

偏微分方程数值解

孙天阳

中国科学技术大学数学科学学院

`tysun@mail.ustc.edu.cn`

2025 年 9 月 19 日

序

在最前面,有必要让读者对大致脉络有一个了解.本课程叫做偏微分方程数值解,实际上主要讲有限差分方法,也就是将待求解的函数 $u(x, t)$ 离散化为格点函数,将微分方程离散化为差分方程.首先要指出,本课程关心的微分方程仅限于适定的微分方程,在后面专门花了一章讨论微分方程的适定性.在微分方程 1 的课程中,我们并没有显式地强调适定性这个名词,其实它就是微分方程解的存在性、唯一性、以及解对初值的连续依赖性或者叫稳定性,所以我们其实在微分方程 1 里至少学过波动方程和扩散方程的适定性,大家不要对这个概念感到害怕.其实适定性作为本课程的一章来说,跟数值方法的关系不大,我个人觉得可以当作一个预备知识单独学习,但科大的讲法把它放在一个我觉得挺奇怪的位置.接下来考虑差分方程,我们关注这样几个概念,首先是相容性,它衡量差分方程在多大程度上近似了微分方程,换句话说如果我把微分方程的真实解直接代入到差分方程,残差有多大.残差也是个格点函数.

目录

目录	4
1 Fourier 分析	5
2 对流方程	6
2.1 FTCS 格式	7
2.2 人工黏性	10
2.3 单步格式的收敛定理	12
2.4 CTCS 格式	14
2.5 带源项的 PDE 初值问题	16
2.6 迎风格式与 CFL 条件	17
2.7 BTCS 格式	18
2.8 截断误差	20
2.9 整体误差	21
2.10 基于 PDE 的积分形式的有限差分格式的构造	22
2.11 变系数对流方程	24
3 扩散方程	25
3.1 常系数扩散方程初值问题	25
3.2 待定系数法构造高阶逼近	26
3.3 变系数扩散方程	27
3.3.1 非守恒型扩散方程	27
3.3.2 守恒型扩散方程	28
4 偏微分方程初值问题的适定性	29
4.1 适定性的定义	29
4.2 一维常系数标量偏微分方程	30
4.3 一维常系数一阶偏微分方程组	31
4.4 一维常系数二阶抛物型偏微分方程组	32
4.5 一般常系数微分方程组	33
5 有限差分方法的基本性质	34
5.1 截断误差与差分方法的精度	34
5.2 相容性	35

5.3	收敛性	36
5.4	稳定性	37
5.5	Lax 定理	38
5.6	偏微分方程的耗散性、色散性	39
5.7	差分方程的耗散性、色散性	40
5.8	MPDE 方法	41
6	二维线性偏微分方程的初值问题	42
6.1	二维常系数对流方程的初值问题	42
6.2	二维变系数对流方程的初值问题	44
6.3	二维常系数扩散方程的初值问题	45
6.4	ADI 方法	47
6.5	近似分解方法	48
6.6	分裂方法	49
7	线性偏微分方程的初边值问题	51
7.1	一维扩散方程的边界处理	51
7.1.1	基于微分形式的近似	51
7.1.2	基于积分形式的近似	51
7.2	一维对流方程的边界处理	52
7.3	性质分析	53
7.3.1	收敛性	53
7.3.2	相容性	53
7.3.3	稳定性	54
7.3.4	Lax 定理	54
7.3.5	能量稳定性	54
7.4	二维扩散方程的边界处理	55
7.4.1	FTCS 边界条件的数值近似	55
7.4.2	过渡层边界条件的数值近似	55
7.4.3	任意区域边界条件的数值近似	55
8	非线性双曲守恒律方程	56
8.1	特征线方法	56
8.2	双曲守恒律方程的弱解和熵解	57
8.3	数值格式	58
8.3.1	基于光滑解的格式构造	58
8.3.2	守恒型差分格式	59
8.3.3	单调格式	60
8.3.4	TVD 格式	60

9	作业	61
9.1	第一次书面作业	61
9.2	第二次书面作业	63
9.3	第三次书面作业	65
9.4	第四次书面作业	67
9.5	第五次书面作业	69
9.6	第六次书面作业	73
9.7	第七次书面作业	76
9.8	第八次书面作业	78
9.9	第九次书面作业	80
9.10	第十次书面作业	84
9.11	第十一次书面作业	86
9.12	第十二次书面作业	88
9.13	第十三次书面作业	89

Chapter 1

Fourier 分析

Fourier 变换是说, 对于一个满足某些条件的函数 f , 可以计算它的频率为 ω 的 Fourier 系数

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt, \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}e^{i\omega t} d\omega.$$

这里频率 ω 是连续取值的, 对应于 Fourier 变换的函数 f 的非周期性. 如果考虑一个周期函数 f , 正确的概念应该是 Fourier 级数, 因为周期函数只允许特定频率的组分存在. 假设 f 的周期为 T , 那么基频 $\omega_0 = 2\pi/T$, 其他容许存在的频率都是它的整数倍, 有如下 Fourier 展开

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)e^{-in\omega_0 t} dt, \quad f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t}.$$

现在不再考虑 f , 而是考虑一个无限长的、非周期的离散序列 $x[nL]$. 那类比我们将来把 $f(t)$ 分解为 $e^{i\omega t}$ 的叠加, 此时我们应该将 $x[nL]$ 分解为 $e^{i\omega t}$ 在 nL 上的采样也就是 $e^{i\omega nL}$ 的叠加,

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[nL]e^{-i\omega nL}$$

这个公式隐含了, 如果 $\omega_1 L$ 与 $\omega_2 L$ 相差 2π , 那么 $X(\omega_1) = X(\omega_2)$, 所以 $X(\omega)$ 是一个周期为 $2\pi/L$ 的周期函数. 有如下的逆变换的公式

$$x[nL] = \frac{L}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{L}} X(\omega)e^{i\omega nL} d\omega$$

现在假设序列也有周期 T , 间隔依旧是 L , 那么我们现在只需要 $N = T/L$ 个自由度就可以描述我的序列. 首先, 因为信号是以 L 为间隔离散的, 所以频率依旧会以 $2\pi/L$ 为周期, 然后因为信号是以 T 为周期的, 所以频率只能是 $\omega_0 = 2\pi/T$ 的整数倍, 也就是以 $2\pi/T$ 为间隔离散, 所以频率也只需要 $(2\pi/L)/(2\pi/T) = T/L = N$ 个自由度就可以描述.

$$X(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nL)e^{-i\frac{2\pi}{N}mn}, \quad x(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X(m)e^{i\frac{2\pi}{N}mn}$$

每个求系数的过程都应该理解为求内积. 每个逆过程就是用这些系数做线性组合.

Chapter 2

对流方程

考虑常系数的对流方程的初值问题

$$u_t = u_x, \quad u(x, 0) = f(x),$$

其中 $f(x)$ 是一个光滑的 2π 周期的周期函数. 所以也可以看作是在有限区间 $[0, 2\pi]$ 上施加了周期性边界条件的初值问题. 学习这门课需要读者对 Fourier 分析有较深的功底, 读者需要知道 Fourier 方法沟通了空间域与频域, 而使用 Fourier 方法去求解偏微分方程相当于将关于函数 $u(x, t)$ 的偏微分方程转化为关于其傅里叶系数 $\hat{u}(k, t)$ 的常微分方程. 这里是有限区间搭配周期性边界条件, 所以应该考虑将 $u(x, t)$ 展开成 Fourier 级数 $u(x, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{u}_k(t) e^{ikx}$. 如果是全空间的初值问题, 应该考虑将 $u(x, t)$ 展开成它的 Fourier 逆变换 $u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(k, t) e^{ikx} dk$. 如果是有限区间搭配 Dirichlet 边界条件, 依旧可以考虑使用 Fourier 方法, 不过不再是标准的 Fourier 级数展开, 而是将 $u(x, t)$ 展开成 Fourier 正弦级数 $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin(\frac{nx}{2})$, 我们更常把这种方法叫做分离变量法.

回到我们考虑的这个情形, 将 $u(x, t)$ 和 $f(x)$ 全部展开为 Fourier 级数

$$u(x, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{u}_k(t) e^{ikx}, \quad f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k e^{ikx}, \quad \hat{f}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx$$

由于 $u(x, 0) = f(x)$, 我们得到每个系数的初始条件 $\hat{u}_k(0) = \hat{f}_k$. 将上述级数展开代入微分方程

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{d\hat{u}_k(t)}{dt} e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (ik) \hat{u}_k(t) e^{ikx}$$

由于 $\{e^{ikx}\}$ 是一组正交基, 我们可以逐项比较系数

$$\frac{d\hat{u}_k(t)}{dt} = ik\hat{u}_k(t), \quad \hat{u}_k(0) = \hat{f}_k \implies \hat{u}_k(t) = \hat{f}_k e^{ikt} \implies u(x, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k e^{ikt} e^{ikx} = f(x+t).$$

张梦萍老师的讲法, 先考虑初值是一个谐波也就是 $f(x) = \hat{f}_k e^{ikx}$ 的情形, 由叠加原理是没有区别的.

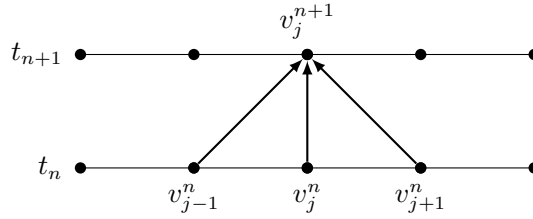
2.1 FTCS 格式

使用前差近似 u_t , 使用中心差近似 u_x , 得到

$$u_t(x_j, t_n) \simeq \frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t}, \quad u_x(x_j, t_n) \simeq \frac{v_{j+1}^n - v_{j-1}^n}{2h},$$

代入对流方程并整理得到

$$u_t = u_x \implies v_j^{n+1} = v_j^n + \frac{\Delta t}{2h}(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n).$$



所以 t_n 层的三个点的值 $v_{j-1}^n, v_j^n, v_{j+1}^n$ 决定 t_{n+1} 层的 v_j^{n+1} 的值. 周期性边界条件使得我们可以只关心有限个点, 但不意味着我们不知道这些点之外的信息, 比如设最左端点是 v_0^n , 最右端点是 v_N^n , 那么计算 v_0^{n+1} 的时候会用到 v_{-1}^n , 这个点的值我们是知道的, 它就是 v_{N-1}^n , 不像后面讲到初边值问题, 搭配 Neumann 边界条件的时候, v_{-1}^{n+1} 这个点的值是不知道的, 需要我们利用边界条件补一个虚拟的 v_{-1}^{n+1} 的点的值出来, 或者用其他方法. t_0 层的初值信息由 $f(x)$ 在格点上的限制得到

$$u(x, 0) = f(x) \implies v_j^0 = f(x_j) =: f_j, \quad j = 0, \dots, J.$$

恭喜, 你已经学会使用 FTCS 格式来求解对流方程了! 我们将花一定时间停留在这个例子上, 展示偏微分方程数值解中的基本概念. 首先在前一页, 我们指出一个周期函数, 可以用它的傅里叶级数来等价描述.

初值是一个谐波

设

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} \implies v_j^0 = f(x_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x_j} =: \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{v}^0(\omega) e^{i\omega x_j}.$$

根据 FTCS 格式计算有

$$\begin{aligned} v_j^1 &= v_j^0 + \frac{\Delta t}{2h} (v_{j+1}^0 - v_{j-1}^0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{v}^0(\omega) \left(e^{i\omega x_j} + \frac{\Delta t}{2h} e^{i\omega x_{j+1}} - \frac{\Delta t}{2h} e^{i\omega x_{j-1}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{v}^0(\omega) e^{i\omega x_j} \left(1 + \frac{\Delta t}{2h} e^{i\omega h} - \frac{\Delta t}{2h} e^{-i\omega h} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{v}^0(\omega) e^{i\omega x_j} (1 + ir \sin \xi) \end{aligned}$$

这里我们使用了记号

$$r := \frac{\Delta t}{h}, \quad \xi := \omega h.$$

根据以上的计算我们可以发现, 如果初值 f 也就是 v^0 是一个频率为 ω 的谐波, 那么根据 FTCS 格式计算出的下一个时间层 v^1 也是一个频率为 ω 的谐波, 并且二者之间的振幅的关系为

$$\hat{v}^1(\omega) = \hat{v}^0(\omega)(1 + ir \sin \xi).$$

容易看出这个计算对任意 n 都对, 所以我们有关系

$$\hat{v}^{n+1}(\omega) = \hat{Q} \hat{v}^n(\omega) = \dots = \hat{Q}^{n+1} \hat{v}^0(\omega), \quad \hat{Q} := 1 + ir \sin \xi.$$

称复数 \hat{Q} 为算子 Q 的符号, 也称为格式 FTCS 的放大因子. 差分方程的解即为

$$v_j^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{v}^n(\omega) e^{i\omega x_j} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (1 + i \frac{\Delta t}{h} \sin(\omega h))^n \hat{f}(\omega) e^{i\omega x_j}.$$

前面的经验告诉我们解析解是

$$u_j^n = u(x_j, t_n) = f(x_j + t_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x_j} e^{i\omega t_n}.$$

我们自然要研究当 Δt 和 h 趋于 0 时数值解 v_j^n 是否会收敛到解析解 u_j^n .

$$\begin{aligned} (1 + i \frac{\Delta t}{h} \sin(\omega h))^n &= (1 + i \frac{\Delta t}{h} \omega h + i \frac{\Delta t}{h} O(\omega^3 h^3))^n = (e^{i\omega \Delta t} + O(\omega^2 \Delta t^2 + \omega^3 \Delta t h^2))^n \\ &= e^{i\omega t_n} (1 + O(\omega^2 \Delta t^2 + \omega^3 \Delta t h^2))^n = e^{i\omega t_n} (1 + n O(\omega^2 \Delta t^2 + \omega^3 \Delta t h^2)) = e^{i\omega t_n} (1 + t_n O(\omega^2 \Delta t + \omega^3 h^2)) \end{aligned}$$

小扰动

给定时间区间 $[0, T]$, 给定空间区间 $[0, 2\pi]$, 将时间划分为 $J+1$ 份, 将空间划分为 $N+1$ 份, 我们考虑这样一个小扰动

$$\hat{f}(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \neq \frac{N}{4} \\ \varepsilon, & \omega = \frac{N}{4} \end{cases}$$

则由前面的计算知道

$$\hat{v}^{J+1}(\frac{N}{4}) = \hat{Q}^{J+1} \hat{f}(\frac{N}{4}) = \varepsilon \left(1 + i \frac{T}{J+1} \frac{N+1}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi}{N+1} \frac{N}{4}\right) \right)^{J+1} \sim \varepsilon \left(1 + i \frac{T}{J+1} \frac{N+1}{2\pi} \right)^{J+1}$$

用我们更熟悉的 Δt 和 h 的记号来写就是

$$|\hat{v}^{J+1}(\frac{N}{4})|^2 \sim \varepsilon^2 |1 + i \frac{\Delta t}{h}|^{2 \frac{T}{\Delta t}} = \varepsilon^2 (1 + \frac{\Delta t^2}{h^2})^{\frac{T}{\Delta t}}$$

当 Δt 和 h 趋于零, 且二者的比值为定值时, 上式发散.

稳定性

在实际计算中, 误差是不可避免的.

定义 2.1.1. 考虑一种差分格式, 如果存在依赖于 T 的常数 $K(T)$ 使得

$$\lim_{\Delta t, h \rightarrow 0} \sup_{0 \leq t_n \leq T} |\hat{Q}^n| \leq K(T)$$

则称该方法是无条件稳定的.

从上面的例子可以看到 FTCS 格式不是无条件稳定的. 可以选择特定的收敛方式如 $\Delta t = ch^2$ 其中 $c > 0$ 是常数, 此时

$$|\hat{Q}^n|^2 = (1 + \frac{\Delta t^2}{h^2} \sin^2 \omega h)^n \leq (1 + c\Delta t)^n \leq e^{cn\Delta t} = e^{cT}$$

但这种方法并不实用, 因为一方面 Δt 是 h 的二阶小量, 导致时间步长太多, 需要的计算量大; 另一方面增长因子为指数级, 在 T 较大时也会放大一些小的扰动.

2.2 人工黏性

物理上的黏性, 也就是耗散性, 对应于数学上的偶数阶导数, 奇数阶导数对应于物理上的色散.

$$u_t = u_x + \sigma h u_{xx}$$

当 $h \rightarrow 0$ 时, 上述方程趋近于 $u_t = u_x$. 对 u_{xx} 用两个一阶的差分算子去近似

$$\begin{aligned} \frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} &= \frac{v_{j+1}^n - v_{j-1}^n}{2h} + \sigma h \frac{v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n}{h^2} = D_0 v_j^n + \sigma h D_+ D_- v_j^n \\ v_j^{n+1} &= v_j^n + \frac{\Delta t}{2h} (v_{j+1}^n - v_{j-1}^n) + \sigma \frac{\Delta t}{h} (v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n) = (1 + \Delta t D_0 + \sigma h \Delta t D_+ D_-) v_j^n \end{aligned}$$

初值是一个谐波

前半部分的计算在此前已经熟悉, 只需要类似计算后半部分

$$\begin{aligned} v_{j+1}^0 - 2v_j^0 + v_{j-1}^0 &= v_j^0 (e^{i\omega h} - 2 + e^{-i\omega h}) = v_j^0 (\cos \omega h + i \sin \omega h + \cos \omega h - i \sin \omega h - 2) = -4v_j^0 \sin^2 \frac{\omega h}{2} \\ v_j^1 &= v_j^0 \left(1 + ir \sin \xi - 4\sigma r \sin^2 \frac{\xi}{2} \right) \implies \hat{v}^{n+1} = \hat{Q} \hat{v}^n, \hat{Q} = 1 + ir \sin \xi - 4\sigma r \sin^2 \frac{\xi}{2}, r = \frac{\Delta t}{h}, \xi = \omega h \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\hat{Q}|^2 &= (1 - 4\sigma r \sin^2 \frac{\xi}{2})^2 + r^2 \sin^2 \xi \\ &= 1 - 8\sigma r \sin^2 \frac{\xi}{2} + 16\sigma^2 r^2 \sin^4 \frac{\xi}{2} + r^2 \sin^2 \xi \\ &= 1 - 8\sigma r \sin^2 \frac{\xi}{2} + 16\sigma^2 r^2 \sin^4 \frac{\xi}{2} + 4r^2 \sin^2 \frac{\xi}{2} (1 - \sin^2 \frac{\xi}{2}) \\ &= (16\sigma^2 r^2 - 4r^2) \sin^4 \frac{\xi}{2} + (4r^2 - 8\sigma r) \sin^2 \frac{\xi}{2} + 1 \\ |\hat{Q}|^2 - 1 &= (16\sigma^2 r^2 - 4r^2) \sin^4 \frac{\xi}{2} + (4r^2 - 8\sigma r) \sin^2 \frac{\xi}{2} \\ &= 4r \sin^2 \frac{\xi}{2} [(4\sigma^2 r - r) \sin^2 \frac{\xi}{2} + r - 2\sigma] \end{aligned}$$

如果我们要求 $|\hat{Q}|^2 - 1 \leq 0$, 即要求

$$(4\sigma^2 r - r) \sin^2 \frac{\xi}{2} + r - 2\sigma \leq 0$$

将上式看作关于 $\sin^2 \frac{\xi}{2} \in [0, 1]$ 的一次函数, 只需要对端点处的值加以限制, 等价于

$$r - 2\sigma \leq 0, \quad 4\sigma^2 r - 2\sigma \leq 0$$

所以我们得到

$$|\hat{Q}|^2 - 1 \leq 0 \iff r \leq 2\sigma, \quad 2\sigma r \leq 1.$$

下面我们讨论两种特殊情况

- 若 $2\sigma \leq 1$ 即要求 $16\sigma^2 \leq 4$, 则当 $4r^2 - 8\sigma r \leq 0$ 即 $r \leq 2\sigma$ 时, $|\hat{Q}|^2 \leq 1$ 成立.
- 若 $2\sigma \geq 1$, 将 $\sin^4 \frac{\xi}{2}$ 放缩成为 $\sin^2 \frac{\xi}{2}$ 得到此时 $|\hat{Q}|^2 \leq 1$ 的一个充分条件是 $2\sigma r \leq 1$.

Lax-Friedrich 格式

取

$$\sigma = \frac{h}{2\Delta t} = \frac{1}{2r}, \quad r = \frac{\Delta t}{h}$$

此时

$$v_j^{n+1} = v_j^n + \frac{\Delta t}{2h}(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n) + \frac{1}{2}(v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n) = \frac{1}{2}(v_{j+1}^n + v_{j-1}^n) + \frac{\Delta t}{2h}(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n)$$

与原有的 FTCS 格式

$$v_j^{n+1} = v_j^n + \frac{\Delta t}{2h}(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n)$$

比较, 相当于用 v_j^n 相邻两点的平均值来替代 v_j^n . 由前面的讨论知 Lax-Friedrich 格式无条件稳定.

Lax-Wendroff 格式

取

$$\sigma = \frac{r}{2} = \frac{\Delta t}{2h}$$

此时

$$v_j^{n+1} = v_j^n + \Delta t D_0 v_j^n + \frac{\Delta t^2}{2} D_+ D_- v_j^n.$$

我们还有另一种观点来理解 Lax-Wendroff 格式, 考虑泰勒展开

$$u(x, t + \Delta t) = u(x, t) + \Delta t u_t(x, t) + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt}(x, t) + \cdots$$

根据方程 $u_t = u_x$ 将对时间的导数转换为对空间的导数, 得到

$$u(x, t + \Delta t) = u(x, t) + \Delta t u_x(x, t) + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{xx}(x, t) + \cdots$$

使用差分对导数进行近似, 我们得到

$$v_j^{n+1} = v_j^n + \Delta t D_0 v_j^n + \frac{\Delta t^2}{2} D_+ D_- v_j^n.$$

2.3 单步格式的收敛定理

考虑一般的差分近似

$$v_j^{n+1} = Qv_j^n, \quad Q = \sum_{\mu=-r}^s A_\mu(\Delta t, h)E^\mu, \quad v_j^0 = f_j$$

其中 A_μ 是 $\Delta t, h$ 的有理函数, r, s 是大于零的整数, 即我们使用 $s+r+1$ 个值 $v_{j-r}^n, \dots, v_{j+s}^n$ 来计算 v_j^{n+1} . 依旧考虑谐波解, 注意到 $Ee^{i\omega x} = e^{i\omega h}e^{i\omega x}$, 我们得到

$$\hat{v}^{n+1}(\omega) = \hat{Q}\hat{v}^n(\omega), \quad \hat{Q} = \sum_{\mu=-r}^s A_\mu e^{i\mu\omega h},$$

我们假定初值 $f(x)$ 可以被展开为傅里叶级数且 $f \in L^2$, 即

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega x}, \quad \sum_{\omega} |\hat{f}(\omega)|^2 < \infty.$$

为了差分近似我们需要使用 $f(x)$ 在格点上的限制. 记格点函数的三角函数插值为

$$Int_N f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\omega=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \tilde{f}(\omega)e^{i\omega x},$$

我们额外假定

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|Int_N f - f\| = 0.$$

定理 2.3.1. 在有限时间区域 $0 \leq t \leq T$, 考虑 $\Delta t, h \rightarrow 0$ 时, 差分近似:

假设:

- (a) 初值 f 是 (分片连续) 可展开为 *Fourier* 级数 ($f \in L^2$) 且其三角插值收敛于 f .
- (b) 差分近似是稳定的, 即存在常数 K_s , 使得对于所有的 Δt 和 h 有:

$$\sup_{0 \leq t_n \leq T} |Q^n| \leq K_s$$

- (c) 差分近似是相容的, 即对于每个固定的 ω , 有:

$$\lim_{\Delta t, h \rightarrow 0} \sup_{\xi} |\hat{Q}^n(\xi) - e^{-i\omega t_n}| = 0$$

则: 差分近似解的三角插值收敛于微分方程的解, 即:

$$\lim_{\Delta t, h \rightarrow 0} \sup_{0 \leq t_n \leq T} \|u(\cdot, t_n) - \psi_N(\cdot, t_n)\| = 0$$

其中 $u(\cdot, t_n)$ 的表达式为:

$$u(\cdot, t_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} e^{i\omega x_j + t_n \hat{v}_n(\omega)} f(\omega)$$

差分近似解的三角插值为:

$$\psi_N = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\omega=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} e^{i\omega x_j} \hat{v}_n(\omega) f(\omega)$$

证明.

