样条函数与逼近论

孙天阳

中国科学技术大学数学科学学院

tysun@mail.ustc.edu.cn

2024 年 10 月 31 日

目录

Chapter 1

差商

1.1 绪论

多项式插值：Lagrange、Newton、Hermite。
P_m: 最高不超过 m 次的多项式。
Runge 现象：$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, x \in [-5, 5]$，用一个多项式插值不能很好地拟合这个函数。

1.1.1 分段插值

分段插值 → 样条：分段光滑多项式。插值方法不行，不做插值，改做逼近。

给定区间 $[a, b]$，假设 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k < x_{k+1} = b$，

$$\left\{ I_i = [x_i, x_{i+1}), i = 0, \cdots, k \right.$$

每一段上都可以约定多项式的次数，叫做 multi-degree spline，就是每段上最高次数不一样。我们这门课，每一段上多项式次数，给一个统一的最高值。

$$S_m(\Delta) := \left\{ s(x) \mid s(x) \mid_{I_i} \in \mathbb{P}_m, s(x) \in C^{m-1}[a, b] \right\}$$

以后每个结点可以指定不同的光滑次数。
$S_m(\Delta) \subset C^{m-1}[a, b]$ 线性空间（关心基函数）+ 对偶基。从计算的角度来说，具有紧支集的基函数。学过有限元的话，具有紧支集的函数 $\int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 就很好算。

1.1.2 B 样条基函数

B 样条基函数 (B-spline)，B 是 Basic。

1.2 Lagrange 插值

问题: 给定区间 $[a,b]$ 上的函数 $f(x)$，给定互异的插值节点组 $\{x_i\}_{i=0}^m$ 使得

$$a \leqslant x_0 < x_1 < \cdots < x_m \leqslant b$$

找 $p_m(x) \in \mathbb{P}_m$ 满足插值条件 $p_m(x_i) = f(x_i), i = 0, \cdots, m$.

定理 1.2.1. *插值问题的解存在且唯一.*

证明. 设 $p_m(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$, 则插值条件等价于

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + \cdots + a_m x_0^m = f(x_0) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_0 + a_1 x_m + \cdots + a_m x_m^m = f(x_m) \end{cases}$$

这是一个关于 $\{a_i\}_{i=0}^m$ 的线性方程组, 解存在唯一当且仅当行列式

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^m \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^m \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_m & \cdots & x_m^m \end{vmatrix} = \prod_{i<j}(x_i - x_j) \neq 0.$$

□

上面是理论上的存在唯一性. 如果要按照上面的方法去解 $\{a_i\}_{i=0}^m$, 因为这个矩阵是非稀疏的, 我们会发现这个计算量太大. $\{1, x, \cdots, x^m\}$ 作为 $\mathbb{P}_m$ 的一组基虽然在理论上很自然, 但在计算上的效果并不好. 所以我们希望在给定插值节点组 $\{x_i\}_{i=0}^m$ 的情况下, 找到 $\mathbb{P}_m$ 的一组基 $\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^m$, 使得此时求 $p_m(x)$ 关于基的系数的方程尽可能简单, 也就是使矩阵

$$B = \begin{pmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) & \cdots & \varphi_m(x_0) \\ \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \cdots & \varphi_m(x_1) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \varphi_0(x_m) & \varphi_1(x_m) & \cdots & \varphi_m(x_m) \end{pmatrix}$$

尽可能简单. 我们能想到的最简单的矩阵就是 $B = I$, 这就是要求

$$\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}.$$

以 φ_0 为例, 这样就要求 $x_1, \cdots, x_m$ 是 φ_0 的零点, 又因为 φ_0 是一个不超过 m 次的多项式, 所以我们已经在相差一个常数倍的意义下决定了 φ_0,

$$\varphi_0(x) \sim (x - x_1)\cdots(x - x_m).$$

再结合条件 $\varphi_0(x_0) = 1$, 我们得到

$$\varphi_0(x) = \frac{(x - x_1)\cdots(x - x_m)}{(x_0 - x_1)\cdots(x_0 - x_m)}.$$

其他的 $\varphi_i(x)$ 是同理的. 这样一来,

$$p_m(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \cdots + a_m\varphi_m(x)$$

中的系数 $\{a_i\}_{i=0}^m$ 就被确定为

$$a_i = f(x_i), \quad i = 0, \cdots, m.$$

我们给这组基一个专有的记号记作 l_i, 称作 Lagrange 插值多项式, 将这种插值方式

$$p_m(x) = \sum_{i=0}^m f(x_i) l_i(x)$$

称作 **Lagrange 插值**.

命题 1.2.2.

$$\sum_{i=0}^m l_i(x) \equiv 1$$

证明. 左侧其实就是 1 的 Lagrange 插值多项式, 按插值的要求它在 $m+1$ 个点取到 1, 这大于它的次数 m, 所以只能恒为 1. □

如果引入记号

$$\omega_{m+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_m)$$

那么

$$l_i(x) = \frac{\omega_{m+1}(x)}{(x - x_i)\omega'_{m+1}(x_i)}.$$

1.3 Newton 插值

Lagrange 插值有一个缺点, 就是基函数高度依赖于节点的选择. 如果节点发生了变化, 哪怕是在原有的 m 个节点的基础上新增一个节点, 也需要重新算一遍基函数. 这就促使我们引入了 **Newton 插值**. 把握住目的是新增节点时能够复用原有的基函数, 就不难理解 Newton 插值的基函数的选择.

