Exercise 2　Problem1,2

孙天阳*

1　基本物理量的解释

在连续介质力学中，应力张量和应变张量是描述物体在外力作用下变形和内部力学状态的两个基本物理量。理解这两个张量的物理意义及它们之间的关系对于分析材料的力学行为至关重要。

1.1　应力张量

应力张量描述了物体内部由于外部载荷或其他因素（如温度变化）引起的内力分布。具体来说，应力是指单位面积上的力，用以衡量材料内部的力学反作用。应力是一个张量，因为在三维空间中，每个点的应力不仅与外力的方向有关，还与其作用面有关。对于每个面，可以分解出三个方向上的力分量，因此应力张量是一个二阶张量，其一般形式为

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}.$$

其中 σ_{ij} 表示在第 i 方向的面上施加的第 j 方向的应力。

1.2　应变张量

应变张量描述了物体在外力作用下产生的形变程度。与应力类似，应变也是一个二阶张量，反映了材料在各个方向上的相对位移或形变情况。它的成分可以通过位移场的梯度计算得出，定义为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix},$$

其中 ε_{ij} 表示在 i 方向上的单位长度伸长率或剪切变形。

*School of Mathematical Sciences USTC, tysun@mail.ustc.edu.cn

1.3 弹性张量

作为胡克定律的自然延伸, 一般认为物体上某点的应力状态只由该点的应变状态所确定, 即

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\varepsilon_{kl})$$

在小形变情况下, 我们可以将上式在自然状态即 $\varepsilon_{ij} = 0$ 处做泰勒展开, 并假设 $\varepsilon_{ij} = 0$ 时 $\sigma_{ij} = 0$, 并略去二阶及以上的项, 我们得到 σ_{ij} 是 ε_{kl} 的线性函数

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}.$$

如果研究有限形变, 在泰勒展开中保留更高阶项, 则来到非线性弹性力学的研究内容. C_{ijkl} 构成一个四阶张量, 虽然有 81 个系数, 但是自带高度的对称性. 首先由于 σ_{ij} 和 ε_{ij} 的对称性, 我们有

$$C_{ijkl} = C_{jikl}, \quad C_{ijkl} = C_{ijlk},$$

这样一来 81 个系数只剩下 36 个是独立的. 下面我们给出热力学第一、第二定律带来的对称性

$$C_{ijkl} = C_{klij}.$$

1.3.1 正交各向异性

正交各向异性材料具有三个互相垂直的对称面.

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix}.$$

1.3.2 三次立方对称性

三次立方对称性材料在三个正交轴方向上的弹性性质相同.

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{pmatrix}.$$

1.3.3 各向同性

各向同性材料在所有方向上力学性质相同, 具有最高的对称性.

$$
\begin{pmatrix}
\lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\
\lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\
\lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu
\end{pmatrix},
$$

其中 λ 和 μ 是拉梅常数. 下面各小节都建立在各向同性的基础上.

1.4 杨氏模量（Young's Modulus, E）

考虑单轴拉伸实验, 我们有应力状态

$$\sigma_{11}=\frac{F}{S},\quad \sigma_{22}=\sigma_{33}=\sigma_{12}=\sigma_{23}=\sigma_{31}=0.$$

而本构方程告诉我们

$$\begin{cases}\sigma_{11}=2\mu\varepsilon_{11}+\lambda\theta\\ \sigma_{22}=2\mu\varepsilon_{22}+\lambda\theta\\ \sigma_{33}=2\mu\varepsilon_{33}+\lambda\theta\end{cases}$$

将上面三式相加得

$$\theta=\frac{1}{3\lambda+2\mu}\sigma_{11}$$

再代入三式中的第一式回得到

$$\sigma_{11}=\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}\varepsilon_{11}$$

于是我们发现轴向应力 σ_{11} 与轴向应变 ε_{11} 之比是一个常数, 记为

$$E=\frac{\sigma_{11}}{\varepsilon_{11}}=\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu},$$

1.5 泊松比（Poisson's Ratio, ν）

代入回三式中的后两式得到

$$\varepsilon_{22}=\varepsilon_{33}=-\frac{\lambda}{2\mu}\theta$$

而

$$\theta=\frac{1}{3\lambda+2\mu}\sigma_{11}=\frac{\mu}{\lambda+\mu}\varepsilon_{11}$$

于是我们发现横向应变 ε_{22} 和 ε_{33} 与轴向应变 ε_{11} 之比也是一个常数

$$\nu=-\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}}=-\frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{11}}=\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}.$$

1.6 剪切模量（Shear Modulus, μ）

考虑纯剪实验,

$$\sigma_{32} = \frac{F}{S}, \quad \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{12} = \sigma_{13} = 0$$

由本构关系反解得

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \varepsilon_{12} = \varepsilon_{13} = 0, \quad \varepsilon_{32} = \frac{1}{2\mu}\sigma_{32}$$

1.7 体积模量（Bulk Modulus, K）

考虑各向均匀压缩实验, 即

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -P, \quad \sigma_{23} = \sigma_{31} = \sigma_{12} = 0$$

则

$$-3P = (2\mu + 3\lambda)\theta$$

定义

$$K = -\frac{P}{\theta} = \frac{2\mu + 3\lambda}{3} = \lambda + \frac{2}{3}\mu.$$

2 均匀化

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是有界开集, 在 PDE 中我们研究过散度型二阶偏微分算子

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)u_{x_i} + c(x)u$$

其中 $a_{ij}(x), b_i(x), c(x) \in L^\infty(\Omega)$, 我们要求算子 L 关于 $x \in \Omega$ 是一致椭圆的, 即存在 $\theta > 0$ 使得

$$\sum_{ij} a_{ij(x)}\xi_i\xi_j \geqslant \theta|\xi|^2, \quad \forall x \in \Omega, \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

现在我们想考虑一族算子 A^ε, 它的系数以周期 ε 快速振荡. 假设 $a_{ij(x)} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 是一个以

$$Y = \prod_{j=1}^{n} [0, y_j^0] \subset \mathbb{R}^n$$

为周期的函数且对 x 一致椭圆, 假设 $a_0(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 也以 Y 为周期且 $a_0(x) \geqslant 0$. 考虑算子

$$A^\varepsilon = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}^\varepsilon(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right) + a_0^\varepsilon(x)$$

考虑边值问题（边值条件依赖于 ε, 稍后给出）

$$A^\varepsilon u_\varepsilon = f$$

可以看到给定的 $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ 并不依赖于 ε. 我们希望研究当 $\varepsilon \to 0$ 时 u_ε 的渐进行为. 我们期望得到的一个结果是构造一个二阶椭圆算子 A^H, 使得

$$A^H u = f$$

的解 u 就是 u^ε 在某种拓扑意义下的收敛. 称算子 A^H 为 A^ε 的均匀化算子.