□

证明：设：

$$\sum_{\omega=-\infty}^{\infty} |f(\omega)|^2 = \|f\|^2$$

取常数 M , 使得 $0 < M < \frac{N}{2}$, 则证明过程可以从这里展开.

2.4 CTCS 格式

使用中心差近似 u_t , 使用中心差近似 u_x , 得到

$$u_t(x_j, t_n) \simeq \frac{v_j^{n+1} - v_j^{n-1}}{2\Delta t}, \quad u_x(x_j, t_n) \simeq \frac{v_{j+1}^n - v_{j-1}^n}{2h} = D_0 v_j^n$$

代入对流方程并整理得到

$$u_t = u_x \implies v_j^{n+1} = v_j^{n-1} + \frac{\Delta t}{h}(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n) = v_j^{n-1} + r(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n)$$

初值是一个谐波

$$\hat{v}^{n+1}(\omega) = \hat{v}^{n-1}(\omega) + 2ir \sin \xi \hat{v}^n(\omega)$$

这是一个数列的递推公式, 出现了相邻的三项, 系数均为与 n 无关的常数. 考虑特征方程

$$z^2 - 2ir \sin \xi z - 1 = 0$$

当 $0 < r < 1$ 时, 有两个不同的解

$$z_1 = ir \sin \xi + \sqrt{1 - r^2 \sin^2 \xi}, \quad z_2 = ir \sin \xi - \sqrt{1 - r^2 \sin^2 \xi}$$

由特征方程的理论知

$$\hat{v}^n(\omega) = \sigma_1 z_1^n + \sigma_2 z_2^n$$

其中 σ_1, σ_2 是与 n 无关的常数, 代入 $n = 0, 1$ 的初值条件来得到. 但我们发现我们只知道

$$\hat{v}^0(\omega) = \hat{f}(\omega)$$

而 $\hat{v}^1(\omega)$ 的值不能由 CTCS 的递推关系得到. 实践中我们通过单步格式如 FTCS 来得到 $\hat{v}^1(\omega)$ 的值

$$\hat{v}^1(\omega) = (1 + ir \sin \xi) \hat{f}(\omega)$$

这样我们就得到了关于 σ_1, σ_2 的线性方程组

$$\begin{cases} \sigma_1 + \sigma_2 = \hat{f}(\omega) \\ \sigma_1 z_1 + \sigma_2 z_2 = (1 + ir \sin \xi) \hat{f}(\omega) \end{cases}$$

将 $r = \Delta t/h$ 取为常值, 当 $\xi = \omega h \ll 1$ 的时候

$$ir \sin \xi = ir\xi + irO(\xi^3) = i\omega\Delta t + O(\omega^3\Delta t^3).$$

$$\sqrt{1 - r^2 \sin^2 \xi} = 1 - \frac{1}{2}r^2 \sin^2 \xi + O(r^4 \sin^4 \xi) = 1 - \frac{1}{2}r^2(\xi^2 + O(\xi^4)) + O(r^4 \xi^4)$$

$$z_1 = 1 + i\omega\Delta t - \frac{1}{2}\omega^2\Delta t^2 + O(\omega^3\Delta t^3) = e^{i\omega\Delta t(1+O(\omega^2\Delta t^2))}, \quad z_2 = -e^{-i\omega\Delta t(1+O(\omega^2\Delta t^2))}$$

在不近似的情况下直接解线性方程组, 得到

$$\begin{cases} \sigma_1 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{1 - r^2 \sin^2 \xi}} \right) \hat{f}(\omega) \\ \sigma_2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{1 - r^2 \sin^2 \xi}} \right) \hat{f}(\omega) \end{cases}$$

所以只需要估计

$$\frac{1}{\sqrt{1-r^2 \sin^2 \xi}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} r^2 \sin^2 \xi + O(r^4 \sin^4 \xi)} = 1 + \frac{1}{2} r^2 \sin^2 \xi + O(r^4 \sin^4 \xi)$$

$$\sigma_1 = (1 + \frac{1}{4} r^2 \xi^2 + O(r^2 \xi^4)) \hat{f}(\omega) = (1 + \frac{1}{4} \omega^2 \Delta t^2 + O(\omega^4 \Delta t^4)) \hat{f}(\omega), \quad \sigma_2 = (-\frac{1}{4} \omega^2 \Delta t^2 + O(\omega^4 \Delta t^4)) \hat{f}(\omega)$$

这样一来

$$\hat{v}^n(\omega) = \hat{f}(\omega)(1 + O(\omega^2 \Delta t^2)) e^{i\omega t_n(1+O(\omega^2 \Delta t^2))} + (-1)^n \hat{f}(\omega) O(\omega^2 \Delta t^2) e^{-i\omega t_n(1+O(\omega^2 \Delta t^2))}$$

可以看到前半部分当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时收敛于准确解 $\hat{u}^n(\omega) = \hat{f}(\omega) e^{i\omega t_n}$, 后半部分是模长不依赖于 t_n 且随着 Δt 的减小而减小的振荡, 我们称这部分为寄生解.

2.5 带源项的 PDE 初值问题

$$\begin{cases} u_t = u_x - au, & a > 0 \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}$$

频率为 ω 的谐波解对应的准确解为

$$u = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{f}(\omega) e^{i\omega(x+t)-at}.$$

还是考虑 CTCS 格式

$$v_j^{n+1} = v_j^{n-1} + 2\Delta t D_0 v_j^n - 2\Delta t a v_j^n, \quad \hat{v}^{n+1}(\omega) = \hat{v}^{n-1}(\omega) + 2ir \sin \xi \hat{v}^n(\omega) - 2\Delta t a \hat{v}^n(\omega)$$

相应的特征方程为

$$z^2 - (2ir \sin \xi - 2\Delta t a)z - 1 = 0$$

解得

$$z_1 = ir \sin \xi - \Delta t a + \sqrt{(ir \sin \xi - \Delta t a)^2 + 1}, \quad z_2 = ir \sin \xi - \Delta t a - \sqrt{(ir \sin \xi - \Delta t a)^2 + 1}$$

下面考虑 $\omega = 0$ 的情况, 此时 $\xi = 0$. 并且我们要求 $\Delta t a$ 是一个小量

$$z_1 = -\Delta t a + \sqrt{(\Delta t a)^2 + 1} = -\Delta t a + 1 + \frac{1}{2} \Delta t^2 a^2 + O(\Delta t^4 a^4), \quad z_2 = -\Delta t a - 1 - \frac{1}{2} \Delta t^2 a^2 + O(\Delta t^4 a^4)$$

此时 σ_1, σ_2 需要满足的条件为

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \hat{f}(0), \quad \sigma_1 z_1 + \sigma_2 z_2 = (1 - \Delta t a) \hat{f}(0)$$

解并估计得到

$$\sigma_1 = \frac{z_2 \hat{f}(0) + (\Delta t a - 1) \hat{f}(0)}{z_2 - z_1} \sim 1 + O(\Delta t^2 a^2), \quad \sigma_2 = \frac{(1 - \Delta t a) \hat{f}(0) - z_1 \hat{f}(0)}{z_2 - z_1} \sim O(\Delta t^2 a^2).$$

所以

$$\hat{v}^n(0) = \sigma_1 z_1^n + \sigma_2 z_2^n = \hat{f}(0)(1 + O(\Delta t^2 a^2)) e^{-at_n(1+O(\Delta t^2 a^2))} + \hat{f}(0) O(\Delta t^2 a^2) (-1)^n e^{at_n(1+O(\Delta t^2 a^2))}$$

观察到 $a > 0$ 时寄生解随时间指数级增加. 我们对 CTCS 格式做一个改进

$$v_j^{n+1} = v_j^{n-1} + 2\Delta t D_0 v_j^n - \Delta t a (v_j^{n+1} + v_j^{n-1})$$

这时特征方程变为

$$(1 + \Delta t a) z^2 - 2ir \sin \xi z + \Delta t a - 1 = 0$$

2.6 迎风格式与 CFL 条件

考虑对流方程

$$u_t + au_x = 0,$$

我们知道它的特征线为

$$x - at = \text{const}$$

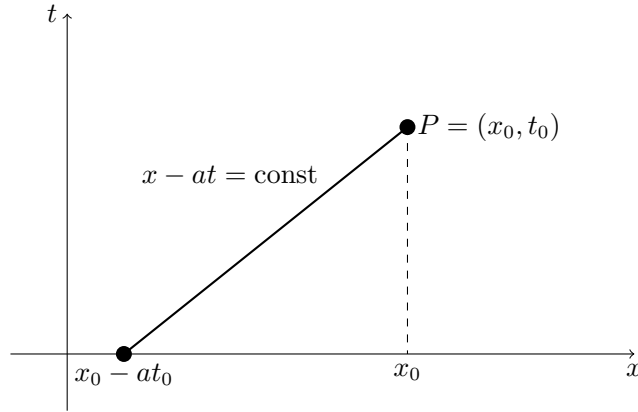
我们知道

$$u(x, t) = f(x - at) = u(x - at, 0)$$

也就是说解在 t_0 时刻在 x_0 处的值可以有初始时刻在 $x_0 - at_0$ 处的值决定. 我们称集合

$$D_P := \{x_0 - at_0\}$$

为点 $P = (x_0, t_0)$ 的依赖区域. 本例中依赖区域仅为一个点, 在其他方程中可以看到更复杂的情形.



对于差分方程同样能够讨论依赖区域这个概念, 回忆 FTFS 格式的递推公式

$$v_j^{n+1} = v_j^n - ar(v_{j+1}^n - v_j^n)$$

可以看到点 $P = (x_j, t_n)$ 的数值依赖区域是

$$N_P := \{x_j^0, x_{j+1}^0, \dots, x_{j+n+1}^0\}$$

可以总结出, D_P 在点的左侧还是右侧由 a 的正负决定, N_P 在点的左侧还是右侧由格式是 FS 还是 BS 还是 CS 决定. 一个非常自然的感觉是, 如果一个点的值理论上该由它左侧的值决定, 但我们却选了一个 N_P 在它的右边的格式, 那这个结果不可能好. 我们称

$$D_P \subset N_P$$

为 CFL 条件, 我们认为这是一个格式收敛或稳定的必要条件. 在 $u_t + au_x = 0$ 的例子中我们称 D_P 与 N_P 在点同一侧的格式为迎风格式. $a > 0$ 时迎风格式为 FTBS 格式, $a < 0$ 时迎风格式为 FTFS 格式. 相应的可以定义逆风格式. 要满足 CFL 条件首先要选择迎风格式而不是逆风格式, 其次, 我们以 $a < 0$ 为例, $D_P \subset N_P$ 等价于

$$x_0 - at_n \leq x_0 + n\Delta x \iff 0 < -ar \leq 1$$

这是 FTBS 格式的条件. 相应 FTFS 格式的条件为 $0 < ar \leq 1$.

需要强调的是 CFL 条件仅仅为一个格式收敛或稳定的必要条件, 一个反例是 FTCS 格式与蛙跳格式也就是 CTCS 格式有相同的 CFL 条件, 但 FTCS 格式不稳定而蛙跳格式稳定.

2.7 BTCS 格式

使用后差近似 u_t , 使用中心差近似 u_x , 得到

$$u_t(x_j, t_n) \simeq \frac{v_j^n - v_j^{n-1}}{\Delta t}, \quad u_x(x_j, t_n) \simeq \frac{v_{j+1}^n - v_{j-1}^n}{2h}$$

代入对流方程并整理得到

$$u_t = u_x \implies v_j^n = v_j^{n-1} + \frac{\Delta t}{2h}(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n)$$

我们习惯已知层用 n , 未知层用 $n+1$, 所以改写一下得到

$$v_j^{n+1} = v_j^n + \frac{\Delta t}{2h}(v_{j+1}^{n+1} - v_{j-1}^{n+1})$$

这是一个隐式格式而不是显式格式, 类似于 $y = f(x)$ 与 $g(x, y) = 0$ 所确定的函数关系的区别.

$$-\frac{\Delta t}{2h}v_{j+1}^{n+1} + v_j^{n+1} + \frac{\Delta t}{2h}v_{j-1}^{n+1} = v_j^n$$

每两层之间的求解是一个线性方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{\Delta t}{2h} & 0 & \cdots & 0 & \frac{\Delta t}{2h} \\ \frac{\Delta t}{2h} & 1 & -\frac{\Delta t}{2h} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{\Delta t}{2h} & 1 & -\frac{\Delta t}{2h} \\ -\frac{\Delta t}{2h} & 0 & \cdots & 0 & \frac{\Delta t}{2h} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0^{n+1} \\ v_1^{n+1} \\ \vdots \\ v_N^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0^n \\ v_1^n \\ \vdots \\ v_N^n \end{pmatrix}$$

下面我们来计算放大因子

$$\hat{v}^{n+1}(\omega) = \hat{v}^n(\omega) + \frac{\Delta t}{2h}(e^{i\omega h} - e^{-i\omega h})\hat{v}^{n+1}(\omega) \implies \hat{v}^{n+1}(\omega) = \frac{1}{1 - ir \sin \xi} \hat{v}^n(\omega)$$

$$\hat{Q} = \frac{1}{1 - ir \sin \xi} \implies |\hat{Q}|^2 = \frac{1}{1 + r^2 \sin^2 \xi} \leq 1$$

所以 BTCS 格式是无条件稳定的.

Crank-Nicolson 格式

思想是将方程分成两部分, 每部分用不同的格式来近似, 这里我们一半用 FTCS 一半用 BTCS

$$\begin{aligned} \frac{v_j^n - v_j^{n-1}}{\Delta t} &\simeq u_t = u_x = \frac{1}{2}u_x + \frac{1}{2}u_x \simeq \frac{1}{2}\frac{v_{j+1}^n - v_{j-1}^n}{2h} + \frac{1}{2}\frac{v_{j+1}^{n+1} - v_{j-1}^{n+1}}{2h} \\ \implies (I - \frac{\Delta t}{2}D_0)v_j^{n+1} &= (I + \frac{\Delta t}{2}D_0)v_j^n \implies \hat{Q} = \frac{2 + ir \sin \xi}{2 - ir \sin \xi}, \quad |\hat{Q}| = 1 \end{aligned}$$

该格式也是无条件稳定的, 且对所有的频率 ω , 放大因子 \hat{Q} 的模长不变.

θ -方法

Crank-Nicolson 格式的直接推广, 将系数 $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{2}$ 替换为 $1 - \theta$ 和 θ , 其中 $0 \leq \theta \leq 1$.

$$\begin{aligned}
 (I - \theta \Delta t D_0) v_j^{n+1} &= (I + (1 - \theta) \Delta t D_0) v_j^n, \quad \hat{Q} = \frac{1 + ir(1 - \theta) \sin \xi}{1 - ir\theta \sin \xi} \\
 \hat{Q} &= \frac{1 + ir(1 - \theta) \sin \xi}{1 - ir\theta \sin \xi} = \frac{(1 + ir(1 - \theta) \sin \xi)(1 + ir\theta \sin \xi)}{1 + r^2 \theta^2 \sin^2 \xi} = \frac{1 - r^2 \theta(1 - \theta) \sin^2 \xi + ir \sin \xi}{1 + r^2 \theta^2 \sin^2 \xi} \\
 |\hat{Q}|^2 &= \frac{(1 - r^2 \theta(1 - \theta) \sin^2 \xi)^2 + r^2 \sin^2 \xi}{1 + 2r^2 \theta^2 \sin^2 \xi + r^4 \theta^4 \sin^4 \xi} = \frac{1 - 2r^2 \theta(1 - \theta) \sin^2 \xi + r^4 \theta^2(1 - \theta)^2 \sin^4 \xi + r^2 \sin^2 \xi}{1 + 2r^2 \theta^2 \sin^2 \xi + r^4 \theta^4 \sin^4 \xi} \\
 |\hat{Q}|^2 - 1 &= \frac{-2r^2 \theta \sin^2 \xi + r^4 \theta^2 \sin^4 \xi - 2r^4 \theta^3 \sin^4 \xi + r^2 \sin^2 \xi}{1 + 2r^2 \theta^2 \sin^2 \xi + r^4 \theta^4 \sin^4 \xi} \\
 |\hat{Q}|^2 - 1 &= \frac{r^2 \sin^2 \xi}{(1 + r^2 \theta^2 \sin^2 \xi)^2} (-2\theta + r^2 \theta^2 \sin^2 \xi - 2r^2 \theta^3 \sin^2 \xi + 1) \\
 |\hat{Q}|^2 - 1 &= \frac{r^2 \sin^2 \xi}{(1 + r^2 \theta^2 \sin^2 \xi)^2} (1 - 2\theta)(1 + r^2 \theta^2 \sin^2 \xi)
 \end{aligned}$$

当 $\theta \geq \frac{1}{2}$, 即隐式格式占据优势时, 格式为无条件稳定的.

2.8 截断误差

以 FTCS 格式为例, 此时截断误差为

$$T(x_j, t_n) = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} - (u_t(x_j, t_n) - u_x(x_j, t_n)) = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h}$$

泰勒展开, 有

$$u_j^{n+1} = u(x_j, t_{n+1}) = u(x_j, t_n) + u_t(x_j, t_n)\Delta t + \frac{1}{2}u_{tt}(x_j, t_n)\Delta t^2$$

$$u_{j+1}^n = u(x_{j+1}, t_n) = u(x_j, t_n) + u_x(x_j, t_n)h + \frac{1}{2}u_{xx}(x_j, t_n)h^2 + \frac{1}{6}u_{xxx}(x_j + \eta h, t_n)h^3$$

$$u_{j-1}^n = u(x_{j-1}, t_n) = u(x_j, t_n) - u_x(x_j, t_n)h + \frac{1}{2}u_{xx}(x_j, t_n)h^2 - \frac{1}{6}u_{xxx}(x_j + \xi h, t_n)h^3$$

代入得

$$T(x_j, t_n) = u_t(x_j, t_n) + O(\Delta t) - u_x(x_j, t_n) + O(h^2) = O(\Delta t + h^2)$$

定义 2.8.1. 若 $T_j^n = O(h^p + (\Delta t)^q)$, 则称该方法为对空间 p 阶、对时间 q 阶精度.

定义 2.8.2. 若 $p > 0$ 且 $q > 0$, 则称该格式是相容的.

再以加黏性项修正的 FTCS 格式为例, 此时

$$T_j^n = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} - \sigma h \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2}$$

$$u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n = h^2 u_{xx}(x_j, t_n) + \frac{h^4}{12} u_{xxxx}(x_j, t_n) + O(h^6)$$

$$u_{j+1}^n - u_{j-1}^n = 2h u_x(x_j, t_n) + \frac{h^3}{3} u_{xxx}(x_j, t_n) + O(h^5)$$

$$u_j^{n+1} - u_j^n = \Delta t u_t(x_j, t_n) + \frac{1}{2}(\Delta t)^2 u_{tt}(x_j, t_n) + O((\Delta t)^3)$$

$$T_j^n = \frac{1}{2}\Delta t u_{tt}(x_j, t_n) + O((\Delta t)^2) - \frac{h^2}{6} u_{xxx}(x_j, t_n) + O(h^4) - \sigma h u_{xx}(x_j, t_n) - \frac{\sigma h^3}{12} u_{xxxx}(x_j, t_n) + O(h^5)$$

$$T_j^n = \frac{1}{2}\Delta t u_{tt}(x_j, t_n) - \sigma h u_{xx}(x_j, t_n) + O(h^2 + (\Delta t)^2)$$

因为

$$u_t = u_x \implies u_{tt} = u_{xt} = u_{xx}$$

所以如果 $2\sigma h = \Delta t$, 则 $T_j^n = O(h^2 + (\Delta t)^2)$, 否则 $T_j^n = O(h + \Delta t)$.

再以 FTFS 格式为例, 此时截断误差为

$$T_j^n = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} = \frac{1}{2}u_{tt}(x_j, t_n)\Delta t + O((\Delta t)^2) - \frac{1}{2}u_{xx}(x_j, t_n)h + O(h^2)$$

所以如果 $\Delta t = h$, 则 $T_j^n = O(h^2 + (\Delta t)^2)$, 否则 $T_j^n = O(h + \Delta t)$.

2.9 整体误差

定义整体误差

$$e_j^n := v_j^n - u_j^n$$

为近似值与真值之间的差. 以 FTFS 格式为例

$$v_j^{n+1} = v_j^n + \frac{\Delta t}{h}(v_{j+1}^n - v_j^n), \quad u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{\Delta t}{h}(u_{j+1}^n - u_j^n) + \Delta t T_j^n.$$

两式做差得到

$$e_j^{n+1} = e_j^n + \frac{\Delta t}{h}(e_{j+1}^n - e_j^n) - \Delta t T_j^n = r e_{j+1}^n + (1-r)e_j^n - \Delta t T_j^n, \quad e_j^0 = 0.$$

取 $E^n = \max_j |e_j^n|$, $\bar{T} = \max_{j,n} |T_j^n|$, 讨论当 $0 < r \leq 1$ 时的情况,

$$|e_j^{n+1}| \leq (1-r)E^n + rE^{n+1} + \Delta t \bar{T} = E^n + \Delta t \bar{T} \implies E^{n+1} \leq E^n + \Delta t \bar{T}.$$

递归使用上式, 得到

$$E^{n+1} \leq E^n + \Delta t \bar{T} \leq E^{n-1} + 2\Delta t \bar{T} \leq \cdots \leq E^0 + (n+1)\Delta t \bar{T} = (n+1)\Delta t \bar{T}.$$

2.10 基于 PDE 的积分形式的有限差分格式的构造

用节点

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{J-1} < x_J = 1$$

将 $[0, 1]$ 均匀分成 J 个小区域, 用节点

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{N-1} < t_N = T$$

将 $[0, T]$ 均匀分成 N 个小区域.

