行中, 得到

$$\begin{aligned}|u(x)-v(x)| &\leqslant \int_{x_0}^{x} L|u(x)-v(x)|dx \\ &= \int_{x_0}^{x} L^2k|x-x_0|dx \\ &\leqslant \frac{k(L|x-x_0|)^2}{2}\end{aligned}$$

重复上述过程可得,

$$|u(x)-v(x)|\leqslant\frac{K(L|x-x_0|)}{n!}\leqslant\frac{k(Ld)^n}{n!}\to 0, \text{当} n\to\infty$$

由 *Gronwell* 不等式,$u(x)-v(x)\equiv 0\quad on[x_0-d,x_0+d]$

注记. 出现单个 f, 以 M 为界; 出现两个 f 作差, 利用 *Lipschitz* 条件得到界

注记. 为什么要转化为积分方程? 我们要求微分方程的解必须连续且可导, 而对于积分方程我们只需要要求解连续, 连续且满足积分方程一定可微, 这是一个很大的好处。

对解的正则性的要求降低了

积分号与极限可以换序... 开始触及到知识盲区了...

积分满足一些很显然的很好的估计, 比如

$$|\int f(x,y)dx| \leqslant \int |f(x,y)|dx$$

只是说在常微分方程及阶段这个优势不是很明显, 在偏微分方程阶段, 把微分方程化为积分方程是非常重要的手段

涉及到估计往往需要积分方程

注记. 现在我只知道 f 在矩形上有定义, 现在我假设 y 满足积分方程,$(x,y(x))$ 是否落到矩形中? $|y(x)-y_0| = || \leqslant |\int_{x_0}^{x} Mdx| \leqslant M|x-x_0| < M(h-\epsilon) < b-\widetilde{\epsilon}$

注记. 第一步, 构造逼近解; 第二步, 说明极限存在; 第三步, 说明极限就是我们要找的

例 2.1.1 (Ricatti 方程)**.**

$$\frac{dy}{dx} = x^2+y^2, y(x_0) = y_0$$

先判断关于 y 是否 *Lipschitz*, 事实上有一个更强的条件, 即 f 关于 y 是否有连续的偏导数, 若有, 关于 y 用中值定理, 得到 f 关于 y 确实 *Lipschitz*

由 *Picard* 定理, 存在唯一的积分曲线经过 (x_0,y_0)

定理 2.1.2 (存在性 (Peano 存在定理))**.** 设函数 $f(x,y)$ 在矩形区域 R 内连续, 则初值问题 (E) 在区间 $|x-x_0|<h$ 上至少存在一个解 $y=y(x)$.

定义 2.1.1. 设函数 $f(x,y)$ 在区域 G 内连续且满足不等式 $|f(x,y_1)-f(x,y_2)| \leqslant F(|y_1-y_2|)$, 其中 $F(r)>0$ 是 $r>0$ 的连续函数, 而且积分 $\int_0^{r_1} \frac{r}{F(r)} = +\infty$, 其中 $r_1>0$ 是常数, 则称 f 在 G 内对 y 满足 *Osgood* 条件; 特别地, 当取 $F(r)=Lr$ 时, 得到 *Lipschitz* 条件.

定理 2.1.3. 设 $f(x,y)$ 在区域 G 内对 y 满足 *Osgood* 条件, 则微分方程 (3.9) 在 G 内经过每一点的解是唯一的.

证明. 用反证法, 假设在 G 内存在一个点 (x_0,y_0), 使得方程 (3.9) 有两个解 $y=y_1(x), y=y_2(x)$ 都经过这个点, 存在一个 $x_1 \neq x_0$ 使得 $y_1(x_1) \neq y_2(x_1)$. 不妨设 $x_1 > x_0$,$y_1(x_1) > y_2(x_1)$. 令

$$\bar{x} = sup\{x_0 \leqslant x < x_1 : y_1(x) = y_2(x)\}$$

. 则

$$y_1(x) > y_2(x), \forall \bar{x} < x \leqslant x_1$$

$$\frac{d(y_1(x)-y_2(x))}{dx} = f(x,y_1(x)) - f(x,y_2(x)) \leqslant F(y_1-y_2), \forall \bar{x} < x < x_1$$

令 $r(x) = y_1(x-y_2(x))$, 则 $\frac{dr}{dx} \leqslant F(r), \forall \bar{x} < x < x_1$

$$\int_0^{r_1} \frac{dr}{F(r)} \leqslant \frac{\bar{x}}{x_1}dx = x_1 - \bar{x} < +\infty$$

由 Osgood 条件,$\frac{0}{r_1}\frac{dr}{F(r)}=+\infty$, 矛盾. □

2.2 解的延伸

考虑方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$$

定理 2.2.1. 设 P_0 为区域 G 内任意一点, 并设 Γ 是微分方程（*3.18*）的经过 P_0 点的任意一条积分曲线, 积分曲线 Γ 将在区域 G 内延伸到边界. 对于任意的含在区域 G 中的有界闭区域 G_1 包含 P_0, 那么 Γ 可以延伸到 G_1 之外.

证明. 设经过 P_0 的方程的解 Γ 为 $y=\phi(x)$. 设 J 是它的极大存在区间, 只考虑 Γ 在 P_0 右侧的延伸情况. 令 $J^+=J\cap[x_0,+\infty)$ 是 Γ 在 P_0 右侧的极大存在区间.

