实分析

孙天阳

中国科学技术大学数学科学学院

tysun@mail.ustc.edu.cn

2024 年 11 月 29 日

目录

1 Riemann 积分的局限

关于有限区间上有界函数的 Riemann 可积性, 我们有如下完美的刻画

定理 1.1 (Lebesgue)**.** 设 $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ 有界, 那么 f Riemann 可积当且仅当 f 的不连续点集零测.

但我们对 Riemann 积分不满意, 因为有如下例子

例 1.2. 存在 Riemann 可积函数 f_n 的逐点收敛极限 f 存在但不 Riemann 可积.

解. 记 $[0,1]\cap\mathbb{Q}=\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$, 令

$$\phi_n(x)=\begin{cases}1 & x=r_n\\ 0 & x\neq r_n\end{cases},\quad f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\phi_k(x).$$

显然 f_n 是 Riemann 可积的, 但它的逐点收敛极限是 Dirichlet 函数, 是不 Riemann 可积的. □

但这个例子并不本质, 当我们试图在 Riemann 可积函数全体 $R[a,b]$ 上赋予度量

$$d_1(f,g)=\int_0^1|f(t)-g(t)|\mathrm{d}t$$

时, 我们发现如果两个 Riemann 可积函数 f,g 几乎处处相等, 即只在零测集上的值有差异, 那么 $d_1(f,g)=0$, 这不满足度量的要求, 所以我们必须忽略在零测集上的差异, 即将几乎处处相等的函数视为同一个函数. 这样一来, 谈论逐点收敛也失去了意义, 而应该谈论几乎处处收敛. 这种观点下, Dirichlet 函数就是恒为零的函数, 上面例子中的 f_n 几乎处处收敛于 $f\equiv 0$.

例 1.3. 存在 Riemann 可积函数 f_n 几乎处处收敛于在零测集上做调整也不 Riemann 可积的函数.

上面的例子表明, Riemann 可积与逐点收敛或者说几乎处处收敛之间有着不可调和的矛盾.（而 Lebesgue 可积有控制收敛定理, 假设 f_nLebesgue 可积，几乎处处收敛于 f, 如果 f 有界, 那么能推出 f 可积；要求 f 有界并不过分, 在上面的 Riemann 积分的反例中极限函数应该也是有界的，并不是因为无界而不 Riemann 可积的）

例 1.4. 考虑 $[0,1]$ 区间上的连续函数全体 $C[0,1]$, 赋予度量

$$d_1(f,g)=\int_0^1|f(t)-g(t)|\mathrm{d}t,$$

则度量空间 $(C[0,1],d_1)$ 是不完备的. 换成黎曼可积空间仍然是不完备的.

https://math.stackexchange.com/questions/325710/the-space-of-riemann-integrable-functions-with-l2-inner-product-is-not-comple

一元函数，有限区间上，有界函数，有完美的定理，定理

不完备

对于反常积分不一致的处理

Dirichlet 函数

2 长度、面积、体积的推广

- 矩形的面积
- 平移不变性
- 不交并
- 伸缩性
-

命题 2.1. *不存在* $\mu : 2^{\mathbb{R}} \to [0, +\infty]$ *满足*

- $\mu(\varnothing) = 0$
- $\mu(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k), \forall E_k \subset \mathbb{R}$
- $\mu(E) = \mu(x + E), \forall E \subset \mathbb{R}$
- $\mu([0, k]) = k$

证明. 考虑 $[0,1]/\mathbb{Q}$，选取其任一完全代表元系 $\mathcal{N}$.

注意 $\mathcal{N}$ 是完全代表元系而不是一个等价类.

注意我并不关心到底有多少个等价类，即完全代表元系中有多少个元素.

考虑 $\mathcal{N}_k = \mathcal{N} + r_k$.

注意我并不关心 $\mathcal{N}_k$ 是否还含在 $[0,1]$ 里面，事实上，一般并不含在 $[0,1]$ 里面.

$\mathcal{N}_k$ 相当于是 $\mathcal{N}$ 中的每个元素在自己的等价类中作平移，虽然平移后得到的元素并不一定在 $[0,1]$ 中也就不在等价类中.

我们关心 $\mathcal{N}$ 与 $\mathcal{N}_k$ 之间具有外测度的平移不变性，我们关心 $[0,1]$ 可以被包含在 $\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{N}_k$ 中. □

3 外测度

定义 3.1. 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是一个集合, 定义它的外测度为

引入外测度之后，我们还想要可数可加性，所以放弃在所有集合上定义.

4 Cantor 三分集

	Cantor 集	有理数集	推广的 Cantor 集	无理数集
测度	零测集	零测集	正测集	正测集
势	$\aleph$	$\aleph_0$	$\aleph$	
拓扑	第一纲集：无处稠密集合的可列并	第一纲集	第一纲集（无处稠密集）	第二纲集（稠密集）

Cantor 函数

- $[0,1] \twoheadrightarrow [0,1]$ 单调增加连续
- 将零测集映照为正测集
- 导函数几乎处处为零

Cantor 集

- Cantor 集的构造过程
- $C = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$
- C 是非空有界闭集. 其中有界显然；闭集是因为闭集的任意交还是闭集；非空是因为闭区间套定理，事实上 F_n 中每个闭区间的端点都是没有被移去的.
- C 是完全集，即 C 中任意点都能找到 C 中的一列其它点来逼近它. 设 $x \in C$，则 $x \in F_n$，即对每个 n，x 属于长度为 $\dfrac{1}{3^n}$ 的 2^n 的闭区间中的一个. 于是对任意 $\delta > 0$，我们能找到一个 n 使得 $\dfrac{1}{3^n} < \delta$，也就是 F_n 中包含 x 的闭区间含于 $(x-\delta, x+\delta)$. 此闭区间有两个端点，它们是 C 中的点且至少有一个不是 x，这就说明 x 是 C 的极限点.
- C 无内点. 设 $x \in C$，给定任意区间 $(x-\delta, x+\delta)$，取 n 使得 $\dfrac{1}{3^n} < \delta$. 因为 $x \in F_n$，所以 F_n 中必有某个长度为 $\dfrac{1}{3^n}$ 的闭区间 $F_{n,k}$ 含于 $(x-\delta, x+\delta)$. 然而，在构造 C 集的第 $n+1$ 步时，将移去 $F_{n,k}$ 的中央三分开区间. 这说明 $(x-\delta, x+\delta)$ 不含于 C.
- P49 页例 19 没有看懂

	区间长度	个数	去掉长度	个数

- C_n

  Cantor 三分集

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \lim_{n\to\infty} C_n$$

- 紧集 $C = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} C_n$，$C_n$ 紧
- 零测集 [提到 |C| 就默认了可测] $|C| \leqslant |C_n| \leqslant$，无内点
- 连续统的势

- 完全集（无孤立点的闭集）任意点是极限点，可以找到一个点列逼近它
- 第一纲集（C 是无处稠密集合，即其闭包无内点，第一纲集是可列个无处稠密集合的并

Cantor 集的三进制表示

$$C=\left\{x\in[0,1]:x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n},a_n=0,2\right\}$$

所以说不舒服的感觉出现在他对去掉点的特征描述的不准确.

Cantor 函数

$f:C\to[0,1]$ 是单调递增的满射

$$f(0.(2c_1)(2c_2)\cdots(3))=0.c_1c_2\cdots(2),c_k=0,1$$

即

$$f\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{3^n}\right)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{2^n}$$

单调增加：$c_{n+1}=0,d_{n+1}=1$

$$0.(2c_1)\cdots(2c_n)(2c_{n+1})\cdots(3)<0.(2c_1)\cdots(2c_n)(2d_{n+1})\cdots(3)$$

$$0.c_1\cdots c_nc_{n+1}\cdots(2)\leqslant 0.c_1\cdots c_nd_{n+1}\cdots(2)$$

Cantor 函数的局部常值扩充

设 (a,b) 是 Cantor 三分集构造过程中去掉的区间. 则

$$a=0.(2c_1)\cdots(2c_{n-1})022\cdots(3)$$

$$b=0.(2c_1)\cdots(2c_{n-1})200\cdots(3)$$

$$f(a)=0.c_1\cdots c_{n-1}0111\cdots(2)=0.c_1\cdots c_{n-1}1(2)=f(b)$$

局部常值扩充

$$f\big|_{(a,b)}=f(a)=f(b)$$

$f:[0,1]\to[0,1]$ 单调增加是一个满射.

- 将零测集映为正测集
- 局部为常数
- $\mathring{C}=\varnothing,\partial C=C'=\bar{C}=C$

命题 4.1. *Cantor 函数在 Cantor 集中的点不可导*

证明. 任取 $x \in C$，将之表示为 $x_n \in C \begin{cases} x + \frac{2}{3^n}, if a_n = 0 \\ x - \frac{2}{3^n}, if a_n = 2 \end{cases}$

则 $\lim_{n \to \infty} x_n = x$

1. $a_n = 0$
$$f(x_n) - f(x) = \frac{1}{2^n}, x_n - x = \frac{2}{3^n}$$
2. $a_n = 2$
$$f(x_n) - f(x) = -\frac{1}{2^n}, x_n - x = -\frac{2}{3^n}$$

□

推广的 Cantor 集

- $K_0 = [0, 1], K_{n-1} \xrightarrow{1}$

Cantor 集的维数

- 欧式空间维数 $\mathbb{R}^2$ 的维数：将标准立方体扩大三倍再分解，$\frac{\log 3^2}{\log 3}$
- Cantor 集的 Hausdorff 维数 $\frac{2}{1} \overset{2}{\underset{1}{\Longrightarrow}}$

5 可测集

6 集合的极限

- 将集合等同于它的特征函数
- 将集合的上、下极限定义为它的特征函数的上下极限对应的集合
- 集合的测度就是特征函数的积分？
- 上极限要看 1 能否在该点出现无数次，下极限要看 0
- 无穷并 $<$ 上极限 $<$ 下极限 $<$ 无穷交
- 只出现一次 $<$ 出现无限次 $<$ 只有有限次不出现 $<$ 每次都出现
- 集合的并相当于取上确界，集合的交相当于取下确界

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{k\geqslant n} x_k$	$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, A_n = \lim\limits_{n\to\infty} \bigcup\limits_{k\geqslant n} A_k$
$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_{k\geqslant n} x_k$	$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, A_n = \lim\limits_{n\to\infty} \bigcap\limits_{k\geqslant n} A_k$

- 对于单调增加集合列，
$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$
- 对于单调减少集合列，
$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$
- $\left\{\bigcup\limits_{k\geqslant n} A_k\right\}$ 就是单调减少集合列，因此
$$\lim_{n\to\infty} \bigcup_{k\geqslant n} A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k\geqslant n} A_k$$
- $\left\{\bigcap\limits_{k\geqslant n} A_k\right\}$ 就是单调增加集合列，因此
$$\lim_{n\to\infty} \bigcap_{k\geqslant n} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k\geqslant n} A_k$$
- 若集合列的上极限等于下极限，那么把这个公共的极限定义为它的极限. 存在极限的集合列只有两类点，要么在只在有限项处出现，要么在有限项处不出现；也就是说不存在这样的点：它既在无穷多项中出现，又在无穷多项中不出现

例 6.1.
$$\{x\in\mathbb{R} : f_n(x)\to f(x)\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \underline{\lim_{n\to\infty}} \left\{x\in\mathbb{R} : |f_n(x)-f(x)| < \frac{1}{k}\right\}$$

7 Zorn 引理

- Zorn 引理的陈述
- 偏序集合：自身性、反对称性、传递性
- 全序集合
- 极大元与上界
- 选择公理的两种陈述

定理 7.1 (Zorn 引理)**.** 若偏序集合 X 的每一个全序子集合都具有上界，则 X 具有极大元.

定义 7.2 (偏序集合)**.** 设 $=$ 是集合 X 上的一个等价关系. 若集合 X 上的另一个关系 $\leqslant$ 满足：

(1) 自身性：$x \leqslant x$；

(2) 反对称性：若 $x \leqslant y, y \leqslant x$，则 $x = y$；

(3) 传递性：若 $x \leqslant y, y \leqslant z$，则 $x \leqslant z$.

则称 $(X, \leqslant)$ 为一个偏序集合.

注记. 当我们没有显式地指明 X 上的等价关系是什么时，就默认 $x \sim y$ 当且仅当 $x = y$.

注记. 当我们定义了什么叫 $x \leqslant y$，就把 $y \geqslant x$ 定义为 $x \leqslant y$.

定义 7.3 (全序集合)**.** 设 $(X, \leqslant)$ 是偏序集合，如果它还满足

(4) 全序性：任意 $x, y \in X$，要么 $x \leqslant y$ 要么 $y \leqslant x$.

则称 $(X, \leqslant)$ 为全序集合.

定义 7.4 (极大元与上界)**.** 设 $(X, \leqslant)$ 是偏序集，$x_0 \in X$，如果 $x_0 \leqslant y \in X \Rightarrow y = x_0$，那么称 x_0 是 X 的一个极大元.

设 $(X, \leqslant)$ 是偏序集，$E \subset X$，$x_0 \in X$，如果任意的 $y \in E$ 有 $y \leqslant x_0$，那么称 x_0 是 E 的一个上界.

注记. 偏序集中的任意元素要么小于等于极大元，要么与极大元不可比较.

某集合的上界要大于等于该集合中的所有元素.

定理 7.5 (选择公理)**.** 设 $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$，$A \neq \varnothing, X_\alpha \neq \varnothing$，那么 $\prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha \neq \varnothing$

其中，

$$\prod_{\alpha \in A} X_\alpha := \left\{ f : A \to \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha : f(\alpha) \in X_\alpha, \forall \alpha \in A \right\}.$$

注记. 选择公理与 Zorn 引理等价.

定理 7.6 (选择公理的另一种形式)**.** 设 $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}, A \neq \varnothing, X_\alpha \neq \varnothing$，$X_\alpha$ 互不相交，那么存在 $Y \subset \bigsqcup\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ 使得 $Y \cap X_\alpha$ 是独点集，$\forall \alpha \in A$.

定理 7.7. 设 E 是一个集合，$\{E_\alpha\}\alpha\in I$ 是 E 的一族子集，则存在一个映射 $\alpha\mapsto x_\alpha$ 使得 $x_\alpha\in E_\alpha$，对任意的 α.

例 7.8. 设 $f:A\to B$，A,B 非空，

1. f 是单射当且仅当存在 $g:B\to A$ 使得 $g\circ f=1_A$
2. f 是满射当且仅当存在 $g:B\to A$ 使得 $f\circ g=1_B$

注记. 左满右单.

证明. 对任意的 $b\in B$，$\left\{f^{-1}(b)\right\}_{b\in B}$ 是 A 的一组非空子集族，由选择公理，存在 $g:b\mapsto g(b)$ $g(b)\in f^{-1}(b)\Leftrightarrow f(g(b))=b$. □

注记. 问题似乎出现在事情不能做无限多步.

定理 7.9 (良序定理)**.** 若 A 是一个集合，则存在 A 上的一个全序关系，使得 A 成为一个良序集.

定义 7.10 (良序集)**.** 任意非空子集都有一个最小元.

8 势

- 康托尔在 1874 年－ 1884 年引入最原始的集合论（现称朴素集合论）时，首次引入基数概念. 他最先考虑的是集合 $\{1, 2, 3\}$ 和 $\{2, 3, 4\}$，它们并非相同，但有相同的基数. 骤眼看来，这是显而易见，但究竟何谓两个集合有相同数目的元素？

  康托尔的答案，是透过所谓的一一对应，即把两个集合的元素一对一的排起来——若能做到，两个集合的基数自然相同. 这答案，容易理解但却是革命性的，因为用相同的方法即可比较任意集合的大小，包括无穷集合.

- 我们虽然没有把一个集合的势真正地定义为一具体的对象，但是讨论集合之间的势的大小关系总是可以的

- 集合的势的大小关系的定义及定义的良定性

- 说集合的势是一个偏序关系其实有点瑕疵，关系必须建立在某一个集合上，但显然我们这里应该讨论的集合是由所有集合组成的集合.

势是全序关系

定义 8.1 (势的相等)**.** 设 X,Y 是两个集合，如果存在双射 $f:X\to Y$，则称 X 与 Y 的势是相等的，记作 $\overline{\overline{X}}=\overline{\overline{Y}}$. 容易验证这是集合之间的一个等价关系.

定义 8.2 (势的小于等于)**.** 设 X,Y 是两个集合，如果存在单射 $f:X\to Y$，则称 X 的势小于等于 Y 的势，记作 $\overline{\overline{X}}\leqslant\overline{\overline{Y}}$.

定义 8.3 (势的大于等于)**.** 设 X,Y 是两个集合，如果存在满射 $f:X\to Y$，则称 X 的势大于等于 Y 的势，记作 $\overline{\overline{X}}\geqslant\overline{\overline{Y}}$.