首先 $m=0$ 只有一个节点的时候, 很平凡的情形自然会选 $\varphi_0=1$ 作为基函数. 当 $m=1$ 也就是有两个节点的时候, 首先我们已经有了 $\varphi_0=1$, 所以矩阵长成

$$B=\begin{pmatrix}1 & \varphi_1(x_0)\\ 1 & \varphi_1(x_1)\end{pmatrix}$$

的样子, 我们为了 B 简单所以取 $\varphi_1=x-x_0$. 当 $m=2$ 时, 矩阵长成

$$B=\begin{pmatrix}1 & 0 & \varphi_2(x_0)\\ 1 & \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1)\\ 1 & \varphi_1(x_2) & \varphi_2(x_2)\end{pmatrix}$$

依旧是为了矩阵简单我们取 $\varphi_2=(x-x_0)(x-x_1)$. 这样一来, $\varphi_i(x)$ 的取法就比较清楚了

$$\varphi_0(x)=1,\quad \varphi_i(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1}),\quad i=1,2,\ldots,m.$$

根据这种取法, A 是一个下三角矩阵. 为什么不在 $\varphi_i(x)$ 前加系数来进一步简化矩阵? 因为给 $\varphi_1(x)$ 前加系数顶多把 $\varphi_1(x_1)$ 给调成 1, 不可能同时把 $\varphi_1(x_2)$ 给调成 1, 所以干脆摆烂, 这样系数还干净.

命题 1.3.1 (作业)**.** *$\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^m$ 线性无关.*

证明.

$$\lambda_0+\lambda_1(x-x_0)+\lambda_2(x-x_0)(x-x_1)+\cdots+\lambda_m(x-x_0)\cdots(x-x_{m-1})=0$$

取 $x=x_0$ 推得 $\lambda_0=0$. 再取 $x=x_1$ 得 $\lambda_1=0$. 以此类推. □

接下来我们看一下此时怎么确定

$$p_m(x)=a_0\varphi_0(x)+a_1\varphi_1(x)+\cdots+a_m\varphi_m(x)$$

中的系数. 我们有三个观察, 首先注意到有

$$p_m(x)=p_{m-1}(x)+a_m\varphi_m(x),$$

这是因为 φ_m 在 $x_0,\cdots,x_{m-1}$ 处全为零, 即 $a_m\varphi_m(x)$ 这一项对 $p_m(x)$ 在 $x_0,\cdots,x_{m-1}$ 处的值没有影响, 所以除去这部分就是插值前 m 个节点的插值多项式. 从这里看出来, 采用牛顿插值, 我们不仅可以复用基函数, 在计算插入新节点后的插值多项式时还可以复用之前的插值多项式. 另一个观察是 a_m 就是 p_m 中 x^m 前的系数, 由插值多项式的存在唯一性, 我们可以利用 Lagrange 插值

$$p_m(x)=\sum_{i=0}^m f(x_i)l_i(x)$$

来计算 a_m. 直接可以从上式与 $l_i(x)$ 的定义读出 $p_m(x)$ 的最高阶项次数就是

$$a_m=\sum_{i=0}^m f(x_i)\frac{1}{\prod_{j\neq i}(x_i-x_j)}.$$

第三个观察是我们可以递归地计算出 a_i, 首先在 $x = x_0$ 处取值可以计算出

$$a_0 = f(x_0) =: [x_0]f$$

然后在 $x = x_1$ 处取值得到

$$[x_1]f = [x_0]f + a_1(x_1 - x_0) \Longrightarrow a_1 = \frac{[x_1]f - [x_0]f}{x_1 - x_0} =: [x_0, x_1]f$$

然后在 $x = x_2$ 处取值得到

$$[x_2]f = [x_0]f + [x_0, x_1]f \cdot (x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_1)(x_2 - x_0)$$

$$[x_2]f - [x_1]f + [x_1]f - [x_0]f = [x_0, x_1]f \cdot (x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_1)(x_2 - x_0)$$

$$[x_1, x_2]f \cdot (x_2 - x_1) + [x_0, x_1]f \cdot (x_1 - x_0) = [x_0, x_1]f \cdot (x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_1)(x_2 - x_0)$$

$$[x_1, x_2]f \cdot (x_2 - x_1) - [x_0, x_1]f \cdot (x_2 - x_1) = a_2(x_2 - x_1)(x_2 - x_0)$$

$$a_2 = \frac{[x_1, x_2]f - [x_0, x_1]f}{x_2 - x_0} =: [x_0, x_1, x_2]f$$

然后在 $x = x_3$ 处取值, 移项并合并产生更高阶项, 得到

$$\begin{aligned}&[x_2, x_3]f \cdot (x_3 - x_2) + [x_1, x_2]f \cdot (x_2 - x_1) + [x_0, x_1]f \cdot (x_1 - x_0)\\ =&[x_0, x_1]f \cdot (x_3 - x_0) + [x_0, x_1, x_2]f \cdot (x_3 - x_1)(x_3 - x_0) + a_3(x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_3 - x_0)\end{aligned}$$

移项并插入中间项得到

$$\begin{aligned}&[x_2, x_3]f \cdot (x_3 - x_2) - [x_1, x_2]f \cdot (x_3 - x_2) + [x_1, x_2]f \cdot (x_3 - x_1) - [x_0, x_1]f \cdot (x_3 - x_1)\\ =&[x_0, x_1, x_2]f \cdot (x_3 - x_1)(x_3 - x_0) + a_3(x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_3 - x_0)\end{aligned}$$

合并产生更高阶项得到

$$\begin{aligned}&[x_1, x_2, x_3]f \cdot (x_3 - x_2)(x_3 - x_1) + [x_0, x_1, x_2]f \cdot (x_3 - x_1)(x_2 - x_0)\\ &= [x_0, x_1, x_2]f \cdot (x_3 - x_1)(x_3 - x_0) + a_3(x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_3 - x_0)\end{aligned}$$