取控制体 $\Omega_j^n = [t_n, t_{n+1}] \times [x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}]$

在 Ω_j^n 上对函数 $u_t + au_x$ 进行积分, 得到

$$\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} u^{n+1}(x) - u^n(x) dx + a \int_{t_n}^{t_{n+1}} u_{j+\frac{1}{2}}(t) - u_{j-\frac{1}{2}}(t) dt = 0$$

到此是精确成立的. 用不同的数值积分公式对上述方程中的积分做近似, 得到不同的有限差分格式. 对于第一个积分, 因为积分区间中有一个整节点, 所以用中点公式

$$\int_{x_{-1}}^{x_1} f(x) dx = \Delta x \cdot f(x_0) + \frac{(\Delta x)^3}{24} f''(\xi), \quad x_0 = \frac{x_{-1} + x_1}{2}, \xi \in (x_{-1}, x_1)$$

应用到我们这个具体的式子上就是

$$\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} u^{n+1}(x) - u^n(x) dx = h(u_j^{n+1} - u_j^n) + \frac{h^3}{24}(u_{xx}^{n+1} - u_{xx}^n)(\xi), \quad \xi \in (x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}})$$

对于第二个积分, 如果希望最后是显式, 就要只包含一个与时间相关的端点, 所以我们使用

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)f(a) + \frac{1}{4}(b-a)^2 f'(\xi), \quad \xi \in (a, b)$$

应用到我们这个具体的式子上就是

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} (u_{j+\frac{1}{2}}(t) - u_{j-\frac{1}{2}}(t)) dt = \Delta t(u_{j+\frac{1}{2}}^n - u_{j-\frac{1}{2}}^n) + \frac{1}{4}\Delta t^2(u_{j+\frac{1}{2}} - u_{j-\frac{1}{2}})_t(\eta), \quad \eta \in (t_n, t_{n+1})$$

将两个式子合并到一起, 整理得到

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{a}{h}(u_{j+\frac{1}{2}}^n - u_{j-\frac{1}{2}}^n) + \frac{a\Delta t}{4h}(u_{j+\frac{1}{2}} - u_{j-\frac{1}{2}})_t(\eta) + \frac{h^2}{24\Delta t}(u_{xx}^{n+1} - u_{xx}^n)(\xi) = 0$$

上式中还是出现了函数 u 在半格点处的值, 因为我们希望将整格点处的值作为需要求解的量, 所以

$$\begin{aligned} u_j^n &= u_{j+\frac{1}{2}}^n - \frac{h}{2}u_x^n(x_{j+\frac{1}{2}}) + \frac{h^2}{8}u_{xx}^n(x_{j+\frac{1}{2}}) - \frac{h^3}{48}u_{xxx}^n(x_{j+\frac{1}{2}}) + O(h^4), \\ u_{j+1}^n &= u_{j+\frac{1}{2}}^n + \frac{h}{2}u_x^n(x_{j+\frac{1}{2}}) + \frac{h^2}{8}u_{xx}^n(x_{j+\frac{1}{2}}) + \frac{h^3}{48}u_{xxx}^n(x_{j+\frac{1}{2}}) + O(h^4), \\ u_{j+\frac{1}{2}}^n &= \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_j^n) - \frac{h^2}{4}u_{xx}^n(x_{j+\frac{1}{2}}) + O(h^4), \quad u_{j-\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2}(u_j^n + u_{j-1}^n) - \frac{h^2}{4}u_{xx}^n(x_{j-\frac{1}{2}}) + O(h^4) \\ u_{j+\frac{1}{2}}^n - u_{j-\frac{1}{2}}^n &= \frac{1}{2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) - \frac{h^2}{4}u_{xx}^n(x_{j+\frac{1}{2}}) + \frac{h^2}{4}u_{xx}^n(x_{j-\frac{1}{2}}) + O(h^4) = \frac{1}{2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + O(h^3) \end{aligned}$$

代入得

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{a}{2h}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + O(h^2) + O(\Delta t) + O(h^2) = 0$$

所以我们得到差分方程

$$\frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} + \frac{a}{2h}(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n) = 0$$

这其实就是 FTCS 格式, 从上面的推导也可以看出该格式的截断误差为 $O(h^2 + \Delta t)$ 阶的.

取时空区域 $\Omega_j^n = [t_{n-1}, t_{n+1}] \times [x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}]$ 为控制区域

$$\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} (u^{n+1} - u^{n-1}) dx$$

2.11 变系数对流方程

$$u_t + a(x, t)u_x = 0$$

$$\frac{dt}{dx} = a(x, t) \implies \frac{d}{dt}u(x(t), t) = 0.$$

Chapter 3

扩散方程

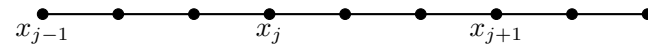
3.1 常系数扩散方程初值问题

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & -\infty < x < \infty \end{cases}$$

3.2 待定系数法构造高阶逼近

均匀网格

非均匀网格



3.3 变系数扩散方程

3.3.1 非守恒型扩散方程

FTCS 格式

$$v_j^{n+1} = (I + b_j^n \Delta t D_+ D_-) v_j^n = v_j^n + b_j^n (v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n)$$

算放大因子

算截断误差

$$T_j^n = O(h^2 + \Delta t)$$

算整体误差

假设 $B = \max_{j,n} b_j^n, \bar{T} = \max_{j,n} T_j^n, E^n = \max_j |e_j^n|$

$$E^{n+1} \leq E^n + T \Delta t \leq E^0 + \bar{T}(n+1) \Delta t$$

BTCS 格式

θ 方法

最终的格式应该有相容性、收敛性、稳定性, 有效的, 先不讲高效

哪种方法好其实与 $b(x, t)$ 的行为有关.

截断误差在哪点都一样, 主要看好不好算

3.3.2 守恒型扩散方程

物理意义, 热流量守恒

考虑方程的守恒性质, 使用积分形式构造有限差分格式, 取时空区域 Ω_j^n

Chapter 4

偏微分方程初值问题的适定性

4.1 适定性的定义

考虑偏微分方程组

$$u_t = P(x, t, \frac{\partial}{\partial x})u, \quad t \geq t_0, \quad u(x, t_0) = f(x),$$

其中 $x = (x^1, \dots, x^d)$, $u = (u^1, \dots, u^m)$, P 是 p 阶偏微分算子

$$P(x, t, \frac{\partial}{\partial x}) = \sum_{|\nu| \leq p} A_\nu(x, t) \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right)^{\nu_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x^d} \right)^{\nu_d}$$

其中系数 $A_\nu(x, t)$ 是 $m \times m$ 的光滑矩阵函数, 并且它们和 $f(x, t)$ 在每个方向 x^i 上都是 2π 周期的.

定义 4.1.1. 如果对任意 t_0 和 $f \in C^\infty(x)$, 有

- 存在唯一的解 $u(x, t) \in C^\infty(x, t)$ 且在每个方向 x^i 上都是 2π 周期的
- 存在与 t_0 无关的常数 α 和 K , 使得

$$\|u(\cdot, t)\| \leq K e^{\alpha(t-t_0)} \|f(\cdot)\|$$

则称该问题是适定的 (*well-posed*), 若不然则称该问题是不适定的 (*ill-posed*).

4.2 一维常系数标量偏微分方程

考虑一维常系数标量偏微分方程

$$u_t = au_{xx} + bu_x + cu, \quad t \geq t_0, \quad u(x, t_0) = f(x).$$

其中 $a, b, c \in \mathbb{C}$ 是常数, $f(x)$ 是 2π 周期函数. 因为系数具有时间平移不变性所以不妨设 $t_0 = 0$.

定理 4.2.1. 该方程适定当且仅当存在 α 使得 $\operatorname{Re} K \leq \alpha$ 对任意 $\omega \in \mathbb{R}$ 成立, 其中

$$K = -a\omega^2 + ib\omega + c.$$

证明. 假设初值是频率为 ω 的单波 $f(x) = \hat{f}(\omega)e^{i\omega x}$, 则我们有单波解

$$u(x, t) = \hat{u}(\omega, t)e^{i\omega x}, \quad \hat{u}(\omega, 0) = \hat{f}(\omega), \quad \frac{d}{dt}\hat{u}(\omega, t) = K\hat{u}(\omega, t)$$

解得 $\hat{u}(\omega, t) = e^{Kt}\hat{f}(\omega)$, 则 $u(x, t) = \hat{f}(\omega)e^{Kt+i\omega x}$, 则 $\|u(\cdot, t)\|^2 = e^{2\operatorname{Re} Kt}\|f(\cdot)\|^2$. 可以由此看到定理陈述中的条件为必要条件. 下面假设该条件成立, 并考虑更一般的初值

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega x},$$

由解的叠加原理我们得到解

$$u(x, t) = \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{K(\omega)t+i\omega x},$$

由 Parseval 恒等式有

$$\|u(\cdot, t)\|^2 = \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} e^{2\operatorname{Re} K(\omega)t} |\hat{f}(\omega)|^2 \leq e^{2\alpha t} \|f(\cdot)\|^2.$$

□

- 非导数项前的系数 c 不影响问题的适定性.
- 当 $\operatorname{Re} a > 0$, 我们有 $\operatorname{Re} K = -\operatorname{Re} a\omega^2 + \operatorname{Im} b\omega$ 是一个开口向下的二次函数, 有最大值, 所以对任何 b , 该问题都是适定的.

4.3 一维常系数一阶偏微分方程组

4.4 一维常系数二阶抛物型偏微分方程组

考虑一维常系数二阶偏微分方程组

$$u_t = Au_{xx} + Bu_x + Cu =: Pu, \quad u(x, 0) = f(x).$$

定义 4.4.1. 称该方程组是抛物的如果 A 的所有特征值 λ 满足 $\operatorname{Re} \lambda \geq \delta$, 其中 $\delta > 0$ 是常数.

定理 4.4.2. 一维常系数二阶抛物型偏微分方程组的初值问题是适定的.

4.5 一般常系数微分方程组

考虑一般常系数微分方程组

$$u_t = P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u, \quad u(x, 0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

构造单波解

$$u(x, t) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^d} e^{i\langle \omega, x \rangle} \hat{u}(\omega, t),$$

代入方程得到

$$\hat{u}_t(\omega, t) = \hat{P}(i\omega)\hat{u}(\omega, t), \quad \hat{u}(\omega, 0) = \hat{f}(\omega) \implies \hat{u}(\omega, t) = e^{\hat{P}(i\omega)t} \hat{f}(\omega).$$

其中 $\hat{P}(i\omega)$ 称作微分算子 P 的 Fourier 变换或符号, 是一个 $m \times m$ 维的矩阵.

定理 4.5.1. 问题是适定的当且仅当存在常数 K, α 对任意 ω 成立 $|e^{\hat{P}(i\omega)t}| \leq Ke^{\alpha t}$.

证明. 必要性显然, 下证充分性. 该条件保证了形式解与光滑初值有一样的速降性, 从而是真解. \square

定理 4.5.2 (Petrovskii). 问题适定的必要条件是对所有 ω , 对所有 $\hat{P}(i\omega)$ 的特征值 λ , 有 $\operatorname{Re} \lambda \leq \alpha$.

证明. 设 λ 是特征值而 ϕ 是对应的特征向量, 则 $\hat{u}(\omega, t) = e^{\hat{P}(i\omega)t} \phi = e^{\lambda t} \phi$ 是方程的解. \square

定理 4.5.3. 假设 Petrovskii 条件成立, 且存在一族矩阵

Chapter 5

有限差分方法的基本性质

本章主要针对一般的偏微分方程的初值问题

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = g, & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x, t_0) = f(x), & -\infty < x < \infty, \\ f(x) = f(x + 2\pi), & -\infty < x < \infty \end{cases}$$

其中 \mathcal{L} 是时空偏微分算子. 考虑其一般的差分格式 $Lv_j^n = g_j^n$ 的相容性、收敛性和稳定性.

5.1 截断误差与差分方法的精度

定义 5.1.1. 对于满足 $\mathcal{L}u = g$ 的任意光滑函数 $u(x, t)$, 称

$$T_j^n = Lu_j^n - g_j^n$$

为差分格式 $Lv_j^n = g_j^n$ 在 (x_j, t_n) 处的局部截断误差. 其反映了差分方程对源方程的近似程度.

定义 5.1.2. 若截断误差

$$T_j^n = Lu_j^n - g_j^n = O((\Delta x)^p + (\Delta t)^q),$$

则称差分格式 $Lv_j^n = g_j^n$ 对空间是 p 阶、对时间是 q 阶精度的.

5.2 相容性

5.3 收敛性

5.4 稳定性

稳定性是要建立 t_n 时刻的格点函数的模被 $t = 0$ 时刻的格点函数的模控制的不等式, 从而初值的小误差不会带来解的太大的误差.

定义 5.4.1. 称某单步差分格式关于 $\|\cdot\|$ 模是稳定的, 如果存在常数 $K \geq 0$, 成立 $\|V^{n+1}\| \leq K\|V^n\|$.

5.5 Lax 定理

5.6 偏微分方程的耗散性、色散性

我们以方程 $u_t + au_x = 0$ 为例, 设谐波 $u(x, t) = e^{i(kt+\omega x)}$ 是方程的解, 代入得

$$ik + ia\omega = 0 \implies k = -a\omega$$

称为 $u_t + au_x = 0$ 的色散关系. 一般情况下 $k = k(\omega) = \alpha + bi$ 是复数, PDE 的谐波解为

$$u(x, t) = e^{-bt} e^{i(\alpha t + \omega x)}$$

- 其振幅 e^{-bt} 可能随时间衰减, 这种现象称为“耗散”.
- 谐波传播的波速为

$$c_e = -\frac{\alpha}{\omega} = -\frac{\operatorname{Re}(k)}{\omega}$$

若 $c_e > 0$, 则谐波从左向右传播, 若 $c_e < 0$, 则谐波从右向左传播. 当 $u_t + au_x = 0$ 时 $c_e = a$.

- 如果色散关系 $k = k(\omega)$ 是 ω 的线性函数, 则不同波数的谐波传播的波速是相同的, 整体波形保持不变. 若 $k = k(\omega)$ 是 ω 的非线性函数, 则不同波数的谐波传播的波速是不同的, 整体波形随时间发生变化, 相应的物理现象称为“色散”.
- 放大因子

$$\lambda_e \triangleq \frac{u(x, t + \Delta t)}{u(x, t)} = e^{ik\Delta t} = e^{-b\Delta t} e^{i\alpha\Delta t} = |\lambda_e| e^{i\varphi_e},$$

称 $|\lambda_e| = e^{-b\Delta t}$ 为 λ_e 的模, 称 $\varphi_e = \alpha\Delta t$ 为 λ_e 的幅角. λ_e 体现了谐波解的随时间变化特征.

不同波数的谐波的传播和振幅特性是 PDE 的解的性质的一个重要组成部分. 若有谐波振幅无限增长, 则该 PDE 的解是不稳定的.

定义 5.6.1. 若 PDE 的谐波解的振幅不随时间增长, 且至少有一个谱波的振幅是衰减的, 则称该 PDE 具有耗散性, 其解是稳定的. 若 PDE 的所有谐波解的振幅既不增长, 也不衰减, 则称该 PDE 是无耗散的, 其解是稳定的. 若非上述两种情况, 则称该 PDE 是逆耗散的, 其解不稳定.

定义 5.6.2. 若 PDE 的不同波数的谐波以不同的速度传播, 则称该 PDE 具有色散性. 若谐波的传播速度与波数无关, 则称该 PDE 是无色散的.

例 5.6.3. 讨论 $u_t + au_x = 0$ 的耗散性、色散性, 其中 a 是常数.

解.

□

例 5.6.4. 讨论 $u_t + cu_{xxx} = 0$ 的耗散性、色散性, 其中 c 是常数.

解.

□

5.7 差分方程的耗散性、色散性

5.8 MPDE 方法

Chapter 6

二维线性偏微分方程的初值问题

6.1 二维常系数对流方程的初值问题

考虑二维常系数对流方程的初值问题

$$\begin{cases} u_t + au_x + bu_y = 0, & (x, y) \in (-\infty, \infty) \times (-\infty, \infty), t > 0 \\ u(x, y, 0) = f(x, y), & (x, y) \in (-\infty, \infty) \times (-\infty, \infty) \end{cases}$$

其中 a, b 为常数, $u(x, y, t), f(x, y)$ 对 x, y 分别为 2π 周期的周期函数.

方程性质

- 方程适定性: 代入 $u(x, y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i(kx + \omega_x x + \omega_y y)}$, 得到

$$k = -a\omega_x - b\omega_y \implies u(x, y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i(-a\omega_x t - b\omega_y t + \omega_x x + \omega_y y)}$$

方程适定的条件为 $a, b \in \mathbb{R}$.

- 准确解为 $u(x, y, t) = f(x - at, y - bt)$, 即沿 x 方向以速度 a 传播, 沿 y 方向以速度 b 传播.
- 准确解在 (x^*, y^*, t^*) 处的依赖区域为 $(x^* - at^*, y^* - bt^*)$.
- 特征线为直线

$$x(t) = x_0 + at, \quad y(t) = y_0 + bt.$$

网格剖分

在 x, y, t 方向均采用等距均匀剖分, 并且要满足稳定性条件

$$\Delta t = cfl \times \min(\Delta x, \Delta y).$$

有限差分格式

- 可以使用差商 \approx 导数。如: FTBS 格式

$$v_{jk}^{n+1} = v_{jk}^n - \frac{a\Delta t}{\Delta x}(v_{j,k}^n - v_{j-1,k}^n) - \frac{b\Delta t}{\Delta y}(v_{j,k}^n - v_{j,k-1}^n)$$

- 也可以使用前面针对一维问题采用的其他方法构造有限差分格式。如：

– Lax-Friedrich 格式：

$$v_{jk}^{n+1} = \frac{1}{4} (v_{j-1,k}^n + v_{j+1,k}^n + v_{j,k-1}^n + v_{j,k+1}^n) - \frac{a\Delta t}{2\Delta x} (v_{j+1,k}^n - v_{j-1,k}^n) - \frac{b\Delta t}{2\Delta y} (v_{j,k+1}^n - v_{j,k-1}^n)$$

– Lax-Wendroff 格式：

$$\begin{aligned} v_{jk}^{n+1} = & v_{jk}^n - \frac{a\Delta t}{2\Delta x} (v_{j+1,k}^n - v_{j-1,k}^n) - \frac{b\Delta t}{2\Delta y} (v_{j,k+1}^n - v_{j,k-1}^n) \\ & + \frac{a^2\Delta t^2}{2\Delta x^2} (v_{j+1,k}^n - 2v_{jk}^n + v_{j-1,k}^n) + \frac{b^2\Delta t^2}{2\Delta y^2} (v_{j,k+1}^n - 2v_{jk}^n + v_{j,k-1}^n) \\ & + \frac{ab\Delta t^2}{4\Delta x\Delta y} (v_{j+1,k+1}^n - v_{j-1,k+1}^n - v_{j+1,k-1}^n + v_{j-1,k-1}^n) \end{aligned}$$

- 积分方法：

积分区域取 $[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}] \times [y_{k-1/2}, y_{k+1/2}] \times [t_n, t_{n+1}]$:

$$\begin{aligned} & \int_{y_{k-1/2}}^{y_{k+1/2}} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(x, y, t_{n+1}) dx dy - \int_{y_{k-1/2}}^{y_{k+1/2}} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(x, y, t_n) dx dy \\ & + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{y_{k-1/2}}^{y_{k+1/2}} au(x_{j+1/2}, y, t) - au(x_{j-1/2}, y, t) dy dt \\ & + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} bu(x, y_{k+1/2}, t) - bu(x, y_{k-1/2}, t) dx dt = 0 \end{aligned}$$

- 可以得到：

$$v_{jk}^{n+1} = v_{jk}^n - \frac{a\Delta t}{\Delta x} (v_{j+1,k}^n - v_{j-1,k}^n) - \frac{b\Delta t}{\Delta y} (v_{j,k+1}^n - v_{j,k-1}^n)$$

或

$$v_{jk}^{n+1} = v_{jk}^n + \frac{a\Delta t}{\Delta x} (v_{j,k}^n - v_{j-1,k}^n) - \frac{b\Delta t}{\Delta y} (v_{j,k}^n - v_{j,k-1}^n) \quad (\text{FTCS})$$

$$\Rightarrow v_{jk}^{n+1} = v_{jk}^n - \frac{a\Delta t}{\Delta x} (v_{j,k}^n - v_{j-1,k}^n) - \frac{b\Delta t}{\Delta y} (v_{j,k}^n - v_{j,k-1}^n) \quad (\text{FTBS})$$

6.2 二维变系数对流方程的初值问题

6.3 二维常系数扩散方程的初值问题

考虑二维常系数扩散方程的初值问题

$$u_t = au_{xx} + bu_{yy}, \quad u(x, y, 0) = f(x, y)$$

其中 $a, b \in \mathbb{R}$ 为常数, 解 $u(x, y, t)$ 和初值 $f(x, y)$ 对 x, y 各自为 2π 周期函数. 假设谐波 $u(x, y, t) = e^{i(kt + \omega_x x + \omega_y y)}/2\pi$ 是方程的解, 代入方程得到色散关系 $ik = -a\omega_x^2 - b\omega_y^2$, 则

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} e^{-(a\omega_x^2 + b\omega_y^2)t + i(\omega_x x + \omega_y y)}$$

所以可以看出方程满足适定性的条件是 $a > 0, b > 0$.