- $J^+=[x_0,+\infty)$, 则 Γ 是延伸到边界的.
- $J^+=[x_0,x_1],x_1<+\infty$, 以 $(x_1,\phi(x_1))$ 为中心, 作矩形 $|x-x_1|\leqslant a,|y-y_1|\leqslant b$, 由 Peano 存在定理, 存在 $h>0$ 使得（3.18）在 (x_1-h,x_1+h) 上存在一个解 $y=\phi_1(x)$ 令 $y_1(x)$, 则 y_x 是（3.18）在 $x_0\leqslant x\leqslant x_1+h$ 上的解

  事实上, 当 $x_0\leqslant x\leqslant x_1$,$\phi(x)=\phi(x_0)+\int_{x_0}^{x_1}f(x,\phi(x))dx$

  特别地,$\phi(x_1)=\phi(x_0)+\int_{x_0}^{x_1}f(x,\phi(x))dx$

  当 $x_1\leqslant x\leqslant x_1+h$,$\phi_1(x)=\phi(x_0)+\int_{x_0}^{x_1}f(x,\phi_1(x))dx$

  $$y_1(x)=\phi(x_1)+\int_{x_1}^{x}f(x,y_1(x)dx)=\phi(x_0)+\int_{x_0}^{x}f(x,y_1(x))dx$$

  这与 J^+ 是 Γ 的右行极大存在区间矛盾!
- $J^+=[x_0,x_1),x_1<+\infty$ 用反证法, 假设存在有界闭集 $G_1\subset G,p\in G_1,\Gamma\subset G_1$. claim: 当 $x\to x_1$ 时,$\lim\limits_{x\to x_1}\varphi(x)$ 存在

  $$\forall x_n\to x_1,|\varphi(x_n)-\varphi(x_m)|=|\int_{x_m}^{x_n}\frac{d\varphi}{dx}dx|=|\int_{x_m}^{x_n}f(x,\varphi(x))dx|\leqslant\max_{(x,y)\in G}|f(x,y)|\leqslant M_1|x_n-x_m|$$

  故 $\{\varphi(x_n)\}$ 是 Cauchy 列

  令 $\bar{y}=\lim\limits_{x\to x_1}\varphi(x)$ 令, 则 $\tilde{y}(x)$ 是（3.18）在 $x_0\leqslant x\leqslant x_1$ 上的解

  事实上,$\varphi(x)=\varphi(x_0)+\int_{x_0}^{x_1}f(x,\varphi(x))dx,\forall x_0\leqslant x\leqslant x_1$

  当 $x\to x_0$ 时,$\bar{y}=\varphi(x_0)+\int_{x_0}^{x_1}f(x,\varphi(x)dx)\Leftrightarrow\tilde{y}(x_1)=\varphi(x_0)+\int_{x_0}^{x_1}f(x,\tilde{y}(x))dx$

□

例 2.2.1. 试证微分方程

$$\frac{dy}{dx}=x^2+y^2$$

的任一解的存在区间都是有界的.

证明. 令 $f(x,y)=x^2+y^2$ 在 R^2 上连续, 且在 R^2 上关于 y 是局部 Lipschitz. 由 Picard 存在唯一性定理, 过任意一点 P_0 存在唯一的积分曲线 Γ, 要证 Γ 的极大存在区间是有界的.

否则, 设 Γ 的极大存在区间 J 是无界的. 不妨设 $(c,+\infty)\subset J$. 事实上, 如果 $y=y(x)$ 是原方程的解, 且 $(-\infty,c)\subset J$ 令 $\hat{y}(x)=-y(-x)$, 则

$$\frac{d\hat{y}}{dx}=\frac{dy}{dx}(-x)=(-x)^2+(y(-x))^2=x^2+(\hat{y}(x))^2$$

则 $\hat{y}(x)$ 也是原方程的解.

设 $x_1>0$,$(x_1,+\infty)\subset J$, 则

$$\frac{dy}{dx}>x_1^2+y^2,\forall x\in(x_1,+\infty)$$

故

$$\frac{1}{x_1^2+y^2}\frac{dy}{dx}\leqslant 1$$

$$\frac{d\frac{y}{x_1}}{x_1(1+\frac{y^2}{x_1^2})}=\frac{1}{x_1}darctan\frac{y}{x_1}$$

$$\frac{1}{x_1}\frac{darctan\frac{y}{x_1}}{dx}\leqslant 1$$

两边同时从 x_1 到 x 积分可得,

$$\frac{\pi}{x_1}\leqslant\frac{1}{x_1}(arctan\frac{y(x)}{x_1}-arctan\frac{y(x_1)}{x_1})\leqslant x-x_1,\forall x>x_1$$

令 $x\to+\infty$, 则得到矛盾! □

例 2.2.2. *在平面上任取一点 $P_0=(x_0,y_0)$, 试证初值问题*

$$\frac{dy}{dx}=(x-y)e^{xy^2},y(x_0)=y_0$$

的右行解都在区间 $x_0\leqslant x<\infty$ 存在.

证明. $f(x,y)=(x-y)e^{xy^2}$ 在 R^2 上连续, 局部 Lip, 由 Picard 定理, 过任意一点 P_0 存在唯一的积分曲线 Γ. 要证 Γ 的右行部分的存在区间是 $[x_0,+\infty)$

若 P_0 在直线 $y=x$ 的上方, 则过 P_0 的积分曲线会下降, 穿过 $y=x$ 到达它的下方. 由延伸定理,Γ 会延伸到 $G=\{(x,y)|x_0\leqslant x<+\infty\}$ 的边界. 由于在 $L:y=x$ 下方与它接近的点, 斜率远小于 1, 故 Γ 无法穿过 L 到达它的上方. 故 Γ 一直位于 L 的下方. 因此 Γ 的右行存在区间为 $[x_0,+\infty)$. □

定理 2.2.2. *设微分方程 $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$, 其中函数 $f(x,y)$ 在条形区域 $S:\alpha<x<\beta,-\infty<y<+\infty$ 内连续, 且满足不等式 $f(x,y)\leqslant A(x)|y|+B(x)$, 其中 $A(x)\geqslant 0,B(x)\geqslant 0$ 在区间 $\alpha<x<\beta$ 上连续, 则方程的每一个解都以区间 $\alpha<x<\beta$ 为最大存在区间.*

证明. 设 $P_0\in S$ 是任意一点. 由于 $f(x,y)$ 在 S 上是连续的, 由 Peano 定理, 一定存在过 P_0 的积分曲线 Γ. 要证 Γ 的最大存在区间是 (α,β) 只考虑右行解, 要证右行解的最大存在区间是 (x_0,β).

否则, 存在 $x_0<\beta_0<\beta$, 使得右行解的最大存在区间是 $[x_0,\beta_0)$

任取 Γ 上一点 (x_1,y_1), 在矩形 $R:|x-x_1|\leqslant a,|y-y_1|\leqslant b$ 上,$f(x,y)$ 是连续的.