移项得到

$$[x_1, x_2, x_3]f \cdot (x_3 - x_2)(x_3 - x_1) - [x_0, x_1, x_2]f \cdot (x_3 - x_2)(x_3 - x_1) = a_3(x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_3 - x_0)$$

$$\Longrightarrow a_3 = \frac{[x_1, x_2, x_3]f - [x_0, x_1, x_2]f}{x_3 - x_0} =: [x_0, x_1, x_2, x_3]f$$

一般的, 在 $x = x_m$ 处取值得到

$$[x_m]f = [x_0]f + [x_0, x_1]f \cdot (x_m - x_0) + \cdots + a_m(x_m - x_{m-1}) \cdots (x_m - x_0)$$

接下来我们将归纳证明, 将式子右侧的前 k 项挪到式子左侧, 会得到

$$\sum_{i=1}^{m-k+1} [x_{m-i+2-k}, \cdots, x_{m-i+1}]f \cdot (x_m - x_{m-i}) \cdots (x_m - x_{m-i+2-k}) - [x_{m-i+1-k}, \cdots, x_{m-i}]f \cdot (x_m - x_{m-i}) \cdots (x_m - x_{m-i+2-k})$$

当 $k=1$ 时, 这就是

$$\sum_{i=1}^{m}[x_{m-i+1}]f-[x_{m-i}]f=[x_m]f-[x_{m-1}]f+[x_{m-1}]f-[x_{m-2}]f+\cdots+[x_1]f-[x_0]f$$

这是显然的, 假设上式对 k 成立, 下证对 $k+1$ 成立, 对 k 的式子变形并移项得

$$=\sum_{i=1}^{m-k+1}[x_{m-i+1-k},\cdots,x_{m-i+1}]f\cdot(x_m-x_{m-i})\cdots(x_m-x_{m-i+2-k})(x_{m-i+1}-x_{m-i+1-k})-[x_0,\cdots,x_k]f\cdot(x_m-x_{k-1})\cdots(x_m-x_0)$$

要证这玩意等于

$$\sum_{i=1}^{m-k}[x_{m-i+1-k},\cdots,x_{m-i+1}]f\cdot(x_m-x_{m-i})\cdots(x_m-x_{m-i+1-k})-[x_{m-i-k},\cdots,x_{m-i}]f\cdot(x_m-x_{m-i})\cdots(x_m-x_{m-i+1-k})$$

首先可以看到含 $[x_{m-k},\cdots,x_m]$ 的项是一样的, 接下来就是证

$$\begin{aligned}&-[x_{m-j-k},\cdots,x_{m-j}]f\cdot(x_m-x_{m-j})\cdots(x_m-x_{m-j+1-k})+[x_{m-j-k},\cdots,x_{m-j}]f\cdot(x_m-x_{m-j-1})\cdots(x_m-x_{m-j-k})\\=&[x_{m-j-k},\cdots,x_{m-j}]f\cdot(x_m-x_{m-j-1})\cdots(x_m-x_{m-j+1-k})(x_{m-j}-x_{m-j-k})\end{aligned}$$

即证

$$-(x_m-x_{m-j})\cdots(x_m-x_{m-j+1-k})+(x_m-x_{m-j-1})\cdots(x_m-x_{m-j-k})=(x_m-x_{m-j-1})\cdots(x_m-x_{m-j+1-k})(x_{m-j}-x_{m-j-k})$$

消去公因式, 即证

$$-(x_m-x_{m-j})+(x_m-x_{m-j-k})=x_{m-j}-x_{m-j-k}$$

这是显然的. 最后还需要额外验证

$$-[x_0,\cdots,x_k]f\cdot(x_m-x_k)\cdots(x_m-x_1)=[x_0,\cdots,x_k]f\cdot(x_m-x_{k-1})\cdots(x_m-x_1)(x_k-x_0)-[x_0,\cdots,x_k]f\cdot(x_m-x_{k-1})\cdots(x_m-x_0)$$

即证

$$-(x_m-x_k)\cdots(x_m-x_1)=(x_m-x_{k-1})\cdots(x_m-x_1)(x_k-x_0)-(x_m-x_{k-1})\cdots(x_m-x_0)$$

消去公因式, 即证

$$-(x_m-x_k)=(x_k-x_0)-(x_m-x_0),$$

这是显然的. 所以当 $k=m$ 时我们得到

$$[x_1,\cdots,x_m]f\cdot(x_m-x_{m-1})\cdots(x_m-x_1)-[x_0,\cdots,x_{m-1}]f\cdot(x_m-x_{m-1})\cdots(x_m-x_1)=a_m(x_m-x_{m-1})\cdots(x_m-x_1)(x_m-x_0)$$

$$\Longrightarrow a_m=\frac{[x_1,\cdots,x_m]f-[x_0,\cdots,x_{m-1}]f}{x_m-x_0}$$

定义 1.3.2. 设 $\{x_i\}_{i=0}^m$ 是 $[a,b]$ 中互异的 $m+1$ 个节点, f 是定义在 $[a,b]$ 上的函数. 定义

$$[x_0,\cdots,x_m]f:=\frac{[x_1,\cdots,x_m]f-[x_0,\cdots,x_{m-1}]f}{x_m-x_0}=\sum_{i=0}^{m}f(x_i)\frac{1}{\prod_{j\neq i}(x_i-x_j)}=\frac{D\begin{pmatrix}x_0&x_1&\cdots&x_{m-1}&x_m\\1&x&\cdots&x^{m-1}&f\end{pmatrix}}{D\begin{pmatrix}x_0&x_1&\cdots&x_{m-1}&x_m\\1&x&\cdots&x^{m-1}&x^m\end{pmatrix}}$$

命题 1.3.3. 设 $\sigma\in S_{m+1}$ 是一个全排列, 则 $[x_0,\cdots,x_m]f=[x_{\sigma(0)},\cdots,x_{\sigma(m)}]f$.

