常微分方程

孙天阳

2021 年 8 月 5 日

目录

Chapter 1

初等积分法

1.1 一阶线性方程

定理 1.1.1 (Gronwall 不等式). 设 $\psi(t)$ 满足

$$\psi(t) \leqslant \alpha(t) + \int_0^t \beta(s)\psi(s)\mathrm{d}s, \forall t \geqslant 0 \tag{1.1}$$

其中 $\beta(t)$ 非负，那么

$$\psi(t) \leqslant \alpha(t) + \int_0^t \alpha(s)\beta(s)\mathrm{e}^{\int_s^t \beta(r)\mathrm{d}r}\mathrm{d}s, \forall t \geqslant 0 \tag{1.2}$$

证明. 首先想到的是考虑等式的情形，

$$\psi(t) = \alpha(t) + \int_0^t \beta(s)\psi(s)\mathrm{d}s, \forall t \geqslant 0 \tag{1.3}$$

希望能在此时推出

$$\psi(t) = \alpha(t) + \int_0^t \alpha(s)\beta(s)\mathrm{e}^{\int_s^t \beta(r)\mathrm{d}r}\mathrm{d}s, \forall t \geqslant 0 \tag{1.4}$$

对 (1.3) 两侧求导，移项，得到一个非齐次线性微分方程

$$\psi'(t) - \beta(t)\psi(t) = \alpha'(t) \tag{1.5}$$

选取它的一个积分因子

$$\mathrm{e}^{-\int_0^t \beta(s)\mathrm{d}s} \tag{1.6}$$

乘到 (1.5) 的两边，得到

$$\left(\mathrm{e}^{-\int_0^t \beta(s)\mathrm{d}s}\psi(t)\right)' = \mathrm{e}^{-\int_0^t \beta(s)\mathrm{d}s}\alpha'(t) \tag{1.7}$$

将 (1.7) 两侧从 0 到 t 进行积分，得

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-\int_0^t \beta(s)\mathrm{d}s}\psi(t) - \psi(0) &= \int_0^t \mathrm{e}^{-\int_0^s \beta(r)\mathrm{d}r}\alpha'(s)\mathrm{d}s && (1.8)\\
&= \int_0^t \mathrm{e}^{-\int_0^s \beta(r)\mathrm{d}r}\mathrm{d}\alpha(s) && (1.9)\\
&= \mathrm{e}^{-\int_0^s \beta(r)\mathrm{d}r}\alpha(s)\Big|_0^t - \int_0^t \alpha(s)\mathrm{d}\mathrm{e}^{-\int_0^s \beta(r)\mathrm{d}r} && (1.10)
\end{aligned}$$

$$= \mathrm{e}^{-\int_0^t \beta(r)\mathrm{d}r}\alpha(t) - \alpha(0) + \int_0^t \alpha(s)\beta(s)\mathrm{e}^{-\int_0^s \beta(r)\mathrm{d}r}\mathrm{d}s \tag{1.11}$$

在 (1.3) 中令 $t=0$，得 $\psi(0)=\alpha(0)$，所以有

$$\mathrm{e}^{-\int_0^t \beta(r)\mathrm{d}r}\psi(t) = \mathrm{e}^{-\int_0^t \beta(r)\mathrm{d}r}\alpha(t) + \int_0^t \alpha(s)\beta(s)\mathrm{e}^{-\int_0^s \beta(r)\mathrm{d}r}\mathrm{d}s \tag{1.12}$$

$$\psi(t) = \alpha(t) + \int_0^t \alpha(s)\beta(s)\mathrm{e}^{\int_s^t \beta(r)\mathrm{d}r}\mathrm{d}s \tag{1.13}$$

等式的情形得证.

对于不等式的情形，我们希望能照搬上面的证明，但令人遗憾的是，我们无法从积分的不等式直接得到微分的不等式.