我们曾指出，当我们定义了什么叫 $x\leqslant y$，我们便自动将 $y\geqslant x$ 解释为 $x\leqslant y$. 但上面在定义了什么叫 $\overline{\overline{X}}\leqslant\overline{\overline{Y}}$ 后又定义了什么叫 $\overline{\overline{X}}\geqslant\overline{\overline{Y}}$. 我们必须验证这两种定义是相容的.

命题 8.4. $\overline{\overline{X}}\leqslant\overline{\overline{Y}}$ 当且仅当 $\overline{\overline{Y}}\geqslant\overline{\overline{X}}$.

证明. $\Longrightarrow$

设存在单射 $f:X\to Y$，构造满射 $g:Y\to X$ 如下：

$$g\big|_{f(X)}=f^{-1},g\big|_{Y\setminus f(X)}=x_0.$$

$\Longleftarrow$

设存在满射 $g:Y\to X$，要构造单射.

由选择公理，取 $\left\{g^{-1}(x)\right\}_{x\in X}$ 的代表元集合 Z，定义

$$\begin{aligned} f:X\to\quad & Y\\ x\mapsto & Z\cap g^{-1}(x)\end{aligned}$$

□

直觉上，我们觉得应该有

定理 8.5 (Cantor-Bernstein 定理)**.** 如果 $\overline{\overline{X}}\leqslant\overline{\overline{Y}}$ 且 $\overline{\overline{X}}\geqslant\overline{\overline{Y}}$，则 $\overline{\overline{X}}=\overline{\overline{Y}}$.

证明. 存在单射 $f:X\to Y$ 和 $g:Y\to X$. 考虑 f^{-1} 和 g^{-1} 的拉回：

$$\forall x\in X\longrightarrow x\overset{g^{-1}}{\to}g^{-1}(x)\overset{f^{-1}}{\to}\cdots$$

三种情况：

(1) 一直继续下去，称 $x\in X_\infty$

(2) 终止到 X 中，称 $x\in X_X$

(3) 终止到 Y 中，称 $x\in X_Y$

由此导出 X 的剖分

$$X=X_\infty\sqcup X_X\sqcup X_Y$$

$$Y=Y_\infty\sqcup Y_X\sqcup Y_Y$$

断言：$f(X_\infty)=Y_\infty$

- 对任意 $y \in f(X_\infty)$，存在 $x \in X_\infty$ 使得 $y = f(x)$，则有拉回链

$$y = f(x) \overset{f^{-1}}{\to} x \overset{g^{-1}}{\to} \cdots$$

  所以 $y \in Y_\infty$

- 对任意 $y \in Y_\infty$，存在拉回链

$$y \overset{f^{-1}}{\to} x \overset{g^{-1}}{\to} \cdots$$

  这意味着 $y = f(x)$ 并且 $x \in X_\infty$

  所以 $y \in f(X_\infty)$.

断言：$f(X_X) = Y_X$

- 任意 $y \in f(X_X)$，存在 $x \in X_X$ 使得 $y = f(x)$.

  存在拉回链

$$y = f(x) \overset{f^{-1}}{\to} x \overset{f^{-1}}{\to} \cdots \text{终止到} X$$

  这就意味着 $y \in Y_X$

- 对任意 $y \in Y_X$，存在拉回链

$$y \overset{f^{-1}}{\to} x \overset{g^{-1}}{\to} \cdots \text{终止到} X$$

  终止到 X 保证了第一个箭头的存在性，因此存在 x 使得 $y = f(x)$，并且按定义 $x \in X_X$，所以 $y \in f(X_X)$.

综上所述，$f : X_\infty \to Y_\infty$，$f : X_X \to Y_X$，$g : Y_Y \to X_Y$ 都是双射，

由此得到 X 到 Y 的双射 h

$$h\big|_{X_\infty \sqcup X_X} = f, h\big|_{X_Y} = g^{-1}$$

□

命题 8.6. 集合的势的大小关系是全序关系.

证明. 自身性和传递性由恒同映射和映射的复合得到. 反对称性正是 Cantor-Bernstein 定理. 只需证明全序性，即对任意集合 X, Y，要么 $\overline{\overline{X}} \leqslant \overline{\overline{Y}}$，要么 $\overline{\overline{Y}} \leqslant \overline{\overline{X}}$.

将映射视为集合：

$$f : X \to Y, Graphf = \{(x, f(x)) \subset X \times Y\}$$

考虑由单射产生的集合族

$$\Gamma := \left\{ f : A \to Y \middle| f\text{是单射}, A \subset X \right\} \subset 2^{X \times Y}$$

显然 $(\Gamma, \subset)$ 是一个偏序集合. 考虑其中的任一全序子集，其任意两个元素之间可以将一个视为另一个的延拓，它们两两之间在定义域的公共部分的定义是相容的，因此可将该全序子集的所有元素的定义域取并，在并集上定义出一个集合，显然它也属于 Γ 并且是该全序子集的上界.

由 Zorn 引理，Γ 中存在极大元 f.

显然 $f : A \to f(A)$ 是双射，断言 $A = X$ 或 $f(A) = Y$.

若不然，则存在 $x_0 \in X \backslash A, y_0 \in Y \backslash f(A)$，定义

$$f' : A \sqcup \{x_0\} \to f(A) \sqcup \{y_0\}$$
$$x_0 \mapsto y_0$$

这与 f 是极大元矛盾！ □

势的运算

命题 8.7. 设 A, B 都是有限集，那么

(1) $\overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}} = \overline{\overline{A \sqcup B}}$

(2) $\overline{\overline{A}} \cdot \overline{\overline{B}} = \overline{\overline{A \times B}}$

(3) $\overline{\overline{A}}^{\overline{\overline{B}}} = \overline{\overline{A^B}}$

证明. (1)(2) 显然，只证 (3).

$A^B = \{f : B \to A\}$，对每一个 B 中的元素，都有 $\overline{\overline{A}}$ 个 A 中的元素可以指定.

因此 A^B 中元素的个数为 $\underbrace{\overline{\overline{A}} \times \overline{\overline{A}} \times \cdots \times \overline{\overline{A}}}_{\overline{\overline{B}}\text{个}} = \overline{\overline{A}}^{\overline{\overline{B}}}$. □

我们将这些在有限集合情形下有意义并成立的式子，作为对于无限集合情形的定义

定义 8.8. 设 A, B 是任意集合，定义

(1) $\overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}} := \overline{\overline{A \sqcup B}}$

(2) $\overline{\overline{A}} \cdot \overline{\overline{B}} := \overline{\overline{A \times B}}$

(3) $\overline{\overline{A}}^{\overline{\overline{B}}} := \overline{\overline{A^B}}$

势的比较

定理 8.9 (无最大势定理). 设 $X \neq \varnothing$，则 $\overline{\overline{X}} < \overline{\overline{2^X}}$.

证明. 用反证法，假设存在满射 $f : X \to 2^X$

构造

$$\{x \in X : x \neq f(x)\} \in 2^X = f(X)$$

因为 f 是满射所以存在 $x_0 \in X$ 使得 $f(x_0) = \{x \in X : x \notin f(x)\}$

-
-

□

命题 8.10 (最小势定理). 无限集合中最小势为可数无限集合的势

$$\aleph_0 = \overline{\overline{\mathbb{N}}}$$

证明. 任意无限集合包含可列子集. □

定义 8.11.

- $\aleph_0 := \overline{\overline{\mathbb{N}}}$
- $c := \aleph := \overline{\overline{R}}$

命题 8.12. $2^{\aleph_0} = c$，即整数的幂集与实数集等势.

证明. 构造 $\psi : 2^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{R}^+$

$$\psi(A) = \begin{cases} \sum_{n\in A} \frac{1}{2^n} & A\text{有下界} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

将整数集合视为二进制数 □

引理 8.13 (Cantor 连续统假设)**.** $\aleph_0$ 与 $\aleph$ 之间无其它势.

- Zemolo-Frankel 公理体系推不出 Cantor 连续统假设为真或非真

势的增长序列

$$0 < 1 < 2 < \cdots < \aleph_0 < c < 2^c < 2^{2^c} < \cdots$$

p 进制表示定理

对任意 $x \in (0,1)$

定理 8.14.

$$c^{\aleph_0} = c$$

证明. 单射

$$\varphi : (0,1)^{\mathbb{N}} \to [0,1]$$

$$\{x_1, x_2, \cdots\} \mapsto 0.x_{11}x_{21}x_{12}x_{31}x_{22}x_{13}\cdots$$

哦，还要用下 Berstein 定理. □

定理 8.15.

$$c^c = 2^c$$

证明.

$$c^{\aleph_0} = c \Rightarrow c^2 = c \Leftrightarrow \overline{\overline{\mathbb{R}^2}} = \overline{\overline{\mathbb{R}}}$$

单射

$$[0,1]^{\mathbb{R}} \to 2^{\mathbb{R}^2}, f \mapsto Graph f$$

$$c^c \leqslant 2^c$$

而 $c^c \geqslant 2^c$ 是显然的. □

$$\overline{\overline{X_n}} = \aleph_0, \forall n \in \mathbb{N} \to \overline{\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n}} = \alpha_0$$

$$\overline{\overline{X_n}} = c, \forall n \in \mathbb{N} \to \overline{\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n}} = c$$

例 8.16. 凸函数 $f : (a, b)$ 在 $\mathbb{R}$ 上几乎处处可微

证明. 构造单射

$$\left\{x \in (a, b) : f'_+(x) < f'_-(x)\right\} \to \mathbb{Q}^3$$

$$x \mapsto (r_x, s_x, t_x)$$

- $x \in (s_x, t_x) \subset [s_x, t_x] \subset (a, b)$

  注记. s_x, t_x 的作用是什么？

- $r_x \in (f'_+(x), f'_-(x))$

□

例 8.17. 是否存在 $f \in C(\mathbb{R})$，使得 $f(Q) \subset R/Q$，$f(R/Q) \subset Q$

不可测集的存在性

推论 8.18. 任意正测集包含不可测子集

不可测集存在性的证明

证明. 内容... □

9 可测函数的定义

- 可测函数的第一层理解：可测集的原像是可测集
- 与连续函数的类比：
  - 连续函数的定义：开集的原像是开集
    * 我们可以对于单个的点处定义连续性的概念：邻域的原像是邻域.
    * 开集的原像是开集只有在整体连续时候才对.
  - 开集依赖于选取哪个拓扑，可测集依赖于选取哪个 σ-代数
  - 拓扑和 σ-代数都是给集合附加的结构
  - 对于连续函数，我们选取的是 $\mathbb{R}$ 上的标准拓扑
  - 对于可测函数，我们选取的是 $\mathbb{R}$ 上的 Borel σ-代数
  - 可以看到，如果选取 $\mathbb{R}$ 上的 Lebesgue σ-代数，存在连续函数不是可测函数
  - 可以利用生成元来刻画拓扑，进而刻画连续映射，比如基/子基的原像是开集
  - 同样可以用生成元来刻画 σ-代数，进而刻画可测函数
  - 全体开集便是 Borel σ-代数的生成元，因此可测函数有等价刻画：开集的原像是可测集
    * $\mathscr{T}$ 有基 $\mathcal{B}=\{(a,b)\big|a<b\}$.
    * 事实上 $\mathcal{B}$ 在生成 $\mathscr{T}$ 的时候用不到任意并，只需要可列并. 我们有所谓实直线上开区间的结构定理：任意开集可以唯一表示为至多可数个两两不交的开区间的并. 从而 $\mathcal{B}$ 在 σ-代数的运算下同样能生成 $\mathscr{T}$，最终生成 Borel 集
    * $\mathscr{T}$ 有子基 $\mathcal{S}=\{(a,+\infty),(-\infty,a)\big|a\in\mathbb{R}\}$，即开射线全体，两个交一交就能生成 (a,b).
    * 但是，仅需要 $\{(a,+\infty)\big|a\in\mathbb{R}\}$ 我们便能生成 σ-代数，这是因为我们有强大的差运算，或者说取余集的运算.（差运算显然蕴含取余集的运算，在有交运算的时候取余集也蕴含差运算）
    $$\bigcap_{n=1}^{\infty}(b-\frac{1}{n},+\infty)=[b,+\infty)$$
    再取余集便得到 $(-\infty,b)$.
    * 同样地，仅用 $\{[a,+\infty)\big|a\in\mathbb{R}\}$，便有
    $$\bigcup_{n=1}^{\infty}[a+\frac{1}{n},+\infty)=(a,+\infty),[a,+\infty)^c=(-\infty,a).$$
    * 仅用 $\{[a,b)\big|a<b,a,b\in\mathbb{R}\}$

定理 9.1 (Lusin). *$f:E\to\mathbb{R}$ 可测当且仅当对任意 $\varepsilon>0$，存在闭集 $F\subset E$ 满足 $m(E\backslash F)<\varepsilon$，使得 $f\big|_F$ 是连续函数.*

- E 当然要求是 Lebesgue 可测集
- 闭集 F 当然是 Lebesgue 可测集
- 因此 $E\backslash F$ 也可测，但 $m(E\backslash F)$ 不一定就等于 $m(E)-m(F)$，因为有可能出现 $+\infty$ 减去 $+\infty$ 的陷阱. 因此 $m(E\backslash F)<\varepsilon$ 是在不清楚 E 是否为测度有限集时的稳妥写法，当已知 E 测度有限，当然可以写成 $m(E)-m(F)$.

例 9.2. 设 (X,Σ,μ) 是一个测度空间, f 可测, $f=g$ 几乎处处成立, 证明 g 也可测或举出反例.

证明.

- 假设 (X,Σ,μ) 不完备, 即存在不可测集 N 是零测集的子集. 取 $f=0, g=1_N$.
- 假设 (X,Σ,μ) 完备, 取 $N=\{x\in X \mid f(x)\neq g(x)\}$, 由条件知 N 可测且是零测集. 考虑

  $$g(x)=f(x)1_{X\setminus N}+g(x)1_N,$$

  要证 $g(x)$ 可测, 只需证 $g(x)1_N$ 可测. 考虑

  $$A_t=\{x\in X \mid g(x)1_N<t\},$$

  - 当 $t\leqslant 0$ 时, $A_t\subset N$ 从而是可测集.
  - 当 $t>0$ 时,

    $$A_t=(X\setminus N)\cup(N\cap\{x\in X \mid g(x)<t\}),$$

    A_t 是两个可测集之并, 从而也是可测集.

□

10 可测函数的结构：四部曲

在本节中我们说明, 一般的可测函数可以由可测的特征函数通过代数与极限运算得到.

我们将由可测的特征函数通过代数运算得到的函数称作简单可测函数, 其全体记作 $S(E)$, 它们的特点是值域中只有有限个值, 容易看出对任意 $f \in S(E)$ 有标准表示

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i \chi_{E_i}(x).$$

其中

$$\operatorname{Im} f = \{a_1, \cdots, a_m\}, \quad E_i = f^{-1}(a_i).$$

下面, 我们说明对于任意非负可测函数 $f \in \mathscr{L}^+(E)$, 可以构造出一系列非负简单可测函数 $f_k \in S^+(E)$, 使得 f_k 单调递增收敛于 f. 首先我们对 f 的值域 $[0, +\infty]$ 进行剖分

$$\begin{aligned}
&[0, +\infty] = [0, 1) \cup [1, +\infty], && k = 0 \\
&[0, +\infty] = [0, \frac{1}{2}) \cup [\frac{1}{2}, 1) \cup [1, \frac{3}{2}) \cup [\frac{3}{2}, 2) \cup [2, +\infty], && k = 1 \\
&[0, +\infty] = \cup_{i=1}^{2^{2k}} [\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}) \cup [2^k, +\infty], && \text{general } k
\end{aligned}$$

随着 k 的增大, 我们纳入处理的范围 $[0, 2^k]$ 变得越来越大, 且细分的区间长度 $\frac{1}{2^k}$ 越来越小. 由值域的剖分, 我们得到一个定义域的剖分, 由此我们构造一列非负简单函数

$$f_k(x) = \begin{cases} \frac{i-1}{2^k}, & \frac{i-1}{2^k} \leqslant f(x) < \frac{i}{2^k} \\ 2^k, & f(x) \geqslant 2^k \end{cases}$$

容易看出 f_k 关于 k 单调递增且收敛于 f.

对于一般的可测函数 $f \in \mathscr{L}(E)$, 我们将其分解为正部和负部

$$f = f^+ = f^-.$$

11 三种收敛性

命题 11.1. 设 $\{f_n\}$ 几乎一致收敛到 f, 那么 $\{f_n\}$ 几乎处处收敛到 f.