证明. 从差商是 Lagrange 插值多项式的首项系数的定义来看是显然的. □

命题 1.3.4. 从差商是 Lagrange 插值多项式的首项系数的定义验证递归定义成立.

证明.

$$[x_1,\ldots,x_m]f-[x_0,\ldots,x_{m-1}]f=\sum_{i=1}^{m}f(x_i)\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{m}\frac{1}{x_i-x_k}-\sum_{i=0}^{m-1}f(x_i)\prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{m-1}\frac{1}{x_i-x_k}$$

$$=f(x_m)\prod_{k=1}^{m-1}\frac{1}{x_m-x_k}-f(x_0)\prod_{k=1}^{m-1}\frac{1}{x_0-x_k}+\sum_{i=1}^{m-1}f(x_i)\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{m-1}\frac{1}{x_i-x_k}\left(\frac{1}{x_i-x_m}-\frac{1}{x_i-x_0}\right)$$

$$=f(x_m)\prod_{k=1}^{m-1}\frac{1}{x_m-x_k}-f(x_0)\prod_{k=1}^{m-1}\frac{1}{x_0-x_k}+\sum_{i=1}^{m-1}f(x_i)\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{m-1}\frac{1}{x_i-x_k}\frac{x_m-x_0}{(x_i-x_m)(x_i-x_0)}$$

$$=(x_m-x_0)\left[f(x_m)\prod_{k=0}^{m-1}\frac{1}{x_m-x_k}+f(x_0)\prod_{k=1}^{m}\frac{1}{x_0-x_k}+\sum_{i=1}^{m-1}f(x_i)\prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{m}\frac{1}{x_i-x_k}\right]$$

□

命题 1.3.5. 设 $f\in C^m[a,b]$, 则存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$[x_0,x_1,\cdots,x_m]f=\frac{f^{(m)}(\xi)}{m!}$$

证明. 令 $e(x)=f(x)-P_m(x)$, 则它是以 $\{x_i\}_{i=0}^m$ 为零点的函数, 由 Rolle 中值定理, 存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $e^{(m)}(\xi)=0$, 而 $P_m^{(m)}(\xi)=m![x_0,\cdots,x_m]f=f^{(m)}(\xi)$. □

例 1.3.6 (作业)**.** 计算 $f=x^n$ 的各阶差商.

$$[x_0,\cdots,x_m]f=\begin{cases}0 & m>n\\ 1 & m=n\\ ? & m<n\end{cases}$$

1.4 误差估计

1.5 Hermite 插值

设

$$a \leqslant x_1 < x_2 < \cdots < x_r \leqslant b$$

为插值节点, 对节点 x_i, 给定 $l_i \geqslant 1$ 个实数

$$y_i^{(k)} = f^{(k)}(x_i), \quad k = 0, \cdots, l_i - 1$$

记 $\sum_{i=1}^r l_i = m+1$. Hermite 问题: 寻找一个 m 次多项式 $H_m(x) \in \mathbb{P}_m$ 满足插值条件

$$H_m^{(k)}(x_i) = y_i^{(k)}, \quad k = 0, \cdots, l_i - 1, \quad i = 1, \cdots, r.$$

定理 1.5.1. 满足上述插值条件的多项式 $H_m(x) \in \mathbb{P}_m$ 存在且唯一.

假设 $\{u_i(x)\}_{i=0}^m$ 是 $\mathbb{P}_m$ 的一组基, 设 $H_m(x) = \sum_{i=0}^m c_i u_i(x)$, 代入 Hermite 插值条件有

$$\begin{cases} c_0 u_0(x_1) + c_1 u_1(x_1) + \cdots + c_m u_m(x_1) = f(x_1) \\ c_0 u_0^{(1)}(x_1) + c_1 u_1^{(1)}(x_1) + \cdots + c_m u_m^{(1)}(x_1) = f^{(1)}(x_1) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_0 u_0^{(l_1-1)}(x_1) + c_1 u_1^{(l_1-1)}(x_1) + \cdots + c_m u_m^{(l_1-1)}(x_1) = f^{(l_1-1)}(x_1) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

则关于 $\{c_i\}_{i=0}^m$ 的系数矩阵为

$$B = \begin{bmatrix} u_0(x_1) & u_1(x_1) & \cdots & u_m(x_1) \\ Du_0(x_1) & Du_1(x_1) & \cdots & Du_m(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D^{l_1-1}u_0(x_1) & D^{l_1-1}u_1(x_1) & \cdots & D^{l_1-1}u_m(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_0(x_r) & u_1(x_r) & \cdots & u_m(x_r) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D^{l_r-1}u_0(x_r) & D^{l_r-1}u_1(x_r) & \cdots & D^{l_r-1}u_m(x_r) \end{bmatrix}$$

证明一. B 可逆 $\Leftrightarrow Bx = 0$ 只有零解, 即满足齐次 Hermite 插值条件的只有零解. 数零点个数. □

证明二. 根据尽可能简化矩阵 B 的思路, 选取

$$u_0(x) = 1, u_1(x) = x - x_1, \cdots, u_{l_1-1} = (x-x_1)^{l_1-1}, u_{l_1} = (x-x_1)^{l_1}, \cdots, u_m(x) = (x-x_1)^{l_1}\cdots(x-x_r)^{l_r-1}$$

□

定义 1.5.2. 给定节点

$$t_1 \leqslant t_2 \leqslant \cdots \leqslant t_{m+1} = \underbrace{x_1 = \cdots = x_1}_{l_1} < \underbrace{x_2 = \cdots = x_2}_{l_1} < \cdots < \underbrace{x_r = \cdots = x_r}_{l_r}$$

定义函数 $f(x)$ 在 $t_1, \cdots, t_{m+1}$ 处的差商为满足 Hermite 插值条件

$$H_m^{(k)}(x_i) = f^{(k)}(x_i), \quad k = 0, \cdots, l_i - 1, \quad i = 1, \cdots, r.$$

的插值多项式 $H_m(x)$ 的首项系数, 记作 $[t_1, \cdots, t_{m+1}]f$.

