偏微分方程数值解

中国科学技术大学 数学学院

张 梦 萍

（办公室：东区–管理科学楼1227室）

(63601855；mpzhang@ustc.edu.cn）

蒋 琰

（办公室：东区–）

(63601855；mpzhang@ustc.edu.cn）

付 杨 鑫

（办公室：东区–管理科学楼1212室）

李 顺

（办公室：东区–管理科学楼1212室）

2024.09–2025.01

第0章：绪论

1 本课程相关事项

1. 上课时间地点

   本课程80学时4个学分的课。2-18周

   上课地点、时间：周1（6,7）14:00-15:35，5501；

   周4（8,9）15:55-17:30，5501

2. 参考书

   - Time Dependent Problems and Difference Methods

     作者：Bertil Gustafsson, Heinz-Otto Kreiss, Joseph Oliger

   - Numerical Partial Differential Equations

     作者：J. W. Thomas

3. 授课与作业

   - 课堂教学、随堂练习
   - 作业：书面作业（每周交1次，周一交）；程序作业（布置作业后隔一周交，周四交）
   - 总成绩=期末考试成绩（?）+ 随堂练习（？）+作业（？）

2 本课程研究的问题

三（四？）大科学方法：理论推导、物理实验、（大）科学计算、机器学习（？）

(1) 用“理论推导”求解实际问题

(2) 用“物理实验”求解实际问题

(3) 用“机器学习”求解实际问题

(4) 用“科学计算”求解实际问题

具体问题 $\rightarrow$ 物理模型 $\rightarrow$ 数学模型

$\stackrel{\text{数值近似}}{\rightarrow}$ 模型的**近似解** $\rightarrow$ 研究讨论近似解的有效性

部分数学模型：控制方程（组）（如：偏微分方程）"$\oplus$"定解条件

偏微分方程数值解：在计算机上，求偏微分方程定解问题的近似解，以及相关研究；这是计算数学最重要的一个分支

3 控制方程–偏微分方程（组）

（1） 控制方程–偏微分方程（组）

（2） 偏微分方程（组）分类（按线性、非线性分类）

– 线性PDE：对未知函数及其在方程（组）中出现的所有偏导数都是线性的，如：$u_t + a(x,t)u_x = (c(x,t)u_x)_x$

– 非线性PDE：除线性PDE以外的PDE；如：$u_t + uu_x = (uu_x)_x$
拟线性PDE：对未知函数及其在方程（组）中出现的最高阶偏导数是线性的，如：$u_t + uu_x = (c(x,t)u_x)_x$

（3） 常见的模型方程

1） 对流方程（双曲型方程）

2） 热传导方程（抛物型方程、扩散方程）

3） 对流扩散方程

4） 波动方程（双曲型方程）

5） Poisson方程（椭圆型方程）

6） KdV方程

7） Euler方程

8） N-S方程

（4） 偏微分方程（组）的解（古典解）设函数u在所考虑的区域内具有PDE(S)中所出现的各阶导数，且它们都是连续的。

若将u以及它的各阶导数代入PDE(S)后，使PDE(S)成为恒等式，则称u为该PDE(S)的解（古典解）

4 偏微分方程（组）的定解问题

（1） 定解条件：确定特解的条件

特解：PDE(S)在特定条件下的解常见的定解条件：边界条件、初始条件，以及其它条件

边界条件：周期性边界条件、非周期性边界条件

非周期性边界条件分为：（以二维(x,y)平面为例）

- 第一类边界条件（Dirichlet B.C.）：

  $u = f(x, y),\ (x, y) \in \partial\Omega$

- 第二类边界条件（Neumann B.C.）：

  $a(x, t)\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = f(x, y),\ (x, y) \in \partial\Omega,\ \vec{n}$是$\partial\Omega$ 的外法向

- 第三类边界条件（混合B.C.）：

  $u + a(x, t)\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = f(x, y),\ (x, y) \in \partial\Omega,\ \vec{n}$是$\partial\Omega$ 的外法向

（2） 定解问题：给出了控制方程（组）及其定解条件的问题

常见的定解问题有三类：

- 初值问题（Cauchy问题）：PDE(S) + I.C.
- 边值问题：PDE(S) + B.C.
- 混合问题（初边值问题）：PDE(S) + B.C. + I.C.

（3） 定解问题的解：

- 定义：

  设函数u在所考虑的区域Ω内是PDE(S)的解。当Ω内的点

趋于Ω的边界$\partial\Omega$时，定解条件中所要求的u以及它的导数的极限处处存在且等于给定的定解条件，则称u为该定解问题的解，使PDE(S)成为恒等式，则称u为该PDE(S)的解（古典解）

* 定解问题的解是稳定的：

  若定解条件发生微小变动时，相应问题的解也只引起微小的变动；即：解对于定解条件存在连续依赖关系，则称该定解问题的解是稳定的

（4）　适定问题：

定义：如果定解问题的解存在唯一，且关于定解条件是稳定的，则称该问题是适定的

本课程仅讨论适定的问题（即：假设讨论的模型是适定的，适定性研究？）

5　求偏微分方程（组）定解问题的近似解（数值解）

（1）　求偏微分方程数近似解（数值解）的必要性和合理性：

（2）　偏微分方程数值方法的应用

可以用于所有转化为偏微分方程定解问题的各领域的实际应用。

* 流体力学—计算流体力学......
* 磁流体力学—核聚变......

* 交通流—高速公路、城市交通（包括车辆、行人等）......
* 材料科学—晶体生长......
* ......

（3） 求偏微分方程数值解的主要步骤

时间依赖的偏微分方程（组）的定解问题问题：

$$\begin{cases} u_t = u_x,\ -\infty < x < \infty,\ t > 0, \\ u(x,0) = sin(2\pi x),\ -\infty < x < \infty, \\ \text{周期性边界条件，且周期为：}1 \end{cases} \tag{1}$$

易论证本问题是适定

* 时空区域剖分（离散）
* 偏微分方程（组）离散
* 定解条件（初边值）离散
* 求解离散方程组（数值代数）
* 结果分析、讨论 $\Rightarrow$：有效可靠的数值解

（4） 常用的偏微分方程数值方法

由于上述离散的出发点不同，依据的方程不一样，由此产生的数值方法也不一样，常见的数值方法主要分为以下几类：

* 有限差分法
* 有限元方法
* 谱方法

5　求偏微分方程（组）定解问题的近似解（数值解）

＊其它方法

本课程注重在有限差分方法。这儿特别要说的：每类方法，都有不同的处理思想、不同的特点，适合不同的问题。没有一种统一的方法可以解决所有问题

大作业1（20240909）

大作业1

函数：$v(x)=\frac{1}{2}(\pi-x)$，$v_N(x)=\sum_{\omega=1}^{N}\frac{sin(\omega x)}{\omega}$，$x\in\Omega=(0,2\pi]$。将$\Omega$均匀剖分$x_j=j*\Delta x, j=1,\cdots,m$，$\Delta x=\frac{2\pi}{m}$，对于$m=20$, 和$m=160$ 分别绘出$v(x)$、$v_N(x)$ 和$v(x)-v_N(x)$的图形。这儿N分别取10和100.

对于修正的$\tilde{v}_N=\sum_{\omega=1}^{N}\frac{sin\frac{\omega\pi}{N}}{\frac{\omega\pi}{N}}\frac{sin\omega x}{\omega}$ 重复上面的工作；比较二者的结果，并进行评述