命题 11.2. 设 $\{f_n\}$ 几乎一致收敛到 f, 那么 $\{f_n\}$ 依测度收敛到 f.

定理 11.3 (Egorov)**.** 设 $m(E) < +\infty$, 且 $\{f_n\}$ 几乎处处收敛到 f, 那么 $\{f_n\}$ 几乎一致收敛到 f.

定理 11.4 (Riesz)**.** 设 $\{f_n\}$ 依测度收敛到 f, 那么存在子列 $\{f_{n_k}\}$ 几乎一致收敛到 f.

例 11.5. 存在函数列几乎处处收敛但不依测度收敛.

例 11.6. 存在函数列依测度收敛但不几乎处处收敛.

12 Littlewood 三原理：Lusin 定理

13 积分的定义：四部曲

对于可测的特征函数 χ_A, 我们定义

$$\int_E \chi_A := m(A).$$

特征函数 χ_A 的积分就是集合 A 的测度. 该等式沟通了积分论与测度论.

由积分的线性性, 我们也知道了简单可测函数的积分. 问题是如何定义非负可测函数的积分.

14 积分的性质

引理 14.1 (Fatou)**.** 设 $\{f_n\}$ 是一列非负可测函数，几乎处处收敛到 f，那么

$$\int f \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int f_n.$$

推论 14.2. 设 $\{f_n\}$ 是一列递减非负可积函数，几乎处处收敛到 f，那么

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n.$$

注记. 递减非负函数列首项可积蕴含每一项都可积.

命题 14.3 (积分对定义域的可数可加性)**.** 设 $E_k \in \Sigma$ 两两不交. 若 $f(x)$ 在 $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ 上可积，则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x)\mathrm{d}x.$$

证明. 根据非负可测函数积分对定义域的可数可加性，我们有

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f^{\pm}(x)\mathrm{d}x = \int_E f^{\pm}(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_E |f(x)|\mathrm{d}x < \infty.$$

从而可知

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\int_{E_k} f^{+}(x)\mathrm{d}x - \int_{E_k} f^{-}(x)\mathrm{d}x\right] = \int_E f^{+}(x)\mathrm{d}x - \int_E f^{-}(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

□

Chapter 1

测度论

1 $\mathbb{R}^n$ 中的基本点集

1.1 Borel 集

定义 1.1 (F_σ, G_δ 集)**.**

- 若 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是可数个闭集的并，则称 E 为 F_σ 集；
- 若 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是可数个开集的交，则称 E 为 G_δ 集.

命题 1.2. F_σ 集的补集是 G_δ 集；G_δ 集的补集是 F_σ 集.

命题 1.3. 闭集是 G_δ 集；开集是 F_σ 集.

证明. 设 F 是闭集，考虑集族
$$\mathcal{O}_n = \left\{x : d(x,F) < \frac{1}{n}\right\},$$
由 $d(x,F)$ 的连续性，知 $\mathcal{O}_n$ 是开集族. 断言 $F = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_n$.

- 对任意的 n，$F \subset \mathcal{O}_n$，因此 $F \subset \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_n$.
- 任取 $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_n$，假设 $x \notin F$，则 $x \in F^c$，那么存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $B(x,\varepsilon) \subset F^c$，则 $B(x,\varepsilon) \cap F = \varnothing$. 取 k 充分大使得 $\dfrac{1}{k} < \varepsilon$，则 $x \notin \mathcal{O}_k$，矛盾！因此 $x \in F$，即 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_n \subset F$.

□

例 1.4. $\mathbb{Q} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \{r_k\}$ 是 F_σ 集.

定义 1.5 (第一纲集与第二纲集)**.** 设 $E \subset \mathbb{R}^n$.

- 若 $\overline{E} = \mathbb{R}^n$，则称 E 为 $\mathbb{R}^n$ 中的稠密集；

- 若 $\mathring{\overline{E}}$，则称 E 为 $\mathbb{R}^n$ 中的无处稠密集；
- 可数个无处稠密集的并称为第一纲集；
- 不是第一纲集的集合称为第二纲集.

2 $\mathbb{R}^n$ 中的 Lebesgue 测度

- Lebesgue 测度
  - 外测度
    - 对任意集合都有定义
    - 不用有限：
    - 不用无限：Lindolorf 可数覆盖定理
  - 定义 Lebesgue 可测集为满足 Caratheodory 条件的集合
  - 若为 Lebesgue 可测集，则定义它的测度为外测度
- 抽象测度
  - 外测度
    - 空集为零
    - 单调性
    - 次可加性
  - 测度
    - 空集为零
    - 可加性
  - 外测度生成测度-Caratheodory 条件.
- 集合的一些等式
  - 集合的交、并都单独满足结合律、交换律，但混在一起就要小心了
  - $E = (E \cap A) \sqcup (E \cap A^c)$
  - $A \cup B = (A \cap B) \sqcup (A^c \cap B) \sqcup (A \cap B^c)$
  - $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

定义 2.1. 设 $E \subset \mathbb{R}^n$，称

$$m^*(E) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| : E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right\}$$

为点集 E 的 *Lebesgue* 外测度，简称外测度.

定理 2.2 ($\mathbb{R}^n$ 中的 Lindelöf 可数覆盖定理)**.** 集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ 的任意开覆盖必存在可列子覆盖.

注记. 该定理告诉我们为什么定义 *Lebesgue* 外测度时要取可列开覆盖而不取任意不可数的开覆盖.

但该定理在抽象外测度的情形下并无对应的推广.

3 抽象测度

- 外测度的定义
- 外测度的存在性
- 测度、测度空间的定义
- 由外测度生成测度：Caratheodory 条件
- 测度性质
- 外测度性质

定义 3.1 (外测度). 设集合 $X \neq \varnothing$，若 $\mu^*: 2^X \longrightarrow [0, +\infty]$ 满足

(1) $\mu^*(\varnothing) = 0$;

(2) $A \subset B \Longrightarrow \mu^*(A) \leqslant \mu^*(B)$;

(3) $\mu^*(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k)$.

注记. (3) 显然蕴含

(3)′ $\mu^*(\bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k)$.

结合 (2)，(3)′ 也蕴含 (3)

$$\mu^*(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \mu^*\left(\bigsqcup_{k=1}^{\infty}\left(A_k - \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i\right)\right) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*\left(A_k - \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i\right) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k)$$

定理 3.2 (外测度的存在性). 设集合 $X \neq \varnothing$, $\{\varnothing, X\} \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ 是任意的子集族，函数 $\varphi: \mathcal{F} \longrightarrow [0, +\infty]$ 满足 $\varphi(\varnothing) = 0$，定义 $\mu^*(E): 2^X \longrightarrow [0, +\infty]$ 为

$$\mu^*(E): \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \varphi(I_k) : E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k, I_k \in \mathcal{F}\right\},$$

则 μ^* 是 X 上的外测度.

证明.

(1) 显然 $\mu^*(\varnothing) = 0$.

(2) B 的开覆盖一定是 A 的开覆盖，由下确界的性质显然.

(3) 不妨设对任意 k 有 $\mu^*(A_k) < +\infty$，否则由单调性有 $+\infty \leqslant +\infty$，这已经成立.

因为 $\mu^*(A_k) < +\infty$，所以按下确界的定义，存在一系列 $I_{kj} \in \mathcal{F}$，使得

$$A_k \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_{kj}, \sum_{j=1}^{\infty} \varphi(I_{kj}) \leqslant \mu^*(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

因此

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \subset \bigcup_{k,j=1}^{\infty} I_{kj}, \mu^*(A_k) \leqslant \sum_{k,j=1}^{\infty} \varphi(I_{kj}) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k) + \varepsilon.$$

由 ε 的任意性得证

$$\mu^*(A_k) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k)$$

□

定义 3.3 (测度，测度空间)**.** 设 X 是一个非空集合，$\Sigma \subset 2^X$ 是 σ-代数，若 $\mu : \Sigma \longrightarrow [0, +\infty]$ 满足

- $\mu(\varnothing) = 0$;
- $\mu(\bigsqcup_{k=1}^{+\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(A_k)$.

则称 μ 是一个测度，并称 (x, Σ, μ) 是一个测度空间.

定理 3.4 (由外测度生成测度)**.** 设 μ^* 是 X 上外测度，定义

$$\Gamma := \left\{ A \subset X \middle| \mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c), \forall E \subset X \right\}$$

则 $(X, \Gamma, \mu^*\big|_{\Gamma})$ 是测度空间.

注记. 由外测度的定义，我们已经有 $\mu^*(E) \leqslant \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$，因此若要验证 $A \subset \Gamma$ 只需验证反向的不等式 $\mu^*(E) \geqslant \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$.

证明. 需要验证：

- Γ 是一个 σ-代数
  - 对取余集运算封闭
  - 对可列并运算封闭
- 可列可加性

一一验证如下：

- Γ 是一个 σ-代数
  - 对取余集运算封闭. 容易看出在 $\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$ 中，A 与 A^c 的地位等同，即若该式对 A 成立则对 A^c 也成立，即若 $A \in \Gamma$ 则 $A^c \in \Gamma$.
  - 对可列并运算封闭

    断言，要验证对可列并运算封闭，只需验证对可列不交并运算封闭，这是因为对于任意的可列并 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$，我们总能将之写为不交并 $\bigsqcup_{k=1}^{\infty} \left(A_k - \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i \right)$ 的形式，其中要补充定义 $A_0 = \varnothing$.

    下验证对可列不交并运算封闭，即若任意两两不交的 $A_k \in \Gamma$，则 $\bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \Gamma$.

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A_1) + \mu^*(E \cap A_1^c) \qquad A_1 \in \Gamma$$

$$
\begin{aligned}
&= \mu^*(E\cap A_1)+\mu^*(E\cap A_2)+\mu^*(E\cap (A_1\sqcup A_2)^c) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\mu^*(E\cap A_k)+\mu^*\left(E\cap\left(\bigsqcup_{k=1}^{n}A_k\right)^c\right) && \text{这两行的简洁依赖于无交并} \\
&\geqslant \sum_{k=1}^{n}\mu^*(E\cap A_k)+\mu^*\left(E\cap\left(\bigsqcup_{k=1}^{\infty}A_k\right)^c\right) && \text{单调性}
\end{aligned}
$$

在上式中令 n 趋于无穷，得到

$$
\mu^*(E)\geqslant\sum_{k=1}^{\infty}\mu^*(E\cap A_k)+\mu^*\left(E\cap\left(\bigsqcup_{k=1}^{\infty}A_k\right)^c\right)\geqslant\mu^*\left(E\cap\bigsqcup_{k=1}^{\infty}A_k\right)+\mu^*\left(E\cap\left(\bigsqcup_{k=1}^{\infty}A_k\right)^c\right)\geqslant\mu^*(E).
$$

- 可列可加性. 在上面我们已经对任意的集合 E 得到

$$
\mu^*(E)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu^*(E\cap A_k)+\mu^*\left(E\cap\left(\bigsqcup_{k=1}^{\infty}A_k\right)^c\right),
$$

只需要取 $E=\bigsqcup_{k=1}^{\infty}A_k$，就得到

$$
\mu^*\Big(\bigsqcup_{k=1}^{\infty}A_k\Big)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu^*(A_k).
$$

□

命题 3.5 (测度性质)**.**

- $\mu(\varnothing)=0$
- 可列可加性：$\mu\left(\bigsqcup_{k=1}^{\infty}A_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu(A_k)$
- 单调性：若 $E\subset F$，则 $F=E\sqcup F\backslash E$，则 $\mu(F)=\mu(E)+\mu(F\backslash E)\geqslant\mu(E)$
- 对一般的集合列 $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$，可构造无交集合列 $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}=\left\{A_k\backslash\bigcup_{n=1}^{k-1}A_n\right\}$ s.t. $\bigcup_{k=1}^{n}A_k=\bigsqcup_{k=1}^{n}B_k$.

$$
\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\right)=\mu\left(\bigsqcup_{k=1}^{\infty}A_k\backslash\bigcup_{n=1}^{k-1}A_n\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu\left(A_k\backslash\bigcup_{n=1}^{k-1}A_n\right)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\mu(A_k).
$$

Lebesgue 测度是距离外测度

距离外测度：外测度对于充分分离的集合具有可加性

$$dist(A,B) > 0 \Rightarrow m^*(A \sqcup B) = m^*A + m^*(B)$$

证明. 只要证明 $m^*(A \sqcup B) \geqslant m^*(A) + m^*(B)$，可设 $m^*(A \sqcup B) < +\infty$ □

定理 3.6 (Lindelöf 可数覆盖定理)**.** *集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ 的任意开覆盖，必存在可列子覆盖.*

命题 3.7. *任意正测集包含不可测集合 (Stein P45 32(b),$m^*(G) > 0$)*

例 3.8. 内容...

证明. 假设 E 可数，则 $E = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \{x_i\}$

下说明 $\{x_i\}$ 无处稠密，从而 E 是第一纲集.

由是完备度量空间，$\{x_i\}$ 是闭集. 我们要说它无处稠密，就要说它内部为空. 如果不为空，x_i 就为内点，就说明 $\{x_i\}$ 是开集，存在 U 在 E 中开使得 □

注记. *称区间 I 上连续函数列的极限函数的全体为 Baire 第一函数类.*

证明. 对任意的 $k \in N$，存在 n_k，使得

$$|f_{k_k}(x) - f(x)| < \frac{1}{2^{k+1}}$$

不妨设 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$，考察

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} [f_{n_{k+1}} - f_{n_k}(x)]$$

另 $g(x) =$ □

引理 3.9. *设 $\{f_k\} \subset B_1(R)$，$\sum\limits_{k=1}^{\infty} M_k < +\infty$，$M_k > 0$，若对任意 $x \in R$*

例 3.10. $\Xi_{\mathbb{Q}}$ 不属于 $B_1(\mathbb{R})$，但属于 $B_2(\mathbb{R})$.

4 测度

- 测度的定义
- 测度的性质
  - 单调性
  - 次可加性
  -

定义 4.1 (测度，测度空间)**.** 设 X 是非空集合，$\mathcal{M}$ 是 X 上的 σ-代数.$\mathcal{M}$ 上的测度是一个函数 $\mu : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ 满足

- $\mu(\varnothing) = 0$;
- $\mu(\bigsqcup_{k=1}^{+\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(A_k)$.

则称 μ 是一个测度，并称 (x, Σ, μ) 是一个测度空间.

定理 4.2. 设 $E \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$，那么对任意的 $\varepsilon > 0$，

- 存在包含 E 的开集 G，使得 $m(G \backslash E) < \varepsilon$;
- 存在含于 E 的闭集 F，使得 $m(E \backslash F) < \varepsilon$.

证明.

- 首先考虑 $m(E) < +\infty$ 的情形.

  由定义知，存在 E 的开覆盖 $\{I_k\}$ 使得 $\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| < m(E) + \varepsilon$. 令 $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$，则 G 是包含 E 的开集，并且

$$m(G) = m(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| < m(E) + \varepsilon, m(G) - m(E) = m(G \backslash E) < \varepsilon.$$

  其次讨论 $m(E) = +\infty$ 的情形. 令

$$E_k = E \cap B(0, k), k = 1, 2, \cdots$$

  则 $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. 因为 $m(E_k) \leqslant m(B(0,k)) < +\infty$，因此对任意的 $\varepsilon > 0$，存在包含 E_k 的开集，使得 $m(G_k \backslash E_k) < \frac{\varepsilon}{2^k}$. 作点集 $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$，则 G 为开集并包含 E，且

$$G \backslash E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (G_k \backslash E_k),$$

  从而

$$m(G \backslash E) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} m(G_k \backslash E_k) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

- 只需要注意到如果 G 是包含 E^c 的开集，那么 G^c 是含于 E 的闭集，并且 $G \backslash E^c = E \backslash G$.

□

5 σ-代数

定义 5.1. 设 X 是一个非空集合.X 中集合的一个代数是指 X 的子集的非空族满足在有限并和取余集的运算下封闭.

乘积 σ-代数

设 $\{X_\alpha\}$ 是一族非空集合，$X=\prod_\alpha X_\alpha$，$\pi_\alpha: X\to X_\alpha$ 是投影映射. 如果 $\mathscr{M}_\alpha$ 是 X_α 上的 σ-代数，那么 X 上的乘积 σ-代数是由

$$\left\{\pi_\alpha^{-1}(E_\alpha): E_\alpha\in\mathscr{M}_\alpha, \alpha\in A\right\}$$

生成的 σ-代数，记作 $\bigotimes_\alpha \mathscr{M}_\alpha$. 如果 $A=\{1,\cdots,n\}$，也可记作 $\bigoplus_1^n \mathscr{M}_i$ 或 $\mathscr{M}_1\otimes\cdots\otimes\mathscr{M}_n$.

现在我们给出另外一种更符合直觉的可数多个因子情形下的乘积 σ-代数的刻画.