定理 1.5.3 (Cramer 法则)**.**

$$[t_1,\cdots,t_{m+1}]f = D\begin{pmatrix} t_1 & \cdots & t_m & t_{m+1} \\ 1 & \cdots & x^{m-1} & f \end{pmatrix} \Big/ D\begin{pmatrix} t_1 & \cdots & t_m & t_{m+1} \\ 1 & \cdots & x^{m-1} & x^m \end{pmatrix}$$

命题 1.5.4. 将出现在上式分母中的行列式称作带重节点的 Vandermonde 行列式, 证明

$$V(t_1,\cdots,t_m) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant r}(x_i-x_j)^{l_il_j}\prod_{i=1}^{r}\prod_{k=1}^{l_i-1}k!$$

证明. □

定理 1.5.5.

$$[t_1,\cdots,t_{m+1}]f = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{l_i}\alpha_{ij}D^{j-1}f(x_i)$$

推论 1.5.6.

定理 1.5.7. 如果 $t_1 < t_{m+1}$, 那么

$$[t_1,\cdots,t_{m+1}]f = \frac{[t_2,\cdots,t_{m+1}]f-[t_1,\cdots,t_m]f}{t_{m+1}-t_1}$$

如果 $t_1=\cdots=t_{m+1}$, 那么

$$[t_1,\cdots,t_{m+1}]f = \frac{1}{m!}D^{(m)}f(t_1)$$

证明. □

推论 1.5.8. 若 $D^mf(x)=0$, 则 $[t_1,\cdots,t_{m+1}]f=0$

1.6 差商的性质

命题 1.6.1 (Leibniz 公式)**.** 对光滑函数 f, g, 有

$$[t_1, \cdots, t_{m+1}](f \cdot g) = \sum_{i=1}^{m+1} [t_1, \cdots, t_i] f \cdot [t_i, \cdots, t_{m+1}] g$$

证明一. 设 p, q 是 f, g 满足 $t_1, \cdots, t_{m+1}$ 作为插值条件的 Hermite 插值问题的解.

$$p = \sum_{i=1}^{m} (x - t_1) \cdots (x - t_i) [t_1, \cdots, t_i] f$$

$$q = \sum_{i=1}^{m} (x - t_{i+1}) \cdots (x - t_{m+1}) [t_i, \cdots, t_{m+1}] g$$

□

证明二. 当 $m = 0$ 时,

$$[t_1](f \cdot g) = (f \cdot g)(t_1) = f(t_1) \cdot g(t_1) = [t_1] f \cdot [t_1] g$$

假设对 m 个插值节点成立, 下面推对 $m+1$ 个插值节点成立.

(1) 当 $t_1 = \cdots = t_{m+1}$,

$$[t_1, \cdots, t_{m+1}](f \cdot g) = \frac{D^m}{m!}(f \cdot g)(t_1)$$

$$LHS = \sum_{i}^{m+1} \frac{D^{(i-1)} f}{(i-1)!}(t_1) \cdot \frac{D^{m+1-i} g}{(m+1-i)!}(t_1) = \frac{1}{m!} \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} D^i f(t_1) \cdot D^{m-i} g(t_1) = \frac{D^m f \cdot g(t_1)}{m!}$$

(2) 若 $t_1 < t_{m+1}$

$$[t_1, \cdots, t_{m+1}](f \cdot g) = \frac{[t_2, \cdots, t_{m+1}](f \cdot g) - [t_1, \cdots, t_m](f \cdot g)}{t_{m+1} - t_1}$$

$$= \frac{\sum_{i=2}^{m+1} [t_2, \cdots, t_i] f \cdot [t_i, \cdots, t_{m+1}] g - \sum_{i=1}^{m} [t_1, \cdots, t_i] f \cdot [t_i, \cdots, t_m] g}{t_{m+1} - t_1}$$

看分子

$$\sum_{i=2}^{m+1} \left((t_i - t_1)[t_1, \cdots, t_i] f + [t_1, \cdots, t_{i-1}] f\right) [t_i, \cdots, t_{m+1}] g - \sum_{i=1}^{m} [t_1, \cdots, t_i] \left(-(t_{m+1} - t_i)[t_i, t_{i+1}, \cdots, t_{m+1}] g +\right.$$

注意

$$\sum_{i=2}^{m+1} [t_1, \cdots, t_{i-1}] f \cdot [t_i, \cdots, t_{m+1}] g = \sum_{i=1}^{m} [t_1, \cdots, t_i] f \cdot [t_{i+1}, \cdots, t_{m+1}] g$$

从而上式为

$$\sum_{i=2}^{m+1} (t_i - t_1)[t_1, \cdots, t_i] f \cdot [t_i, \cdots, t_{m+1}] g + \sum_{i=1}^{m} (t_{m+1} - t_i)[t_1, \cdots, t_i] f \cdot [t_i, \cdots, t_{m+1}] g$$

$$= \sum_{i=1}^{m+1} [t_1, \cdots, t_i] f \cdot [t_i, \cdots, t_{m+1}] g (t_{m+1} - t_1)$$

□

推论 1.6.2.

$$[t_1,\cdots,t_{m+1}](x-t_{m+1})f=[t_1,\cdots,t_m]f$$

命题 1.6.3. 当 $\varepsilon_i\to 0$ 时, 若 $\{t_{i,\varepsilon_i}\}_{i=1}^{n+1}$ 是 $[t_1,t_n]$ 的某个分割，则

$$\{t_i\}_{i=1}^{n+1}\to\{t_i\}_{i=1}^{n+1}$$

对光滑函数 f 有:

$$\lim_{\epsilon_i\to 0}\sum_{i=1}^{n+1}f(t_i,\xi_i)\Delta t_i=\int_{t_1}^{t_n}f(t)\,dt$$