由 Peano 定理, 在 (x_1-h,x_1+h) 上存在解,$h=\min\{a,\frac{b}{M}\}$

设在 R 上,$A(x), B(x)$ 的最大值是 A_0, B_0, 则 $|f(x,y)| \leqslant A_0(|y|+b)+B_0$
取 $M = A_0(|y_1|+b)+B_0+1$, 则

$$\frac{b}{M} = \frac{b}{A_0(|y_1|+b)+B_0+1} \to \frac{1}{A_0}$$

当 b 充分大时,$\dfrac{b}{M} > \dfrac{1}{2A_0}$
选取 $a = \dfrac{1}{4A_0}$, 则 $h = \dfrac{1}{4A_0}$
取 x_1 充分接近 β_0, 则 Γ 可延伸到 $x_1 + \dfrac{1}{4A_0} > \beta_0$, 这与 $[x_0, \beta_0)$ 是右行最大存在区间矛盾! □

2.3 第一次习题课

例 2.3.1.

$$\frac{dy}{dx} \leqslant \frac{f(x)}{g(y)}, g(y) > 0$$
$$g(y)dy \leqslant f(x)dx$$
$$\int_0^y g(t)dt - \int_0^x f(t)dt \leqslant C$$
$$\psi(x) := \int_0^{y(x)} g(t)dt - \int_0^x f(t)dt$$
$$\dot{\psi}(x) =$$

例 2.3.2.

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2 \geqslant y^2$$
$$y(0) = 1$$
$$\frac{dy}{y^2} \geqslant dx$$
$$\psi(x) = \frac{1}{y} + x \leqslant \psi(0) = 1$$
$$\dot{\psi}(x) = -\frac{\dot{y}}{y^2} + 1 = -\frac{x^2+y^2}{y^2} + 1 \leqslant 0$$

注记. *若要证 $f = g$, 可证 f 和 g 满足相同的方程并且有相同的初值条件*

例 2.3.3.

$$\frac{dy}{dx} = f(y) in (x,y) \in R \times [a, a+\epsilon)]$$

其中 $f(a) = 0$,$f(y) > 0 in (a, a+\epsilon)$ 当 $|\int_a^{a+\epsilon} \dfrac{1}{f(y)} dy < \infty|$ 时, 有两条过 (x_0, a) 的积分曲线; 当 $|\int_a^{a+\epsilon} \dfrac{1}{f(y)} dy| = \infty$ 时, 只有一条

证明. 内容... □

2.4 比较定理

定理 2.4.1 (第一比较定理). 假设函数 $f(x,y)$ 和 $F(x,y)$ 都在平面区域 G 内连续, 并且满足不等式 $f < F, \forall (x,y) \in G$, 又设函数 $y = \phi(x)$ 与 $y = \Phi(x)$ 在区间 $a < x < b$ 上分别是初值问题

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), y(x_0) = y_0$$

$$\frac{dy}{dx} = F(x,y), y(x_0) = y_0$$

的解, 其中 $(x_0, y_0) \in G$, 则我们有 $\phi(x) < \Phi(x), when \quad x_0 < x < b; \phi(x) > \Phi(x), when \quad a < x < x_0$

证明. 只证明右行部分.

令 $\psi(x) = \Phi(x) - \phi(x)$, 则

$$\frac{d\psi}{dx} = F(x, \Phi(x)) - f(x, \phi(x)), \psi(x_0) = 0$$

由于 $F(x_0, \Phi(x_0)) > f(x_0, \phi(x_0))$, 故 $\frac{dy}{dx}(x_0) > 0$, 所以存在 $\sigma > 0$, 使得 $\psi(x) > 0, \forall x \in (x_0, x_0 + \sigma)$

要证的是 $\psi(x) > 0, \forall x_0 < x < b$ 否则, 存在 $x_0 + \sigma < x_1 < b$, 使得 $\psi(x_1) = 0$

令 $\beta = min\{x_0 < x < b | \psi(x) = 0\}$, 则 $\psi(\beta) = 0$, 且 $\psi'(\beta) \leqslant 0$

但是,$\frac{d\psi}{dx}(\beta) = F(x_1, \Phi(\beta)) - f(x, \phi(\beta)) > 0$, 矛盾! □

现在考虑初值问题

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), y(x_0) = y_0$$

其中 $f(x,y)$ 在矩形区域 $R: |x - x_0| \leqslant a, |y - y_0| \leqslant b$ 上连续. 令 $M > \max_{(x,y)\in R} |f(x,y)|, h = mina, \frac{b}{M}$, 在区间 $[x_0 - h, x_0 + h]$ 上至少存在一个解如果在区间 $[x_0 - h, x_0 + h]$ 上初值问题 E 有两个解 $y = Z(x), y = W(x)$ 使得 E 的任何的解 $y = y(x)$ 都满足 $W(x) \leqslant y(x) \leqslant Z(x), x_0 - h \leqslant x \leqslant x_0 + h$, 则称 $W(x), Z(x)$ 分别是初值问题的最小解和最大解

定理 2.4.2. 存在 $0 < \sigma < h$, 使得在区间 $[x_0 - \sigma, x_0 + \sigma]$ 上初值问题存在最大解和最小解.

定理 2.4.3 (Ascoli-Azela). 设在区间 I 上给定一个函数列 $\{f_n(x)\}_1^\infty$, 称 $\{f_n(x)\}$ 在 I 上一致有界是指 $\exists K > 0$, 使得 $|f_n(x)| \leqslant K, \forall x \in J, \forall n \geqslant 1$. 称 $\{f_n(x)\}$ 在 I 上等度连续, 如果 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta$, 使得 $\forall |x_1 - x_2| < \delta, |f_n(x_1) - f_n(x_2)| < \epsilon, \forall n = 1, 2, \cdots$

若 $\{f_n(x)\}$ 在有界闭区间 I 上一致有界, 并且等度连续, 则存在子列 $\{f_{n_k}(x)\}$ 在 I 上一致收敛.

证明. 考虑初值问题

$$(E_m): \frac{dy}{dx} = f(x,y) + \epsilon_m, y(x_0) = y_0$$

$$\epsilon_m > 0, M_m = M + \epsilon_m, h_m = mina, \frac{b}{M_m} \leqslant h$$

若 ϵ_m 单调递减趋于 0,h_m 趋于 h.