命题 5.2. 如果 A 是可数的，那么 $\bigotimes_\alpha \mathcal{M}_\alpha$ 是由 $\left\{\prod_\alpha E_\alpha : E_\alpha\in\mathcal{M}_\alpha\right\}$ 生成的 σ-代数.

我们以之后将会用到的一个技术性的结果结束本节. 我们定义基本族为 X 的一个子集族满足

- $\varnothing\in\mathscr{E}$
- 如果 $E,F\in\mathscr{E}$，那么 $E\cap F\in\mathscr{E}$
- 如果 $E\in\mathscr{E}$，那么 E^c 是 $\mathscr{E}$ 中元素的有限无交并.

命题 5.3. 如果 $\mathscr{E}$ 是一个基本族，那么由 $\mathscr{E}$ 中元素经过有限无交并生成的集族 $\mathscr{A}$ 是一个代数.

6 外测度

非空集合 X 上的一个外测度是指一个函数 $\mu^*:\mathscr{P}(X)\to[0,\infty]$ 满足

- $\mu^*(\varnothing)=0$
- $\mu^*(A)\leqslant\mu^*(B)$ 如果 $A\subset B$
- $\mu^*\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\right)\leqslant\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu^*(A_n)$

命题 6.1. 设 $\mathscr{E}\subset\mathscr{P}(X)$，且 $\rho:\mathscr{E}\to[0,\infty]$ 满足 $\varnothing\in\mathscr{E},X\in\mathscr{E}$ 且 $\rho(\varnothing)=0$. 对于任意 $A\subset X$，定义

$$\mu^*(A)=\inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\rho(E_n):E_n\in\mathscr{E},A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right\},$$

则 μ^* 是一个外测度.

从外测度到测度的一个关键步骤如下. 如果 μ^* 是 X 上的一个外测度，那么 $A\subset X$ 称作是 μ^*-可测的如果

$$\mu^*(E)=\mu^*(E\cap A)+\mu^*(E\cap A^c),\quad\forall E\subset X.$$

定理 6.2 (Caratheodory 定理)**.** 如果 μ^* 是 X 上的一个外测度，全体 μ^*-可测集组成的集族 $\mathscr{M}$ 是一个 σ-代数，μ^* 在 $\mathscr{M}$ 上的限制是一个完备测度.

Caratheodory 定理的一个直接应用是将测度从代数延拓到 σ-代数. 确切地说，如果 $\mathscr{A}\subset\mathscr{P}(X)$ 是一个代数，称函数 $\mu_0:\mathcal{A}\to[0,\infty]$ 为一个预测度如果

- $\mu_0(\varnothing)=0,$
- 如果 $\{A_j\}_1^{\infty}$ 是 $\mathcal{A}$ 中的不交闭集使得 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_j\in\mathscr{A}$，那么
$$\mu_0\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_j\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_0(A_j).$$

命题 6.3. 如果 μ_0 是 $\mathscr{A}$ 上的一个预测度，μ^* 如前定义，那么

(a) $\mu^*|\mathscr{A}=\mu_0$

(b) $\mathscr{A}$ 中的每个集合都是可测的.

定理 6.4. 设 $\mathscr{A}\subset\mathscr{P}(X)$ 是一个代数，μ_0 是 $\mathscr{A}$ 上的一个预测度，$\mathscr{M}$ 是由 $\mathscr{A}$ 生成的 σ-代数. 那么存在一个 $\mathscr{M}$ 上的一个测度 μ，它在 $\mathscr{A}$ 上的限制就是 μ_0.

6.1 外测度 $\rightsquigarrow$ 测度

7 某函数 f 的积分 $\rightsquigarrow$ 测度

Chapter 2

符号测度和微分

学完本章，我希望自己能够回答：

- 为什么要引入符号测度.

1 符号测度

定义 1.1. 设 (X, Σ) 是可测空间. 称函数 $\nu : \Sigma \to [-\infty, \infty]$ 是 (X, Σ) 上的一个符号测度，如果

(1) $\nu(\varnothing) = 0$.

(2) $\#\nu(\Sigma) \cap \{-\infty, +\infty\} \neq 2$.

(3) 如果 $\{E_j\}$ 是 Σ 中的一列不交集合，那么 $\nu(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(E_j)$.

过两天看一下这个定义，感觉挺好的，没啥不舒服的.

符号测度的两个例子立即出现在脑海中.

首先，如果 μ_1, μ_2 是 Σ 上的测度并且至少有一个是有限的，那么 $\nu = \mu_1 - \mu_2$ 是一个符号测度.

其次，如果 μ 是 Σ 上的测度，$f : X \to [-\infty, +\infty]$ 是可测函数满足至少有一个 $\int f^+ \mathrm{d}\mu$ 或 $\int f^- \mathrm{d}\mu$ 是有限的，那么由 $\nu(E) = \int_E f \mathrm{d}\mu$ 定义的集合函数 ν 是一个符号测度.

事实上，不久我们将看到这实际上是唯一的例子：每个符合测度都能够表示为这两种形式.

命题 1.2. 设 ν 是 (X, Σ) 上的符号测度. 如果 $\{E_j\}$ 是 Σ 中的递增列，那么

$$\nu(\bigcup_{1}^{\infty} E_j) = \lim_{j \to \infty} \nu(E_j).$$

如果 $\{E_j\}$ 是 Σ 中的递减列且 $\nu(E_1)$ 是有限的，俺么

$$\nu(\bigcap_{1}^{\infty} E_j) = \lim_{j \to \infty} \nu(E_j).$$

如果 ν 是 (X, Σ) 上的符号测度，集合 $E \in \Sigma$ 称为对于 ν 是正的如果 $\nu(F) \geqslant 0$ 对于所有 $F \in \Sigma$ 且 $F \subset E$ 成立.

特别地，在上面定义的 $\nu(E) = \int_E f \mathrm{d}\mu$ 的例子中，E 是正的当且仅当 $f \geqslant 0$ 在 E 上几乎处处成立.

证明.

- $\Longrightarrow$ 用反证法，假设 $m(\{f<0\})=a>0$，考虑集合列 $E_n=\left\{f<-\dfrac{1}{n}\right\}$，则 E_n 单调地政趋于 $\{f<0\}$，则存在 N 使得对于 $n>N$ 成立 $m(E_n)>\dfrac{a}{2}$，则 $\displaystyle\int_{E_n} f\mathrm{d}\mu<-\frac{1}{n}\int_{E_n}\mathrm{d}\mu<-\frac{1}{n}\frac{a}{2}<0$，矛盾！
- $\Longleftarrow$ 任取 $F\subset E$ 且 $F\in\Sigma$，$\nu(F)=\displaystyle\int_F f\mathrm{d}\mu\geqslant 0$.

□

引理 1.3. 任意正集合的可测子集是正的，正集合的可列并是正的.

证明. 第一条断言由定义是显然的.

设 $\{P_n\}$ 是正的集合族. 任取 $F\subset\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty}P_n$，我想说明 $m(F)\geqslant 0$，这当然要借助单个的 P_n 与 F 的交来说明，但 $\{P_n\}$ 两两之间可能有重叠，所以我们先通过经典的手段 $Q_n=P_n\displaystyle\bigcup_{j=1}^{n-1}P_j$ 来得到不损失总体信息的无交集合族 $\{Q_n\}$，单个 $Q_n\subset P_n$ 从而也是正的. 因此 $\nu(F)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\nu(E\cap Q_n)\geqslant 0$. □

2 Lebesgue-Radon-Nikodym 定理

定义 2.1. 设 ν 和 μ 分别是 (X,Σ) 上的符号测度和正测度. 如果对任何满足 $\mu(E)=0$ 的 $E\in\Sigma$, 都有 $\nu(E)=0$，则称 ν 关于 μ 是绝对连续的，记作 $\nu\ll\mu$.

命题 2.2. 下列等价:

(1) $\nu\ll\mu$;

(2) $|\nu|\ll\mu$;

(3) $\nu^+\ll\mu$ 且 $\nu^-\ll\mu$.

绝对连续在某种意义上是相互奇异的对立面. 明确地说，如果 $\nu|\mu$ 且 $\nu\ll\mu$，那么 $\nu=0$.

注记. 我们能将绝对连续的概念推广到 μ 是符号测度的情形，即 $\nu\ll\mu$ 当且仅当 $\nu\ll|\mu|$，但是我们用不到这个更一般的概念.

术语绝对连续来自于实变理论，对于有限符号测度的情形，它等价于连续形式的另一条件.

定理 2.3. 设 ν 和 μ 分别是 (X,Σ) 上的有限符号测度和正测度. 那么 $\nu\ll\mu$ 当且仅当对于任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使得只要 $\mu(E)<\delta$ 便有 $|\nu(E)|<\varepsilon$.

证明.

- $\Longleftarrow$ 由条件，对于任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使得只要 $\mu(E)<\delta$ 便有 $|\nu(E)|<\varepsilon$. 那么对于 E 满足 $\mu(E)=0$，有 $|\nu(E)|<\varepsilon$ 对任意 ε 成立，因此 $|\nu(E)|=0$，即 $\nu(E)=0$.

- $\Longrightarrow$ 由于 $\nu\ll\mu$ 当且仅当 $|\nu|\ll\mu$，又有 $|\nu(E)|\leqslant|\mu|(E)$. 所以只要对正测度 ν 证明了命题，便可以借助 $|\nu|$ 得到 ν 下的正确性. 下设 ν 是有限正测度.

  假设所证不成立，那么存在 $\varepsilon>0$，使得对任意的 $n\in\mathbb{N}$，我们能找到 $E_n\in\Sigma$ 满足 $\mu(E_n)<\dfrac{1}{2^n}$ 且 $\nu(E_n)\geqslant\varepsilon$. 令 $F_k=\bigcup\limits_{n=k}^{\infty}E_n$，$F=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}F_n$. 那么 $\mu(F_k)<\sum\limits_{n=k}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}=\dfrac{1}{2^{k-1}}$，所以 $\nu(F)=0$. 但 $\nu(F_k)\geqslant\varepsilon$ 对于所有的 k 成立，因为 ν 是有限测度，$\nu(F)=\lim\limits_{k\to\infty}\nu(F_k)\geqslant\varepsilon$. 这与 $\nu\ll\mu$ 矛盾！

$\square$

注记. *Lebesgue* 分解定理的一个改进将奇异测度分解为了奇异连续测度和离散测度.

Chapter 3

Fubini 定理

1 乘积测度

在继续进行之前我们需要一个技术性的引理.

引理 1.1 (单调类引理). 如果 $\mathscr{A}$ 是 X 的子集的一个代数，那么由 $\mathscr{A}$ 生成的单调类 $\mathscr{C}$ 和由 $\mathscr{A}$ 生成的 σ-代数 $\mathscr{M}$ 是一致的.

现在我们来到了本节的主要结果，它将 $X \times Y$ 上的积分与 X 和 Y 上的积分联系了起来.

定理 1.2. 设 $(X, \mathscr{M}, \mu)$ 和 $(Y, \mathscr{N}, \nu)$ 是 σ-有限测度空间. 如果 $E \in \mathscr{M} \otimes \mathscr{N}$，那么函数 $x \mapsto \nu(E_x)$ 和函数 $y \mapsto \mu(E^y)$ 分别在 X 和 Y 是可测的，并且

$$\mu \times \nu(E) = \int \nu(E_x) \mathrm{d}\mu(x) = \int \mu(E^y) \mathrm{d}\nu(y).$$

2 Fubini 定理

定理 2.1 (Tonelli 定理)**.**

证明.

(1) 矩体

(2) 开集：矩体的并. 参见 Stein 定理 1.4

(3) 紧集：开集的差

(4) 零测集：借助等测包，而等测包是开集的递减列

(5) 一般可测集：紧集的递增列并上零测集

□

定理 2.2 (Fubini 定理)**.**

Fubini-Tonelli 定理应用的两部曲

- Tonelli 定理验证 f 的可积性.

$$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} |f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} |f(x,y)|\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x < +\infty \Longrightarrow f \in \mathscr{L}^1$$

- Fubini 定理计算 f 积分值

$$f \in \mathscr{L}^1 \Longrightarrow \int_{\mathbb{R}^{n+m}}$$

例 2.3. $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}, (x,y) \in (0,1] \times (0,1]$

例 2.4. 设 $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$，且

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)$$

3

- 抽象积分理论中的 Fubini 定理
- Vitali 覆盖引理

定理 3.1 (Fubini 定理)**.** 设 (X, Γ_X, μ)，(Y, Γ_Y, ν) 是 σ 有限正测度空间，

$$f \in \mathscr{L}^+(X \times Y) \cup \mathscr{L}^1(X \times Y, \mu \times \nu),$$

则

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} f \mathrm{d}\mu \times \nu &= \int_X \left(\int_Y f(x,y)\mathrm{d}\nu(y)\right)\mathrm{d}\mu(x)\\ &= \int_Y \left(\int_X f(x,y)\mathrm{d}\mu(x)\right)\mathrm{d}\nu(y).\end{aligned}$$

- 在假定等式成立的情况下？推导出了这些东西？
- $\displaystyle\int_Y f(x,y)\mathrm{d}\nu(y)$ 作为关于 x 的函数是可积的.
-

3.1 Vitali 覆盖定理

Chapter 4

微积分基本定理

1 title

2 微积分基本定理

2.1 Lebesgue 点定理

设 $f \in \mathscr{L}^1[a,b]$，由微积分基本定理我们知道

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t \xlongequal{\text{a.e.}} f(x).$$

下面我们想要得到更强的 Lebesgue 点定理，即

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} |f(t)-f(x)|\mathrm{d}t \xlongequal{\text{a.e.}} 0.$$

我很想直接援引微积分基本定理来得到它. 但如果我要直接用微积分基本定理，我实际上是先固定了一个 $x=x_0$，然后对函数 $|f(x)-f(x_0)|$ 用微积分基本定理，从而得到

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} |f(t)-f(x_0)|\mathrm{d}t \xlongequal{\text{a.e.}} |f(x)-f(x_0)|.$$

这看起来不错，似乎将 $x=x_0$ 代入上式，再由 x_0 的任意性便可以得到想要的结果. 但注意到上式只对几乎处处的 x_0 成立，因此我并不能断言式子对 $x=x_0$ 是成立的，也不能退而求其次得到对于几乎处处的 x_0 是成立的（这是因为我对成立的点的刻画毫无了解，因此不能排除出现固定任意 x_0 时，不成立的零测的 x 中恰好有此时固定的 x_0 这种极端情况）.

下面介绍一个 trick，在不取定 $x=x_0$ 的情况下，使得被积函数与 x 无关.

设 $r\in\mathbb{Q}$，则 $|f(t)-f(x)|\leqslant |f(t)-r|+|f(x)-r|$.

$$\begin{aligned}
\overline{\lim_{h\to 0}}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} |f(t)-f(x)|\mathrm{d}t &\leqslant \overline{\lim_{h\to 0}}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} |f(t)-r|+|f(x)-r|\mathrm{d}t\\
&= \overline{\lim_{h\to 0}}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} |f(t)-r|\mathrm{d}t+|f(x)-r|\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} |f(t)-r|\mathrm{d}t+|f(x)-r|\\
&\xlongequal{\text{a.e.}} 2|f(x)-r|
\end{aligned}$$

取定令上式成立的 $x=x_0$，令 $r\to f(x_0)$，得到

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} |f(t)-f(x_0)|\mathrm{d}t = 0,$$

因此

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} |f(t)-f(x)|\mathrm{d}t \xlongequal{\text{a.e.}} 0.$$

Chapter 5

$\mathscr{L}^p$ 空间

通过前面各章的学习我们知道：连续（或几乎处处连续）函数及其相应的 Riemann 积分理论的地位和作用，在一定意义上已被可测函数及其 Lebesgue 积分理论所代替. 新的积分理论不仅扩大了积分的对象，而且新的可积函数类的全体还呈现出与欧式空间有极其类似的结构与性质，从而为我们在其上建立分析学奠定了基础. 它的应用涉及微分方程、积分方程、Fourier 分析等许多领域.

1 $\mathscr{L}^p$ 空间的定义与不等式

2 $\mathscr{L}^p$ 空间的结构

3 $\mathscr{L}^2$ 空间

4 $\mathscr{L}^p$ 空间的范数公式

5 卷积

定理 5.1 (Young 卷积不等式). 设 $1 \leqslant p, q, r \leqslant \infty$ 满足 $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{r} + 1$，那么

$$\|f * g\|_r \leqslant \|f\|_q \|g\|_q, \quad \forall\ f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^d), g \in \mathscr{L}^q(\mathbb{R}^d).$$

证明. □

例 5.2. 定义

$$\eta(x) = \begin{cases} C\mathrm{e}^{\frac{1}{|x|^2-1}} & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geqslant 1 \end{cases}$$

其中选取常数 C 使得 $\displaystyle\int_{B_1(0)} \eta(x)\mathrm{d}x = 1$.