但幸运的是，如果记 (1.1) 式右侧的部分为 $\varphi(t)$，即

$$\varphi(t) = \alpha(t) + \int_0^t \beta(s)\psi(s)\mathrm{d}s \tag{1.14}$$

那么我们有

$$\varphi'(t) = \alpha'(t) + \beta(t)\psi(t) \tag{1.15}$$

$$\leqslant \alpha'(t) + \beta(t)\varphi(t) \tag{1.16}$$

能这样放缩是因为我们预先假定了 $\beta(t) \geqslant 0$.

这样我们就得到了想要的微分的不等式

$$\varphi'(t) - \beta(t)\varphi(t) \leqslant \alpha'(t) \tag{1.17}$$

接下来照搬上面的证明

将 (1.6) 乘到 (1.17) 的两边，得到

$$\left(\mathrm{e}^{-\int_0^t \beta(s)\mathrm{d}s}\varphi(t)\right)' \leqslant \mathrm{e}^{-\int_0^t \beta(s)\mathrm{d}s}\alpha'(t) \tag{1.18}$$

将 (1.18) 两侧从 0 到 t 进行积分，得

$$\mathrm{e}^{-\int_0^t \beta(s)\mathrm{d}s}\varphi(t) - \varphi(0) \leqslant \int_0^t \mathrm{e}^{-\int_0^s \beta(r)\mathrm{d}r}\alpha'(s)\mathrm{d}s \tag{1.19}$$

$$= \int_0^t \mathrm{e}^{-\int_0^s \beta(r)\mathrm{d}r}\mathrm{d}\alpha(s) \tag{1.20}$$

$$= \mathrm{e}^{-\int_0^s \beta(r)\mathrm{d}r}\alpha(s)\Big|_0^t - \int_0^t \alpha(s)\mathrm{d}\mathrm{e}^{-\int_0^s \beta(r)\mathrm{d}r} \tag{1.21}$$

$$= \mathrm{e}^{-\int_0^t \beta(r)\mathrm{d}r}\alpha(t) - \alpha(0) + \int_0^t \alpha(s)\beta(s)\mathrm{e}^{-\int_0^s \beta(r)\mathrm{d}r}\mathrm{d}s \tag{1.22}$$

在 (1.14) 中令 $t=0$，得 $\varphi(0)=\alpha(0)$，所以有

$$\mathrm{e}^{-\int_0^t \beta(r)\mathrm{d}r}\varphi(t) \leqslant \mathrm{e}^{-\int_0^t \beta(r)\mathrm{d}r}\alpha(t) + \int_0^t \alpha(s)\beta(s)\mathrm{e}^{-\int_0^s \beta(r)\mathrm{d}r}\mathrm{d}s \tag{1.23}$$

$$\varphi(t) \leqslant \alpha(t) + \int_0^t \alpha(s)\beta(s)\mathrm{e}^{\int_s^t \beta(r)\mathrm{d}r}\mathrm{d}s \tag{1.24}$$