则在 $(x_0 - h_m, x_0 + h_m)$ 上存在 (E_m) 的解 $y = \varphi_m(x)$

由于 $\epsilon \to 0$, 故 $h_m \to h$, 因此 $\exists \sigma > 0$, 当 m 充分大时,$\varphi(x)$ 在 $(x_0 - \sigma, x_0 + \sigma)$ 上都存在, 并且

$$\varphi_m(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f_m(x, \varphi_m(x))dx, f_m(x,y) = f(x,y) + \epsilon_m$$

由第一比较定理, 对于 (E) 的任一解 $y=\phi(x)$, 有

$$\varphi_m(x)<\phi(x),x_0-\sigma<x<x_0$$

$$\varphi_m(x)>\phi(x),x_0<x<x_0+\sigma$$

$$||\leqslant||+\int_{min}^{max}dx\leqslant,\forall x\in[],\forall m$$

$$||=||\leqslant(M+1)||,\forall\epsilon>0,\exists\delta=\frac{\epsilon}{2(M+1)},\forall||<\delta,||<\epsilon$$

由 $Arzela-Adcoli$, 存在子列（仍记为 $\varphi_n(x)$）在 $[x_0-\sigma,x_0+\sigma]$ 上一致收敛到 $y=\Phi(x)$ 令 $m\to\infty$, 有

$$\Phi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f_m(x,\Phi(x))dx,\forall x\in[x_0-\sigma,x_0+\sigma]$$

且 $\Phi(x)$ 在 $[x_0-\sigma,x_0+\sigma]$ 上连续, 因此,$\Phi(x)$ 是 (E) 在 $[x_0-\sigma,x_0+\sigma]$ 上的解.

由第一比较定理,(E) 的任意的解 $y=y(x)$, 都有

$$y(x)<\varphi_m(x),x_0<x\leqslant x_0+\sigma$$

则有

$$y(x)\leqslant\Phi(x),x_0<x\leqslant x_0+\sigma$$

□

定理 2.4.4. 设函数 $f(x,y)$ 与 $F(x,y)$ 都在平面区域 G 内连续且满足 $f(x,y)\leqslant F(x,y,\forall(x,y)inG)$, 又设函数 $\phi(x),\Phi(x)$ 分别是

$$(E_1):\frac{dy}{dx}=f(x,y),y(x_0)=y_0$$

$$(E_2):\frac{dy}{dx}=F(x,y),y(x_0)=y_0$$

的解 $((x_0,y_0)\in G)$ 并且 $y=\varphi(x)$ 是 (E_1) 的右行最小解和左行最大解, 则由如下关系:

$$\varphi(x)\leqslant\Phi(x),x_0\leqslant x<b$$

$$\varphi(x)\geqslant\Phi(x),a<x\leqslant x_0$$

Chapter 3

奇解

3.1 一阶隐式微分方程

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0$$

若从 (4.1) 可解出

$$y = f(x, p), p = \frac{dy}{dx}$$

对 x 求导,

$$p = f_x^{'} + f_p^{'} \frac{dp}{dx}$$

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p - f_x^{'}}{f_p^{'}}$$

$$f_p^{'} dp + (f_x^{'} - p) dx = 0$$

若 (4.3) 可解得通解 $p = v(x, C)$, 则原方程的解为 $y = f(x, v(x, C))$,C 为任意常数.

若 (4.3) 可解得一个特解 $p = w(x)$, 则原方程的特解为 $y = f(x, w(x))$.

有时可解 (4.3) 得到 $x = v(p, C)$, 则原方程的通解是 $y = f(v(p, C), p), x = v(p, C)$.

例 3.1.1. 求解克莱罗方程

$$y = xp + f(p)$$

其中 $f^{''}(p) \neq 0$

证明. 对 x 求导, 可得

$$p = p + x\frac{dp}{dx} + f^{'}(p)\frac{dp}{dx} \to (x + f^{'}(p))\frac{dp}{dx} = 0$$

若 $x + f^{'}(p) = 0$, 即 $x = -f^{'}(p), y = -pf^{'}(p) + f(p)$, 是特解

若 $\frac{dp}{dx} = 0$, 则得到通解 $p = C$, 故原方程通解 $y = Cx + f(C)$

由于 $f^{''}(p) \neq 0$,p 可写成 □

例 3.1.2. 求解微分方程

$$x(y^{'})^2 - 2yy^{'} + 9x = 0$$

证明. 当 p=0 时, 不可能是方程的解当 $p \neq 0$ 时,

$$y = \frac{xp^2+9x}{2p} = \frac{xp}{2} + \frac{9x}{2p}$$

两边对 x 求导, 可得

$$p = \frac{p}{2} + \frac{x}{2}\frac{dp}{dx} + \frac{9}{2p} - \frac{9x}{2p^2}\frac{dp}{dx}$$

$$-(\frac{p}{2} - \frac{9}{2p}) + (\frac{x}{2} - \frac{9x}{2p^2})\frac{dp}{dx} = 0$$

$$(\frac{1}{2} - \frac{9}{2p^2})(x\frac{dp}{dx} - p) = 0$$

$\Rightarrow p = 3$, 原方程特解 $y = 3x$

若 $x\dfrac{dp}{dx} - p = 0$, 则 $p = Cx$ 故原方程通解是

$$y = \frac{Cx^2}{2} + \frac{9}{2C}$$

□

设隐式方程不显含自变量, 即 $F(y,p) = 0$

设 $y = g(t), p = h(t)$ 是 (4.12) 的一个参数表示, 则

$$dx = \frac{1}{p}dy = \frac{g^{'}(t)}{h(t)}dt$$

故

$$x = \int \frac{g^{'}(t)}{h(t)}dt + C$$

于是, 原方程的解为 $\begin{cases} x = \int \dfrac{g^{'}(t)}{h(t)}dt + C \\ y = g(t) \end{cases}$