定义 5.3. 设 $f \in L^1_{loc}(U)$, 定义

$$f^\varepsilon(x) = (\eta_\varepsilon * f)(x) = \varepsilon^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) f(y)\mathrm{d}y.$$

容易验证

(1) $f^\varepsilon \in C^\infty(U_\varepsilon), U_\varepsilon = \{x \in U \mid \operatorname{dist}(x, \partial U) > \varepsilon\}$.

(2) 若 $f \in C^\infty(U)$, 则 $\dfrac{\partial f^\varepsilon}{\partial x_i}(x) = (\eta_\varepsilon * \dfrac{\partial f}{\partial x_i})(x)$.

命题 5.4. 若 $f \in C(U)/L^p_{loc}(U)/W^{k,p}_{loc}(U)$, 则 $f^\varepsilon \xrightarrow{\mathscr{T}_{c.c.}/L^p_{loc}(U)/W^{k,p}_{loc}(U)} f$, 其中 $1 \leqslant p < \infty$.

证明. (i) 即证对于任意 $V \subset\subset U$, 成立 $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{x\in V} |f^\varepsilon(x) - f(x)| = 0$. 直接计算即可.

$$|f^\varepsilon(x) - f(x)| = \left| \int_{B(0,1)} \eta(z) \left(f(x - \varepsilon z) - f(x)\right) \mathrm{d}z \right| \leqslant \int_{B(0,1)} |f(x - \varepsilon z) - f(x)| \mathrm{d}z$$

$$\sup_{x\in V} |f^\varepsilon(x) - f(x)| \leqslant C \sup_{x\in V} \sup_{y\in B(x,\varepsilon)} |f(x) - f(y)| \to 0, \varepsilon \to 0.$$

(ii) 即证对于任意 $V \subset\subset U$, 成立 $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0} \|f^\varepsilon - f\|_{L^p(V)} = 0$. 取 $V \subset\subset W \subset\subset U$.

由周民强引理 6.6, 对于 $\forall\ \delta > 0$, 存在 $g \in C_0(\mathbb{R}^n)$ 满足 $\|f - g\|_{L^p(V)} \leqslant \|f - g\|_{L^p(W)} < \delta$.

$$\|f^\varepsilon - f\|_{L^p(V)} \leqslant \|(f-g)^\varepsilon\|_{L^p(V)} + \|g^\varepsilon - g\|_{L^p(V)} + \|g - f\|_{L^p(V)}$$

-
- 由 (i), 对于 $\forall\ \delta > 0$, 存在 ε 使得 $\|g^\varepsilon - g\|_{L^p(V)} < \delta$.

$$\|f^\varepsilon\|_{L^p(V)} \leqslant \|f\|_{L^p(W)}$$

(iii) 3 月 24 日 1 小时 3 分 15 秒

按定义, 需要验证对任意紧集 $V \subset U$, 有 $u^\varepsilon \overset{W^{k,p}(V)}{\longrightarrow} u$.

$$\|u^\varepsilon - u\|^p_{W^{k,p}(V)} \triangleq \sum_{|\alpha|\leqslant k} \|D^\alpha u^\varepsilon - D^\alpha u\|^p_{L^p(V)} \overset{(*)}{=} \sum_{|\alpha|\leqslant k} \|\eta_\varepsilon * D^\alpha u - D^\alpha u\|^p_{L^p(V)} \to 0$$

$$(*) : D^\alpha_x u^\varepsilon(x) = D^\alpha_x \int_{\mathbb{R}^n} \varepsilon^{-n} \eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) u(y)\mathrm{d}y \xlongequal{LDT} \int_{\mathbb{R}^n} \varepsilon^{-n} D^\alpha_x \eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) u(y)\mathrm{d}y$$

$$= (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} \varepsilon^{-n} D_y^\alpha \eta \left(\frac{x-y}{\varepsilon} \right) u(y) \mathrm{d}y \triangleq \int_{\mathbb{R}^n} \varepsilon^{-n} \eta \left(\frac{x-y}{\varepsilon} \right) D^\alpha u \mathrm{d}y = (\eta_\varepsilon * D^\alpha u)(x)$$

$\square$

Chapter 6

Fourier 分析

1 Schwzrtz 函数空间

定义 1.1. 称 $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 是 *Schwartz* 速降函数, 如果对于任意的非负整数 N 和多重指标 α,

$$\|f\|_{(N,\alpha)} := \sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+|x|^N)|\partial^\alpha f(x)| < +\infty.$$

记这样的函数全体为 $\mathcal{S}$, 称为 *Schwartz* 速降函数空间.

命题 1.2. 对于任意的非负整数 N 和多重指标 α, $\|f\|_{(N,\alpha)}$ 是 $\mathcal{S}$ 上的范数.

证明. 只证正定性. 设 $\|f\|_{(N,\alpha)}$ □

容易看出如下线性子空间的包含关系

$$C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S} \subset C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

例 1.3. $\mathrm{e}^{-|x|^2} \in \mathcal{S}$.

证明. 容易看出 $\partial^\alpha \mathrm{e}^{-|x|^2} = P(x)\mathrm{e}^{-|x|^2}$, 其中 P 是一个 n 元多项式. □

2 卷积

命题 2.1. 如果 $f, g \in \mathcal{S}$, 那么 $f * g \in \mathcal{S}$.

证明. $\square$

3 Fourier 变换

定义 3.1. 设 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 定义 f 的 *Fourier* 变换

$$\mathcal{F}f(\xi) := \hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\xi\cdot x}\mathrm{d}x.$$

命题 3.2. $\|\hat{f}\|_u \leqslant \|f\|_1$.

证明.

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\xi\cdot x}\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\xi\cdot x}|\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\mathrm{d}x = \|f\|_1.$$

□

命题 3.3. $\hat{f}$ 是连续函数.

证明. □

命题 3.4.

$$\widehat{(\tau_y f)}(\xi) = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\xi\cdot y}\hat{f}(\xi), \quad \widehat{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\eta\cdot x}f}(x) = \tau_\eta(\hat{f})$$

证明.

□

命题 3.5. $\mathcal{F}$ 将 $\mathcal{S}$ 连续地映入自己.

定理 3.6. 如果 $f \in L^1 \cap L^2$, 那么 $\hat{f} \in L^2$. 并且 $\mathcal{F}|(L^1 \cap L^2)$ 唯一延拓到 L^2 上的一个酉自同构.

Chapter 7

分布

例 0.1. 证明

$$\Delta \log |z| = 2\pi\delta_0.$$

证明. 按定义, 即证

$$\int_{\mathbb{R}^2} \log |z| \Delta\varphi \mathrm{d}x = 2\pi\varphi(0), \quad \forall\ \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$$

为了使用分部积分（需要函数在区域的边界上也可导）, 我们挖一个小圆盘

$$LHS = \int_{\mathbb{R}^2 \backslash B_\varepsilon} \log |z| \Delta\varphi \mathrm{d}x + \int_{B_\varepsilon} \log |z| \Delta\varphi \mathrm{d}x = I_1 + I_2$$

$$|I_2| \leqslant C \left| \int_{B_\varepsilon} \log |z| \mathrm{d}x \right| \leqslant C\varepsilon^2 |\log \varepsilon| \longrightarrow 0$$

$$I_1 - \int_{\mathbb{R}^2 \backslash B_\varepsilon} \Delta \log |z| \varphi \mathrm{d}x = -\left(\int_{\partial B_\varepsilon} \log |z| \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \mathrm{d}\sigma - \int_{\partial B_\varepsilon} \frac{\partial \log |z|}{\partial \nu} \varphi \mathrm{d}\sigma \right) = -I_3 + I_4$$

$$|I_3| \leqslant C \left| \int_{\partial B_\varepsilon} \log |z| \mathrm{d}\sigma \right| \leqslant C\varepsilon |\log \varepsilon| \longrightarrow 0$$

$$\left. \frac{\partial \log |z|}{\partial \nu} \right|_{|z|=\varepsilon} = \left. \frac{1}{|z|} \right|_{|z|=\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} \Longrightarrow I_4 \longrightarrow 2\pi\varphi(0).$$

□

例 0.2. 已知

$$\Delta u + 2\mathrm{e}^u = 0, \quad x \in D^*$$

已知

$$u - 2(\alpha - 1) \ln |z| = g$$

在 D 上是连续函数, 其中 $\alpha > 0$. 求证在分布的意义下

$$\Delta u + 2\mathrm{e}^u = 4\pi(\alpha - 1)\delta_0,$$

证明. 即证在分布的意义下,

$$\Delta g = -2e^u$$

按定义, 这就是

$$\int_D g \Delta\varphi \mathrm{d}x = -\int_D 2\mathrm{e}^u \varphi \mathrm{d}x, \quad \varphi \in C_0^\infty(D)$$

$$\int_D 2\mathrm{e}^u \varphi \mathrm{d}x = \int_{D \backslash B_\varepsilon} 2\mathrm{e}^u \varphi \mathrm{d}x + \int_{B_\varepsilon} 2\mathrm{e}^u \varphi \mathrm{d}x = I_1 + I_2$$

$$I_2 = \int_{B_\varepsilon} 2|z|^{2(\alpha-1)} \mathrm{e}^g \varphi \mathrm{d}x \longrightarrow 0$$

$$\begin{aligned}
-I_1 &= \int_{D \backslash B_\varepsilon} (\Delta u) \varphi \mathrm{d}x = \int_{D \backslash B_\varepsilon} u \Delta\varphi \mathrm{d}x - \int_{\partial B_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \nu} \varphi \mathrm{d}x + \int_{\partial B_\varepsilon} u \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \mathrm{d}x \\
&= \int_{D \backslash B_\varepsilon} (2(\alpha - 1) \ln |z| + g) \Delta\varphi \mathrm{d}x - \int_{\partial B_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \nu} \varphi \mathrm{d}x + \int_{\partial B_\varepsilon} u \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \mathrm{d}x \\
&= -\int_{\partial B_\varepsilon} 2(\alpha - 1) \ln |z| \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \mathrm{d}x + \int_{\partial B_\varepsilon} 2(\alpha - 1) \frac{\partial \log |z|}{\partial \nu} \varphi \mathrm{d}x + \int_{D \backslash B_\varepsilon} g \Delta\varphi \mathrm{d}x - \int_{\partial B_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \nu} \varphi \mathrm{d}x + \int_{\partial B_\varepsilon} u \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \mathrm{d}x \\
&= -I_3 + I_4 + I_5 - I_6 + I_7
\end{aligned}$$

$$I_7 - I_3 \longrightarrow 0, \quad I_4 - I_6 \longrightarrow 0, \quad I_5 \longrightarrow \int_D g \Delta\varphi \mathrm{d}x$$

□

1 缓增分布

Chapter 8

总结

1 总结

- 第一层：Lebesgue 测度论与 Lebesgue 积分论
  - Lebesue 测度论
    -
  - Lebesgue 积分论
    - Lebesgue 积分四步骤：$(\chi_A, S^+, \mathscr{L}^+, L^1)$
    - 核心内容：交换积分次序的五个等价定理
  - Lebesgue 测度论和 Lebesgue 积分理论的桥梁
    - 特征函数
    - 绝对连续测度
    - 积分是高维测度
- 第二层：抽象的测度理论和抽象的积分理论
  - 符号测度、实测度、复测度
- 第三层：测度论和积分论的进一步推广
  - 向量值测度、算子值测度
  - 被积函数扩充：欧式空间，流形，纤维丛，无限维空间上的函数
- 从实分析看微积分

Now this is not the end. it is not even the beginning of the end. but it is perhaps the end of the beginning

Chapter 9

作业

1 第一周

周民强实变函数论 P13 的 1、2、3 题

1. 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，记 $f_1(x)=f(x)$，$f_n(x)=f(f_{n-1}(x))(n=2,3,\cdots)$. 若存在 n_0，使得 $f_{n_0}(x)=x$，则 f 是 $\mathbb{R}$ 到 $f(\mathbb{R})$ 上的一一映射.

证明.

- 满射，显然.
- 单射. 若存在 x_1,x_2，使得 $f(x_1)=f(x_2)=x_3$，那么 $f_{n_0}(x_1)=f_{n_0}(x_2)=f_{n_0-1}(x_3)$. 但 $f_{n_0}(x_1)=x_1, f_{n_0}(x_2)=x_2$，因此 $x_1=x_2$.

□

注记. $(Map(R,R),\circ)$ 是含幺半群，那么本题的意思是说 $f^n=1$ 则 f 可逆.

2. 不存在 $\mathbb{R}$ 上的连续函数 f，它在无理数集 $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ 上是一一映射，而在 $\mathbb{Q}$ 上不是一一映射.

证明. 假设存在满足条件的函数 f，则存在 $p,q\in\mathbb{Q}$，满足 $p<q$ 且 $f(p)=f(q)$.

因为 f 是连续函数，所以 f 在 $[p,q]$ 上能取到最大值和最小值. 使得 f 取最值得无理点最多有两个，否则，必有两个无理最大值点或者两个无理最小值点，这与 f 在 $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ 上是一一映射矛盾.

任取 $[p,q]$ 中的非最值点无理数 x，根据介值定理，一定可以找到另一个数 $y\in[p,q]$，使得 $f(x)=f(y)$，易知 y 必须是有理数. 且不同的无理数 x 不能对应相同的 y 值，由此我们找到了 $[p,q]$ 中的无理数集（除去至多两个最值点）和有理数集的某个子集之间的一一对应，这是不可能的. □

证明. 假设存在 f 是 $\mathbb{R}$ 上是连续函数，并且 $f|_{\mathbb{R}/Q}$ 上是单射，$f|Q$ 上不单，则存在 $a,b\in Q$，使得 $f(a)=f(b)=y_0$，定义

$$A=\{x\in[a,b],f(x)=y_0\}=[a,b]\cap f^{-1}\{y_0\}$$

$$()^c=\bigcup_{k=1}^{\infty}(\alpha_k,\beta_k)$$

□

3.$f:X\to Y$ 是满射当且仅当对任意的真子集 $B\subset Y$，有

$$f(f^{-1}(B))=B.$$

证明.

- 当 Y 是独点集
  - 它的真子集只有空集，对于空集命题 $f(f^{-1}(\varnothing))=\varnothing$ 恒成立.
  - 独点集 Y 映射 $f:X\to Y$ 是满射也恒成立.
- 当 Y 不是独点集，

- $\Leftarrow$

  用反证法，假设 f 不是满射，则存在 $y_0 \in Y$，使得 $f^{-1}(y_0) = \varnothing$，而 $f(\varnothing) = \varnothing \neq \{y_0\}$，矛盾！

- $\Rightarrow$

  显然有

  $$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2), f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2).$$

  所以只需对任意 $y \in Y$ 证明

  $$f(f^{-1}(y)) = y,$$

  而由 f 是满射这是成立的.

$\square$

习题课补充:$\mathbb{R}$ 中开集是可数个不相交的开区间的并集.

证明. 任取 $\mathbb{R}$ 中开集 U，任取 $x \in U$，令 $J_x = \{I open | x \in I \subset U\} \neq \varnothing$

$(J_x, \subseteq)$ 构成偏序集，对任意 $S \subset J_x$ 中的全序子集，令 $\bigcup\limits_{I \in S} I$ 是 S 在 J_x 的一个上界，并且它是开区间，由 Zorn 引理，存在一个最大元 I_X，接下来要说明 I_x 与 I_y 要么相等，要么不相交. 反之，$I_x \cup I_y \supset I_x$，与 I_x 是极大元矛盾. $\square$

P20, 例 12 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，$E = \left\{x \in \mathbb{R} : \lim\limits_{y \to x} = +\infty y\right\}$

证明. 令 $g(x) = \arctan f(x)$，$E = \left\{x \in R, \lim\limits_{y \to x} g(y) = \frac{\pi}{2}\right\}$，从而易知 $\overline{\overline{E}} \leqslant \aleph$.

$$E_n = \left\{x \in [-n, n] \lim_{y \to x} = \frac{\pi}{2}\right\}$$

定义 $\tilde{g}(y, x) = \begin{cases} g(x), x \in [-n, n] \backslash E_n \\ \frac{\pi}{2} x \in E_n \end{cases}$ 因此 E_n 是 $\tilde{g}_n(x)$ 在 $[-n, n]$ 的严格极大值点. 有另一个习题，如果 $f : [a, b \to \mathbb{R}]$，则 f 的严格极大值点是可数的.