FTCS 格式

$$\frac{v_{jk}^{n+1} - v_{jk}^n}{\Delta t} = \frac{a}{\Delta x^2} (v_{j+1,k}^n - 2v_{jk}^n + v_{j-1,k}^n) + \frac{b}{\Delta y^2} (v_{j,k+1}^n - 2v_{jk}^n + v_{j,k-1}^n)$$

显然有截断误差

$$T_{jk}^n = \frac{v_{jk}^{n+1} - u_{jk}^n}{\Delta t} - \frac{a}{\Delta x^2} (u_{j+1,k}^n - 2u_{jk}^n + u_{j-1,k}^n) - \frac{b}{\Delta y^2} (u_{j,k+1}^n - 2u_{jk}^n + u_{j,k-1}^n) = O(\Delta t + \Delta x^2 + \Delta y^2)$$

所以该格式是逐点相容的, 并且对时间的精度为 1 阶, 对空间的精度为 2 阶. 考虑

$$v_{jk}^{n+1} = v_{jk}^n + \mu_x \delta_x^2 v_{jk}^n + \mu_y \delta_y^2 v_{jk}^n, \quad u_{jk}^{n+1} = u_{jk}^n + \mu_x \delta_x^2 u_{jk}^n + \mu_y \delta_y^2 u_{jk}^n + \Delta t T_{jk}^n$$

所以整体误差 $e_{jk}^n = v_{jk}^n - u_{jk}^n$ 有如下估计

$$\begin{aligned} |e_{jk}^{n+1}| &= |e_{jk}^n + \mu_x \delta_x^2 e_{jk}^n + \mu_y \delta_y^2 e_{jk}^n - \Delta t T_{jk}^n| \\ &= |(1 - 2\mu_x - 2\mu_y)e_{jk}^n + \mu_x(e_{j+1,k}^n + e_{j-1,k}^n) + \mu_y(e_{j,k+1}^n + e_{j,k-1}^n) - \Delta t T_{jk}^n| \\ &\leq (1 - 2\mu_x - 2\mu_y)|e_{jk}^n| + \mu_x(|e_{j+1,k}^n| + |e_{j-1,k}^n|) + \mu_y(|e_{j,k+1}^n| + |e_{j,k-1}^n|) + \Delta t |T_{jk}^n| \\ &\leq E^n + \Delta t T^* \end{aligned}$$

其中 $E^n = \max_{j,k} |e_{j,k}^n|$, $T^* = \max_{j,k,n} |T_{jk}^n|$. 上述不等式成立的条件是 $\mu_x \geq 0, \mu_y \geq 0, 1 - 2\mu_x - 2\mu_y \geq 0$. 此时我们得到

$$E^{n+1} \leq E^n + \Delta t T^* \leq \dots \leq E^0 + (n+1)\Delta t T^* = (n+1)\Delta t T^* = t_n T^*$$

下面来看稳定性, 令 $v_{jk}^n = \hat{v}^n e^{i(\omega_x x_j + \omega_y y_k)}$, 代入格式得到放大因子

$$\hat{Q} = 1 - 4\mu_x \sin^2(\omega_x \Delta x/2) - 4\mu_y \sin^2(\omega_y \Delta y/2)$$

当 $\mu_x \geq 0, \mu_y \geq 0, 1 - 2\mu_x - 2\mu_y \geq 0$ 时有 $|\hat{Q}| \leq 1$, 格式是稳定的.

Crank-Nicolson 格式

考虑 FTCS 格式和 BTCS 格式

$$\frac{v_{jk}^{n+1} - v_{jk}^n}{\Delta t} = \frac{a}{\Delta x^2} \delta_x^2 v_{jk}^n + \frac{b}{\Delta y^2} \delta_y^2 v_{jk}^n, \quad \frac{v_{jk}^{n+1} - v_{jk}^n}{\Delta t} = \frac{a}{\Delta x^2} \delta_x^2 v_{jk}^{n+1} + \frac{b}{\Delta y^2} \delta_y^2 v_{jk}^{n+1}$$

将二者取平均就得到 Crank-Nicolson 格式

$$\frac{v_{jk}^{n+1} - v_{jk}^n}{\Delta t} = \frac{a}{2\Delta x^2} \delta_x^2 (v_{jk}^n + v_{jk}^{n+1}) + \frac{b}{2\Delta y^2} \delta_y^2 (v_{jk}^n + v_{jk}^{n+1})$$

也可以整理成 v^{n+1} 和 v^n 各在一边的形式

$$(1 - \frac{1}{2}\mu_x \delta_x^2 - \frac{1}{2}\mu_y \delta_y^2) v_{jk}^{n+1} = (1 + \frac{1}{2}\mu_x \delta_x^2 + \frac{1}{2}\mu_y \delta_y^2) v_{jk}^n$$

在 $(x_j, y_k, t^{n+1/2})$ 处计算截断误差. 对于时间离散部分, 在时间方向上泰勒展开的步长为 $\Delta t/2$,

$$u(x_j, y_k, t_{n+1}) = \left(u + \frac{\Delta t}{2} u_t + \frac{\Delta t^2}{8} u_{tt} + \frac{\Delta t^3}{48} u_{ttt} + \cdots \right) \Big|_{jk}^{n+\frac{1}{2}}$$

偶数阶抵消, 奇数阶系数翻倍, 得到

$$\frac{u_{jk}^{n+1} - u_{jk}^n}{\Delta t} = \left(u_t + \frac{\Delta t^2}{24} u_{ttt} + O(\Delta t^4) \right) \Big|_{jk}^{n+\frac{1}{2}}$$

对于空间离散的 x 部分, 先在 x 方向上做泰勒展开变到 jk 处,

$$\frac{1}{\Delta x^2} \delta_x^2 u_{jk}^n = \left(u_{xx} + \frac{\Delta x^2}{12} u_{xxxx} + O(\Delta x^4) \right) \Big|_{jk}^n, \quad \frac{1}{\Delta x^2} \delta_x^2 u_{jk}^{n+1} = \left(u_{xx} + \frac{\Delta x^2}{12} u_{xxxx} + O(\Delta x^4) \right) \Big|_{jk}^{n+1}$$

再在时间方向上做泰勒展开并取平均, 利用前面在时间方向上泰勒展开的结果可以得到

$$\frac{1}{2\Delta x^2} \delta_x^2 (u_{jk}^n + u_{jk}^{n+1}) = \left(u_{xx} + \frac{\Delta t^2}{8} u_{xxtt} + O(\Delta t^4) + \frac{\Delta x^2}{12} u_{xxxx} + \frac{\Delta x^2 \Delta t^2}{96} u_{xxxxtt} + O(\Delta x^2 \Delta t^4) + O(\Delta x^4) \right)$$

$$T_{jk}^{n+\frac{1}{2}} = O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2) + O(\Delta y^2).$$

为了判断 Crank-Nicolson 格式的稳定性, 类似一维情形可以计算放大因子

$$\hat{Q} = \frac{1 - \frac{a\Delta t}{2\Delta x^2} 4 \sin^2(\frac{\omega_x \Delta x}{2}) - \frac{b\Delta t}{2\Delta y^2} 4 \sin^2(\frac{\omega_y \Delta y}{2})}{1 + \frac{a\Delta t}{2\Delta x^2} 4 \sin^2(\frac{\omega_x \Delta x}{2}) + \frac{b\Delta t}{2\Delta y^2} 4 \sin^2(\frac{\omega_y \Delta y}{2})}.$$

容易看出 $|\hat{Q}| \leq 1$, 所以是无条件稳定的.

积分近似方法

6.4 ADI 方法

ADI 方法, 全称为 Alternating-Direction Implicit Method, 即交替隐式迭代方法, 是为了克服 Crank-Nicolson 格式中单个方程变量个数过多, 或者说最终的矩阵方法带宽过大, 导致的方程组求解计算量大的问题引入的. 回忆隐式格式可以理解为使用下一时间层的信息来近似空间导数项, 显式格式可以理解为使用当前时间层的信息来近似空间导数项, Crank-Nicolson 格式是显式格式和隐式格式的混合所以同时用到了两个时间层的信息. ADI 方法的思路是, 对于 n 维问题, 将单步时间划分为 n 步时间, 在每一步时用隐式格式更新某一维度而保持其他维度为显式. 这样虽然步数增多了, 但每步涉及到的变量大大减少, 总体来看计算量也大大减少, 并且格式的时间和空间离散精度依然为 2 阶, 所以我们认为这个一个好的方法. 接下来以扩散方程的二维问题为例介绍 ADI 方法.

从 t_n 到 $t_{n+\frac{1}{2}}$ 时间步, 对关于 x 的导数使用隐式, 对关于 y 的导数使用显式, 得到

$$\frac{v_{jk}^{n+\frac{1}{2}} - v_{jk}^n}{\Delta t/2} = \frac{a}{\Delta x^2} \delta_x^2 v_{jk}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{b}{\Delta y^2} \delta_y^2 v_{jk}^n \iff (1 - \frac{1}{2} \mu_x \delta_x^2) v_{jk}^{n+\frac{1}{2}} = (1 + \frac{1}{2} \mu_y \delta_y^2) v_{jk}^n.$$

从 $t_{n+\frac{1}{2}}$ 到 t_{n+1} 时间步, 对关于 y 的导数使用隐式, 对关于 x 的导数使用显式, 得到

$$\frac{v_{jk}^{n+1} - v_{jk}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t/2} = \frac{a}{\Delta x^2} \delta_x^2 v_{jk}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{b}{\Delta y^2} \delta_y^2 v_{jk}^{n+1} \iff (1 - \frac{1}{2} \mu_y \delta_y^2) v_{jk}^{n+1} = (1 + \frac{1}{2} \mu_x \delta_x^2) v_{jk}^{n+\frac{1}{2}}.$$

该格式也被称为 Peaceman-Rachford 格式. 为了分析该格式的稳定性, 我们将时间步合并

$$\begin{aligned} (1 - \frac{1}{2} \mu_x \delta_x^2)(1 - \frac{1}{2} \mu_y \delta_y^2) v_{jk}^{n+1} &= (1 + \frac{1}{2} \mu_x \delta_x^2)(1 + \frac{1}{2} \mu_y \delta_y^2) v_{jk}^n \\ (1 - \frac{1}{2} \mu_x \delta_x^2 - \frac{1}{2} \mu_y \delta_y^2 + \frac{1}{4} \mu_x \mu_y \delta_x^2 \delta_y^2) v_{jk}^{n+1} &= (1 + \frac{1}{2} \mu_x \delta_x^2 + \frac{1}{2} \mu_y \delta_y^2 + \frac{1}{4} \mu_x \mu_y \delta_x^2 \delta_y^2) v_{jk}^n \\ \frac{v_{jk}^{n+1} - v_{jk}^n}{\Delta t} &= \frac{a}{2\Delta x^2} \delta_x^2 (v_{jk}^n + v_{jk}^{n+1}) + \frac{b}{2\Delta y^2} \delta_y^2 (v_{jk}^n + v_{jk}^{n+1}) - \frac{ab\Delta t}{4\Delta x^2 \Delta y^2} \delta_x^2 \delta_y^2 (v_{jk}^{n+1} - v_{jk}^n) \end{aligned}$$

可以看到上式除了最后一项, 就是 Crank-Nicolson 格式, 对最后一项进行单独分析

6.5 近似分解方法

上一节中提到格式

$$(1 - \frac{1}{2}\mu_x\delta_x^2)(1 - \frac{1}{2}\mu_y\delta_y^2)v_{jk}^{n+1} = (1 + \frac{1}{2}\mu_x\delta_x^2)(1 + \frac{1}{2}\mu_y\delta_y^2)v_{jk}^n$$

可以理解为在 Crank-Nicolson 格式的基础上增加不改变精度的一项去凑因式分解.

Douglas-Rachford 格式

对于 BTCS 格式

$$(1 - \mu_x\delta_x^2 - \mu_y\delta_y^2)v_{jk}^{n+1} = v_{jk}^n$$

为了左边变成 $(1 - \mu_x\delta_x^2)(1 - \mu_y\delta_y^2)v_{jk}^{n+1}$, 需要在左边增加 $\mu_x\mu_y\delta_x^2\delta_y^2v_{jk}^{n+1}$. 为了抵消影响, 需要在右边增加 $\mu_x\mu_y\delta_x^2\delta_y^2v_{jk}^n$, 这样就得到了 Douglas-Rachford 格式

$$(1 - \mu_x\delta_x^2)(1 - \mu_y\delta_y^2)v_{jk}^{n+1} = (1 + \mu_x\mu_y\delta_x^2\delta_y^2)v_{jk}^n$$

在计算中使用的等价格为

$$\begin{cases} (1 - \mu_x\delta_x^2)v_{jk}^* = (1 + \mu_y\delta_y^2)v_{jk}^n \\ (1 - \mu_y\delta_y^2)v_{jk}^{n+1} = v_{jk}^* - \mu_y\delta_y^2v_{jk}^n \end{cases}$$

我们来简单验算一下其等价性

$$\begin{aligned} (1 - \mu_x\delta_x^2)(1 - \mu_y\delta_y^2)v_{jk}^{n+1} &= (1 - \mu_x\delta_x^2)v_{jk}^* - (1 - \mu_x\delta_x^2)\mu_y\delta_y^2v_{jk}^n \\ &= (1 + \mu_y\delta_y^2)v_{jk}^* - (1 - \mu_x\delta_x^2)\mu_y\delta_y^2v_{jk}^n = (1 + \mu_x\mu_y\delta_x^2\delta_y^2)v_{jk}^n. \end{aligned}$$

该格式的放大因子为

$$\hat{Q} = \frac{1 + 16\mu_x\mu_y \sin^2(\omega_x\Delta x/2) \sin^2(\omega_y\Delta y/2)}{(1 + 4\mu_x \sin^2(\omega_x\Delta x/2))(1 + 4\mu_y \sin^2(\omega_y\Delta y/2))}.$$

ADI 方法处理非齐次方程

Douglas-Gunn 格式

6.6 分裂方法

以偏微分方程 $u_t = u_x$ 为例, 考虑泰勒展开

$$u(x, t + \Delta t) = u(x, t) + \Delta t u_t(x, t) + \frac{\Delta t^2}{2} u_{tt}(x, t) + O(\Delta t^3)$$

如果保留右侧的前两项作为近似, 我们认为该误差为 Δt 量级, 或者为 1 阶的; 如果保留前三项作为近似, 我们认为该误差为 2 阶的, 以此类推. 可以利用偏微分方程将右侧对时间的导数进行替换, 在这个例子中 $u_t = u_x, u_{tt} = u_{xx}$, 所以可以用一阶算子 Q 来近似

$$Q = 1 + \Delta t \frac{\partial}{\partial x}, \quad u(x, t + \Delta t) = Qu(x, t) + O(\Delta t^2),$$

也可以用二阶算子 Q 来近似

$$Q = 1 + \Delta t \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} \Delta t^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad u(x, t + \Delta t) = Qu(x, t) + O(\Delta t^3).$$

考虑更一般的偏微分方程 $u_t = Au$, 其中算子 A 的作用方式定义为 $Au = A(x, t)u_x$, 此时

$$u_{tt} = (Au)_t = (A(x, t)u_x)_t = A_t(x, t)u_x + A(x, t)u_{xt} = A_t(x, t)u_x + A(x, t)(Au)_x = (A^2 + A_t)u$$

所以此时一阶算子和二阶算子分别为

$$Q = 1 + \Delta t A, \quad Q = 1 + \Delta t A + \frac{1}{2} \Delta t^2 (A^2 + A_t).$$

有了以上铺垫, 我们就可以来讨论所谓的分裂方法. 假设 $u_t = Au = A_1 u + A_2 u$,

1 阶算子

$$Q = 1 + \Delta t A, \quad Q_1 = 1 + \Delta t A_1, \quad Q_2 = 1 + \Delta t A_2$$

目的是用 Q_1, Q_2 去表达 Q , 一个比较朴素的想法就是

$$Q_2 Q_1 = (1 + \Delta t A_2)(1 + \Delta t A_1) = 1 + \Delta t A_1 + \Delta t A_2 + O(\Delta t^2) = Q + O(\Delta t^2)$$

所以说我们可以用 $Q_2 Q_1$ 去近似 Q , 这样做的好处是可以引入中间层, 将求解的过程拆成两步, 再对 Q_1 和 Q_2 各自使用已知的差分近似方法. 这种分裂方式被称为 Lie-Trotter 分裂.

2 阶算子

$$Q = 1 + \Delta t A + \frac{1}{2} \Delta t^2 (A^2 + A_t), \quad Q_i = 1 + \Delta t A_i + \frac{1}{2} \Delta t^2 (A_i^2 + A_{i,t})$$

可以看到 Lie-Trotter 分裂会引入 Δt 量级的误差, 当 Q 选择 1 阶算子时, 本来就有 Δt 阶的误差, 所以是可以接受的. 但如果 Q 选择 2 阶算子, 还使用 Lie-Trotter 分裂就失去了使用 2 阶算子的意义, 所以接下来我们引入 Strang 分裂, 为此我们需要强调 $A(t)u = A(x, t)u_x$. Strang 分裂定义如下

$$Q_1\left(\frac{\Delta t}{2}, t + \frac{\Delta t}{2}\right) Q_2(\Delta t, t) Q_1\left(\frac{\Delta t}{2}, t\right)$$

希望它来近似

$$Q = 1 + \Delta t(A_1 + A_2) + \frac{1}{2}\Delta t^2(A_1^2 + A_1A_2 + A_2A_1 + A_2^2 + A_{1,t} + A_{2,t}).$$

首先将 Strang 分裂按定义写开

$$(1 + \frac{\Delta t}{2}A_1(t + \frac{\Delta t}{2}) + \frac{1}{2}(\frac{\Delta t}{2})^2(A_1^2(t + \frac{\Delta t}{2}) + A_{1,t}(t + \frac{\Delta t}{2}))) (1 + \Delta tA_2(t) + \frac{1}{2}\Delta t^2(A_2^2(t) + A_{2,t}(t))) (1 + \frac{\Delta t}{2}A_1(t) + \frac{1}{2}(\frac{\Delta t}{2})^2(A_1^2(t) + A_{1,t}(t)))$$

因为式中 Δt^3 的项可以忽略, 所以上式中红色的部分可以直接丢掉, 变成

$$(1 + \frac{\Delta t}{2}A_1(t + \frac{\Delta t}{2}) + \frac{1}{2}(\frac{\Delta t}{2})^2(A_1^2(t) + A_{1,t}(t))) (1 + \Delta tA_2(t) + \frac{1}{2}\Delta t^2(A_2^2(t) + A_{2,t}(t))) (1 + \frac{\Delta t}{2}A_1(t) + \frac{1}{2}(\frac{\Delta t}{2})^2(A_1^2(t) + A_{1,t}(t)))$$

乘开, 式中 Δt 的项的部分为

$$\frac{\Delta t}{2}A_1(t + \frac{\Delta t}{2}) + \Delta tA_2(t) + \frac{\Delta t}{2}A_1(t) = \Delta t(A_1 + A_2)(t) + \frac{\Delta t^2}{4}A_{1,t}(t)$$

所以 Q 中 Δt 的项已经还原出来了, 还多出一个 Δt^2 的项需要跟后边合并. 两个 Δt 的项乘起来的

$$\frac{\Delta t^2}{2}A_2(t)A_1(t) + \frac{\Delta t^2}{4}A_1(t + \frac{\Delta t}{2})A_1(t) + \frac{\Delta t^2}{2}A_1(t + \frac{\Delta t}{2})A_2(t)$$

红色的部分因为相同的原因可以丢掉

$$\frac{\Delta t^2}{2}A_2(t)A_1(t) + \frac{\Delta t^2}{4}A_1(t)A_1(t) + \frac{\Delta t^2}{2}A_1(t)A_2(t)$$

本来就 Δt^2 的项

$$\frac{1}{2}(\frac{\Delta t}{2})^2(A_1^2(t) + A_{1,t}(t)) + \frac{1}{2}\Delta t^2(A_2^2(t) + A_{2,t}(t)) + \frac{1}{2}(\frac{\Delta t}{2})^2(A_1^2(t) + A_{1,t}(t))$$

同颜色的项互相合并, 这样就证明了

$$Q(\Delta t, t) = Q_1(\frac{\Delta t}{2}, t + \frac{\Delta t}{2})Q_2(\Delta t, t)Q_1(\frac{\Delta t}{2}, t) + O(\Delta t^3).$$

Strang 分裂方法看似每步要拆成 3 步去做, 但实际上如果我们考虑相邻的两步

$$Q_1(\frac{\Delta t}{2}, t + \Delta t + \frac{\Delta t}{2})Q_2(\Delta t, t + \Delta t)Q_1(\frac{\Delta t}{2}, t + \Delta t)Q_1(\frac{\Delta t}{2}, t + \frac{\Delta t}{2})Q_2(\Delta t, t)Q_1(\frac{\Delta t}{2}, t)$$

可以证明

$$Q_1(\Delta t, t + \frac{\Delta t}{2}) = Q_1(\frac{\Delta t}{2}, t + \Delta t)Q_1(\frac{\Delta t}{2}, t + \frac{\Delta t}{2}) + O(\Delta t^3)$$

所以实际上走法是先走半步 Q_1 , 然后交替走整步 Q_2, Q_1 , 最后走整步 Q_2 , 再走半步 Q_1 .