例 3.1.3. 求解微分方程

$$y^2 + (\frac{dy}{dx})^2 = 1$$

若 $p = 0$, 则 $y = 1$, 是方程的特解

例 3.1.4. 考虑隐式微分方程 $F(x,y,p) = 0$ 设 $x = f(u,v), y = g(u,v), p = h(u,v)$ 上述方程的参数化表示由于 $dy = pdx$ 故

$$g_u^{'}du + g_v^{'}dv = h(f_u^{'}du + f_v^{'}dv)$$

因此

$$(g_u^{'} - hf_u^{'})du + (g_v^{'} - hf_v^{'})dv = 0$$

若从上式可以解出 $u = Q(v,C)$, 那么原方程的通解为 $\begin{cases} x = f(Q(v,C),v) \\ y = g(Q(v,C),v) \end{cases}$ 若从上式可以解出特解 $u = S(v)$, 则原方程的特解为 $\begin{cases} x = f(S(v),v) \\ y = g(S(v),v) \end{cases}$

例 3.1.5. 解微分方程

$$(\frac{dy}{dx})^2 + y - x = 0$$

Chapter 4

高阶微分方程

考虑 n 阶微分方程

$$\frac{d^n y}{dx^n} = F(x, y, \cdots, y^{n-1})$$

令

$$y_1 = y, y_2 = \frac{dy_1}{dx}, \cdots, y_n = \frac{dy_{n-1}}{dx}$$

原方程可以化为

$$\frac{dy_n}{dx} = F(x, y_1, \cdots, y_n)$$

一般地, 考虑 $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \cdots, y_n) \\ \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \cdots, y_n) \\ \cdots \\ \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \cdots, y_n) \end{cases}$ $f_1, \cdots, f_n$ 是关于变量 $(x, y_1, \cdots, y_n)$ 在区域 D 上的连续函数. 上式可以写成

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

如果 $f_k(x, y_1, \cdots, y_k) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} y_i + e_k(x)$, 则 $f(x, y) = A(x)y + e(x)$

此时,

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y + e(x)$$

若向量函数 $\vec{f}(x, \vec{y})$ 在 $|x - x_0| \leqslant a, |y - y_0| \leqslant b$ 连续, 且 $\vec{f}(x, \vec{y})$ 关于 $\vec{y}$ 满足 Lipschitz 条件: $\exists L > 0$, 使得

$$\left|\vec{f}(x, \vec{y_1}) - \vec{f}(x, \vec{y_2})\right| \leqslant L\left|\vec{y_1} - \vec{y_2}\right|$$

4.1 解对初值和参数的连续依赖性

考虑 $\begin{cases} \dfrac{d\vec{y}}{dx} = \vec{f}(x, \vec{y}, \lambda) \\ \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0 \end{cases}$ 要研究它的解 $y = \varphi(x; x_0, \vec{y}_0, \lambda)$ 对初值 $(x_0, \vec{y}_0)$ 及参数 λ 的连续依赖性令 $\tilde{x} = x - x_0, \tilde{\vec{y}} = \vec{y} - \vec{y}_0$

因此, 只需讨论方程

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y, \lambda) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

关于参数 λ 的连续依赖性.

证明. 1. 等价于

$$y = \int_0^x f(x, y, \lambda) dx$$

2. 定义

$$\varphi(x)$$

3. k=0 时, 结论成立

假设 k 时结论成立, 当 k+1 时,$\forall (x_0, \lambda_0) \in D$,

$$\begin{aligned} \varphi_{k+1}(x, \lambda) - \varphi(x_0, \lambda_0) &= \int_0^x f(x, \varphi_k(x, \lambda), \lambda) dx - \int_0^{x_0} f(x, \varphi_k(x, \lambda_0), \lambda) dx \\ &= \end{aligned}$$

□

定理 4.1.1. 设 n 维向量函数 $f(x, y)$ 在 (x, y) 空间内的某个开区域 G 上连续, 而且对 y 满足局部 *Lipschitz* 条件. 假设 $y = \xi(x)$ 是微分方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

的一个解, 令它的存在区间为 J. 现在区间 J 内任取一个有界闭区间 $a \leqslant x \leqslant b$, 存在常数 $\delta > 0$, 使得对于任何初值 $(x_0, y_0), a \leqslant x_0 \leqslant b, |y_0 - \xi(x_0)| \leqslant \delta$, 柯西问题

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), y(x_0) = y_0$$

的解 $y = \varphi(x, x_0, y_0)$ 也至少在区间 $a \leqslant x \leqslant b$ 存在, 并且在闭区域 $D_\delta : a \leqslant x \leqslant b, a \leqslant x_0 \leqslant b, |y_0 - \xi(x_0)| \leqslant \delta$ 上是连续的.

证明. 设 f 在 G 上是 Lipschitz 的, 令

$$\eta(x) = y(x) - \xi(x)$$

则

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{dy}{dx} - \frac{d\xi}{dx} = f(x, \eta + \xi) - f(x, \xi)$$
$$\eta(x_0) = y(x_0) - \xi(x_0) = y_0 - \xi(x_0)$$

把研究 y 转化为研究 η

由于 f 是 Lip 的,

$$|g(x, y)| \leqslant L|\eta|$$

$$|f(x, \eta_1) - g(x, \eta_2)| = |f(x, \eta_1 + \xi) - f(x, \eta_2 + \xi)| \leqslant L|\eta_1 - \eta_2|$$

构造 Picard 序列 $\Big\{$ ...

Claim

$$|| \leqslant \frac{(L|x-x_0|)^{k+1}}{(k+1)!}|y_0-\xi(x_0)|$$

$$|\varphi_k(x)| \leqslant \sigma$$

用数学归纳法证明 Claim1

当 k=0 时,

$$\varphi_1(x)-\varphi_0(x)=|\int_{x_0}^{x}| \leqslant L|y_0-\xi(x_0)|dx = L|y_0-xi(x_0)||x-x_0|$$

结论成立

设 k 时结论成立, 则 k+1 时,

$$|\varphi_{k+1}(x)-\varphi_k(x)|=|\int_{x_0}^{x}(g(x,\varphi_k(x))-g(x,\varphi_{k-1}(x)))dx$$

取 $\sigma>0$, 使得 $D=\{(x,y)||y-\xi(x)| \leqslant \sigma\} \subset G$ 由于 f 在 G 上局部 Lipschitz, 则 f 在 D 上关于 y 是 Lipschitz 的. 取 $\delta>0$ 使得 $\delta e^{L|b-a|}=\dfrac{\sigma}{2}$ □

4.2 解对初值和参数的连续可微性

定理 4.2.1. 设 $f(x,y,\lambda)$ 在区域 $G:|x| \leqslant a, |y| \leqslant b, |\lambda-\lambda_0| \leqslant c$ 上连续, 而且对 y,λ 又连续的偏导数, 则 (5.5.2) 的解 $y=\varphi(x,\lambda)$ 在区域 D 上是连续可微的.