对任意的 $\delta > 0$，令

$$E_\delta = \{t \in [a, b] : f(t) > f(x), x \in [t - \delta, t + \delta] \backslash \{t\}\}$$

断言 E_δ 一定是有限集

反之，设 t_0 是 E_δ 的一个极限点， $\square$

任意 $x \in (0, 1)$，若 $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$，$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}$，存在 N 使得 $a_N \neq b_N$，则一定有一个是有限表示.

证明. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n - b_n}{2^n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n}{2^n} = 0$，$c_n = \{\pm 1, 0\}$

记 c_n 中第一个非零元为 c_{n_0}，不妨设 $c_{n_0} = 1$，则

$$\frac{1}{2^{n_0}}$$

$\square$

2 第二周

1. 设 $f: X \to Y, A \subset X, B \subset Y$，试问：下列等式成立吗？

(i) $f^{-1}(Y \backslash B) = f^{-1}(Y) \backslash f^{-1}(B)$；

(ii) $f(X \backslash A) = f(X) \backslash f(A)$.

答.

(i) 成立.

任取 $x \in f^{-1}(Y \backslash B)$，则 $f(x) \in Y \backslash B$. 要证 $x \in f^{-1}(Y) \backslash f^{-1}(B)$.

显然有 $x \in f^{-1}(Y)$，只需证 $x \notin f^{-1}(B)$. 假如 $x \in f^{-1}(B)$，则 $f(x) \in B$，这与 $f(x) \in Y \backslash B$ 矛盾！

任取 $x \in f^{-1}(Y) \backslash f^{-1}(B)$，则 $f(x) \in Y$ 但 $f(x) \notin B$，即 $f(x) \in Y \backslash B$，则 $x \in f^{-1}(Y \backslash B)$.

(ii) 不成立.

只要存在 $x \in A, x' \in X \backslash A$，使得 $f(x) = f(x') = y$，该命题就不成立.

容易验证 $y \in f(X \backslash A)$ 但 $y \notin f(X) \backslash f(A)$.

□

2. 设 $E \subset \mathbb{R}$ 是非空完全集，试证明对任意的 $x \in E$，存在 $y \in E$，使得 $x - y$ 为无理数.

证明. 假设存在 $x \in E$，对任意的 $y \in E$，使得 $x - y$ 为有理数. 当 $y_1 \neq y_2$ 时，$x - y_1 \neq x - y_2$. 这就建立了从 E 中元素到有理数的单射. 而由书 49 页注 1 知任一非空完全集的基数均为 c，矛盾. □

3. 试证明 $x = \frac{1}{4}, \frac{1}{13}$ 属于 Cantor 集

证明.

$$2\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{9^3} + \cdots\right) = \frac{1}{4}$$

$$2\left(\frac{1}{27} + \frac{1}{27^2} + \frac{1}{27^3} + \cdots\right) = \frac{1}{13}$$

□

4.**Cantor sets of constant dissection**. Consider the unit interval $[0,1]$, and let ξ be a fixed real number with $0 < \xi < 1$(the case $\xi = \frac{1}{3}$ corresponds to the Cantor set $\mathcal{C}$ in the text).In stage 1 of the construction, remove the centrally situated open interval in $[0,1]$ of length ξ. In stage 2,remove two central intervals each of relative length ξ, one in each of the remaining intervals after stage 1, and so on.

Let $\mathcal{C}_\xi$ denote the set which remains after applying the above procedure indefinitely.

(a) Prove that the complement of $\mathcal{C}_\xi$ in $[0,1]$ is the union of open intervals of total length equal to 1.

(b) Show directly that $m_*(\mathcal{C}_\xi) = 0$.

证明.

(a) 第 k 步去掉 2^{k-1} 个长度为 $\left(\frac{1-\xi}{2}\right)^{k-1}\xi$ 的开区间，总长度为

$$\sum_{k=1}^{\infty}2^{k-1}\left(\frac{1-\xi}{2}\right)^{k-1}\xi=\xi\sum_{k=1}^{\infty}(1-\xi)^{k-1}=1$$

(b) 第 k 步后剩下 2^k 个长度为 $\left(\frac{1-\xi}{2}\right)^{k}$ 的区间，总长度为 $(1-\xi)^k$，所以

$$m_*(\mathcal{C}_\xi)\leqslant(1-\xi)^k,\forall k$$

令 $k\to\infty$，得到 $m_*(\mathcal{C}_\xi)=0$.

$\square$

5.Cantor-like sets.Construct a colsed set $\hat{\mathcal{C}}$ so that at the k^{th} stage of the construction one removes 2^{k-1} centrally situated open intervals each of length l_k, with

$$l_1+2l_2+\cdots+2^{k-1}l_k<1$$

(a) If l_j are chosen small enough,then $\sum_{k=1}^{\infty}2^{k-1}l_k<1$. In this case, show that $m(\hat{\mathcal{C}})>0$, and in fact, $m(\hat{\mathcal{C}})>0=1-\sum_{k=1}^{\infty}2^{k-1}l_k$.

(b) Show that if $x\in\hat{\mathcal{C}}$, then there exists a sequence of points $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ such that $x_n\notin\hat{\mathcal{C}}$,yet $x_n\to x$ and $x_n\in I_n$, where I_n is a sub-interval in the complement of $\hat{\mathcal{C}}$ with $|I_n|\to 0$.

(c) Prove as a consequence that $\hat{\mathcal{C}}$ is perfect, and contains no open interval.

(d) Show also that $\hat{\mathcal{C}}$ is uncountable.

证明.

(a) 由测度的可列可加性，

$$m(\hat{\mathcal{C}})=m([0,1])-m([0,1]\backslash\hat{\mathcal{C}})=1-\sum_{k=1}^{\infty}2^{k-1}l_k$$

(b) 第 k 步后，有 2^k 个等长的闭区间，长度不超过 $\frac{1}{2^k}$，对任意 $n>0$，选取 k 使得 $\frac{1}{2^k}<\frac{1}{n}$，考察 x 所在的闭区间，该闭区间中任意点与 x 的距离不超过 $\frac{1}{2^k}$，而该区间的中间部分将有一个开区间在下一步被挖掉，将该开区间记为 I_n，任取一点 $x_n\in_n$，则符合题意.

(c) 对任意 $x\in\hat{\mathcal{C}}$，取 $x_n\in\hat{\mathcal{C}}$ 为上一问中 I_n 的端点，则 $x_n\to x$，则 $\hat{\mathcal{C}}$ 为完全集.
若 $\hat{\mathcal{C}}$ 包含开区间 (a,b)，则取 n 充分大使得 $\frac{1}{2^n}<b-a$，那么 $(a,b)\subset\hat{\mathcal{C}}_n$，其中 $\hat{\mathcal{C}}_n$ 是第 n 步后剩下的闭区间，但每个闭区间长度都小于 $\frac{1}{2^n}$，矛盾！

(d) 将 $\hat{\mathcal{C}}$ 与 $\mathcal{C}$ 中的点建立起双射，将第 k 步中被挖掉的第 i 个开区间的左/右端点对应起来，则由 $\mathcal{C}$ 不可数推知 $\hat{\mathcal{C}}$ 也不可数.

$\square$

3 第三周

1. 试证明全体超越数（即不是整系数方程 $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$ 的根）的基数是 c.

证明. 断言：整系数方程 $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$ 的根的基数是 $\aleph_0$.

考虑全体 n 次整系数方程. 每个方程都有 n 个根. 方程的个数是可列个的，所以根的个数也是可列个的.

将不同次数的方程并起来，可列集的可列并还是可列的. 得证. □

2. 设 $\{f_n(x)\}$ 是闭集 $F \subset \mathbb{R}$ 上的连续函数列，则 $f_n(x)$ 在 F 上的收敛点集是 $F_{\sigma\delta}$ 集.

证明. 对自然数 n, m, k 作点集

$$E_{m,n}^{(k)} = \left\{ x \in F : |f_m(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{1}{k} \right\},$$

则由题设知 $E_{m,n}^{(k)}$ 是闭集. 若记 $E_n^{(k)} = \bigcap\limits_{m=n+1}^{\infty} E_{m,n}^{(k)}$，则 $E_n^{(k)}$ 是闭集. 令 $E^{(k)} = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} E_m^{(k)}$，则 $E^{(k)}$ 是 F_σ 集. 因为 $E = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} E^{(k)}$，所以 E 是 $F_{\sigma,\delta}$ 集. □

3. 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上具有介值性. 若对任意的 $r \in \mathbb{Q}$，点集 $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = r\}$ 必为闭集，试证明 $f \in C(\mathbb{R})$.

证明. 假设 f 不连续,则存在 $x_0 \in \mathbb{R}$,存在 $\varepsilon_0 > 0$,以及 x_n 使得 $|x_n - x_0| < \dfrac{1}{n}$,但 $|f(x_n) - f(x_0)| \geqslant \varepsilon_0$.

不妨设有可列个下标使得 $f(x_n) - f(x_0) \geqslant \varepsilon_0$，重新标号为 $1, 2, \cdots, n, \cdots$.

存在 $r \in \mathbb{Q}$，使得 $f(x_n) \geqslant f(x_0) + \varepsilon_0 > r > f(x_0)$.

由介值性可知，存在 ξ_n 使得 $|\xi_n - x_0| \leqslant |x_n - x_0| < \dfrac{1}{n}$，$f(\xi_n) = r$，因此 $\xi_n \to x_0$，因为 $E = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = r\}$ 为闭集，所以 $x_0 \in E$，即 $f(x_0) = r$，矛盾！ □

4. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的可微函数，且对任意的 $t \in \mathbb{R}$，点集 $\{x \in \mathbb{R} : f'(x) = t\}$ 是闭集，试证明 $f'(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数.

证明. 由 Darboux 导函数介值定理有 $f'(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上具有介值性质，其余援引上题结论即可. □

5. 设 $E \subset \mathbb{R}$，且存在 $q : 0 < q < 1$，使得对任一区间 (a, b)，都有开区间列 $\{I_n\}$：

$$E \cap (a, b) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, \sum_{n=1}^{\infty} m(I_k) < (b - a)q,$$

试证明 $m(E) = 0$.

证明. 只需证明 $m(E \cap (0, 1)) = 0$，证明之后 $m(E) = 0$ 由可列可加性显然.

$E \cap (0, 1) \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} m(I_n) < (b-a)q$. 因此 $m(E \cap (0, 1)) < m(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n) \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} m(I_n) < (b-a)q$.

取任意 I_i，$E \cap I_i \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_{in}, \sum\limits_{n=1}^{\infty} m(I_{in}) < m(I_i)q$，此时有 $E \cap (0, 1) \subset \bigcup\limits_{i,n=1}^{\infty} I_{in}$，因此

$$m(E \cap (0, 1)) \leqslant m(\bigcup_{i,n=1}^{\infty} I_{in}) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m(I_{in}) < q \sum_{i=1}^{\infty} m(I_i) < (b - a)q^2.$$

类似可证 $m(E\cap(0,1)) < (b-a)q^k$，对任意 k 成立. 由于 $0 < q < 1$，所以 $m(E\cap(0,1)) = 0$. □

6. 设 $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^n$，$A_1 \subset A_2$，$A_1$ 是可测集，且 $m(A_1) = m^*(A_2) < +\infty$，试证明 A_2 是可测集.

证明. $m^*(A_2) = m^*(A_2 \cap A_1) + m^*(A_2 \backslash A_1) \Longrightarrow m^*(A_2 \backslash A_1) = 0$.

而零测集都是可测集，因此 $A_2 = A_1 \sqcup A_2 \backslash A_1$ 也是可测集. □

7. 设 $\{E_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的可测集列，若 $m\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k\right) < +\infty$，试证明

$$m\left(\varlimsup_{k\to\infty} E_k\right) \geqslant \varlimsup_{k\to\infty} m(E_k).$$

证明.

$$\begin{aligned} m\left(\varlimsup_{k\to\infty} E_k\right) &= m\left(\lim_{n\to\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} m(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k) \\ &= \varlimsup_{n\to\infty} m\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\right) \\ &\geqslant \varlimsup_{n\to\infty} m(E_n) \end{aligned}$$

□

8. 设 $\{E_k\}$ 是 $[0,1]$ 中的可测集列，$m(E_k) = 1 (k = 1, 2, \cdots)$，试证明

$$m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) = 1.$$

证明. 这等价于已知 $m(E_k^c) = 0$，要证 $m\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k^c\right) = 0$. 由测度的可列可加性显然. □

4 第四周

1. 设 $E \subset [0,1]$. 若 $m(E)=1$，试证明 $\bar{E}=[0,1]$；若 $m(E)=0$，试证明 $\mathring{E}=\varnothing$.

证明. 设 $m(E)=0$. 若 $\mathring{E}\neq\varnothing$，则存在开区间 $(a,b)\subset\mathring{E}$，则 $m(E)\geqslant m(\mathring{E})\geqslant b-a$. 矛盾！因此 $\mathring{E}=\varnothing$. 设 $E^c=[0,1]\backslash E$，则 $m(E^c)=m([0,1])-m(E)=0$. 则 $\mathring{E^c}=\varnothing$，则 $\bar{E}=\left(\mathring{E^c}\right)^c=[0,1]$. □

2. 设 $\{A_n\}$ 是互不相交的可测集列，$B_n\subset A_n$，试证明

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}m^*(B_n).$$

证明. 只需证 $m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right)\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}m^*(B_n)$.

$$\begin{aligned}
m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right)&=m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\bigcap\bigcup_{n=1}^{k}A_n\right)+m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\bigcap\left(\bigcup_{n=1}^{k}A_n\right)^c\right)\\
&=m^*\left(\bigcup_{n=1}^{k}B_n\right)+m^*\left(\bigcup_{n=k+1}^{\infty}B_n\right)\\
&\geqslant m^*\left(\bigcup_{n=1}^{k}B_n\right)\\
&=\sum_{n=1}^{k}m^*(B_n)
\end{aligned}$$

令 k 趋于无穷，得证. □

3. 设 $E\subset\mathbb{R}$，且 $0<\alpha<m(E)$，试证明存在 E 中的有界闭集 F，使得 $m(F)=\alpha$.

证明.

- 首先证明存在 E 中的有界集 E'，使得 $0<\alpha<m(E')<m(E)$.
  令 $E_t=E\cap[-t,t]$，则 E_t 是可测集并且 $\lim\limits_{t\to\infty}m(E_t)=m(E)$.
  则对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $A>0$，使得任意 $t>A$，满足 $m(E_t)>m(E)-\varepsilon$.
  取 ε 充分小使得 $m(E)-\varepsilon>\alpha$，取一个相应的 E_{t_0} 记为 E'.

- 证明存在 E' 中的闭集 F 使得 $m(F)=\alpha$.
  同样令 $E_t=E\cap[-t,t], t\in[0,t_0]$，设 $f(t):=m(E_t)$，

  $$|f(t_1)-f(t_2)|=|m(E_{t_1})-m(E_{t_2})|\leqslant 2|t_1-t_2|,$$

  因此 $f(t)$ 是连续函数. 由介值定理，存在 $\xi\in[0,t_0]$ 使得 $f(\xi)=\alpha$.
  则 $E_\xi=E\cap[-\xi,\xi]$ 满足要求.

□

4. 设 $E_1, E_2, \cdots, E_k$ 是 $[0,1]$ 中的可测集，且有

$$\sum_{i=1}^{k} m(E_i) > k-1,$$

试证明 $m\left(\bigcap_{i=1}^{k} E_i\right) > 0$.

证明. $\sum_{i=1}^{k} m(E_i) = k - \sum_{i=1}^{k} m(E_i^c) > k-1 \Longrightarrow \sum_{i=1}^{k} m(E_i^c) < 1.$

$m\left(\bigcap_{i=1}^{k} E_i\right) = 1 - m\left(\bigcup_{i=1}^{k} E_i^c\right) \geqslant 1 - \sum_{i=1}^{k} m(E_i^c) > 0.$ □

5. 设 A 可测，$B \subset \mathbb{R}^n$，试证明

$$m^*(A \cup B) + m^*(A \cap B) = m^*(A) + m^*(B).$$

证明.

$$m^*(A \cup B) = m^*(A) + m^*(B \backslash A)$$

$$m^*(B) = m^*(A \cap B) + m^*(B \backslash A)$$

联立即得所证. □

6. 设 $\{B_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中递减可测集列，$m^*(A) < +\infty$. 令 $E_k = A \cap B_k (k = 1, 2, \cdots)$，$E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$，试证明

$$\lim_{k \to \infty} m^*(E_k) = m^*(E).$$

证明. $\lim_{k \to \infty} m^*(E_k) = \lim_{k \to \infty} m^*(A \cap B_k) = m^*(A) - \lim_{k \to \infty} m^*(A \cap B_k^c)$

$m^*(E_k) = m^*(A \cap \lim_{k \to \infty B_k}) = m^*(A) - m^*(A \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k^c)$

即要证 $\lim_{k \to \infty} m^*(A \cap B_k^c) = m^*(\bigcup_{k=1}^{\infty} A \cap B_k^c)$，由外测度性质成立. □

7. 设 $E \subset \mathbb{R}^n$，$H \supset E$ 且 H 是可测集. 若 $H \backslash E$ 的任一可测子集皆为零测集，试问：H 是 E 的等测包吗.