参考资料

- 北太天元科普: 求解偏微分方程的算子分裂法
- [Introductory Finite Difference Methods for PDEs](#) Section 6.3

Chapter 7

线性偏微分方程的初边值问题

7.1 一维扩散方程的边界处理

7.1.1 基于微分形式的近似

7.1.2 基于积分形式的近似

7.2 一维对流方程的边界处理

7.3 性质分析

7.3.1 收敛性

7.3.2 相容性

例 7.3.1. 讨论

$$\begin{cases} u_t = au_{xx}, & x \in (0, 1), t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in [0, 1], t = 0 \\ u_x(0, t) = 0, & t > 0, x = 0 \\ u(1, t) = 0, & t > 0, x = 1 \end{cases}$$

的差分方法 (采用虚拟点方法 $(v_1^n - v_{-1}^n)/2\Delta x = 0$ 处理边值条件)

$$\begin{cases} v_j^{n+1} = v_j^n + a\mu\delta_x^2 v_j^n, & j = 1, \dots, M-1, \\ v_j^0 = u_0(x_j), & j = 0, \dots, M, \\ v_0^{n+1} = (1 - 2a\mu)v_0^n + 2a\mu v_1^n, & n = 0, 1, \dots, \\ v_M^{n+1} = 0 & n = 0, 1, \dots. \end{cases}$$

解. 内部点是计算过的扩散方程的截断误差 $O(\Delta t + \Delta x^2)$, 而 $x = 1$ 处是准确的, 只计算 $x = 0$ 处

$$T_0^n = \frac{v_0^{n+1} - v_0^n}{\Delta t} - \frac{2a(v_1^n - v_0^n)}{\Delta x^2}$$

时间部分, 函数值减没了, 一阶导因为方程抵消, 主项是二阶导是 Δt 量级; 空间部分, 函数值减没了, 一阶导因为边界条件为 0, 二阶导因为方程抵消, 三阶导因为

$$u_t = au_{xx} \implies au_{xxx}|_{x=0} = u_{tx}|_{x=0} = u_x(0, t)_t \equiv 0$$

也没了, 所以主项是四阶导是 Δx^2 量级. 所以 $T_0^n = O(\Delta t + \Delta x^2)$. \square

例 7.3.2. 采用单侧差商离散 $(v_1^n - v_0^n)/\Delta x = 0$ 处理上例中的边值条件

$$\begin{cases} v_j^{n+1} = v_j^n + a\mu\delta_x^2 v_j^n, & j = 1, \dots, M-1, \\ v_j^0 = u_0(x_j), & j = 0, \dots, M, \\ v_0^{n+1} = v_1^{n+1}, & n = 0, 1, \dots, \\ v_M^{n+1} = 0 & n = 0, 1, \dots. \end{cases}$$

证明.

$$T_0^{n+1} = \frac{v_0^{n+1} - v_1^{n+1}}{\Delta x}$$

函数值减没了, 一阶导因为边界条件也没了, 二阶导无人抵消是主项是 $O(\Delta x)$ 量级. \square

例 7.3.3. 采用半网格方法处理上例中的边界条件, 定义在网格 $x_j = (j-1/2)\Delta x$, $\Delta x = 1/(M-1/2)$ 上, 需要更新的点是 $1, \dots, M$, 边界条件表达为 $(v_1^n - v_0^n)/\Delta x = 0$, 用 v_0^n, v_1^n, v_2^n 更新 v_1^{n+1}

$$\frac{v_1^{n+1} - v_1^n}{\Delta t} = \frac{a(v_0^n - 2v_1^n + v_2^n)}{\Delta x^2} = \frac{a(-v_1^n + v_2^n)}{\Delta x^2}$$

解.

$$T_1^n = \frac{u_1^{n+1} - u_1^n}{\Delta t} + \frac{a(u_1^n - u_2^n)}{\Delta x^2}.$$

时间部分是 $O(\Delta t)$, 空间部分

$$u_2^n - u_1^n = u_x(1, n)\Delta x + \frac{1}{2}u_{xx}(1, n)\Delta x^2 + \frac{1}{6}u_{xxx}(1, n)\Delta x^3 + O(\Delta x^4)$$

已知的条件是 $u_x(1/2, n) = 0$, 将之在 $x = 1$ 处展开得到

$$0 = u_x(1, n) - \frac{\Delta x}{2}u_{xx}(1, n) + \frac{\Delta x^2}{8}u_{xxx}(1, n) + O(\Delta x^3)$$

代入得到

$$u_2^n - u_1^n = u_{xx}(1, n)\Delta x^2 + \frac{1}{24}u_{xxx}(1, n)\Delta x^3 + O(\Delta x^4)$$

□

7.3.3 稳定性

7.3.4 Lax 定理

7.3.5 能量稳定性

7.4 二维扩散方程的边界处理

7.4.1 FTCS 边界条件的数值近似

7.4.2 过渡层边界条件的数值近似

7.4.3 任意区域边界条件的数值近似

Chapter 8

非线性双曲守恒律方程

8.1 特征线方法

8.2 双曲守恒律方程的弱解和熵解

8.3 数值格式

8.3.1 基于光滑解的格式构造

例 8.3.1. 基于非守恒型 $u_t + a(u)u_x = 0$, 利用冻结系数法构造迎风格式

$$v_j^{n+1} = \begin{cases} v_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} a(v_j^n)(v_j^n - v_{j-1}^n) & a(v_j^n) > 0, \\ v_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} a(v_j^n)(v_{j+1}^n - v_j^n) & a(v_j^n) < 0. \end{cases}$$

基于守恒型 $u_t + (f(u))_x = 0$, 构造迎风格式

$$v_j^{n+1} = \begin{cases} v_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f(v_j^n) - f(v_{j-1}^n)) & f'(v_j^n) > 0, \\ v_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f(v_{j+1}^n) - f(v_j^n)) & f'(v_j^n) < 0. \end{cases}$$

例 8.3.2. 基于非守恒型 $u_t + a(u)u_x = 0$, 构造 Lax 格式

$$v_j^{n+1} = \frac{v_{j+1}^n + v_{j-1}^n}{2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} a(v_j^n)(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n).$$

基于守恒型 $u_t + (f(u))_x = 0$, 构造 Lax 格式

$$v_j^{n+1} = \frac{v_{j+1}^n + v_{j-1}^n}{2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (f(v_{j+1}^n) - f(v_{j-1}^n)).$$

解. 分析非守恒型 $u_t + a(u)u_x = 0$ 的 Lax 格式的截断误差

$$\Delta t T_j^n = (u_j^{n+1} - u_j^n) + (u_j^n - \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2}) + \frac{\Delta t}{2\Delta x} a(u_j^n)(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n).$$

第一部分函数值没了, 一阶导是 u_t 出现在方程里, 二阶导是 u_{tt} 量级是 Δt^2 ; 第二部分函数值没了, 一阶导互相抵消没了, 二阶导是 u_{xx} 量级是 Δx^2 ; 第三部分函数值没了, 一阶导凑方程, 二阶导抵消也没了, 三阶导是 Δx^3 的量级, 乘上前面的系数 $\Delta t/\Delta x$ 就是 $\Delta t\Delta x^2$ 的量级. 综上

$$T_j^n = O(\Delta t + \frac{\Delta x^2}{\Delta t} + \Delta x^2) = O(\Delta t + \frac{\Delta x^2}{\Delta t}).$$

□

例 8.3.3. 基于非守恒型 $u_t + a(u)u_x = 0$, 构造 Lax-Wendroff 格式.

解. 对时间泰勒展开

$$u(x, t + \Delta t) = u(x, t) + \Delta t u_t(x, t) + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt}(x, t)$$

利用方程 $u_t + a(u)u_x = 0$ 及对其求导得到的方程

$$u_{tt} + a'(u)u_t u_x + a(u)u_{xt} = 0, \quad u_{tx} + a'(u)u_x^2 + a(u)u_{xx} = 0$$

将泰勒展开中关于时间的导数全部替换为关于空间的导数, 整理得到

$$v_j^{n+1} = v_j^n - \Delta t a(v_j^n) u_x + \frac{\Delta t^2}{2} (a(v_j^n)^2 u_{xx} + 2a(v_j^n) a'(v_j^n) u_x^2).$$

□

例 8.3.4. 基于守恒型 $u_t + f(u)_x = 0$, 构造 Lax-Wendroff 格式.

解. 对时间泰勒展开

$$u(x, t + \Delta t) = u(x, t) + \Delta t u_t(x, t) + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt}(x, t)$$

利用方程 $u_t + f(u)_x = 0$ 及对其求导得到的方程

$$0 = u_{tt} + f(u)_{xt} = u_{tt} + (f'(u)u_t)_x = u_{tt} - (f'(u)f(u)_x)_x$$

将泰勒展开中关于时间的导数全部替换为关于空间的导数, 整理得到

$$v_j^{n+1} = v_j^n - \Delta t f(u)_x + \frac{\Delta t^2}{2} (f'(u)f(u)_x)_x$$

对最后一项近似如下

$$\begin{aligned} (f'(u)f(u)_x)_x &= \frac{f'(v_{j+1/2})f(u)_x(x_{j+1/2}) - f'(v_{j-1/2})f(u)_x(x_{j-1/2})}{\Delta x} \\ &= \frac{1}{\Delta x^2} (f'(v_{j+1/2})(f(v_{j+1}) - f(v_j)) - f'(v_{j-1/2})(f(v_j) - f(v_{j-1}))) \end{aligned}$$

使用中心差近似 $f(u)_x$, 最后我们得到 Lax-Wendroff 格式

$$v_j^{n+1} = v_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (f(v_{j+1}^n) - f(v_{j-1}^n)) + \frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2} (f'(v_{j+1/2}^n)(f(v_{j+1}^n) - f(v_j^n)) - f'(v_{j-1/2}^n)(f(v_j^n) - f(v_{j-1}^n)))$$

□

8.3.2 守恒型差分格式

例 8.3.5. 验证 Lax 格式

$$v_j^{n+1} = \frac{v_{j+1}^n + v_{j-1}^n}{2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (f(v_{j+1}^n) - f(v_{j-1}^n))$$

是守恒型差分格式.

证明.

$$\begin{aligned} v_j^{n+1} &= v_j^n - v_j^n + \frac{v_{j+1}^n + v_{j-1}^n}{2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (f(v_{j+1}^n) - f(v_{j-1}^n) + f(v_j^n) - f(v_j^n)) \\ &= v_j^n + \frac{v_{j+1}^n - v_j^n}{2} - \frac{v_j^n - v_{j-1}^n}{2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} ((f(v_{j+1}^n) + f(v_j^n)) - (f(v_j^n) + f(v_{j-1}^n))) \\ \hat{f}_{j+1/2}^n &= \frac{f(v_{j+1}^n) + f(v_j^n)}{2} - \frac{\Delta x}{\Delta t} \frac{v_{j+1}^n - v_j^n}{2} \end{aligned}$$

□

例 8.3.6. 验证 Lax-Wendroff 格式

$$v_j^{n+1} = v_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (f(v_{j+1}^n) - f(v_{j-1}^n)) + \frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2} (f'(v_{j+1/2}^n)(f(v_{j+1}^n) - f(v_j^n)) - f'(v_{j-1/2}^n)(f(v_j^n) - f(v_{j-1}^n)))$$

是守恒型差分格式.

证明.

$$\hat{f}_{j+1/2}^n = \frac{f(v_{j+1}^n) + f(v_j^n)}{2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} f'(v_{j+1/2}^n)(f(v_{j+1}^n) - f(v_j^n)).$$

□

例 8.3.7. 验证 Richtmyer 格式 是守恒型差分格式.

例 8.3.8. 验证 MacCormack 格式 是守恒型差分格式.

8.3.3 单调格式

8.3.4 TVD 格式

Chapter 9

作业

9.1 第一次书面作业

题目: Prove Eqs. (1.1.8) and (1.1.9) for the L_2 scalar product and norm. (λ is a scalar)

$$(f, g) = \overline{(g, f)}, \quad (f + g, h) = (f, h) + (g, h), \quad (\lambda f, g) = \lambda(f, g), \quad (f, \lambda g) = \lambda(f, g).$$

$$\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|, \quad |(f, g)| \leq \|f\| \cdot \|g\|, \quad \|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|, \quad |||f\| - \|g||| \leq \|f - g\|.$$

解答: 这些公式都是显然的, 按照定义直接验证即可。下面提供柯西不等式的一种经典证明: 不妨设 $\|g\| \neq 0$, 则有

$$0 \leq \|f - \lambda g\|^2 = (f - \lambda g, f - \lambda g).$$

展开得

$$\|f - \lambda g\|^2 = (f, f) - \lambda(f, g) - \bar{\lambda}(g, f) + |\lambda|^2(g, g).$$

取 $\lambda = \frac{(f, g)}{(g, g)}$, 代入可得

$$\|f - \lambda g\|^2 = (f, f) - \frac{|(f, g)|^2}{(g, g)}.$$

因此

$$0 \leq \|f - \lambda g\|^2 = (f, f) - \frac{|(f, g)|^2}{(g, g)},$$

即

$$|(f, g)|^2 \leq (f, f)(g, g),$$

从而得证

$$|(f, g)| \leq \|f\| \cdot \|g\|.$$

题目: Let f be a real function with Fourier series

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{w=-\infty}^{\infty} \hat{f}(w) e^{iwx}.$$

Prove that

$$S_N = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{w=-N}^N \hat{f}(w) e^{iwx}$$

is real for all N .

解答: 按照定义有

$$\hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (e^{iwx}, f),$$

利用 f 是实值函数, 可以得到

$$\overline{\hat{f}(w)} = \overline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} (e^{iwx}, f)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (e^{-iwx}, f) = \hat{f}(-w).$$

因此

$$\hat{f}(0) \in \mathbb{R}, \quad \text{以及} \quad \overline{\hat{f}(w)e^{iwx}} = \overline{\hat{f}(w)}e^{-iwx} = \hat{f}(-w)e^{-iwx}.$$

由此

$$S_N = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\hat{f}(0) + \sum_{w=1}^N \left(\hat{f}(w)e^{iwx} + \hat{f}(-w)e^{-iwx} \right) \right) \in \mathbb{R}.$$

9.2 第二次书面作业

题目: Derive estimates for

$$\left| \left(D - \frac{\partial^3}{\partial x^3} \right) e^{iwx} \right|$$

where $D = D_+^3, D_- D_+^2, D_+^2 D_-, D_-^3, D_0 D_+ D_-$.

解答: 以 $D = D_+^3$ 为例,

$$\begin{aligned} h^3 D_+^3 e^{iwx} &= (e^{3iwh} - 3e^{2iwh} + 3e^{iwh} - 1)e^{iwx} \\ &= ((iwh)^3 + \frac{3}{2}(iwh)^4 + O(w^5 h^5))e^{iwx}. \end{aligned}$$

因此

$$\left| (D_+^3 - \frac{\partial^3}{\partial x^3}) e^{iwx} \right| = O(w^4 h),$$

同理可得:

$$\begin{aligned} \left| (D_- D_+^2 - \frac{\partial^3}{\partial x^3}) e^{iwx} \right| &= O(w^4 h), \\ \left| (D_+^2 D_- - \frac{\partial^3}{\partial x^3}) e^{iwx} \right| &= O(w^4 h), \\ \left| (D_-^3 - \frac{\partial^3}{\partial x^3}) e^{iwx} \right| &= O(w^4 h), \\ \left| (D_0 D_+ D_- - \frac{\partial^3}{\partial x^3}) e^{iwx} \right| &= O(w^5 h^2). \end{aligned}$$

题目: The difference operators D_+, D_0 both approximate $\frac{\partial}{\partial x}$, but they have different norms. Explain why this is not a contradiction.

解答: 不矛盾, 因为 D_+, D_0 算子都只是求导算子的逼近, 由泛函分析知识容易知道求导算子不是一个有界算子, 当 $h \rightarrow 0$ 时 D_+, D_0 算子的算子范数也是趋于无穷的, 当 h 取定时, 由于二者的近似程度不同故算子范数也不同.

题目: Compute $\|D_{x_j}\|_\infty, \|D_{x_j}\|_2, \|D_{xx_j}\|_\infty, j = 1, 2$, on a rectangular grid with gridsize h_j in the x_j direction, $j = 1, 2$.

解答: 对于矩形网格 $h_j = \frac{2\pi}{N_j+1}, j = 1, 2$, 算子范数的推导过程和一维类似.

$$\|D_{x_j}\|_\infty = \frac{1}{h_j} \|E_{x_j}^1 - E_{x_j}^0\|_\infty \leq \frac{2}{h_j} \|u\|_\infty.$$

证明: 设取 $u_{ij} = (-1)^{i+j}$, 计算得:

$$\begin{aligned} \|u\|_2^2 &= (N_1 + 1)(N_2 + 1)h_1 h_2, \\ \|D_{x_j} u\|_2^2 &= \sum_{i=0}^{N_1} \sum_{j=0}^{N_2} \left((-1)^{i+j+1} \frac{h_2}{h_1} \right)^2 h_2 h_1 = \frac{4(N_1 + 1)(N_2 + 1)h_2}{h_1^2}. \end{aligned}$$

因此

$$\|D_{x_j}\|_2 = \frac{2}{h_j}.$$

类似地, 分母取 $u_{ij} = (-1)^{i+j}$, 进一步可得

$$\|D_{xx_j}\|_\infty = \frac{2}{h_j^2}, \quad \|D_{xx_j}\|_2 = \frac{2}{h_j^2}.$$

题目: 试证: 参考书 1 中 P26 的定理 1.3.3 中公式 (1.3.4); 以及当 N 为奇数时, 写出 P26 页相应的定理 1.3.2, 并证明之。

解答: 当 N 为奇数时, 定理 1.3.2 如下:

$$\text{Int}u^{(j)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{w=-(N+1)/2}^{(N+1)/2} \tilde{u}(w)e^{iwx_j}, \quad j = 1, 2,$$

interpolate the two gridfunctions. Then:

$$\tilde{u}(w)^{(1)} + \tilde{u}(w)^{(2)} = (\text{Int}u^{(1)}, \text{Int}u^{(2)}).$$

证明:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(w)^{(1)} &= \frac{(N+1)/2}{\sqrt{2\pi}} \sum_{w=-(N+1)/2}^{(N+1)/2} \tilde{u}(w)e^{iwx_j}, \\ \tilde{u}(w)^{(2)} &= \frac{(N+1)/2}{\sqrt{2\pi}} \sum_{w=-(N+1)/2}^{(N+1)/2} \tilde{u}(w)e^{iwx_k}. \end{aligned}$$

因此:

$$\tilde{u}(w)^{(1)} + \tilde{u}(w)^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{w=-(N+1)/2}^{(N+1)/2} \tilde{u}(w)(e^{iwx_j} + e^{iwx_k}).$$

进一步展开可得:

$$\begin{aligned} \text{Int}u^{(j)} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{w=-(N+1)/2}^{(N+1)/2} \tilde{u}(w)^{(j)}e^{iwx_j}, \\ \text{Int}u^{(1)} + \text{Int}u^{(2)} &= (\text{Int}u^{(1)}, \text{Int}u^{(2)}). \end{aligned}$$

证毕。

9.3 第三次书面作业

题目: Modify the scheme (4.2.1) such that it approximates $u_t = -u_x$. Prove that the conditions (4.2.2) and (4.2.3) are also necessary for stability in this case.

$$v_j^{n+1} = (I + kD_0)v_j^n + \sigma khD_+D_-v_j^n \quad (4.2.1)$$

$$0 < \lambda \leq 2\sigma \leq 1 \quad (4.2.2)$$

$$1 \leq 2\sigma, 2\sigma\lambda \leq 1 \quad (4.2.3)$$

解答: 对于 $u_t = -u_x$ 的差分格式可以写成

$$v_j^{n+1} = (I - kD_0)v_j^n + \sigma khD_+D_-v_j^n.$$

将谐波解 $v_j^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{i\omega x_j}\hat{v}^n$ 代入化简可以得到

$$\hat{Q} = 1 - i\lambda \sin \xi - 4\sigma\lambda \sin^2 \frac{\xi}{2}, \quad \xi = \omega h, \lambda = \frac{k}{h}.$$

计算

$$|\hat{Q}|^2 = (1 - 4\sigma\lambda \sin^2 \frac{\xi}{2})^2 + \lambda^2 \sin^2 \xi.$$

这与书上的 $|\hat{Q}|^2$ 相同, 因此 (2.1.14) 和 (2.1.15) 都是稳定的必要条件。

题目: Choose σ in Eq.(4.3) such that Q uses only two gridpoints. What is the stability condition?

$$v_j^{n+1} = (I + kD_0)v_j^n + \sigma khD_+D_-v_j^n$$

解答: 将原式整理为

$$v_j^{n+1} = \left(\frac{1}{2} + \sigma\right) \lambda v_{j+1}^n + (1 - 2\sigma\lambda)v_j^n + \left(\sigma - \frac{1}{2}\right) \lambda v_{j-1}^n, \quad \lambda = \frac{k}{h}.$$

Case 1: $\sigma = \frac{1}{2}$

$$v_j^{n+1} = \lambda v_{j+1}^n + (1 - \lambda)v_j^n.$$

代入谐波解 $v_j^n = e^{i\omega x_j}\hat{v}^n$, 可得放大因子为:

$$\hat{Q} = (1 - \lambda + \lambda \cos \xi) + i\lambda \sin \xi, \quad \xi = \omega h.$$

计算 $|\hat{Q}|^2$:

$$|\hat{Q}|^2 = 2\lambda(\lambda - 1)(1 - \cos \xi) + 1 = 1 - 4\lambda(1 - \lambda) \sin^2 \frac{\xi}{2}.$$

Case 2: $\sigma = \frac{1}{2\lambda}$

$$v_j^{n+1} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\lambda}\right) v_{j+1}^n + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) v_j^n + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\lambda}\right) v_{j-1}^n.$$

代入同样的方法得到放大因子:

$$\hat{Q} = \cos \xi + i\lambda \sin \xi.$$

计算 $|\hat{Q}|^2$:

$$|\hat{Q}|^2 = \cos^2 \xi + \lambda^2 \sin^2 \xi = 1 - 4(1 - \lambda^2) \left(\sin^2 \frac{\xi}{2} - \sin^4 \frac{\xi}{4} \right).$$

在两种情况下都有:

$$|\hat{Q}|^2 \leq 1 \iff 0 < \lambda \leq 1.$$

题目: 针对方程 $u_t + u_x = 0$, 导出其解的依赖区; 其蛙跳格式的数值解的依赖区; 以及 CFL 条件。

解答: 对于方程 $u_t + u_x = 0$, 特征线为 $\xi = x - t$, 沿着特征线值不变。考虑点 $P(x_j, t_{n+1})$ 处的数值解 v_j^{n+1} , 假设其依赖区为 x_x , 则有:

$$\xi = x_j - t_{n+1} = x_x - 0 \implies x_x = x_j - t_{n+1}.$$

因此, 方程解的依赖区为 $D_p = \{x_x = x_j - t_{n+1}\}$ 。

对于蛙跳格式:

$$v_j^{n+1} = v_j^{n-1} + \lambda(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n),$$

在第一层使用 FTCS 格式:

$$v_j^1 = v_j^0 + \frac{\lambda}{2}(v_{j+1}^0 - v_{j-1}^0),$$

可以推导出数值解 v_j^{n+1} 的依赖区:

$$N_p = \{(x_{j-n-1}, 0), (x_{j-n}, 0), \dots, (x_{j+n}, 0), (x_{j+n+1}, 0)\}.$$

CFL 条件: 依赖区 $D_p \subseteq N_p$, 即:

$$x_{j-n-1} \leq x_j - t_{n+1} \leq x_{j+n+1}.$$

代入网格关系, 得:

$$-(n+1)\Delta x \leq -(n+1)\Delta t \leq (n+1)\Delta x,$$

即:

$$0 < \lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1.$$

9.4 第四次书面作业

2.3.1. 证明当 $\theta \geq \frac{1}{2}$ 时, 如下 θ 格式是无条件稳定的.

$$(I - \theta k D_0) v_j^{n+1} = (I + (1 - \theta) k D_0) v_j^n, \quad j = 0, 1, \dots, N. \quad (2.3.5)$$

证明.

$$\begin{aligned} \hat{Q} &= \frac{1 + ir(1 - \theta) \sin \xi}{1 - ir\theta \sin \xi} = \frac{(1 + ir(1 - \theta) \sin \xi)(1 + ir\theta \sin \xi)}{1 + r^2\theta^2 \sin^2 \xi} = \frac{1 - r^2\theta(1 - \theta) \sin^2 \xi + ir \sin \xi}{1 + r^2\theta^2 \sin^2 \xi} \\ |\hat{Q}|^2 &= \frac{(1 - r^2\theta(1 - \theta) \sin^2 \xi)^2 + r^2 \sin^2 \xi}{1 + 2r^2\theta^2 \sin^2 \xi + r^4\theta^4 \sin^4 \xi} = \frac{1 - 2r^2\theta(1 - \theta) \sin^2 \xi + r^4\theta^2(1 - \theta)^2 \sin^4 \xi + r^2 \sin^2 \xi}{1 + 2r^2\theta^2 \sin^2 \xi + r^4\theta^4 \sin^4 \xi} \\ |\hat{Q}|^2 - 1 &= \frac{-2r^2\theta \sin^2 \xi + r^4\theta^2 \sin^4 \xi - 2r^4\theta^3 \sin^4 \xi + r^2 \sin^2 \xi}{1 + 2r^2\theta^2 \sin^2 \xi + r^4\theta^4 \sin^4 \xi} \\ |\hat{Q}|^2 - 1 &= \frac{r^2 \sin^2 \xi}{(1 + r^2\theta^2 \sin^2 \xi)^2} (-2\theta + r^2\theta^2 \sin^2 \xi - 2r^2\theta^3 \sin^2 \xi + 1) \\ |\hat{Q}|^2 - 1 &= \frac{r^2 \sin^2 \xi}{(1 + r^2\theta^2 \sin^2 \xi)^2} (1 - 2\theta)(1 + r^2\theta^2 \sin^2 \xi) \end{aligned}$$

当 $\theta \geq \frac{1}{2}$, 即隐式格式占据优势时, 格式为无条件稳定的. \square

2.4.1. 在推导精度阶次时, 使用了围绕某点 (x_*, t_*) 的泰勒展开. 证明 (x_*, t_*) 可以任意选择, 特别是, 它不必是网格点.