证明. 只需（真的吗?）针对节点 t_i, 做扰动 ε. 设原插值节点为

$$t_1\leqslant\cdots\leqslant t_{i-1}<t_i=t_{i+1}=\cdots=t_{i+l-1}<t_{i+l}\leqslant\cdots\leqslant t_{m+1}$$

做扰动 ε 后

$$t_1\leqslant\cdots\leqslant t_{i-1}<t_{i+1}=\cdots=t_{i+l-1}<t_i+\varepsilon<t_{i+l}\leqslant\cdots\leqslant t_{m+1}$$

$$[t_1,\cdots,t_i+\varepsilon,t_{i+1},\cdots,t_{m+1}]f=\frac{D}{D}$$

□

命题 1.6.4.

$$\frac{\partial}{\partial t_i}[t_1,\cdots,t_{m+1}]f=[t_1,\cdots,t_{i-1},t_i,t_i,t_{i+1},\cdots,t_{m+1}]f$$

证明.

$$\frac{\partial}{\partial}[]f=$$

□

命题 1.6.5.

证明. □

例 1.6.6. 求 $H_3(x)$ 满足 $H_3(1)=1,H_3'(1)=2,H_3(2)=2,H_4'(2)=3.$

解.

i	右	左	(右, 左)		
1	1	$1'$	(右 $=2$)		
2	1	$1'$	(右 $=1$)		
3	2	$2'$	(右 $=$)		
4	2	$2'$			

□

例 1.6.7.

1.7 样条空间

定义 1.7.1. 设 $[a,b]$ 给定, 有分割 $\Delta=\{x_i\}_{i=1}^k$ 满足

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_k<x_{k+1}=b$$

将 $[a,b]$ 分为 $k+1$ 个小区间 $I_i:=[x_i,x_{i+1})(i=0,1,\cdots,k-1), I_k:=[x_k,x_{k+1}]$. 称空间

$$S_m^\mu(\Delta):=\left\{s(x)\mid s(x)\big|_{I_i}=:s_i(x)\in\mathbb{P}_m(I_i), i=0,\cdots,k, D^js_{i-1}(x_i)=D^js_i(x_i), i=1,\cdots,k, j=0,\cdots,\mu_i\right\}$$

为 m 次 μ 阶光滑样条空间, 其中 $\mu=(\mu_1,\cdots,\mu_k)$, μ_i 在 -1 到 m 之间取值.

引理 1.7.2. 证明 $S_m^\mu(\Delta)$ 为一个有限维线性空间.

证明. 容易看出 $S_m^\mu(\Delta)$ 是一个线性空间, 为了证明它是有限维的, 只需构造如下单线性映射

$$\iota\colon S_m^\mu(\Delta)\longrightarrow P_m(I_0)\times\cdots\times P_m(I_k),\quad s(x)\longmapsto(s_0(x),\cdots,s_k(x)).$$

□

定义 1.7.3. 由 $D^{\mu_i}s_{i-1}(x_i)=D^{\mu_i}s_i(x_i)$ 产生的代数条件

$$s_i(x)=s_{i-1}(x)+c_i(x)(x-x_i)^{\mu_i+1}$$

其中 $c_i(x)$ 称为 $x=x_i$ 处的光滑余因子.

$$1,x,\cdots,x^m,$$

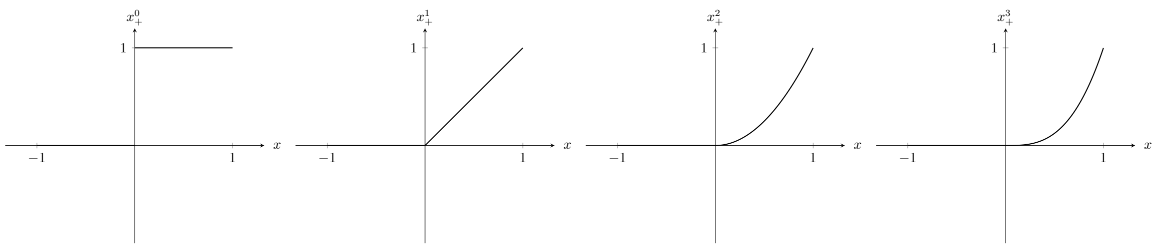
定理 1.7.4.

$$\dim S_m^\mu(\Delta)=m+1+\sum_{i=1}^k(m-\mu_i)$$

证明. 构造子空间, 然后是直和. □

定义 1.7.5. 记

$$x_+^0:=\begin{cases}1 & x\geqslant 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$



定理 1.7.6. 对任意 $s(x)\in S_m^\mu(\Delta)$, 存在 $s_0(x)\in\mathbb{P}_m$ 以及 $\{\alpha_{ij}\}_{i=1,j=1}^{k,m-\mu_i-1}$

$$s(x)=s_0(x)+\sum_{i=1}^k\sum_{j=1}^{m-\mu_i-1}\alpha_{ij}(x-x_i)_+^{\mu_i+j}$$

推论 1.7.7. $\left\{\rho_{ij}(x)=(x-x_i)_+^{\mu_i+j}\right\}_{i=1,j=1}^{k,m-\mu_i-1}$ 是 $S_m^{\mu}(\Delta)$ 的一组基.

$$\underbrace{1,x,\cdots,x^m}_{m+1\text{个}},\underbrace{(x-x_1)_+^{\mu_1+1},\cdots,(x-x_1)_+^m}_{m-\mu_i\text{个}},\cdots,\underbrace{(x-x_k)_+^{\mu_k+1},\cdots,(x-x_k)_+^m}_{m-\mu_k\text{个}}$$

例 1.7.8. 考虑 $m=2$, Δ: $a=0<1<2<3<4=b$, $\mu=(0,0,0)$

$$span\left\{(x-0)_+^0,(x-0)_+^1,(x-0)_+^2,(x-1)_+^1,(x-1)_+^2,(x-2)_+^1,(x-2)_+^2,(x-3)_+^1,(x-3)_+^2\right\}$$

推论 1.7.9. 考虑 $\mu=(-1,\cdots,-1)$

命题 1.7.10. $f(x)=(x-x_i)_+^r$ 在 $x=x_i$ 处是 C^{r-1} 连续的.