证明. 已知不可测集 $\mathcal{N}$ 的任意可测子集都是零测集，由此可构造反例.

设 $H = \mathcal{N} \cup [2,3]$，$E = [2,3]$. 而 $m^*(\mathcal{N}) \neq 0$，否则 $\mathcal{N}$ 可测.

注记. *您这 H 不可测啊.*

□

8. 试证明点集 E 可测的充分必要条件是：对任给 $\varepsilon > 0$，存在开集 $G_1, G_2 : G_1 \subset E, G_2 \subset E^c$，使得 $m(G_1 \cap G_2) < \varepsilon$.

证明. 这等价于存在开集 G_1，闭集 G_2^c 使得 $G_2^c \subset E \subset G_1$，并且 $m(G_1 \backslash G_2) < \varepsilon$，这正是 E 可测的充分必要条件. □

5 第五周

1. 设 $f(x)$ 定义在可测集 $E\subset\mathbb{R}^n$ 上. 若 $f^2(x)$ 在 E 上可测，且 $\{x\in E: f(x)>0\}$ 是可测集，则 $f(x)$ 在 E 上可测.

证明. 因为 $f^2(x)$ 在 E 上可测,所以 $\left\{x\in E: f^2(x)>a>0\right\}=\left\{x\in E: f(x)<-a<0\text{或}f(x)>a>0\right\}$ 是可测集. 又 $\{x\in E: f(x)>0\}$ 是可测集,因此 $\left\{x\in E: f(x)<-a<0\text{或}f(x)>a>0\right\}\cap\{x\in E: f(x)>0\}=\{x\in E: f(x)>a>0\}$ 是可测集,$\{x\in E: f(x)<-a<0\}$ 也是可测集. 因此 $\{x\in E: f(x)\geqslant -a, a>0\}$ 是可测集. 从而 f 在 E 上可测. □

2. 设 $f\in C([a,b])$. 若有定义在 $[a,b]$ 上的函数 $g(x): g(x)=f(x)$，$a.e. x\in[a,b]$，试问：$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上必是几乎处处连续的吗？

证明. 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的恒为 0 的函数，g 是 Dirichlet 函数，即为反例. □

3. 设 $z=f(x,y)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的连续函数，$g_1(x),g_2(x)$ 是 $[a,b]\subset\mathbb{R}$ 上的实值可测函数，试证明 $F(x)=f(g_1(x),g_2(x))$ 是 $[a,b]$ 上的可测函数.

证明. 即证 $\{x\in[a,b]: F(x)>a\}$ 是可测集.

由于 f 是连续函数，所以集合 $A=\{(x,y): f(x,y)>a\}$ 是开集.

$\{x\in[a,b]: F(x)>a\}=\{x\in[a,b]:(g_1(x),g_2(x))\in A\}$.

我们可以找到 $\mathbb{R}^2$ 上的一族可数基形如 $(c,d)\times(f,e)$ 其中 $c,d,f,e\in\mathbb{Q}$，我们只需要对于任意的 $(c,d)\times(f,e)\subset A$ 证明 $\{x\in[a,b]:(g_1(x),g_2(x))\in(c,d)\times(f,e)\}$ 是可测集.

这个集合是可测集 $\{x\in[a,b]: g_1(x)\in(c,d)\}$ 和可测集 $\{x\in[a,b]: g_2(x)\in(f,e)\}$ 的交，从而是可测集. 得证. □

4. 设 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上存在右导数，试证明右导函数 $f'_+(x)$ 是 $[a,b)$ 上的可测函数.

证明. □

5. 设在可测集 $E\subset\mathbb{R}$ 上，$f_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 几乎处处收敛于 $f(x)$，且依测度收敛于 $g(x)$，试问：是否有关系式

$$g(x)=f(x),\quad a.e. x\in E?$$

证明. □

6. 试问：$f_n(x)=\cos^n(x)(n=1,2,\cdots)$ 是 $[0,\pi]$ 上依测度收敛列吗？

证明. □

7. 设 $\{f_k(x)\}$ 与 $\{g_k(x)\}$ 在 E 上都依测度收敛于零，试证明 $\{f(x)\cdot g(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于零.

证明. □

8. 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上几乎处处连续的函数，试问是否存在 $g\in C(\mathbb{R})$，使得

$$g(x)=f(x),\quad a.e. x\in\mathbb{R}$$

6 第六周

P119.5 若 $f_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 在 $E=\mathbb{R}$ 上依测度收敛于 $f(x)\equiv 0$，试问：是否有

$$\lim_{n\to\infty} m(\{x\in E:|f_n(x)|>0\})=0?$$

证明. $E=[0,1], f_n(x)=\dfrac{1}{n}$，依测度收敛于 0 但 $m(\{x\in E:|f_n(x)|>0\})=1$. □

P119.6 设 $E\subset\mathbb{R}$ 上的可测函数列 $\{f_k(x)\}$ 满足

$$f_k(x)\geqslant f_{k+1}(x)\quad (k=1,2,\cdots).$$

若 $f_k(x)$ 在 E 上依测度收敛到 0，试问：$f_k(x)$ 在 E 上是否几乎处处收敛到 0?

证明. 由 Riesz 定理和 $\{f_k(x)\}$ 的单调性显然. □

P123.1 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的实值可测函数，试问：是否存在 $g\in C(\mathbb{R})$，使得

$$m(\{x\in\mathbb{R}:|f(x)-g(x)|>0\})=0?$$

证明. 课本 121 页提到 Lusin 定理的结论不能改为“$f(x)$ 是 $E\backslash Z$ 上的连续函数，其中 $m(Z)=0$”. 但这是本题中命题的推论，因此本题中命题不可能是对的.

事实上也容易举出反例，考虑 $\chi_{[0,1]}$ 即可.

□

P123.2 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可测，试证明存在多项式列 $\{P_n(x)\}$，使得

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x)=f(x),\quad a.e.x\in[a,b].$$

证明. 由推论 3.20，存在 $[a,b]$ 上的连续函数列 $\{g_k(x)\}$，使得

$$\lim_{k\to\infty} g_k(x)=f(x),\quad a.e.x\in E.$$

由 $[a,b]$ 测度有限，这个收敛是几乎一致收敛.

由 Weierstrass 定理，存在 $[a,b]$ 上的多项式 $\{P_{kn}\}$，使得

$$\lim_{n\to\infty} P_{kn}(x)=g_k(x),\quad x\in E,$$

并且这个收敛是一致收敛.

下证能选出多项式几乎一致收敛到 $f(x)$，从而是几乎处处收敛.

对任意 $\delta>0$，存在 $[a,b]$ 的可测子集 E_δ 使得 $m(E_\delta)\leqslant\delta$ 并且 $\{g_k(x)\}$ 一致收敛于 $f(x)$. 也就是对任意 n，存在 K 只要 $k>N$，那么 $|g_k(x)-f(x)|<\dfrac{1}{n}$. 存在 M 只要 $m>M$，那么 $|P_{km}(x)-g_k(x)|<\dfrac{1}{n}$，将这样的 P_{km} 记为 P_n，则 $\{P_n\}$ 在 $[a,b]\backslash E_\delta$ 上一致收敛到 $f(x)$. 得证. □

注记. 感觉自己陈述得有点麻烦.

P189.1 设 $f(x)$ 是 $E\subset\mathbb{R}^n$ 上几乎处处大于零的可测函数，且满足 $\displaystyle\int_E f(x)\mathrm{d}x=0$，试证明 $m(E)=0$.

证明. 假设 $m(E)=a>0$，令 $A=\{x\in E: f(x)=0\}$，由题意 $m(A)=0$. 则 $m(E\backslash A)=\alpha>0$.

考虑 $E_k=\left\{x\in E: f(x)>\dfrac{1}{k}\right\}$，存在 k_0 使得 $E_{k_0}>0$，否则

$$m(E\backslash A)=m(\bigcup_{k=1}^{\infty})<\sum_{k=1}^{\infty}m(E_k)=0.$$

但 $\displaystyle\int_E f(x)\mathrm{d}x>\frac{1}{k}m(E_k)>0$. 矛盾！ □

7 第七周

P143.9 设 $\{f_k(x)\}$ 是 E 上的非负可测函数列. 若有

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x)=f(x),\quad f_k(x)\leqslant f(x)\quad (x\in E; k=1,2,\cdots)$$

则对 E 的任一可测子集 e，有

$$\lim_{k\to\infty}\int_e f_k(x)\mathrm{d}x=\int_e f(x)\mathrm{d}x.$$

证明. 由单调性，有 $\int_e f_k\leqslant\int_e f$，从而 $\overline{\lim_{k\to\infty}}\int_e f_k\leqslant\int_e f$.

由 Fatou 引理，有 $\int_e f\leqslant\underline{\lim_{k\to\infty}}\int_e f_k$. 从而 $\lim_{k\to\infty}\int_e f_k=\int_e f$. □

P149.3 若 $f\in\mathscr{L}(E)$，则

$$m(\{x\in E:|f(x)|>k\})=O\left(\frac{1}{k}\right)\quad (k\to\infty).$$

证明. 设 $E_k=\{x\in E:|f(x)|>k\}$.

$\int f\geqslant\int f\chi_{E_k}\geqslant km(E_k)$.

$m(E_k)\leqslant\frac{\int f}{k}$，其中 $\int f$ 是有限数，从而 $m(E_k)=O\left(\frac{1}{k}\right)$，$k\to\infty$. □

P159.4 设 $f\in\mathscr{L}(E)$，记 $E_k=\left\{x\in E:|f(x)|<\frac{1}{k}\right\}$，试证明

$$\lim_{k\to\infty}\int_{E_k}|f(x)|\mathrm{d}x=0.$$

证明.

$$\lim_{k\to\infty}\int_{E_k}|f(x)|\mathrm{d}x=\lim_{k\to\infty}\int_E|f(x)|\chi_{E_k}\mathrm{d}x\overset{MCT}{=\!=\!=}\int_E\lim_{k\to\infty}|f(x)|\chi_{E_k}\mathrm{d}x=0.$$

□

P190.9 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的递增函数，试证明对 $E\subset[0,1]$，$m(E)=t$，有 $\int_{[0,t]}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_E f(x)\mathrm{d}x$.

证明. □

P159.3 设 $f\in\mathscr{L}([0,+\infty))$，试证明函数

$$g(x)=\int_{[0,\infty)}\frac{f(t)}{x+t}\mathrm{d}t$$

在 $(0,+\infty)$ 上连续.

P160.6 设 $f_k\in\mathscr{L}(E)(k=1,2,\cdots)$，且 $f_k(x)$ 在 E 上一致收敛于 $f(x)$. 若 $m(E)<+\infty$，试证明

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x).$$

P190.10

P190.12

8 第八周

P191.18

P191.19

P191.20

P191.21

9 第九周

P189.3 设 $f(x)$ 是 $E\subset\mathbb{R}^n$ 上的非负可测函数. 若存在 $E_k\subset E$，$m(E\backslash E_k)<\dfrac{1}{k}$，使得极限

$$\lim_{k\to\infty}\int_{E_k}f(x)\mathrm{d}x$$

存在，试证明 $f(x)$ 在 E 上可积.

证明. 我觉得应该造不出单调递增列逼近 E，因而无法应用单调收敛定理.

但我们可以考察 E_k 的上极限，有理由相信它差不多就是 E. 为了运用 Borel-Cantell 引理， □

P189.4 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的非负可积函数，令

$$F(x)=\int_{(-\infty,x]}f(t)\mathrm{d}t,\quad x\in\mathbb{R}.$$

若 $F\in\mathscr{L}(\mathbb{R})$，试证明 $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}f(x)\mathrm{d}x=0$.

P189.5

P189.8

10 第十周

P184.1 设 $f(x,y)$ 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上可积，试证明

$$\int_0^1\left(\int_0^x f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\int_y^1 f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$$

证明.

$$\int_0^1\left(\int_0^x f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\chi_{y\leqslant x}\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\int_y^1 f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$$

□

P184.2 设 A,B 是 $\mathbb{R}^n$ 中的可测集，试证明

$$\int_{\mathbb{R}^n} m((A-\{x\})\cap B)\mathrm{d}x=m(A)\cdot m(B).$$

证明.

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n} m((A-\{x\})\cap B)\mathrm{d}x\\=&\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\chi_A(x+y)\chi_B(y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\=&\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\chi_A(x+y)\chi_B(y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\\=&\int_{\mathbb{R}^n}\left(\chi_B(y)\int_{\mathbb{R}^n}\chi_A(x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=m(A)\cdot m(B).\end{aligned}$$

□

P193.29 假设 $f(x),g(x)$ 是 $E\subset\mathbb{R}$ 上的可测函数并且 $m(E)<+\infty$，若 $f(x)+g(y)$ 在 $E\times E$ 上可积，试证明 $f(x)$，$g(x)$ 都是 E 上的可积函数.

证明. 由 Fubini 定理，对 $y\in E\backslash Z$，$F_y(x)=f(x)+g(y)$ 是关于 x 的可积函数，其中 Z 零测.

选取 $y_0\in E\backslash Z$ 使得 $|g(y_0)|<+\infty$. 由 $F_{y_0}(x)$ 可积，按定义有 $\int_E|f(x)+g(y_0)|\mathrm{d}x<+\infty$.

从而 $\int_E|f(x)|\mathrm{d}x=\int_E|f(x)+g(y_0)-g(y_0)|\mathrm{d}x\leqslant\int_E|f(x)+g(y_0)|\mathrm{d}x+|g(y_0)|m(E)<+\infty.$ □

P193.30 计算下列积分：

(i) $\displaystyle\int_{x>0}\int_{y>0}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+y)(1+x^2y)}$;

(ii) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2-1}\mathrm{d}x.$

解.

(i) $F(x,y)=\dfrac{1}{(1+y)(1+x^2y)}$ 是 $(0,+\infty)\times(0,+\infty)$ 上的非负可测函数，所以由 Tonelli 定理，

$$\int_{x>0}\int_{y>0}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+y)(1+x^2y)}=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+y}\left(\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2y}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{y}(1+y)}\mathrm{d}y=\frac{\pi^2}{2}.$$

(ii) 注意到

$$\int_{x>0}\int_{y>0}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+y)(1+x^2y)}=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+y)(1+x^2y)}\mathrm{d}y\mathrm{d}x=2\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2-1}\mathrm{d}x.$$

因此 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2-1}\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{4}$.

□

P193.31 设 $E\subset\mathbb{R}$ 是可测集，且 $m(E)>0$，$f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的非负可测函数. 若函数

$$F(x)=\int_E f(x-t)\mathrm{d}t$$

在 $\mathbb{R}$ 上可积，试证明 $f\in\mathscr{L}(\mathbb{R})$.

证明. 断言 $f(x-t):\mathbb{R}\times\to\mathbb{R},(x,t)\mapsto f(x-t)$ 是可测函数（why?）

$F(x)$ 非负可积，按定义 $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}F(x)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}}\int_E f(x-t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x<+\infty$. 由 Tonelli 定理，

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\chi_E f(x-t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}f(x-t)\mathrm{d}x\right)\chi_E\mathrm{d}t=\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}f(x)\mathrm{d}x\right)\chi_E\mathrm{d}t=m(E)\int_{\mathbb{R}}f(x)\mathrm{d}x.$$

由 $m(E)>0$，得 $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}f(x)\mathrm{d}x<+\infty$. □

P162.7 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上非负可积，且有 $E\subset(0,+\infty)$，则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=1\Longrightarrow\int_E f(x)\cos x\mathrm{d}x\neq 1.$$

证明. 假设 $\displaystyle\int_E f(x)\cos x\mathrm{d}x=1$，则 $\displaystyle\int_E f(x)(1-\cos x)\mathrm{d}x=0$. 因为 $f(x)(1-\cos x)$ 非负，因此 $f(x)(1-\cos x)$ 在 E 上几乎处处为零，因此 f 在 E 上几乎处处为零，这与 $\displaystyle\int_E f(x)\mathrm{d}x=1$ 矛盾. □

P162.8 设 $f\in\mathscr{L}(\mathbb{R})$，$f_n\in\mathscr{L}(\mathbb{R})$，且有

$$\int_{\mathbb{R}}|f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{n^2},$$

则 $f_n(x)$ 几乎处处收敛到 $f(x)$.