Chapter 5

线性微分方程组

5.1 一般理论

考虑标准形式的 n 阶线性微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}x} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)y_j + f_i(x), \quad i = 1, \cdots, n, \quad a < x < b$$

其中出现的系数 $a_{ij}(x), f_i(x) \in C(a,b)$. 可改写成矩阵的形式

$$\frac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}x} = A(x)\vec{y} + \vec{f}(x), \quad a < x < b$$

要想说明 (a,b) 上的唯一性, 只需说明 (a,b) 中的任意的闭区间的唯一性.

$\forall I \subset (a,b)$ 是闭区间,

$$|g(x,y_1) - g(x,y_2)| = |A(x)(y_1 - y_2)| \leqslant L|y_1 - y_2|$$

由 Picard 存在唯一性定理,(6.1) 在 (a,b) 上有唯一解.

5.2 齐次线性微分方程组

考虑标准形式的 n 阶齐次线性微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}x} = A(x)\vec{y}, \quad a < x < b \tag{5.1}$$

记方程的解的全体为 S, 容易看出 S 是一个线性空间.

命题 5.2.1. *S 是 n 维线性空间.*

证明. 任取 $x_0 \in (a,b)$, 定义

$$H_{x_0}\colon S \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad \vec{y} \longmapsto \vec{y}(x_0)$$

- H_{x_0} 是线性映射. 显然.
- H_{x_0} 是满射. 任意初值存在解.
- H_{x_0} 是单设. 这样的解是唯一的.

□

定义 5.2.1. *称(5.1)的 n 个线性无关的解为一组基础解系.*

假设已知方程(5.1)的 n 个解 $y_1, \cdots, y_n$, 这 n 个在区间 (a,b) 上的函数的线性无关性等同于任取 $x_0 \in (a,b)$ 后 n 个数组向量 $y_1(x_0), \cdots, y_n(x_0)$ 的线性无关性. 线性代数的知识告诉我们要考察

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_{11}(x_0) & \cdots & y_{1n}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1}(x_0) & \cdots & y_{nn}(x_0) \end{vmatrix}.$$

上面的观察告诉我们 $W(x)$ 在 (a,b) 上要么恒为零要么恒不为零.

定理 5.2.1.

$$W(x) = \mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} \operatorname{tr} A(x)\mathrm{d}x} W(x_0)$$

5.3 非齐次线性微分方程组

定义 5.3.1. 对应于解组 (6.8), 令矩阵 $Y(x)$

例 5.3.1. 内容...

证明.

$$\frac{d}{dx}$$

由于

故

$$\Phi^{-1}(s)\begin{pmatrix} 0 \\ f(s) \end{pmatrix} = \frac{f(s)}{W(s)}\begin{pmatrix} -\varphi_2(s) \\ \varphi_1(s) \end{pmatrix}$$

□

5.4 高阶线性微分方程

考虑

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} + a_1(x)\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}} + \cdots + a_n(x)y = f(x), \quad a < x < b \tag{5.2}$$

引进新的未知函数

$$y_1 = y, y_2 = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \cdots, y_n = \frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}}$$

则方程(5.2)等价于如下方程组

$$\frac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}x} = A(x)\vec{y} + \vec{f}(x),$$

其中

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \vec{f}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix}, \quad A(x) = \begin{pmatrix} & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_1(x) \end{pmatrix}.$$

5.5 常系数高阶线性微分方程

例 5.5.1. 设欧拉方程

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x) \tag{5.3}$$

其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 都是常数,$x > 0$. 试利用适当的变换把它化成常系数的非齐次线性微分方程.

解. 设 $x = \mathrm{e}^t$, 即 $t = \ln x$.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} \\
&= \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) \\
&= -\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{1}{x^2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - 1\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{x^2}\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\right] \\
&= -2\frac{1}{x^3}\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) + \frac{1}{x^3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) \\
&= \frac{1}{x^3}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - 2\right)\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) \\
&= \frac{1}{x^3}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - 2\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - 1\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}$$

记

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} =: \mathrm{D}$$

不难由归纳法证明

$$y^{(k)} = \frac{1}{x^k}\mathrm{D}(\mathrm{D}-1)\cdots(\mathrm{D}-k+1)y$$

□

Chapter 6

幂级数解法

Chapter 7

定性理论与分支理论初步

7.1 动力系统、相空间与轨线

设 t 时刻质点的位置 $x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, 运动速度 $v=(v_1(x),\cdots,v_n(x))$, 则质点的运动方程为

$$\frac{dx}{dt}=v(x) \tag{7.1}$$

这个方程不显含自变量, 称这样的方程是自治的. 若 $v(x)$ 满足 Picard 定理的条件, 则以 $x(t_0)=x_0$ 有唯一解 $x=\varphi(t;t_0,x_0)$.

注记. *为什么要将之视为 R^n 中的一条曲线而不是 R^{n+1} 中的一条曲线*

把 x 取值的的空间 $\mathbb{R}^n$ 称为相空间, 把 (t,x) 所在的空间 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ 称为增广相空间

(8.3) 给出了与线速场 $u(x)$ 相吻合的一条“光滑”曲线, 称之为轨线。用箭头在轨线标明对应于时间增加质点的运动方向.