例 1.7.11. $m=1$, $[a,b]=[0,5],\Delta=\{1,2,3,4\},\mu=(0,0,0,0)$, 基函数为

$$(x-0)$$

这个其实就是因为，在同一段区间上，几个线性相关，所以从理论上我们肯定有能力找到几个参数使得叠加起来是 0

就其实这些东西无关是因为起点不一样，每个人负责提供一小段上的

$(x-x_i)_+^t$ 与 $(x-x_j)_+^t$

当 $x>x_j$ 时,$\deg[(x-x_i)_+^t-(x-x_j)_+^t]=t-1$

求导, 指对 x 求导, 感觉像求导一样.

考虑 $[0,1](x-1)_+^1$

格式很像差商

$[x_i,x_{i+1},\cdots,x_{i+p+1}](x-t)_+^p$ 与 $S_m^{\mu}(\Delta)$

1.8

Chapter 2

B 样条的性质

2.1 基本性质

定义 2.1.1. 给定重节点序列 $t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_{n+m+1}$, 对于 $i = 1, 2, \cdots, n$, 定义第 i 个 B 样条函数

$$B_{i,m,t}(x) = (t_{i+m+1} - t_i)[t_i, t_{i+1}, \cdots, t_{i+m+1}](t-x)_+^m$$

命题 2.1.2. 当 $m = 0$ 时,

$$B_{i,t}(x) = (t_{i+1} - t_i)[t_i, t_{i+1}](t-x)_+^0 = [t_{i+1}](t-x)_+^0 - [t_i](t-x)_+^0 = 1, \quad t_i < x \leqslant t_{i+1}$$

命题 2.1.3. 假设 $t_i < t_{i+1} = \cdots = t_{i+m+1}$, 则

$$B_{i,m}(x) = \left(\frac{x - t_i}{t_{i+m+1} - t_i}\right)^m, \quad t_i \leqslant x < t_{i+m+1}$$

命题 2.1.4. 令 $t_i \leqslant \cdots \leqslant t_{i+m+1} = x_1 \cdots x_1 < \cdots < x_r \cdots x_r$, 则

$$B_{i,m,t} = \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{l} \alpha_{jk}(x_i - x)_+^{m-k+1}, j = 1, \cdots, r, k = 0, \cdots, m - l_j$$

命题 2.1.5 (局部性)**.**

$$B_{i,m}(x) = \begin{cases} 0 & x \notin (t_i, t_{i+m+1}] \\ > 0 & x \in (t_i, t_{i+m+1}] \end{cases}$$

证明. 当 $x > t_{i+m+1}$ 时, 关于 t 的函数 $(t-x)_+^m$ 在 $[t_i, t_{i+m+1}]$ 上恒为 0, 所以 $B_{i,m}(x) = 0$.

当 $x < t_i$ 时, $(t-x)_+^m$ 在 $[t_i, t_{i+m+1}]$ 上就是 m 次多项式 $(t-x)^m$, 所以 $B_{i,m}(x) = 0$. □

推论 2.1.6. 对于 $[t_i, t_{i+1}]$, 仅有 $m+1$ 个非零 B 样条.

命题 2.1.7 (de Boor-Cox 递推公式)**.** 给定重节点序列 $t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_{n+m+1}$, 则

$$B_{i,m}(x) = \frac{x - t_i}{t_{i+m} - t_i} B_{i,m-1}(x) + \frac{t_{i+m+1} - x}{t_{i+m+1} - t_{i+1}} B_{i+1,m-1}(x)$$

证明.

$$\frac{B_{i,m,t}(x)}{t_{i+m+1} - t_i} = [t_i, \cdots, t_{i+m+1}](t-x)_+^m$$

$$
\begin{aligned}
&= [t_i, \cdots, t_{i+m+1}](t-x)(t-x)_+^{m-1} \\
&= [t_i]g(t) \cdot [t_i, \cdots, t_{i+m+1}]h(t) + [t_i, t_{i+1}]g(t) \cdot [t_{i+1}, \cdots, t_{i+m+1}]h(t) \\
&= (t_i - x)[t_i, \cdots, t_{i+m+1}]h(t) + [t_{i+1}, \cdots, t_{i+m+1}]h(t) \\
&= (t_i - x)\frac{[t_{i+1}, \cdots, t_{i+m+1}]h(t) - [t_1, \cdots, t_{i+m}]h(t)}{t_{i+m+1} - t_i} + [t_{i+1}, \cdots, t_{i+m+1}]h(t) \\
B_{i,m,t}(x) &= (t_i - x)([t_{i+1}, \cdots, t_{i+m+1}]h(t) - [t_1, \cdots, t_{i+m}]h(t)) + (t_{i+m+1} - t_i)[t_{i+1}, \cdots, t_{i+m+1}]h(t) \\
&= (t_{i+m+1} - t_i)[t_{i+1}, \cdots, t_{i+m+1}]h(t) + (x - t_i)[t_i, \cdots, t_{i+m}]h(t) \\
&= \frac{t_{i+m+1} - x}{t_{i+m+1} - t_{i+1}} B_{i+1,m-1}(x) + \frac{x - t_i}{t_{i+m} - t_i} B_{i,m-1}(x)
\end{aligned}
$$