证明. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}}|f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x<+\infty$，由逐项积分定理，$\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x<+\infty$，从而 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)-f(x)|$ 可积，从而几乎处处有限，从而 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(f_n(x)-f(x))$ 几乎处处收敛，从而 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}f_n(x)-f(x)=0$ 几乎处处成立. □

P163.9 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $|a_n|<\ln n$，$n=2,3,\cdots$. 则

$$\int_{[2,+\infty)}\sum_{n=2}^{\infty}a_n n^{-x}\mathrm{d}x=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a_n}{\ln n}n^{-2}.$$

证明. 设 $f(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_n n^{-x}\mathrm{d}x$，$f_n(x)=a_n n^{-x}$.

$$\sum_{n=2}^{\infty}\int_E|f_n(x)|\mathrm{d}x=\sum_{n=2}^{\infty}\int_{[2,+\infty)}|a^n|n^{-x}\mathrm{d}x<\sum_{n=2}^{\infty}\int_{[2,+\infty)}\ln n n^{-x}\mathrm{d}x=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}<+\infty.$$

由逐项积分定理，$f(x)$ 可积且

$$\int_{[2,+\infty)}f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=2}^{\infty}\int_{[2,+\infty)}f_n(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a_n}{\ln n}n^{-2}.$$

□

P163.10 设定义在 $E\times\mathbb{R}^n$ 的函数 $f(x,y)$ 满足：

(i) 对每一个 $y\in\mathbb{R}^n$，$f(x,y)$ 是 E 上的可测函数；

(ii) 对每一个 $x\in E$，$f(x,y)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数.

若存在 $g\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$，使得 $|f(x,y)|\leqslant g(x)$ 对 $x\in E$ 几乎处处成立，则函数

$$F(y)=\int_E f(x,y)\mathrm{d}x$$

是 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数.

证明. 任取 $\{y_n\}$ 收敛到 y_0，由 Lebesgue 控制收敛定理，

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f(x,y_n)\mathrm{d}x=\int_E\lim_{n\to\infty}f(x,y_n)\mathrm{d}x=\int_E f(x,y_0)\mathrm{d}x.$$

□

11 第十二周

P218.8 试证明 $f \in \mathrm{BV}([a,b])$ 当且仅当存在 $[a,b]$ 上的递增函数 $F(x)$，使得

$$|f(x') - f(x'')| \leqslant F(x'') - F(x')(a \leqslant x' < x'' \leqslant b).$$

证明.

- $\Longrightarrow$ 设 $f \in \mathrm{BV}([a,b])$，由 Jordan 分解定理，存在 $[a,b]$ 上的递增函数 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 使得 $f = f_1 - f_2$，取 $F = f_1 + f_2$，则

$$|f(x') - f(x'')| \leqslant |f_1(x') - f_1(x'')| + |f_2(x') - f_2(x'')| = F(x'') - F(x').$$

- $\Longleftarrow$ 任取分点 $a = x_0 < x_1 < \cdots x_{n-1} < x_n = b$，则

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leqslant \sum_{k=1}^{n} F(x_k) - F(x_{k-1}) = F(b) - F(a).$$

  因此 $\bigvee_a^b f \leqslant F(b) - F(a) < +\infty$，即 $f \in BV([a,b])$.

□

P218.10 设 $f \in \mathrm{BV}([a,b])$. 若有 $\bigvee_a^b(f) = f(b) - f(a)$，试证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上递增.

证明. 不妨设 $f(b) \geqslant f(a)$，否则已经矛盾.

假设存在 $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$ 使得 $f(x_1) > f(x_2)$，则由三角不等式，

$$f(b) - f(a) \leqslant |f(a) - f(x_1)| + f(x_1) - f(x_2) + |f(x_2) - f(b)|.$$

因为 $\bigvee_a^b = f(b) - f(a)$，所以上面不可能取到严格不等号，只能取等号，但这要求

$$f(a) \geqslant f(x_1) > f(x_2) \geqslant f(b),$$

矛盾. □

P222.1 设 $E \subset [0,1]$. 若存在 $l : 0 < l < 1$，使得对 $[0,1]$ 中任意的子区间 $[a,b]$，均有 $m(E \cap [a,b]) \geqslant l(b-a)$. 试证明 $m(E) = 1$.

证明. $\chi_E(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \chi_E(t)\mathrm{d}t \geqslant l > 0$ 几乎处处成立.

但 χ_E 只能取值 0 或 1. 因此 $\chi_E(x) = 1$ 几乎处处成立. □

P222.2 对于 $[0,1]$ 上的 Dirichlet 函数 $\chi_{\mathbb{Q}}(x)$，试问：$[0,1]$ 中的 Lebesgue 点是什么？

证明. 断言 $[0,1]$ 中的 Lebesgue 点是无理点.

- 设 x 是无理数，则 $\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|\mathrm{d}t = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \chi_{\mathbb{Q}}\mathrm{d}t = 0.$

- 设 x 是无理数，则 $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h}|f(t)-f(x)|\mathrm{d}t=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h}(1-\chi_{\mathbb{Q}})\mathrm{d}t=1.$

□

P232.2 设 $f(x)$ 定义在 $[a,b]$ 上. 若有

$$|f(y)-f(x)|\leqslant M|y-x|,\quad x,y\in[a,b],$$

则

$$|f'(x)|\leqslant M,\quad a.e.\quad x\in[a,b].$$

证明. 断言 f 是绝对连续函数. 任给 ε,存在 $\delta=\frac{\delta}{M}$,只要 $\sum_{i=1}^n m([a_i,b_i])<\delta$,便有 $\sum_{i=1}^n|f(b_i)-f(a_i)|<M\sum_{i=1}^n m([a_i,b_i])<\varepsilon$. 从而 $f'(x)$ 几乎处处存在. 对于 $f'(x)$ 存在的 x，

$$|f'(x)|=\lim_{h\to 0}\frac{|f(x+h)-f(x)|}{|h|}\leqslant M$$

□

P232.3 设 $f_n(x)$ 是 $[a,b]$ 上递增的绝对连续函数列. 若 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上收敛，则其和函数在 $[a,b]$ 上绝对连续.

Chapter 10

习题课

1 第一次习题课

2 第二次习题课

3 第三次习题课

4 第四次习题课

定义 4.1 (单调类)**.**

定理 4.2 (单调类定理)**.**

定理 4.3. 设 $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$，且满足

(1) $\varnothing, X \in \mathscr{A}$,

(2) $\mathscr{A}$ 对有限并、补运算封闭,

若 μ_1, μ_2 是 $\sigma(\mathscr{A})$ 上的测度，且满足

5 第五次习题课

6 第六次习题课

7 第七次习题课

8 第八次习题课

9 第九次习题课

10 第十次习题课 (5.18-5.20)

例 10.1 (径向函数的积分). 设 $f \in \mathscr{L}^+([0,+\infty))$，记 $|x| := \sqrt{x_1^2 + \cdots x_n^2}$，则

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(|x|)\mathrm{d}m(x) = nm(B(0,1))\int_0^{+\infty} f(r)r^{n-1}\mathrm{d}r.$$

例 10.2. 内容...

11 第十一次习题课

例 11.1. 设 F 是 $\mathbb{R}$ 上的有界函数，则下列等价：

(1) $F \in \mathrm{BV}([a,b])$，$\sup\limits_{a,b} \bigvee\limits_{a}^{b}(f) < +\infty$ 对任意 $a < b \in \mathbb{R}$ 成立.

(2) 存在常数 A，使得 $\int_{\mathbb{R}} |F(x+h) - F(x)| \mathrm{d}x \leqslant A|h|$ 对任意 $h \in \mathbb{R}$ 成立.

(3) $|\int_{\mathbb{R}} F(x)\varphi'(x)| \leqslant A$，其中 φ 遍历所有 $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x)| \leqslant 1$ 的具有紧支集的可积函数.

证明.

- (1) $\Longrightarrow$ (2)

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |F(x+h) - F(x)| \mathrm{d}x &\xlongequal{MCT} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_{j|h|}^{(j+1)|h|} |f(x+h) - f(x)| \mathrm{d}x \\ &= \sum_{j\in Z} \int_0^{|h|} |f(x+(j+1)h) - f(x+jh)| \mathrm{d}x \\ &\xlongequal{MCT} \int_0^{|h|} \sum_{j\in\mathbb{Z}} |f(x+(j+1)h) - f(x+jh)| \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

注意到

$$\sum_{j=-N}^{N} |f(x+(j+1)h) - f(x+jh)| \leqslant \bigvee_{x-Nh}^{x+(N+1)h} f \leqslant \sup_{a,b} \bigvee_{a}^{b}(f) < +\infty$$

- (2) $\Longrightarrow$ (3) 任意 $\varphi \in \mathscr{L}^1$，$\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x)| \leqslant 1$，

$$nF(x)(\varphi(x+\frac{1}{n}) - \varphi(x))' \xlongequal{\text{中值定理}} M\|\varphi'\|_\infty \chi_K \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}).$$

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}} F(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x\right| &= \left|\lim_{n\to\infty} n\int_{\mathbb{R}} F(x)(\varphi(x+\frac{1}{n}) - \varphi(x))\mathrm{d}x\right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \left|n\int_{\mathbb{R}} (F(x-\frac{1}{n}) - F(x))\varphi(x)\mathrm{d}x\right| \\ &\leqslant \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} n|F(x-\frac{1}{n} - F(x))||\varphi(x)|\mathrm{d}x \\ &\leqslant A.\end{aligned}$$

- (3) $\Longrightarrow$ (1) 由 (3) 知，任意 $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R})$，$\left|\int_{\mathbb{R}} F(x)\varphi'(x)\right| \leqslant A\|\varphi\|_\infty$

由 Riesz 表示，存在唯一的 μ，使得

$$\int_{\mathbb{R}} F(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\mathrm{d}\mu.$$

记

$$G(x) = \begin{cases} \mu((0,x]), & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -\mu((-x,0]) & x < 0 \end{cases}$$

则 $\mu = \mu_G$ 且 $G \in \mathrm{BV}$.

$$\int_{\mathbb{R}} F(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\mathrm{d}G = \int_{\mathbb{R}} G\varphi'(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_{\mathbb{R}} (F(x) - G(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = 0, \forall \varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}).$$

$$F(x) = G(x) \text{ a.e. } x \in \mathbb{R}.$$

□

12 第十四次

- $\mathscr{L}^p$ 空间是 Banach 空间，其中 $1 \leqslant p \leqslant +\infty$.
- $\mathscr{L}^p$ 中的稠密子集，其中 $1 \leqslant p < +\infty$.
  - 我们说过 Banach 空间可以有自然的度量，对应 $\mathscr{L}^p$ 的情形即为 $d(f,g) = \|f-g\|_p$. 在此拓扑下，
  -
  -
  - 可分性是很重要的拓扑性质，
    $\mathscr{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$ 不是可分的，此处我们给出一个证明：

    证明. □

Chapter 11

Stein

1 第一章

5.Suppose E is a given set, and $\mathcal{O}_n$ is the open set:

$$\mathcal{O} = \left\{ x : d(x, E) < \frac{1}{n} \right\}.$$

Show:

(a) If E is compact, then $m(E) = \lim_{n\to\infty} m(\mathcal{O}_n)$.

(b) However, the conclusion in (a) may be false for E closed

13.The following deals with G_δ and F_σ sets.

(a) Show that a closed set is a G_δ and an open set an F_σ.

[Hint:If F is colsed,consider $\mathcal{O}_n = \left\{ x : d(x, F) < \frac{1}{n} \right\}$.]

(b) Give an example of an F_σ which is not a G_δ.

[Hint:This is more difficult; let F be a denumerable set that is dense.]

(c) Give an example of a Borel set which is not a G_δ nor an F_σ.

注记.

- A 在 X 中稠密：$\bar{A} = X$
- A^c 无内点：A^c

16.**The Borel-Cantelli lemma.** Suppose $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ is a countable family of measurable subsets of $\mathbb{R}^d$ and that

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(E_k) < \infty.$$

Let

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R}^d : x \in E_k, \text{for infinitely many } k \right\} = \limsup_{k\to\infty}(E_k).$$

(a) Show that E is measurable.

(b) Prove $m(E)=0$.

证明.

(a) $E=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}E_k$，可测集全体对可列并和可列交运算封闭，故 E 是可测集.

(b)

$$m(E)=m(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}E_k)\leqslant m(\bigcup_{k=n}^{\infty}E_k)\leqslant\sum_{k=n}^{\infty}m(E_k)$$

□

17.Let $\{f_n\}$ be a sequence of measurable functions on $[0,1]$ with $|f_n(x)|<\infty$ for

证明. □

25.An alternative definition of measurability is as follows: E is measurable if for every $\varepsilon>0$ there is a closed set F contained in E with $m^*(E-F)<\varepsilon$. Show that this definition is equivalent with the one given in the text.

证明. E 是可测集当且仅当 E^c 是可测集. 按定义对任意 $\varepsilon>0$，存在开集 $G\supset E^c$ 使得 $m^*(G\backslash E^c)<\varepsilon$，那么 $F:=G^c$ 满足 $F\subset E$ 并且 $m^*(E\backslash F)<\varepsilon$. □

26.Suppose $A\subset E\subset B$, where A and B are measurable sets of finite measure. Prove that if $m(A)=m(B)$, then E is measurable.

证明. $B\backslash A$ 是可测集并且 $m(B\backslash A)=m(B)-m(A)=0$. 零测集的子集是零测集，因此 $E\backslash A\subset B-A$ 是可测集并且 $m(E\backslash A)=0$，因此 $E=A\sqcup E\backslash A$ 是可测集并且 $m(E)=m(A)$. □

27.Suppose E_1 and E_2 are a pair of compact sets in $\mathbb{R}^d$ with $E_1\subset E_2$, and let $a=m(E_1)$ and $b=m(E_2)$. Prove that for any c with $a<c<b$, there is a compact set E with $E_1\subset E\subset E_2$ and $m(E)=c$.

证明. 首先我们对问题进行化归. 因为 E_1 是可测的，所以存在开集 $U\supset E_1$ 使得 $m(U\backslash E)<b-c$. 那么 $E_2\cap U^c$ 是紧集并且它的测度 $m(E_2\cap U^c)=m(E_2\backslash U)=m(E_2\backslash(E_2\cap U))=m(E_2)-m(E_2\cap U)\geqslant m(E_2)-m(U)>b-(a+b-c)=c-a$. 如果我们能找到一个紧集 $K\subset E_2\cap U^c$ 满足 $m(K)=c-a$，那么 $K\cup E_1$ 就是 E_2 测度为 c 的紧子集.

这样我们就将问题化归到了这样的一个问题，给定一个紧集 $F\subset\mathbb{R}^d$，其测度为 $m(F)=\mu$，给定 ξ 满足 $0<\xi<\mu$，去寻找一个紧子集 $F'\subset F$ 满足 $m(F')=\xi$.

这个问题能如下解决：设 $f(y)=m(F\cap B_y(0))$. 那么 $f(0)=0$ 而 $f(y)=\mu$ 对充分大的 y. 此外，$f(y)$ 还是连续的：给定 y 和 $\varepsilon>0$，$m(B_y(0))$ 的连续性允许我们找到一个 $\delta>0$ 使得只要 $|y'-y|<\delta$ 便有 $|m(B_{y'}(0))-m(B_y(0))|<\varepsilon$. 那么 $|f(y')-f(y)|=m(F\cap(B_{y'}(0)\Delta B_y(0)))<\varepsilon$. 这是因为它是对称差的子集，而对称差的测度小于 ε. 因此 f 是连续的，因此由介值定理便有一个 y_0 使得 $f(y_0)=\xi$. □

32.Let $\mathcal{N}$ denote the non-measurable subset of $I=[0,1]$ constructed at the end of Section 3.

(a) Prove that if E is a measurable subset of $\mathcal{N}$,then $m(E) = 0$.

(b) If G is a subset of $\mathbb{R}$ with $m^*(G) > 0$, prove that a subset of G is non-measurable.

证明. $\square$

33.Let $\mathcal{N}$ denote the non-measurable set constructed in the text. Recall from the exercise above that measurable subsets of $\mathcal{N}$ have measure zero.

Show that the set $\mathcal{N}^c = I - \mathcal{N}$ satisfies $m^*(\mathcal{N}^c) = 1$, and conclude that if $E_1 = \mathcal{N}$ and $E_2 = \mathcal{N}^c$, then

$$m^*(E_1) + m^*(E_2) \neq m^*(E_1 \cup E_2),$$

although E_1 and E_2 are disjoint.

Chapter 12

周民强

1　习题 4

5. 设 $f_k(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的非负可积函数列. 若对任意可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$，都有

$$\int_E f_k(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_E f_{k+1}(x)\mathrm{d}x.$$

试证明

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x = \int_E \lim_{k\to\infty} f_k(x)\mathrm{d}x.$$