目标：从向量场 $v(x)=(v_1(x),\cdots,v_n(x))$ 出发获取轨线的集合特征, 或者更进一步, 弄清轨线族的拓扑结构图

拓扑结构中有两个东西特别重要,

1. 平衡点：若 $v(x_0)=0$, 则称 x_0 为方程7.1的一个平衡点. 对于平衡点我们需要关注它是否是稳定的、渐近稳定的, 如果不稳定, 我们想知道它为什么不稳定

2. 闭轨：若存在方程7.1的非定常的周期运动 $\varphi(t+T;t_0,x_0)=\varphi(t;t_0,x_0),\forall t$, 我们想知道相图中是否存在闭轨, 如果存在, 有多少条

例 7.1.1. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-y+x(x^2+y^2-1)\\ \dfrac{dy}{dt}=x+y(x^2+y^2-1)\end{cases}$

令 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$ 则???

$\begin{cases}\dfrac{dr}{dt}=r(r^2-1),r(0)=r_0\\ \dfrac{d\theta}{dt}=1,\theta(0)=\theta_0\end{cases}$

那么我们可以找到平衡点

1. $r_0=0$

2. $r_0 \neq 0$

$$r(t)=\frac{1}{\sqrt{1-(1-\frac{1}{r_0^2})e^{2t}}}$$

注记. 这个极坐标的变换不保持平衡点???

本例中我们是通过把解解出来之后研究它的相图, 本章的目的是不解它就研究它的相图

称方程7.1为一个动力系统, 其基本性质如下:

1. 积分曲线的平移不变性设 $\varphi(t)$ 是方程7.1的一个积分曲线, 则 $\varphi(t+C)$ 仍然是积分曲线. 注意, 不重合.
   $\dfrac{d\varphi(t+C)}{dt}=\dfrac{d\varphi}{dt}(t+C)=v(\varphi(t+C))$
   要去思考一下对于非自治方程为什么就不成立了

2. 经过相空间每一点的轨线是唯一的.

   性质一和性质二说明, 每条轨线都是增广相空间中沿 t 轴可平移重合的一族积分曲线在相空间中的投影, 而且只是这族积分曲线的投影.

3. 群的性质, 单参数连续变换群! 好耶

7.2 解的稳定性

考虑

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x) \tag{7.2}$$

其中 $f(t,x)$ 对 $x\in G\subset\mathbb{R}^n, t\in(-\infty,+\infty)$ 连续, 且关于 x 满足李氏条件.

定义 7.2.1. 假设(7.2)有一个解 $x=\varphi(t)$ 在 $t_0\leqslant t<+\infty$ 有定义.

称(7.2)的解 $x=\varphi(t)$ 是 *Lyapunov* 稳定的, 如果对于 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0, s.t.$ 对于 $\forall x_0$ 满足 $|x_0-\varphi(t_0)|<\delta$, 有 $|x(t;t_0,x_0)-\varphi(t)|<\varepsilon$ 对 $\forall t\geqslant t_0$ 成立.

称(7.2)的解 $x=\varphi(t)$ 是渐进稳定的, 如果 $\exists\delta_1, s.t.$ 对于 $\forall x_0$ 满足 $|x_0-\varphi(t_0)|<\delta_1$, 有 $\lim\limits_{t\to\infty}|x(t;t_0,x_0)-\varphi(t)|=0$ 成立.

7.2.1 线性稳定性

令

$$y=\tilde{y}+y_*,$$

代入到

$$\frac{dy}{dt}=f(y)$$

则

$$LHS=\frac{d(\tilde{y}+y_*)}{dt}=\frac{d\tilde{y}}{dt}$$

$$\begin{aligned}RHS&=f(\tilde{y}+y_*)=f(y_*)+f^{'}(y_*)\tilde{y}+\Big[f(\tilde{y}+y_*)-f(y_*)-f^{'}(y_*)\tilde{y}\Big]\\&=f^{'}(y_*)\tilde{y}+\Big[f(\tilde{y}+y_*)-f^{'}(y_*)\tilde{y}\Big]\end{aligned}$$

$$= A\tilde{y} + N(\tilde{y})$$

其中 $A = f^{'}(y_*)$ 是常数矩阵, 而 $N(\tilde{y})$ 满足 $\lim\limits_{\tilde{y}\to 0}\dfrac{|N(\tilde{y})|}{|\tilde{y}|} = 0$.

在(7.2)中, 设 $x = 0$ 是一个解, 令 $f(t,x) = A(t)x + N(t,x)$, $\lim\limits_{|x|\to 0}\dfrac{|N(t,x)|}{|x|} = 0, N(t,0) = 0$

$A(t)$ 是 n 阶矩阵, 在 $t \geqslant t_0$ 上连续

考虑方程

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \tag{7.3}$$

的稳定性. 称它的稳定与不稳定为原方程7.2的线性稳定与不稳定

定理 7.2.1. *在 (7.3) 中, 若 $A(t)$ 是常数矩阵, 则*

1. *零解是渐近稳定的, 当且仅当 A 的全部特征根有负的实部*

2. *零解是稳定的, 当且仅当 A 的全部特征根实部非正, 并且实部为零的特征根对应的 Jordan 块是一阶的*

3. *零解是不稳定的, 当且仅当 A 有实部为正的特征根或 A 有实部为零的特征根且它对应的 Jordan 块是高于一阶的*

7.2.2 Lyapunov 第二办法 (针对非线性方程)

考虑自治系统

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = f(\vec{y}) \tag{7.4}$$

定理 7.2.2 (Lyapunov 稳定性)**.** *令 $\vec{y}_*$ 是方程 (7.4) 的平衡点, 令 $L: O \to R$ 是包含 $\vec{y}_*$ 的开集 O 上的连续可微函数, 假设*

1. *$L(\vec{y}_*) = 0$, 且 $L(\vec{y}) > 0, \forall \vec{y} \in O\backslash\{\vec{y}_*\}$*

2. $$\dot{L}(\vec{y}) \;= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} L \circ \phi_t(\vec{y}) \leqslant 0, \forall \vec{y} \in O\backslash\{\vec{y}_*\}$$

   其中 $\phi_t(\vec{y})$ 表示以 $\vec{y}$ 为初值的(7.4)的解.

则 $\vec{y}_*$ 是稳定的, 若再假设 $\dot{L}(\vec{y}) < 0, \forall \vec{y} \in O\backslash\{\vec{y}_*\}$, 则 $\vec{y}_*$ 是渐近稳定的.