$\square$

2.2 B 样条的分析性质

命题 2.2.1. 对于 $m \geqslant 1$,

$$D_+B_{i,m}(x) = m\left(\frac{B_{i,m-1}(x)}{t_{i+m}-t_i} - \frac{B_{i+1,m-1}(x)}{t_{i+m+1}-t_{i+1}}\right)$$

证明.

$$\begin{aligned} B_{i,m}(x) &= (t_{i+m+1}-t_i)[t_i,\cdots,t_{i+m+1}](t-x)_+^m \\ &= [t_{i+1},\cdots,t_{i+m+1}](t-x)_+^m - [t_i,\cdots,t_{i+m}](t-x)_+^m \\ D_+B_{i,m}(x) &= m(-[t_{i+1},\cdots,t_{i+m+1}](t-x)_+^{m-1} + [t_i,\cdots,t_{i+m}](t-x)_+^{m-1}) \end{aligned}$$

□

命题 2.2.2. 对于 $m \geqslant 1$,

$$D_+^rB_{i,m}(x) = \frac{m}{m-r}\left(\frac{x-t_i}{t_{i+m}-t_i}D^rB_{i,m-1}(x) - \frac{t_{i+m+1}-x}{t_{i+m+1}-t_{i+1}}D^rB_{i+1,m-1}(x)\right)$$

证明. □

命题 2.2.3.

$$\int_{t_i}^{t_{i+m+1}} B_{i,m}(x)\mathrm{d}x = \frac{t_{i+m+1}-t_i}{m+1}$$

证明.

$$0 = \int_{t_i}^{t_{i+m+2}} D_+B_{i,m+1}(x)\mathrm{d}x = \frac{m+1}{t_{i+m+1}-t_i}\int_{t_i}^{t_{i+m+1}} B_{i,m}(x)\mathrm{d}x - \frac{m+1}{t_{i+m+2}-t_{i+1}}\int_{t_{i+1}}^{t_{i+m+2}} B_{i+1,m}(x)\mathrm{d}x$$

记

$$J_i = \frac{m+1}{t_{i+m+1}-t_i}\int_{t_i}^{t_{i+m+1}} B_{i,m}(x)\mathrm{d}x$$

则上式等价于 $J_i = J_{i+1}$, 构造 $\{s_i\}$ 满足

$$s_1 = \cdots = s_{m+1} = a, \quad s_{m+2+j} = t_{i+j}, \quad j = 0,1,\cdots,m+1$$

则有

$$J_1 = \frac{m+1}{s_{m+2}-s_1}\int_{s_1}^{s_{m+2}} \frac{(s_{m+2}-x)^m}{(s_{m+2}-s_1)^m}\mathrm{d}x = 1$$

□

命题 2.2.4. 对 $B_{i,m}(x)$ 考察端点处的连续性, 以 t_i 为例

(1) $(-1)^{k+m-\alpha_i}D_+^kB_{i,m}(t_i) = 0, k = 0,1,\cdots,m-\alpha_i$

(2) $(-1)^{k+m-\alpha_i}D_+^kB_{i,m}(t_i) > 0, k = m-\alpha_i+1,\cdots,m$

2.3 B 样条的代数性质

2.4 等距节点 B 样条

Chapter 3

B 样条的相关算法

3.1 de Boor 算法

考虑 B 样条函数 $s(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i B_{i,m}(x)$, 求 $s(x), s'(x)$ 在一点 $x = x_0$ 处的函数值.

3.2 节点插入算法

问题: 考虑 $t=(t_1,\cdots,t_{n+m+1})$ 对应 n 个 B 样条基 $B_{1,t},\cdots,B_{n,t}$, 在区间 $[t_\mu,t_{\mu+1}]$ 内插入一个新节点 z, 得到 $\tau=(\tau_1,\cdots,\tau_{n+m+2})=(t_1,\cdots,t_\mu,z,t_{\mu+1},\cdots,t_{n+m+1})$, 对应 $n+1$ 个 B 样条基 $B_{1,\tau},\cdots,B_{n+1,\tau}$, 看 $\{B_{1,t},\cdots,B_{n,t}\}$ 与 $\{B_{1,\tau},\cdots,B_{n+1,\tau}\}$ 之间的关系.

引理 3.2.1. $S_m^t\subset S_m^\tau$.

证明. 任取 $s(x)\in S_m^t$

(1) $z\neq t_\mu$.

(2) $z=t_\mu$. 设 $s(x)$ 在 t_μ 处光滑性为 p_i, 则 $s(x)\in C^{p_i}\subset C^{p_i-1}$.

□

因为 $z\in[t_\mu,t_{\mu+1})$, 有一个简单的观察

$$\begin{cases}B_{i,t}=B_{i,\tau}, & i=1,\cdots,\mu-m-1\\ B_{i,t}=B_{i+1,\tau}, & i=\mu+1,\cdots,n\end{cases}$$

引理 3.2.2.

$$[x_0,\cdots,x_k]f=\frac{z-x}{x_k-x_0}[x_0,\cdots,x_{k-1},z]f+\frac{x_k-z}{x_k-x_0}[x_1,\cdots,x_k,z]f$$

证明.

$$\begin{aligned}[x_0,\cdots,x_k]f&=\frac{[x_1,\cdots,x_k]f-[x_0,\cdots,x_{k-1}]f}{x_k-x_0}\\&=\frac{[x_1,\cdots,x_{k-1},z]f-[x_0,\cdots,x_{k-1}]f+[x_1,\cdots,x_k]f-[x_1,\cdots,x_{k-1},z]f}{x_k-x_0}\\&=\frac{(z-x_0)[x_0,\cdots,x_{k-1},z]f+(x_k-z)[x_1,\cdots,x_k,z]f}{x_k-x_0}\end{aligned}$$

□