证明. 不妨设在 (x_j, t_n) 展开的局部截断误差为

$$T_j^n = f(x_j, t_n)h^p + g(x_j, t_n)k^q + O(h^{p+1} + k^{q+1}) = O(h^p + k^q)$$

其中 h 和 k 分别为空间步长和时间步长, 另取附近的一点 (x_*, t_*) 满足

$$|x_j - x_*| \leq Ch, \quad |t_n - t_*| \leq Ck$$

那么

$$f(x_j, t_n) = f(x_*, t_*) + O(h) + O(k)$$

$$g(x_j, t_n) = g(x_*, t_*) + O(h) + O(k)$$

在 (x_*, t_*) 展开的局部截断误差为

$$\begin{aligned} T_{j_*}^{n_*} &= [f(x_*, t_*) + O(h) + O(k)]h^p + [g(x_*, t_*) + O(h) + O(k)]k^q + O(h^{p+1} + k^{q+1}) \\ &= f(x_*, t_*)h^p + g(x_*, t_*)k^q + O(h^{p+1} + k^{q+1}) = O(h^p + k^q) \end{aligned}$$

因此, 挑选某个具体的点 (甚至不要求是格点) 进行 Taylor 展开并不影响最终的结果. \square

2.4.2. 证明跳蛙格式 (2.2.1) 和 Crank-Nicholson 格式 (2.3.3) 的精度为 (2,2). 尽管有相同的精度阶次, 但可以预期某一种格式比另一种更精确. 为什么会这样?

补充作业 1: 针对 $u_t + au_x = 0, a$ 为常数, 基于其积分形式构造时间 1 阶、空间 3 阶的有限差分格式.

题目: 试构造 $U_t + AU_x = 0$ 的迎风格式; 其中 $U = (u, v)^T$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

解答: 容易知道, 存在矩阵可逆矩阵 S , 使得 $S^{-1}AS = \Lambda$, 其中

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

令 $W = SU$, 可得:

$$W_t + \Lambda W_x = 0.$$

故迎风格式为:

$$W_j^{n+1} = W_j^n - \frac{r}{2}\Lambda(W_{j+1}^n - W_{j-1}^n) + \frac{r}{2}|\Lambda|(W_{j+1}^n - 2W_j^n + W_{j-1}^n).$$

或者:

$$V_j^{n+1} = V_j^n - \frac{r}{2}A(V_{j+1}^n - V_{j-1}^n) + \frac{r}{2}|A|(V_{j+1}^n - 2V_j^n + V_{j-1}^n),$$

其中 $|A| = S^{-1}|\Lambda|S$ 。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

9.5 第五次书面作业

题目: Prove that the θ scheme is unconditionally stable for $\theta \geq \frac{1}{2}$.

$$(I - \theta k D_+ D_-) v_j^{n+1} = (I + (1 - \theta) k D_+ D_-) v_j^n, \quad \theta \in [0, 1].$$

解答: 设

$$v_j^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{v}^n(w) e^{iwx_j},$$

代入即得:

$$(1 - \lambda \theta (e^{iwh} - 2 + e^{-iwh})) \hat{v}^{n+1} = (1 + \lambda (1 - \theta) (e^{iwh} - 2 + e^{-iwh})) \hat{v}^n, \quad \lambda = \frac{k}{h^2}.$$

记 $\xi = wh$, 整理得:

$$(1 + 4\lambda \theta \sin^2(\frac{\xi}{2})) \hat{v}^{n+1} = (1 - 4\lambda (1 - \theta) \sin^2(\frac{\xi}{2})) \hat{v}^n.$$

因此:

$$\hat{Q} = \frac{1 - 4\lambda (1 - \theta) \sin^2(\frac{\xi}{2})}{1 + 4\lambda \theta \sin^2(\frac{\xi}{2})}.$$

要求 $-1 \leq \hat{Q} \leq 1$, 显然 $\hat{Q} \leq 1$. 对 $-1 \leq \hat{Q}$ 等价于:

$$2 \left(1 + 4\lambda \theta \sin^2(\frac{\xi}{2}) \right) \geq 4\lambda \sin^2(\frac{\xi}{2}),$$

即:

$$2 + (2\theta - 1) 4\lambda \sin^2(\frac{\xi}{2}) \geq 0.$$

当 $\theta \geq \frac{1}{2}$ 时, $|\hat{Q}| \leq 1$ 无条件稳定。证毕。

题目: Derive the truncation error for the backward Euler and the Crank-Nicholson methods applied to $u_t = u_{xx}$. Prove that it is $\Theta(h^2 + k)$ and $\Theta(h^2 + k^2)$, respectively. Despite this fact, at certain times the backward Euler method is more accurate for the example computed in this section. Explain this paradox.

解答: Backward Euler:

$$\frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{k} = \frac{v_{j+1}^{n+1} - 2v_j^{n+1} + v_{j-1}^{n+1}}{h^2}$$

利用 Taylor 展开:

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{k} &= (u_t)^{n+1} + \frac{k}{2} (u_{tt})^{n+1} + O(k^2), \\ \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} &= (u_{xx})^{n+1} + \frac{h^2}{12} (u_{xxxx})^{n+1} + O(h^4). \end{aligned}$$

因此截断误差为:

$$T_j^{n+1} = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{k} - \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2},$$

代入得:

$$T_j^{n+1} = (u_t)^{n+1} - (u_{xx})^{n+1} + \frac{k}{2} (u_{tt})^{n+1} + \frac{h^2}{12} (u_{xxxx})^{n+1} + O(k^2 + h^4),$$

即:

$$T_j^{n+1} = O(k + h^2).$$

Crank-Nicholson:

$$\frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{k} = \frac{\frac{v_{j+1}^{n+1} - 2v_j^{n+1} + v_{j-1}^{n+1}}{h^2} + \frac{v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n}{h^2}}{2}.$$

利用 Taylor 展开:

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{k} &= (u_t)^{n+\frac{1}{2}} + \frac{k^2}{24}(u_{ttt})^{n+\frac{1}{2}} + O(k^4), \\ \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} &= (u_{xx})^{n+1} + \frac{h^2}{12}(u_{xxxx})^{n+1} + O(h^4). \end{aligned}$$

对空间的两项在时间中间层 $n + \frac{1}{2}$ 处分析可得:

$$\frac{1}{2} \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} = (u_{xx})^{n+\frac{1}{2}} + \frac{k^2}{8}(u_{ttxx})^{n+\frac{1}{2}} + O(k^4).$$

因此截断误差为:

$$T_j^{n+1} = O(k^2 + h^2).$$

解释该现象的悖论: 尽管 Crank-Nicholson 方法截断误差更小, 但是其误差的常数项在某些时间步长下可能导致实际误差比 Backward Euler 更大。这种现象通常由于 Crank-Nicholson 方法的高频误差分量在初始阶段未能完全消失所致。

题目: 针对方程 $u_t = u_{xx} + f(x, t)$, $(x, t) \in D = [0, 1] \times [0, T]$ 的积分形式, 构造以格点处的函数为未知数的有限差分格式, 并导出其局部截断误差。

常用的数值积分公式:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= (b-a)f(a) + \frac{(b-a)^2}{2}f'(c), \quad c \in (a, b), \\ \int_a^b f(x) dx &= \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)] - \frac{(b-a)^3}{12}f''(c), \quad c \in (a, b), \\ \int_a^b f(x) dx &= \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)] + \frac{(b-a)^3}{24}f''(c) + O((b-a)^5). \end{aligned}$$

解答: 取控制体 $\Omega_j^n = [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}] \times [t_n, t_{n+1}]$, 对方程进行积分得到:

$$\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u_t dx = \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u_{xx} dx + \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} f(x, t) dx.$$

对第一项的处理:

$$\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u_t dx = \Delta x(u_j^{n+1} - u_j^n) + O(\Delta x^3 \Delta t).$$

对第二项的处理:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} ((u_x)_{j+1/2} - (u_x)_{j-1/2}) dt = \Delta t [(u_x)_{j+1/2}^n - (u_x)_{j-1/2}^n] + O(\Delta t^2 \Delta x).$$

注意到:

$$u_{j+1} - u_j = \Delta x u_x|_{j+1/2} + \frac{\Delta x^3}{24} u_{xxx}|_{j+1/2} + O(\Delta x^5),$$

$$u_j - u_{j-1} = \Delta x u_x|_{j-1/2} + \frac{\Delta x^3}{24} u_{xxx}|_{j-1/2} + O(\Delta x^5),$$

相减得到:

$$u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1} = \Delta x(u_x|_{j+1/2} - u_x|_{j-1/2}) + O(\Delta x^4).$$

代入 (6.3.1) 可得:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} ((u_x)_{j+1/2} - (u_x)_{j-1/2}) dt = \frac{\Delta t}{\Delta x} [u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n] + O(\Delta t^2 \Delta x^2).$$

最后, 对于源项的处理是显然的:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} f(x, t) dx dt = \Delta t \Delta x f(x_j, t_n) + O(\Delta x^3) + O(\Delta t^2).$$

综上可得:

$$\Delta x(u_j^{n+1} - u_j^n) + O(\Delta x^2 \Delta t) = \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) + O(\Delta x^2 \Delta t^2) + \Delta t \Delta x f(x_j, t_n) + O(\Delta x^3) + O(\Delta t^2).$$

因此对应的有限差分格式为:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} + f(x_j, t_n) + O(\Delta x^2) + O(\Delta t).$$

局部截断误差为 $O(\Delta x^2 + \Delta t)$ 。

题目: 针对方程 $u_t = u_{xx}$, 基于其在控制体 $\Omega = [t_n, t_{n+1}] \times [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$ 上的积分形式, 构造以网格平均为未知数的有限差分格式, 并给出精度。

解答: 对方程进行积分可以得到:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u_t dx dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u_{xx} dx dt.$$

左端项可以化简为:

$$\begin{aligned} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u_t dx dt &= \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(x, t_{n+1}) dx - \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(x, t_n) dx, \\ &= \Delta x (\bar{u}_j^{n+1} - \bar{u}_j^n), \end{aligned}$$

其中 $\bar{u}_j^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(x, t_n) dx$ 。

右端项可以简化得到:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u_{xx} dx dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} [(u_x)_{j+1/2} - (u_x)_{j-1/2}] dt. \quad (6.4.1)$$

为了得到 $(u_x)_{j+1/2}$ 的近似, 我们进行如下操作:

$$\begin{aligned} u_{j+1} - \bar{u}_j &= \frac{1}{\Delta x} \int_{x_j}^{x_{j+1}} u(x, t) dx - \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(x, t) dx, \\ &= \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \Delta x u_x + \frac{\Delta x^2}{2} u_{xx} + \frac{\Delta x^3}{6} u_{xxx} + O(\Delta x^4) dx, \end{aligned}$$

$$= \Delta x (u_x)_{j+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta x^3}{24} (u_{xxx})_{j+\frac{1}{2}} + O(\Delta x^5).$$

同理可得:

$$u_j - u_{j-1} = \Delta x (u_x)_{j-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta x^3}{24} (u_{xxx})_{j-\frac{1}{2}} + O(\Delta x^5).$$

两式相减得:

$$u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1} = \Delta x \left[(u_x)_{j+\frac{1}{2}} - (u_x)_{j-\frac{1}{2}} \right] + O(\Delta x^4). \quad (6.4.2)$$

将 (6.4.2) 代入 (6.4.1), 使用中点公式可得:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[(u_x)_{j+\frac{1}{2}} - (u_x)_{j-\frac{1}{2}} \right] dt = \frac{2\Delta t}{\Delta x} (\bar{u}_{j+1}^n - 2\bar{u}_j^n + \bar{u}_{j-1}^n) + O(\Delta x^2 \Delta t) + O(\Delta t^3).$$

综上可得:

$$\frac{\bar{u}_j^{n+1} - \bar{u}_j^n}{\Delta t} = \frac{\bar{u}_{j+1}^n - 2\bar{u}_j^n + \bar{u}_{j-1}^n}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) + O(\Delta t^2).$$

有限差分格式为:

$$\frac{\bar{u}_j^{n+1} - \bar{u}_j^n}{\Delta t} = \frac{\bar{u}_{j+1}^n - 2\bar{u}_j^n + \bar{u}_{j-1}^n}{\Delta x^2}.$$

精度为时间 2 阶, 空间 2 阶。

9.6 第六次书面作业

题目: Consider the differential equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{j=0}^4 a_j \frac{\partial^j u}{\partial x^j}.$$

Derive the condition for well-posedness corresponding to condition in Theorem 4.2.1. Is it true that the problem is always well posed if $\operatorname{Re} a_4 < 0$? ($a_j = \operatorname{Re} a_j + i \operatorname{Im} a_j \in \mathbb{C}$)

解答: 考虑谐波解:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega x} \hat{u}(w, t), \quad u(x, 0) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega x} \hat{f}(w).$$

代入方程得到:

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = \sum_{j=0}^4 a_j (i\omega)^j \hat{u} = \kappa \hat{u}, \\ \hat{u}(w, 0) = \hat{f}(w), \end{cases}$$

其中 $\kappa = \sum_{j=0}^4 a_j (i\omega)^j$ 。

解得:

$$\hat{u}(w, t) = e^{\kappa t} \hat{u}(w, 0) = e^{\kappa t} \hat{f}(w).$$

因此:

$$\|u(x, t)\|^2 = \|\hat{u}(w, t)\|^2 = e^{2 \operatorname{Re} \kappa t} \|\hat{f}(w)\|^2 = e^{2 \operatorname{Re} \kappa t} \|f\|^2.$$

适定等价于存在 $\alpha \in \mathbb{R}$, 使得:

$$\operatorname{Re} \kappa = (\operatorname{Re} a_4)w^4 + (\operatorname{Im} a_3)w^3 - (\operatorname{Re} a_2)w^2 - (\operatorname{Im} a_1)w + \operatorname{Re} a_0 \leq \alpha, \quad \forall w \in \mathbb{R}.$$

易知, 对于系数数列的四次多项式 $p(w)$, 若首项系数数最小于 0, 则一定存在有限上界 $p(w) \leq \alpha < +\infty$ 。因此:

$$\text{well-posed} \iff \operatorname{Re} \kappa \leq \alpha < 0 \iff \operatorname{Re} a_4 < 0.$$

4.3.1. 对于哪些矩阵 A, B , 系统

$$u_t = Au_x + Bu$$

是能量守恒的 [即, $\|u(\cdot, t)\| = \|u(\cdot, 0)\|$]? 题目: For which matrices A, B is the system $u_t = Au_x + Bu$ energy conserving? (i.e., $\|u(x, t)\| = \|u(x, 0)\|$)

解答: 考虑谐波解:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega x} \hat{u}(w, t), \quad u(x, 0) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega x} \hat{f}(w).$$

代入方程得到:

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = (i\omega A + B)\hat{u}, \\ \hat{u}(w, 0) = \hat{f}(w), \end{cases}$$

解得:

$$\hat{u}(w, t) = e^{(i\omega A + B)t} \hat{f}(w).$$

能量守恒条件:

$$\|u(x, t)\|^2 = \|u(x, 0)\|^2 \implies \|\hat{u}(w, t)\|^2 = \|\hat{u}(w, 0)\|^2.$$

对时间求导:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \|\hat{u}(w, t)\|^2 &= \langle \hat{u}, \hat{u} \rangle_t + \langle \hat{u}, \hat{u} \rangle_t, \\ &= \langle \hat{u}, (i\omega A + B)\hat{u} \rangle + \langle (i\omega A + B)\hat{u}, \hat{u} \rangle, \\ &= \langle \hat{u}, (i\omega(A - A^*) + (B + B^*))\hat{u} \rangle. \end{aligned}$$

当 $A = A^*$ 且 $B = -B^*$ 时, $\frac{\partial}{\partial t} \|\hat{u}(w, t)\|^2 = 0$, 能量守恒。

典型情况: 要求取出可逆矩阵的形式, 假设 A 特征值全为实数, 具有完备的特征向量基 (可以相似对角化)。存在对角阵 Λ 全实数, S 可逆, 使得:

$$A = S\Lambda S^{-1}.$$

取 $v = S^{-1}u$ 变元, 得到:

$$v_t = \Lambda v_x + Cv, \quad C = S^{-1}BS.$$

考虑谐波解:

$$v(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega x} \hat{v}(w, t), \quad v(x, 0) = g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega x} \hat{g}(w).$$

代入方程得到:

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} = (i\omega\Lambda + C)\hat{v}, \\ \hat{v}(w, 0) = \hat{g}(w). \end{cases}$$

能量守恒条件:

$$\|v(x, t)\|^2 = \|v(x, 0)\|^2 \implies \|\hat{v}(w, t)\|^2 = \|\hat{v}(w, 0)\|^2.$$

对时间求导:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \|\hat{v}(w, t)\|^2 &= \langle \hat{v}, \hat{v} \rangle_t + \langle \hat{v}, \hat{v} \rangle_t, \\ &= \langle \hat{v}, (i\omega\Lambda + C)\hat{v} \rangle + \langle (i\omega\Lambda + C)\hat{v}, \hat{v} \rangle, \\ &= \langle \hat{v}, (i\omega(\Lambda - \Lambda^*) + (C + C^*))\hat{v} \rangle. \end{aligned}$$

注意 A 为实对称阵 $A = A^*$, 因此只需要保证 $C = -C^*$ 。

注意: 错误来源即存在于可逆矩阵转换前后基变换后的矩阵附加量:

$$\|v(x, t)\|^2 = \|v(x, 0)\|^2 = \|S^{-1}u(x, t)\|^2 = \langle u(x, t), (S^{-1})^* S^{-1} u(x, t) \rangle \neq \langle u(x, u) \rangle^2.$$

只有当 $S^*S = I$ 的条件 (即宣言 S 为正交阵, A 为 Hermite 亦阵), 才能保证两种一致。

补充作业 1: 试证: (均匀剖分) 用 u 在三个点: $x_{j\pm 1} = (j \pm 1)h, x_j = jh$ 处的函数值的线性组合是无法得到 u_{xx} 的 3 阶或高于 3 阶的近似. **题目:** (均匀剖分) 用 u 在三个点: $x_{j+1} = (j+1)h, x_j = jh$ 处的函数值的线性组合是否无法得到 u_{xx} 的 3 阶或高于 3 阶的近似.

解答: 假设存在一个线性组合能达到 3 阶或者高于 3 阶的近似, 那么有:

$$\alpha u_{j-1} + \beta u_j + \gamma u_{j+1} = (u_{xx})_j + O(h^3)$$

由泰勒展开可以得到:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0, \\ h(\alpha - \gamma) = 0, \\ \frac{h^2}{2}(\alpha + \gamma) = 1, \\ \frac{h^3}{6}(\alpha - \gamma) = 0. \end{cases}$$

可以看到第三个方程与第四个方程冲突, 上面方程组无解, 不存在满足条件的 α, β, γ , 假设不成立. 实际上, 前 4 个方程有唯一解 $\alpha = 1, \beta = -2, \gamma = 1$, 是对 u_{xx} 的二阶近似.

补充作业 2: 针对偏微分方程: $u_t = ((0.1 + \sin^2 x)u_x)_x$, 构造 (2,2) 阶精度的有限差分格式. **题目:** 针对偏微分方程 $u_t = ((0.1 + \sin^2 x)u_x)_x$, 构造 (2,2) 阶精度的有限差分格式.

解答: 为了方便, 我们记 $a(x) = 0.1 + \sin^2 x$, $a_{j+1/2} = a(x_{j+1/2}) = a((x_j + x_{j+1})/2)$. 则可直接构造时间二阶、空间二阶的差分格式如下:

$$\frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} = a_{j+1/2} \frac{v_{j+1}^{n+1} - v_j^{n+1}}{\Delta x} - a_{j-1/2} \frac{v_j^{n+1} - v_{j-1}^{n+1}}{\Delta x}.$$

由下:

$$\begin{aligned} \frac{v_{j+1}^{n+1} - v_j^{n+1}}{\Delta x} &= u_x + \frac{1}{2} \Delta x u_{xx} + \frac{1}{3!} \Delta x^2 u_{xxx} + O(\Delta x^3), \\ a_{j+1/2} \frac{v_{j+1}^{n+1} - v_j^{n+1}}{\Delta x} &= a(u_x + \frac{\Delta x}{2} u_{xx} + \frac{\Delta x^2}{6} u_{xxx}) + a_x \frac{\Delta x}{2} u_x + O(\Delta x^3), \\ a_{j-1/2} \frac{v_j^{n+1} - v_{j-1}^{n+1}}{\Delta x} &= a(u_x - \frac{\Delta x}{2} u_{xx} + \frac{\Delta x^2}{6} u_{xxx}) - a_x \frac{\Delta x}{2} u_x + O(\Delta x^3). \end{aligned}$$

因此:

$$\frac{v_{j+1}^{n+1} - v_j^{n+1}}{\Delta x} - \frac{v_j^{n+1} - v_{j-1}^{n+1}}{\Delta x} = u_{xx} + \frac{1}{3} \Delta x^2 u_{xxx} + O(\Delta x^4).$$

带入:

$$T_j = \frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} = (av_x)_x + O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2).$$

最终有限差分格式为:

$$\frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} = \frac{a_{j+1/2} \frac{v_{j+1}^{n+1} - v_j^{n+1}}{\Delta x} - a_{j-1/2} \frac{v_j^{n+1} - v_{j-1}^{n+1}}{\Delta x}}{\Delta x}.$$

局部截断误差为时间 2 阶, 空间 2 阶。

9.7 第七次书面作业

4.4.1. 证明存在正常数 δ, K 使得抛物方程 $u_t = Au_{xx}$ 的解满足

$$\|u(\cdot, t)\|^2 + \delta \int_0^t \|u_x(\cdot, \xi)\|^2 d\xi \leq K \|u(\cdot, 0)\|^2.$$

证明. 考虑谐波解

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega x} \hat{u}(\omega, t), \quad u(x, 0) =: f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega x} \hat{f}(\omega).$$

由 Parseval 恒等式得

$$\|u(\cdot, t)\|^2 = |\hat{u}(\omega, t)|^2, \quad \|u_x(\cdot, t)\|^2 = \omega^2 |\hat{u}(\omega, t)|^2.$$

原式等价于

$$|\hat{u}(\omega, t)|^2 + \delta \omega^2 \int_0^t |\hat{u}(\omega, \xi)|^2 d\xi \leq K |\hat{u}(\omega, 0)|^2.$$

对 $|\hat{u}(\omega, t)|^2$ 关于时间求导, 得到

$$\partial_t |\hat{u}(\omega, t)|^2 = \langle \hat{u}, \hat{u}_t \rangle + \langle \hat{u}_t, \hat{u} \rangle = \langle \hat{u}, -\omega^2 A \hat{u} \rangle + \langle -\omega^2 A \hat{u}, \hat{u} \rangle = \langle \hat{u}, -\omega^2 (A + A^*) \hat{u} \rangle \leq -\delta \omega^2 |\hat{u}(\omega, t)|^2.$$

对时间从 0 到 t 积分可得

$$|\hat{u}(\omega, t)|^2 - |\hat{u}(\omega, 0)|^2 + \delta \omega^2 \int_0^t |\hat{u}(\omega, \xi)|^2 d\xi \leq 0.$$

□

4.4.2. 如果方程改为 $u_t = Au_{xx} + Bu_x + Cu$, 其中 B 是 Hermitian 矩阵, C 是反 Hermitian 矩阵, 那么对于相同的常数 δ, K , 如上不等式是否依然成立?