证明. 1. ε 充分小, 使得 $B_\varepsilon(\vec{y}_*) \subset O$

定义 $\alpha = \min\{L(\vec{y})\big||\vec{y} - \vec{y}_*| = \varepsilon\}$

$u_\varepsilon = \{y \in B_\varepsilon(y_*)\big|L(y) < \alpha\}$, 则 u_ε 是开集, 且 $y_* \in u_\epsilon$

由 $\dot{L} \leqslant 0$, 若 $y_0 \in u_\epsilon$, 则

$$\frac{d}{dt}L(y(t)) \leqslant 0$$

以 y_0 为初值的解一定一直限制在 u_ϵ 中,

现在对于 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta$ 使得 $B_\delta \subset U_\epsilon$, 以 y_0 为初值的解一直在 u_ϵ 中,

$$|y(t) - y_*| < \epsilon, \forall t$$

取 δ 使得 $B_\delta(y_*) \subset U_\epsilon$ 中, 则 y_* 是稳定的.

2. 由稳定性,$|y(t)-y_*|<\epsilon,\forall t$, 故 $|y(t)|\leqslant< M,\forall t$, 故存在收敛子列 $t_n\to\infty$ 使得 $y(t_n)\to z_0$

现在要证的是,

$$\lim_{t\to\infty}|y(t)-y_*|=0$$

现在先证 z_0 就是 y_*

由于 $\dot{L}<0, L(y(t))$ 严格递减趋于 $L(z_0)$,（$L(y(t))$ 的极限你是知道存在的, 但是你不知道 $y(t)$ 的极限, 你只知道 $y(t_n)$ 的极限, 但是对于 L 这个极限相同）

令 $z(s)$ 是以 z_0 为初值的解, 则有 3,

$$L(z(s))<L(z_0),\forall s>0$$

这里不能由 $L(z_0)$ 最小出点东西?

令 $Y_n(s)$ 是以 $y(t_n)$ 为初值的解, 则 $Y_n(s)=y(t_n+s)$

并且我们还知道 $y(t_n)\to z_0, Y_n(s)$ 是以 $y(t_n)$ 的解,$z(s)$ 是以 z_0 为初值的解, 由解对初值的连续依赖性, 当 n 充分大时,$L(Y_n(s))=L(y(t_n+s))<L(z_0),\forall s>0$, 这与 $L(y(t))>L(z_0)$ 矛盾.

于是 $y(t)$ 只能以 y_* 为唯一的极限点??? $y(t)$ 咋就有极限了.

□

例 7.2.1. 分析方程组 $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=(\varepsilon x+2y)(z+1)\\ \dfrac{dy}{dt}=(-x+\epsilon y)(z+1)\\ \dfrac{dz}{dt}=-z^3\end{cases}$ 的平衡点的稳定性

证明. $\begin{cases}(\varepsilon x+2y)=0\\ (-x+\epsilon y)=0\\ z=0\end{cases}\Rightarrow (0,0,0)$ 是平衡点找线性部分

$$(x,y,z)=(0+\tilde{x},0+\tilde{x},0+\tilde{x})$$

所以直接看线性化方程是什么, $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\epsilon x+2y\\ \dfrac{dy}{dt}=-x+\epsilon y\\ \dfrac{dz}{dt}=0\end{cases}$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\epsilon&2&0\\-1&\epsilon&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

$$det(A-\lambda E)=-\lambda((\lambda-\epsilon)^2+2)$$

$$\lambda_1=0,\lambda_2=\epsilon+\sqrt{2}i,\lambda_3=\epsilon-\sqrt{2}i$$

如果 $\epsilon>0$, 那么这个系统是线性不稳定的, 进而使不稳定的. 如果 $\epsilon\leqslant 0$, 虽然是线性稳定的, 但是不知道非线性怎么样.

构造 *Lypnouv* 函数,

$$L(x,y,z)=ax^2+by^2+cz^2$$

我要求一些系数 abc 使得满足应用定理的条件.

$$\dot{L}(x,y,z)=\frac{\partial L}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial L}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial L}{\partial x}\dot{x}$$

$$2ax((\epsilon x+2y)(z+1))+2by(-x+\epsilon y)(z+1)$$

$$\epsilon(2ax^2+2by^2)(z+1)+(4a-2b)xy(z+1)-2cz^4$$

当 $\epsilon=0$ 时, 取 a=1,b=2,c=1

$$\dot{L}=-z^4\leqslant 0$$

$\Rightarrow (0,0,0)$ 是非线性稳定的.

当 $\epsilon<0$ 时,

$$\dot{L}(x,y,z)=\varepsilon(2x^2+4y^2)-2z^4<0$$

故 $(0,0,0)$ 是渐近稳定的. □

7.3 平面上的动力系统, 奇点与极限环

考虑平面上的动力系统

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=X(x,y)\\ \dfrac{dy}{dt}=Y(x,y)\end{cases}$$

$X(x,y),Y(x,y)$ 是平面上的连续函数.

为什么要考虑平面上的动力系统, 因为对于高维的动力系统, 我们可以两两组合考虑多个平面上的动力系统

消去 t, 得到 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{Y(x,y)}{X(x,y)}$

先来考虑线性系统

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

若 A 是非退化的, 则称 $(0,0)$ 为初等奇点, 否则, 称之为高阶奇点. 令 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}$ 则原方程变为

$$T\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}=AT\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}\Rightarrow\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}=T^{-1}AT\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}$$

不妨设 A 是 Jordan 标准形. 即 A 为以下三种之一

1. $\begin{pmatrix}\lambda & 0\\0 & \mu\end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix}\lambda & 0\\1 & \mu\end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\\beta & \alpha\end{pmatrix}$

1. $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$

   $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \lambda x \\ \dfrac{dy}{dt} = \mu y \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\mu y}{\lambda x} \Rightarrow y = C|x|^{\frac{\mu}{\lambda}}$$

   (a) $\lambda = \mu, y = C|x|$, 还要判断一下稳定性

   (b) λ, μ 同号

      i. $|\dfrac{\mu}{\lambda}| > 1$