证明. 对 $|\hat{u}(\omega, t)|^2$ 关于时间求导, 得到

$$\begin{aligned} \partial_t |\hat{u}(\omega, t)|^2 &= \langle \hat{u}, \hat{u}_t \rangle + \langle \hat{u}_t, \hat{u} \rangle = \langle \hat{u}, (-\omega^2 A + i\omega B + C) \hat{u} \rangle + \langle (-\omega^2 A + i\omega B + C) \hat{u}, \hat{u} \rangle \\ &= \langle \hat{u}, -\omega^2 (A + A^*) \hat{u} \rangle + i\omega \langle \hat{u}, (B - B^*) \hat{u} \rangle + \langle \hat{u}, (C + C^*) \hat{u} \rangle \end{aligned}$$

由条件得 $B = B^*, C = -C^*$, 下与上一题同.

□

4.5.1. 考虑一阶方程 $u_t = Au_x$. 是否可能 Petrovskii 条件对于某个 $\alpha > 0$ 成立但对于 0 不成立?

证明. 代入谱波解可以得到 $\hat{P}(i\omega) = i\omega A$. 假设存在 $\alpha > 0$, 对所有的 ω, λ 是 $\hat{P}(i\omega)$ 的特征值, 有

$$\operatorname{Re} \lambda \leq \alpha$$

$$\operatorname{Re} \lambda = \operatorname{Re} \lambda(\hat{P}(i\omega)) = \operatorname{Re} \lambda(i\omega A) = -\omega \operatorname{Im} \lambda(A) \leq \alpha$$

由于 ω 的任意性知 $\operatorname{Im} \lambda(A) = 0$, 因此 $\alpha = 0$ 也成立.

□

4.5.2. 为系统

$$u_t = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} u_x$$

导出满足方程 (4.5.14) 和 (4.5.15) 的矩阵 $\hat{H}(\omega)$.

证明. 代入谱波解可以得到

$$\hat{P}(i\omega) = i\omega \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \hat{P}^*(i\omega) = -i\omega \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 10 & 2 \end{bmatrix}$$

我们假设

$$\hat{H}(\omega) = \begin{bmatrix} a & c \\ \bar{c} & b \end{bmatrix}$$

这样可以得到:

$$\hat{H}(\omega)\hat{P}(i\omega) + \hat{P}^*(i\omega)\hat{H} = \begin{bmatrix} 0 & 10a + c \\ -10a - \bar{c} & 10(\bar{c} - c) \end{bmatrix}$$

我们取 $a = 1, c = -10, \alpha = 0$ 即可满足 (4.5.15). 取 $b = 200, K = 201$ 有

$$\hat{H}(\omega) - K^{-1}I = \begin{bmatrix} \frac{200}{201} & -10 \\ -10 & \frac{199}{200} \end{bmatrix} > 0, \quad KI - \hat{H}(\omega) = \begin{bmatrix} 200 & 10 \\ 10 & 1 \end{bmatrix} > 0$$

这样就满足 (4.5.14), 最终得到的 $\hat{H}(\omega)$ 为

$$\hat{H}(\omega) = \begin{bmatrix} 1 & -10 \\ -10 & 200 \end{bmatrix}$$

□

HW 3.1.2 证明以下用于逼近方程

$$v_t + av_x = \nu v_{xx}$$

解的差分格式是无条件稳定的.

1. $u_k^{n+1} + \frac{R}{2}\delta_0 u_k^{n+1} - r\delta^2 u_k^{n+1} = u_k^n$
2. $u_k^{n+1} + \frac{R}{4}\delta_0 u_k^{n+1} - \frac{r}{2}\delta^2 u_k^{n+1} = u_k^n - \frac{R}{4}\delta_0 u_k^n + \frac{r}{2}\delta^2 u_k^n$

证明. 代入谱波解可以得到 $v_j^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{v}^n(w) e^{iwx_j}$, 得到

$$\left[1 + iR \sin(wh) + 4r \sin^2 \left(\frac{wh}{2} \right) \right] \hat{v}^{n+1}(w) = \hat{v}^n(w)$$

因此

$$\hat{Q} = \frac{1}{1 + iR \sin(wh) + 4r \sin^2 \left(\frac{wh}{2} \right)}$$

$$|\hat{Q}|^2 = \frac{1}{(1 + 4r \sin^2 \left(\frac{wh}{2} \right))^2 + (R \sin(wh))^2} \leq 1$$

无条件稳定.

□

补充作业: 试证: 若对于任意 ω , 存在常数 α , 使得 $\hat{P}(i\omega) + \hat{P}^*(i\omega) \leq 2\alpha I$; 则该偏微分方程组的初值问题 (1) 是 Well-Posed.

9.8 第八次书面作业

例 5.8.3 分析差分格式 (5.8.21)-(5.8.22) 的一致性和稳定性。

解答: 将 $u_{jk}^{n+1/2}$ 从方程 (5.8.21) 代入方程 (5.8.22), 可以很容易看出差分格式 (5.8.21)-(5.8.22) 在 Δt 上是二阶准确的。一个更为复杂的计算 (请记住, 不需要考虑 Δt^3 和 Δt^4 阶的项) 表明, 该格式在 $\mathcal{O}(\Delta x^2) + \mathcal{O}(\Delta y^2)$ 上也是准确的。参见作业 HW5.8.5。(我们应该记住, 这些计算应由计算机完成, 而不是我们。)

为了分析差分格式 (5.8.21)-(5.8.22) 的稳定性, 我们对两个方程取离散傅里叶变换, 注意到

$$\hat{u}^{n+1} = \left(1 - iR_y \sin \eta - 2R_y^2 \sin^2 \frac{\eta}{2}\right) \hat{u}^{n+1/2} \quad (5.8.23)$$

$$= \left(1 - iR_y \sin \eta - 2R_y^2 \sin^2 \frac{\eta}{2}\right) \left(1 - iR_x \sin \xi - 2R_x^2 \sin^2 \frac{\xi}{2}\right) \hat{u}^n, \quad (5.8.24)$$

并使用一维 Lax-Wendroff 格式的分析来得出, 当且仅当 $\max\{|R_x|, |R_y|\} \leq 1$ 时, $|\rho(\xi, \eta)|^2$ 小于或等于 1。因此, 差分格式 (5.8.21)-(5.8.22) 在 $\mathcal{O}(\Delta t^2) + \mathcal{O}(\Delta x^2) + \mathcal{O}(\Delta y^2)$ 阶上是准确的且条件稳定的, 因此差分格式 (5.8.21)-(5.8.22) 是条件收敛的, 准确阶为 $\mathcal{O}(\Delta t^2) + \mathcal{O}(\Delta x^2) + \mathcal{O}(\Delta y^2)$ 。

补充作业 1: 分析偏微分方程 $u_t + u_x - \nu_2 u_{xx} + \mu_3 u_{xxx} = 0$ 的耗散性、色散性。

解. 取谐波 $u(x, t) = e^{i(\omega x + kt)}$, 代入 PDE 得到

$$ik + i\omega - \nu_2(i\omega)^2 + \mu_3(i\omega)^3 = 0 \implies k = -\omega + \mu_3\omega^3 + i\nu_2\omega^2 =: \alpha(\omega) + i\beta(\omega)$$

耗散性看 $\beta(\omega)$, 色散性看 $\alpha(\omega)/\omega$, 所以我们得出结论

- 当 ν_2 大于零、等于零、小于零时, PDE 分别是具有耗散性的、没有耗散性的、逆耗散的。
- 当 μ_3 等于零、不等于零时, PDE 分别是无色散的、有色散的。

□

补充作业 2: 用两种方法分析偏微分方程 $u_t = u_{xx}$ 的 FTCS 格式的耗散性和色散性。

解法一. 由上一题可知 PDE 具有耗散性, 但是没有色散性. 接下来分析 FTCS 格式的性质

$$v_j^{n+1} = (1 - 2\frac{\Delta t}{\Delta x^2})v_j^n + \frac{\Delta t}{\Delta x^2}(v_{j+1}^n + v_{j-1}^n), \quad \lambda = 1 - 4\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2 \frac{\omega \Delta x}{2}, \quad \lambda_e = e^{-\omega^2 \Delta t}.$$

因为放大因子 λ 没有虚部, 所以 FTCS 格式无色散. 当 $\Delta t/\Delta x^2 \leq \frac{1}{2}$ 时, FTCS 格式是耗散的. 下面我们比较偏微分方程的放大因子 λ_e 与 FTCS 格式的放大因子 λ 之间的关系, 泰勒展开得到

$$\lambda = 1 - \omega^2 \Delta t + \frac{\omega^4 \Delta x^2 \Delta t}{12} + O(\omega^6 \Delta x^4 \Delta t), \quad \lambda_e = 1 - \omega^2 \Delta t + \frac{\omega^4 \Delta t^2}{2} + O(\omega^6 \Delta t^3).$$

当 $\Delta t/\Delta x^2 < \frac{1}{6}$ 时, 数值逆耗散. 当 $\frac{1}{6} \leq \Delta t/\Delta x^2 \leq \frac{1}{2}$ 时, 数值正耗散. 方法无数值色散.

□

解法二. 使用 MPDE 方法. 假设 $u(x, t)$ 是与差分格式等价的 PDE 的精确解, 则有

$$0 = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} = u_t + \frac{\Delta t}{2}u_{tt} + \frac{\Delta t^3}{6}u_{ttt} + \cdots - u_{xx} - \frac{\Delta x^2}{12}u_{xxxx} - \frac{\Delta x^4}{360}u_{xxxxxx} + \cdots$$

整理得

$$u_t - u_{xx} + \frac{\Delta t}{2}u_{tt} - \frac{\Delta x^2}{12}u_{xxxx} + \frac{\Delta t^3}{6}u_{ttt} - \frac{\Delta x^4}{360}u_{xxxxxx} + \cdots = 0 \quad (*)$$

对 (*) 式关于 t 求导得到

$$u_{tt} - u_{xxt} + \frac{\Delta t}{2}u_{ttt} - \frac{\Delta x^2}{12}u_{xxxxt} + \cdots = 0$$

对 (*) 式关于 x 求导两次得到

$$u_{xxt} - u_{xxxx} + \frac{\Delta t}{2}u_{xxtt} - \frac{\Delta x^2}{12}u_{xxxxxx} + \cdots = 0$$

用这两个式子消去 u_{tt}, u_{xxt} 得到

$$u_t - u_{xx} + \left(\frac{\Delta t}{2} - \frac{\Delta x^2}{12}\right)u_{xxxx} - \frac{\Delta t^2}{12}u_{ttt} - \frac{\Delta t^2}{4}u_{xxtt} + \frac{\Delta x^2 \Delta t}{24}u_{xxxxt} + \left(\frac{\Delta x^2 \Delta t}{24} - \frac{\Delta x^4}{360}\right)u_{xxxxxx} + \cdots = 0$$

将方程的时间 t 的导数转化为空间 x 的导数的过程中, 不会出现关于 x 的奇数阶项, 因此色散关系中 k 的实部为零, 所以 FTCS 格式无色散. 由于原 PDE 也是无色散的, 因此无数值色散. 对于耗散性, 我们考虑最多与 Δt 或 Δx^2 同量级的量, 也就是上式的前三项, 代入谐波解得到

$$k = i(\omega^2 + \omega^4(\frac{\Delta t}{2} - \frac{\Delta x^2}{12}))$$

当 $0 < r \leq \frac{1}{2}$ 时, FTCS 格式是耗散的. 数值耗散需要与 PDE 比较, 由 ω^4 的系数决定, 当 $0 < r < \frac{1}{6}$ 时, 数值逆耗散. 当 $\frac{1}{6} \leq r \leq \frac{1}{2}$ 时, 数值正耗散. \square

9.9 第九次书面作业

5.8.7 求二维常系数对流方程

$$u_t + au_x + bu_y = 0$$

的以下差分格式在点 $(j\Delta x, k\Delta y, (n+1)\Delta t)$ 的数值依赖域并确定 CFL 条件.

$$(1) \quad v_{jk}^{n+1} = a_2 v_{j,k-1}^n + a_3 v_{jk}^n + a_4 v_{j+1,k}^n$$

数值依赖域为 $[j\Delta x, (j+n+1)\Delta x] \times [(k-n-1)\Delta y, k\Delta y]$

CFL 条件为 $-1 \leq \frac{a\Delta t}{\Delta x} \leq 0, 0 \leq \frac{b\Delta t}{\Delta y} \leq 1$.

$$(2) \quad v_{jk}^{n+1} = a_1 v_{j-1,k}^n + a_3 v_{jk}^n + a_4 v_{j+1,k}^n + a_5 v_{j,k+1}^n$$

数值依赖域为 $[(j-n-1)\Delta x, (j+n+1)\Delta x] \times [k\Delta y, (k+n+1)\Delta y]$

CFL 条件为 $-1 \leq \frac{a\Delta t}{\Delta x} \leq 1, -1 \leq \frac{b\Delta t}{\Delta y} \leq 0$.

$$(3) \quad v_{jk}^{n+1} = a_1 v_{j-1,k}^n + a_3 v_{jk}^n + a_5 v_{j,k+1}^n$$

数值依赖域为 $[(j-n-1)\Delta x, j\Delta x] \times [k\Delta y, (k+n+1)\Delta y]$

CFL 条件为 $0 \leq \frac{a\Delta t}{\Delta x} \leq 1, -1 \leq \frac{b\Delta t}{\Delta y} \leq 0$.

$$(4) \quad v_{jk}^{n+1} = a_6 v_{j+1,k+1}^n + a_7 v_{j+1,k-1}^n + a_8 v_{j-1,k-1}^n + a_9 v_{j-1,k+1}^n$$

数值依赖域为 $[(j-n-1)\Delta x, (j+n+1)\Delta x] \times [(k-n-1)\Delta y, (k+n+1)\Delta y]$

CFL 条件为 $-1 \leq \frac{a\Delta t}{\Delta x} \leq 1, -1 \leq \frac{b\Delta t}{\Delta y} \leq 1$.

4.4.11 证明 Peaceman-Rachford 格式的三维形式

$$\left(1 - \frac{r_x}{3} \delta_x^2\right) u_{jk}^{n+\frac{1}{3}} = \left(1 + \frac{r_y}{3} \delta_y^2 + \frac{r_z}{3} \delta_z^2\right) u_{jk}^n$$

$$\left(1 - \frac{r_y}{3} \delta_y^2\right) u_{jk}^{n+\frac{2}{3}} = \left(1 + \frac{r_x}{3} \delta_x^2 + \frac{r_z}{3} \delta_z^2\right) u_{jk}^{n+\frac{1}{3}}$$

$$\left(1 - \frac{r_z}{3} \delta_z^2\right) u_{jk}^{n+1} = \left(1 + \frac{r_x}{3} \delta_x^2 + \frac{r_y}{3} \delta_y^2\right) u_{jk}^{n+\frac{2}{3}}$$

是条件稳定的, 并证明该格式的阶为 $O(\Delta t + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)$.

解答: 取 $v_{i,j,\ell}^n = e^{i(\omega_x i \Delta x + \omega_y j \Delta y + \omega_z \ell \Delta z)}$ 代入计算每一步的放大因子, 使用记号 $\xi_x = \omega_x \Delta x, \xi_y = \omega_y \Delta y, \xi_z = \omega_z \Delta z$

$$Q_1 = \frac{1 - \frac{3}{4} r_y \sin^2 \left(\frac{\xi_y}{2} \right) - \frac{3}{4} r_z \sin^2 \left(\frac{\xi_z}{2} \right)}{1 + \frac{3}{4} r_y \sin^2 \left(\frac{\xi_y}{2} \right) + \frac{3}{4} r_z \sin^2 \left(\frac{\xi_z}{2} \right)}$$

$$Q_2 = \frac{1 - \frac{3}{4} r_x \sin^2 \left(\frac{\xi_x}{2} \right) - \frac{3}{4} r_z \sin^2 \left(\frac{\xi_z}{2} \right)}{1 + \frac{3}{4} r_x \sin^2 \left(\frac{\xi_x}{2} \right) + \frac{3}{4} r_z \sin^2 \left(\frac{\xi_z}{2} \right)}$$

$$Q_3 = \frac{1 - \frac{3}{4} r_x \sin^2 \left(\frac{\xi_x}{2} \right) - \frac{3}{4} r_y \sin^2 \left(\frac{\xi_y}{2} \right)}{1 + \frac{3}{4} r_x \sin^2 \left(\frac{\xi_x}{2} \right) + \frac{3}{4} r_y \sin^2 \left(\frac{\xi_y}{2} \right)}.$$

那么

$$\hat{Q} = \frac{1 - \frac{3}{4}r_y \sin^2\left(\frac{\xi_y}{2}\right) - \frac{3}{4}r_z \sin^2\left(\frac{\xi_z}{2}\right)}{1 + \frac{3}{4}r_y \sin^2\left(\frac{\xi_y}{2}\right) + \frac{3}{4}r_z \sin^2\left(\frac{\xi_z}{2}\right)}.$$

若满足 $0 < r_x + r_y + r_z \leq \frac{3}{2}$, 则有

$$|Q_1| \leq 1, |Q_2| \leq 1, |Q_3| \leq 1 \implies |\hat{Q}| \leq 1.$$

但是无法得到无条件的稳定性。将格式整理为如下形式:

$$\left(1 - \frac{r_x}{3}\delta_x^2 - \frac{r_y}{3}\delta_y^2 - \frac{r_z}{3}\delta_z^2\right)v_{i,j,\ell}^{n+1} + Fv_{i,j,\ell}^{n+1} = \left(1 + \frac{2r_x}{3}\delta_x^2 + \frac{2r_y}{3}\delta_y^2 + \frac{2r_z}{3}\delta_z^2\right)v_{i,j,\ell}^n + Gv_{i,j,\ell}^n$$

这里的 F 和 G 是两个离散算子, 定义为

$$\begin{aligned} F &= \left(1 - \frac{r_x}{3}\delta_x^2\right)\left(1 - \frac{r_y}{3}\delta_y^2\right)\left(1 - \frac{r_z}{3}\delta_z^2\right) - \left(1 - \frac{r_x}{3}\delta_x^2 - \frac{r_y}{3}\delta_y^2 - \frac{r_z}{3}\delta_z^2\right) \\ G &= \left(1 + \frac{r_y}{3}\delta_y^2 + \frac{r_z}{3}\delta_z^2\right)\left(1 + \frac{r_x}{3}\delta_x^2 + \frac{r_z}{3}\delta_z^2\right)\left(1 + \frac{r_x}{3}\delta_x^2 + \frac{r_y}{3}\delta_y^2\right) \\ &\quad - \left(1 + \frac{2r_x}{3}\delta_x^2 + \frac{2r_y}{3}\delta_y^2 + \frac{2r_z}{3}\delta_z^2\right). \end{aligned}$$

局部截断误差满足

$$\begin{aligned} \Delta t T_{i,j,\ell}^n &= \left(1 - \frac{r_x}{3}\delta_x^2 - \frac{r_y}{3}\delta_y^2 - \frac{r_z}{3}\delta_z^2\right)v_{i,j,\ell}^{n+1} - \left(1 + \frac{2r_x}{3}\delta_x^2 + \frac{2r_y}{3}\delta_y^2 + \frac{2r_z}{3}\delta_z^2\right)v_{i,j,\ell}^n \\ &\quad + (Fv_{i,j,\ell}^{n+1} - Gv_{i,j,\ell}^n). \end{aligned}$$

计算可得

$$T_{i,j,\ell}^n = \frac{1}{\Delta t} (Fv_{i,j,\ell}^{n+1} - Gv_{i,j,\ell}^n) + O(\Delta t + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2).$$

只需要保证 $\frac{1}{\Delta t} (Fv_{i,j,\ell}^{n+1} - Gv_{i,j,\ell}^n)$ 不影响阶数即可, 例如

$$\Delta t r_x \delta_x^2 v_{i,j,\ell}^{n+1} = \Delta t (u_{xx}^n + O(\Delta x^2) + O(\Delta y^2)).$$

因此最终的局部截断误差为

$$T_{i,j,\ell}^n = O(\Delta t + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2).$$

题目: 对于二维常系数散方程 $u_t = au_{xx} + bu_{yy}$, 证明 Crank-Nicolson 格式的截断误差, 分析其稳定性。

解答: Crank-Nicolson 格式具体为

$$\frac{v_{j,k}^{n+1} - v_{j,k}^n}{\Delta t} = \frac{a}{2\Delta x^2} \delta_x^2 (v_{j,k}^n + v_{j,k}^{n+1}) + \frac{b}{2\Delta y^2} \delta_y^2 (v_{j,k}^n + v_{j,k}^{n+1}).$$

计算 $(x_j, y_k, t^{n+1/2})$ 处的局部截断误差

$$T_{j,k}^{n+1/2} = \frac{v_{j,k}^{n+1} - v_{j,k}^n}{\Delta t} - \frac{a}{2\Delta x^2} \delta_x^2 (v_{j,k}^n + v_{j,k}^{n+1}) + \frac{b}{2\Delta y^2} \delta_y^2 (v_{j,k}^n + v_{j,k}^{n+1}).$$

对于时间离散部分:

$$\frac{v_{j,k}^{n+1} - v_{j,k}^n}{\Delta t} = u_t + \left(-\frac{\Delta t^2}{24} u_{ttt} + O(\Delta t^4)\right)_{j,k}^{n+1/2}.$$

对于空间离散部分, 注意到

$$\frac{1}{2\Delta x^2} \delta_x^2 (v_{j,k}^n + v_{j,k}^{n+1}) = \left(u_{xx} + \frac{\Delta x^2}{8} u_{xxtt} + \frac{\Delta x^2}{12} u_{xxxx} + O(\Delta x^4) \right)_{j,k}^{n+1/2}.$$

因此在两个时间层取平均得到

$$\frac{1}{2\Delta x^2} \delta_x^2 (v_{j,k}^n + v_{j,k}^{n+1}) = (u_{xx} + O(\Delta x^2))_{j,k}^{n+1/2}.$$

同理可得

$$\frac{1}{2\Delta y^2} \delta_y^2 (v_{j,k}^n + v_{j,k}^{n+1}) = (u_{yy} + O(\Delta y^2))_{j,k}^{n+1/2}.$$

因此

$$T_{j,k}^{n+1/2} = (u_t - au_{xx} - bu_{yy})_{j,k}^{n+1/2} + O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2) + O(\Delta y^2).$$

稳定性: 首先将 CN 格式整理为如下形式

$$\left(1 - \frac{a\Delta t}{2\Delta x^2} \delta_x^2 - \frac{b\Delta t}{2\Delta y^2} \delta_y^2 \right) v_{j,k}^{n+1} = \left(1 + \frac{a\Delta t}{2\Delta x^2} \delta_x^2 + \frac{b\Delta t}{2\Delta y^2} \delta_y^2 \right) v_{j,k}^n.$$

取 $v_{j,k}^n = e^{i(\omega_x x + \omega_y y)}$ 进行代入, 注意到

$$\delta_x^2 v = (e^{i\omega_x x} - 2 + e^{-i\omega_x x}) v = -4 \sin^2 \left(\frac{\omega_x \Delta x}{2} \right) v.$$

代入可得

$$\left(1 + \frac{a\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2 \left(\frac{\omega_x \Delta x}{2} \right) + \frac{b\Delta t}{\Delta y^2} \sin^2 \left(\frac{\omega_y \Delta y}{2} \right) \right) v^{n+1} = \left(1 - \frac{a\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2 \left(\frac{\omega_x \Delta x}{2} \right) - \frac{b\Delta t}{\Delta y^2} \sin^2 \left(\frac{\omega_y \Delta y}{2} \right) \right) v^n.$$

因此放大因子为

$$\hat{Q} = \frac{1 - \frac{a\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2 \left(\frac{\omega_x \Delta x}{2} \right) - \frac{b\Delta t}{\Delta y^2} \sin^2 \left(\frac{\omega_y \Delta y}{2} \right)}{1 + \frac{a\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2 \left(\frac{\omega_x \Delta x}{2} \right) + \frac{b\Delta t}{\Delta y^2} \sin^2 \left(\frac{\omega_y \Delta y}{2} \right)}.$$

需要证明 $|\hat{Q}| \leq 1$ 始终成立。由于 $a, b > 0$, 显然有 $\hat{Q} > 0$; 此外

$$\hat{Q} \leq 1.$$

因此 $\hat{Q} \leq 1$, 得证无条件稳定性。

题目: 构造 $u_t + u_x + u_y = 0$ 的 ADI 格式, 并推导截断误差, 分析其稳定性。

解答: ADI 格式如下:

$$\begin{cases} \left(1 + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \delta_x \right) v_{j,k}^{n+1/2} = \left(1 - \frac{\Delta t}{2\Delta y} \delta_y \right) v_{j,k}^n \\ \left(1 + \frac{\Delta t}{2\Delta y} \delta_y \right) v_{j,k}^{n+1} = \left(1 - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \delta_x \right) v_{j,k}^{n+1/2}. \end{cases}$$

或者写作

$$\left(1 + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \delta_x \right) \left(1 + \frac{\Delta t}{2\Delta y} \delta_y \right) v_{j,k}^{n+1} = \left(1 - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \delta_x \right) \left(1 - \frac{\Delta t}{2\Delta y} \delta_y \right) v_{j,k}^n.$$

这里的 δ_x 和 δ_y 代表某种空间离散, 可以使用中心差分 (central), 也可以使用迎风差分 (upwind)。

对于 ADI 格式的稳定性分析, 考虑取 $v_{j,k}^n = e^{i(u_x j \Delta x + u_y k \Delta y)}$, 代入得到

$$\delta_x v = (e^{iu_x \Delta x} - 1) e^{iu_x j \Delta x}, \quad \delta_y v = (e^{iu_y \Delta y} - 1) e^{iu_y k \Delta y}.$$

因此放大因子为

$$\hat{Q} = \frac{\left(1 - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(1 - e^{-iu_x\Delta x})\right) \left(1 - \frac{\Delta t}{2\Delta y}(1 - e^{-iu_y\Delta y})\right)}{\left(1 + \frac{\Delta t}{2\Delta x}(1 - e^{iu_x\Delta x})\right) \left(1 + \frac{\Delta t}{2\Delta y}(1 - e^{iu_y\Delta y})\right)}.$$

对于中心差分的情况, 展开可得

$$\hat{Q} = \frac{1 - \frac{\Delta t}{2\Delta x}2i\sin(u_x\Delta x/2) - \frac{\Delta t}{2\Delta y}2i\sin(u_y\Delta y/2)}{1 + \frac{\Delta t}{2\Delta x}2i\sin(u_x\Delta x/2) + \frac{\Delta t}{2\Delta y}2i\sin(u_y\Delta y/2)}.$$

对于迎风差分 ADI 格式 ($u_x, u_y > 0$), 可以写为

$$\hat{Q} = \frac{\left(1 - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\sin^2\left(\frac{u_x\Delta x}{2}\right)\right) \left(1 - \frac{\Delta t}{2\Delta y}\sin^2\left(\frac{u_y\Delta y}{2}\right)\right)}{\left(1 + \frac{\Delta t}{2\Delta x}\sin^2\left(\frac{u_x\Delta x}{2}\right)\right) \left(1 + \frac{\Delta t}{2\Delta y}\sin^2\left(\frac{u_y\Delta y}{2}\right)\right)}.$$

因此 $|\hat{Q}| \leq 1$ 。

截断误差分析: 对于截断误差的计算比较繁琐, 考虑与 ADI 格式类似的 CN 格式

$$\left(1 + \frac{\Delta t}{2\Delta x}\delta_x + \frac{\Delta t}{2\Delta y}\delta_y\right)v_{j,k}^{n+1} = \left(1 - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\delta_x - \frac{\Delta t}{2\Delta y}\delta_y\right)v_{j,k}^n.$$

对于 CN 格式的局部截断误差 (记作 $T_{j,k}^{n+1/2}$) 满足

$$\Delta t T_{j,k}^{n+1/2} = \left(1 + \frac{\Delta t}{2\Delta x}\delta_x + \frac{\Delta t}{2\Delta y}\delta_y\right)v_{j,k}^{n+1} - \left(1 - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\delta_x - \frac{\Delta t}{2\Delta y}\delta_y\right)v_{j,k}^n.$$

相同地, ADI 格式的局部截断误差 (记作 $T_{j,k}^{n+1}$) 满足

$$\Delta t T_{j,k}^{n+1} = \left(1 + \frac{\Delta t}{2\Delta x}\delta_x\right) \left(1 + \frac{\Delta t}{2\Delta y}\delta_y\right)v_{j,k}^{n+1} - \left(1 - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\delta_x\right) \left(1 - \frac{\Delta t}{2\Delta y}\delta_y\right)v_{j,k}^n.$$

经过计算可得 ADI 格式的局部截断误差为

$$T_{j,k}^{n+1} = O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2) + O(\Delta y^2).$$

9.10 第十次书面作业

题目: Determine the order of accuracy of the following difference equations to the given initial-boundary-value problems. (a) Implicit scheme (BTCS) for an initial-boundary-value problem with a Neumann boundary condition and lower order terms.

$$v_k^{n+1} + \frac{a\Delta t}{2\Delta x} \delta_0 v_k^{n+1} - \frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2} \delta^2 v_k^{n+1} = v_k^n, \quad k = 0, \dots, M-1$$

$$v_k^0 = f(k\Delta x), \quad k = 1, \dots, M$$

$$v_M^{n+1} = 0$$

$$\frac{v_1^{n+1} - v_0^{n+1}}{2\Delta x} = \alpha((n+1)\Delta t)$$

$$u_t + au_x = \nu u_{xx}, \quad x \in (0, 1), t > 0$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in [0, 1]$$

$$u(1, t) = 0, \quad t \geq 0$$

$$u_x(0, t) = \alpha(t), \quad t \geq 0$$

解答: 对于 $j = 1, \dots, M-1$

$$T_j^{n+1} = \frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} + \frac{a}{2\Delta x} (v_{j+1}^{n+1} - v_{j-1}^{n+1}) - \frac{\nu}{\Delta x^2} (v_{j+1}^{n+1} - 2v_j^{n+1} + v_{j-1}^{n+1}) = O(\Delta t + \Delta x^2).$$

$j = M$ 时, 边界处理得到的是精确的。由 $x = 0$ 处边界处理可以得到

$$v_1^{n+1} = v_1^n - 2\Delta x \alpha((n+1)\Delta t).$$

因此在 $j = 0$ 处, 数值格式为:

$$\frac{v_1^{n+1} - v_0^{n+1}}{\Delta x} + a\alpha((n+1)\Delta t) = \frac{\nu}{\Delta x^2} (2v_1^{n+1} - 2v_0^{n+1} - 2\Delta x \alpha((n+1)\Delta t)).$$

根据边界条件 $u_x(0, t) = \alpha(t)$, 计算截断误差:

$$\begin{aligned} T_0^{n+1} &= \frac{v_1^{n+1} - v_0^{n+1}}{\Delta x} + a\alpha((n+1)\Delta t) - \frac{\nu}{\Delta x^2} (2v_1^{n+1} - 2v_0^{n+1} - 2\Delta x \alpha((n+1)\Delta t)) \\ &= (u_t + au_x - \nu u_{xx})^{n+1} + O(\Delta t^2 + \Delta x^2). \end{aligned}$$

因此, 该格式的整体误差为 $O(\Delta t + \Delta x)$ 。

题目: Consider the initial-boundary-value problem

$$u_t + au_x = 0, \quad x \in (0, 1), t > 0 \quad (2.4.20)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in [0, 1] \quad (2.4.21)$$

$$u(1, t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (2.4.22)$$

where $a < 0$, along with the difference scheme ($\Delta x = 1/M$)

$$v_k^{n+1} = (1 + R)v_k^n - Rv_{k+1}^n, \quad k = 0, \dots, M-1 \quad (2.4.23)$$

$$v_M^{n+1} = 0 \quad (2.4.24)$$

$$v_k^0 = f(k\Delta x), \quad k = 0, \dots, M \quad (2.4.25)$$

where $R = a\Delta t/\Delta x$. Show that if $|R| \leq 1$, difference scheme (2.4.23)-(2.4.25) is stable.

解答: 由于 $a < 0$, $|R| < 1$ 可知 $-1 < R < 0$, 在 $k = M$ 处是精确值。对于 $k = 0, 1, \dots, M-1$

$$|u_k^{n+1}| = |(1+R)u_k^n - Ru_{k+1}^n|$$

$$\leq (1+R)|u_k^n| + (-R)|u_{k+1}^n|$$

$$\leq \|u^n\|_\infty.$$

因此 $\|u^{n+1}\|_\infty \leq \|u^n\|_\infty$, 格式关于 $\|\cdot\|_\infty$ 是稳定的。

9.11 第十一次书面作业

题目: Apply the forward Euler method to Eq. (11.2.6) and prove that it is stable for $\frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{2}$:

$$\frac{dv_j}{dt} = D_+ D_- v_j \quad (11.2.6a)$$

$$v_j(0) = f_j, \quad j = 1, 2, \dots, N-1 \quad (11.2.6b)$$

$$D_+ v_0 + \frac{1}{2} r_0 (v_1 + v_0) = 0, \quad D_- v_N + \frac{1}{2} r_1 (v_N + v_{N-1}) = 0, \quad (11.2.6c)$$

解答: 由于

$$v_j^{n+1} = v_j^n + k D_+ D_- v_j^n, \quad j = 1, \dots, N-1$$

因此有

$$\begin{aligned} \|v^{n+1}\|_{1,N-1}^2 &= \|v^n\|_{1,N-1}^2 + 2k(v^n, D_+ D_- v^n)_{1,N-1} + k^2 \|D_+ D_- v^n\|_{1,N-1}^2 \\ &= \|v^n\|_{1,N-1}^2 - 2k \|D_- v^n\|_{1,N}^2 + 2k(v_0^n D_- v_1^n - v_N^n D_- v_{N-1}^n) + k^2 \|D_+ D_- v^n\|_{1,N-1}^2. \end{aligned}$$

在下面的推导中假设全部为实数, 并省略上标 n 。当 h 足够小时, 存在常数 $C > 0$ 使得

$$|v_0| \leq C|v_1|, \quad |v_N| \leq C|v_{N-1}|$$

由引理 11.2.1 可得, 对于 $\epsilon > 0$, 存在 $C(\epsilon) > 0$ 使得

$$v_0 v_1 \leq C|v_1|^2 \leq \epsilon \|D_- v\|_{2,N}^2 + C(\epsilon) \|v\|_{1,N}^2,$$

$$v_{N-1} v_N \leq C|v_{N-1}|^2 \leq \epsilon \|D_- v\|_{2,N}^2 + C(\epsilon) \|v\|_{1,N}^2.$$

并且易得 $\|v\|_{1,N}^2 \leq C\|v\|_{1,N-1}^2$ 。化简边界项

$$v_N D_- v_N - v_0 D_- v_1 = -\frac{r_1}{2} v_N (v_{N-1} + v_N) + \frac{r_0}{2} v_0 (v_0 + v_1) \leq \epsilon \|D_- v\|_{2,N}^2 + C(\epsilon) \|v\|_{1,N-1}^2.$$

化简高阶项

$$\|D_+ D_- v\|_{1,N-1}^2 \leq 4h^{-2} \|D_- v\|_{1,N}^2.$$

整理可得

$$\begin{aligned} \|v^{n+1}\|_{1,N-1}^2 &\leq \|v^n\|_{1,N-1}^2 - 2k \|D_- v^n\|_{1,N}^2 + 2k(v_0^n D_- v_1^n - v_N^n D_- v_{N-1}^n) + k^2 \|D_+ D_- v^n\|_{1,N-1}^2 \\ &\leq (1 + 2kC(\epsilon)) \|v^n\|_{1,N-1}^2 + \left(-2k + 2k\epsilon + \frac{4k^2}{h^2}\right) \|D_- v^n\|_{1,N}^2. \end{aligned}$$

因此稳定性要求 $-2k + \frac{4k^2}{h^2} \leq 0$, 得知 $k \leq \frac{1}{2}h^2$ 。

题目: 考虑初边值问题

$$u_t = au_{xx} + bu_{yy}, \quad x \in \Omega = (0, 1) \times (0, 1), \quad t > 0$$

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad x \in \bar{\Omega} = [0, 1] \times [0, 1]$$

$$u(x, y, t) = g(x, y, t), \quad x \in \partial\Omega$$

使用均匀的网格剖分:

$$\Delta x = \frac{1}{M}, \quad x_i = i\Delta x, \quad i = 0, 1, \dots, M$$

$$\Delta y = \frac{1}{N}, y_j = j\Delta y, j = 0, 1, \dots, N$$

内部离散如下, 请写出完整的离散格式, 要求对时间层的边界处理达到 $O(\Delta t^2)$ 的精度:

$$\begin{aligned} \left(I - \frac{1}{2}b\mu_y\delta_y^2\right)v_{i,j}^{n+1/2} &= \left(I + \frac{1}{2}a\mu_x\delta_x^2\right)v_{i,j}^n \\ \left(I - \frac{1}{2}a\mu_x\delta_x^2\right)v_{i,j}^{n+1} &= \left(I + \frac{1}{2}b\mu_y\delta_y^2\right)v_{i,j}^{n+1/2} \end{aligned}$$

解答: 将两式相减可得

$$2v_{i,j}^{n+1/2} = \left(I + \frac{1}{2}a\mu_x\delta_x^2\right)v_{i,j}^n + \left(I - \frac{1}{2}a\mu_x\delta_x^2\right)v_{i,j}^{n+1} - \frac{1}{2}a\mu_x\delta_x^2(v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^n).$$

因此对于 $y = 0$ 和 $y = 1$ 两个水平边界, 可以采用

$$v_{i,j}^{n+1/2} = \frac{1}{2} [g(x_i, y_j, t^n) + g(x_i, y_j, t^{n+1})] - \frac{1}{4}a\mu_x\delta_x^2[g(x_i, y_j, t^{n+1}) - g(x_i, y_j, t^n)].$$

这里 $i = 0, \dots, M$ 或 $j = N$ 。由于这个边界处理是完全由内部格式导出的, 因此精度和内部一样是二阶的。无需考虑中间层在 $x = 0$ 和 $x = 1$ 这两个竖直边界上的取值, 因为不需要。完整格式如下:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \left(I - \frac{1}{2}b\mu_y\delta_y^2\right)v_{i,j}^{n+1/2} = \left(I + \frac{1}{2}a\mu_x\delta_x^2\right)v_{i,j}^n, & (i = 1, \dots, M-1, j = 1, \dots, N-1, n = 0, 1, \dots) \\ \left(I - \frac{1}{2}a\mu_x\delta_x^2\right)v_{i,j}^{n+1} = \left(I + \frac{1}{2}b\mu_y\delta_y^2\right)v_{i,j}^{n+1/2}, & (i = 1, \dots, M-1, j = 1, \dots, N-1, n = 0, 1, \dots) \\ v_{i,j}^0 = u_0(x_i, y_j), & (i = 0, \dots, M, j = 0, \dots, N) \\ v_{0,j}^{n+1} = g_{0,j}^n, v_{M,j}^{n+1} = g_{M,j}^n, & (j = 0, \dots, N, n = 0, 1, \dots) \\ v_{i,0}^{n+1} = g_{i,0}^n, v_{i,N}^{n+1} = g_{i,N}^n, & (i = 0, \dots, M, n = 0, 1, \dots) \\ v_{i,j}^{n+1/2} = \frac{1}{2} [g_{i,j}^n + g_{i,j}^{n+1}] - \frac{1}{4}a\mu_x\delta_x^2(g_{i,j}^{n+1} - g_{i,j}^n), & (i = 0, \dots, M, j = 0, N, n = 0, \dots) \end{array} \right.$$

其中记 $g_{i,j}^n = g(x_i, y_j, t^n)$ 。

9.12 第十二次书面作业

题目: 考虑 Burgers 方程, 假设给定光滑初值 $u_0(x)$, 其在某些点的导数 $u'_0(x) < 0$, 试证明: 在 T_b 时刻特征线首次产生相交

$$T_b = \frac{-1}{\min_x u'_0(x)}$$

此时, 方程的解产生无穷斜率, 波产生间断 (wave "breaks").

解答: 首先证明在 T_b 时刻特征线首次相交: 从 $(\xi, 0)$ 发出的特征线记作 $\ell_\xi: x = \xi + u_0(\xi)t$, 定义集合 Ω

$$\Omega = \{(\xi, \eta) \mid (\xi - \eta)(u_0(\xi) - u_0(\eta)) < 0\}$$

由于存在某些点的导数 $u'_0(\xi) < 0$, 可以保证集合 Ω 非空。在集合 Ω 上定义二元函数 $T(\xi, \eta)$ 为特征线 ℓ_ξ 和 ℓ_η 的相交时刻

$$\begin{aligned} x &= \xi + u_0(\xi)T(\xi, \eta) = \eta + u_0(\eta)T(\xi, \eta) \\ \Rightarrow T(\xi, \eta) &= \frac{-\frac{u_0(\xi) - u_0(\eta)}{\xi - \eta}}{\frac{u_0(\xi) - u_0(\eta)}{\xi - \eta}} > 0, \quad \forall (\xi, \eta) \in \Omega \end{aligned}$$

可得

$$T_b = \inf_{(\xi, \eta) \in \Omega} T(\xi, \eta) = \frac{-1}{\min_x u'_0(x)}$$

然后证明在 T_b 时刻会出现无穷斜率: 设 (x, t) 位于从 $(\xi, 0)$ 发出的特征线 ℓ_ξ 上, 那么

$$\begin{cases} x = \xi + u_0(\xi)t \\ u(x, t) = u_0(\xi) \end{cases}$$

其中 $\xi = \xi(x, t)$ 由 (x, t) 隐式确定。对上述关于 ξ 求导得到

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\partial \xi}{\partial x} + u'_0(\xi) \frac{\partial \xi}{\partial x} t \\ \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} &= u'_0(\xi) \frac{\partial \xi}{\partial x} \end{aligned}$$

消去 $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ 得到解 $u(x, t)$ 在 t 时刻在 x 处的斜率

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \frac{u'_0(\xi)}{1 + u'_0(\xi)t}$$

假设 $u'_0(\xi) = \min_x u'_0(x)$, 那么在 $t \rightarrow T_b^-$ 时, 在 x 处的斜率便会趋于无穷, 解产生间断且间断出现的位置与特征线首次相交的位置一致

$$\left| \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right| = \left| \frac{u'_0(\xi)}{1 + u'_0(\xi)t} \right| \rightarrow \infty, \quad \text{as } t \rightarrow T_b^-.$$

9.13 第十三次书面作业

题目: (Lax-Friedrichs 格式) 针对非线性方程 $u_t + f(u)_x = 0$, 利用“流通分裂技术”构造数值算法:

$$u_t + f^+(u)_x + f^-(u)_x = 0, \quad f^\pm(u) = \frac{1}{2}(f(u) \pm \alpha u)$$

其中, $\alpha = \max_u |f'(u)|$. 对 $f^\pm(u)$ 分别使用迎风格式

$$v_j^{n+1} = v_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f^+(v_j^n) - f^+(v_{j-1}^n)) - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f^-(v_{j+1}^n) - f^-(v_j^n))$$

试判断格式是否为守恒型格式。

证明. 令

$$\hat{f}_{j+1/2}^n = \hat{f}(v_j^n, v_{j+1}^n) = f^+(v_j^n) + f^-(v_{j+1}^n),$$

则原数值格式可以表示成:

$$v_j^{n+1} = v_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\hat{f}_{j+1/2}^n - \hat{f}_{j-1/2}^n)$$

只需证明连续性和相容性:

- 连续性: 由于 $f(u)$ 可导, 则 $f(u)$ 关于 u 连续, f^\pm 连续, \hat{f} 关于两个变量都有局部 Lipschitz 连续性。
- 相容性: $\hat{f}(v, v) = f^+(v) + f^-(v) = f(v)$.

因此格式是守恒型格式。 □

题目: 分析 Lax-Friedrichs 格式的单调性质和 TVD 性质。

解答: 验证单调性质:

$$\begin{aligned} v_j^{n+1} &= H(v_{j-1}^n, v_j^n, v_{j+1}^n) \\ \frac{\partial H}{\partial v_{j-1}^n} &= \frac{\Delta t}{2\Delta x} (f'(v_{j-1}^n) + \alpha) \geq 0 \\ \frac{\partial H}{\partial v_j^n} &= 1 - \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} \geq 0 \\ \frac{\partial H}{\partial v_{j+1}^n} &= \frac{\Delta t}{2\Delta x} (\alpha - f'(v_{j+1}^n)) \geq 0 \end{aligned}$$

因此格式是单调格式, 从而是 TVD 格式.