而我们又有

$$\psi(t) \leqslant \varphi(t) \tag{1.25}$$

故得证！ □

Chapter 2

存在和唯一性定理

2.1 Picard 存在唯一性定理

$$(E):\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y),y(x_0)=y_0$$

$$\text{矩形区域}R:|x-x_0|\leqslant a,|y-y_0|\leqslant b$$

$$I=[x_0-h,x_0+h]$$

$$h=min\{a,\frac{b}{M}\},M>\max_{(x,y)\in R^2}|f(x,y)|$$

定理 2.1.1. *若 f 在 R 上连续并且关于 y 满足 Lipschitz 条件，则 (E) 在 I 上存在唯一解.*

证明.*Step1* 转化为积分方程

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,y(x))dx$$

一方面，若 $y=y(x)$ 是 (E) 的解，则有

$$\frac{dy(x)}{dx}=f(x,y(x)),\forall x\in(x_0-h,x_0+h)$$

两边同时关于 x 从 x_0 到 x 积分，可得

$$y(x)-y(x_0)=\int_{x_0}^{x}\frac{dy(x)}{dx}dx=\int_{x_0}^{x}f(x,y)dx$$

$$\Rightarrow y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,y(x))dx$$

另一方面，若 $y=y(x)$ 是积分方程在 (x_0-h,x_0+h) 上的解，则 $y(x)$ 可导，于是

$$\frac{dy(x)}{dx}=f(x,y(x)),y(x_0)=y_0$$

Step2 构造 *Picard* 序列 $\{y_n(x)\}$

$$y_{n+1}(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,y_n(x))dx$$

$$y_0(x)=y_0$$

要说明 $\forall x \in [x_0-h, x_0+h], \forall n \in N_0, (x, y_n(x))$ 在矩形 R 里面，才能说明序列的定义是好的

Claim: $|y_n(x) - y_0| \leqslant b$

n=1 时，$|y_1(x)-y_0| = |\int_{x_0}^{x} f(x, y_0)dx| \leqslant M|x-x_0| < Mh \leqslant b$.

设 $n=k$ 时断言成立，则当 $n=k+1$ 时，归纳法用在了哪里呢？需注意，只有前一个 $y_k(x)$ 是定义好的，我们才有下一个 y_{k+1} 可言；这里的归纳法并不是说下一个的证明利用到了前一个的成立，而是下一个的存在依赖于前一个的成立.

$$|y_{k+1}(x) - y_0| = |\int_{x_0}^{x} f(x, y_k(x))dx| \leqslant |\int_{x_0}^{x} Mdx| = M|x-x_0| < b$$

.

Step3 Picard 序列的收敛性

$$y_n(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k(x) - y_{k-1}(x) + y_0$$

要证 $\{y_n(x)\}$ 收敛，只要证明级数 $\sum_{k=1}^{\infty} y_k(x) - y_{k-1}(x)$ 绝对收敛感觉这里的各种收敛乱乱的 $\cdots$ 先不管了吧... 淑芬学完了再说

要证明级数 $\sum_{n=0}^{\infty} |y_{n+1}(x) - y_n(x)|$ 在 I 上一致收敛

$$n=0, |y_1(x) - y_0(x)| \leqslant M|x-x_0|$$

$$\begin{aligned}
n=1, |y_2(x) - y_1(x)| &= \left|\int_{x_0}^{x} f(x, y_1(x))dx - \int_{x_0}^{x} f(x, y_0(x))dx\right| \\
&\leqslant \left|\int_{x_0}^{x} |f(x, y_1(x)) - f(x, y_0(x))|dx\right| \\
&\leqslant \left|\int_{x_0}^{x} L|y_1(x) - y_0(x)|dx\right| \\
&\leqslant \left|\int_{x_0}^{x} ML|x-x_0|dx\right| \\
&\leqslant ML\frac{|x-x_0|^2}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n=2, |y_3(x) - y_2(x)| &= \left|\int_{x_0}^{x} f(x, y_2(x))dx - \int_{x_0}^{x} f(x, y_1(x))dx\right| \\
&\leqslant \left|\int_{x_0}^{x} |f(x, y_2(x)) - f(x, y_1(x))|dx\right| \\
&\leqslant \left|\int_{x_0}^{x} L|y_2(x) - y_1(x)|dx\right| \\
&\leqslant \left|\int_{x_0}^{x} ML^2\frac{|x-x_0|^2}{2}dx\right| \\
&\leqslant ML^2\frac{|x-x_0|^3}{3!}
\end{aligned}$$

Claim:

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leqslant ML^{n-1}\frac{|x-x_0|^n}{n!}$$

用归纳法，假设 $n=k$ 时结论成立，则当 $n=k+1$ 时，

$$\begin{aligned}|y_{k+1}(x)-y_k(x)| &= \left|\int_{x_0}^{x} f(x,y_k(x))dx-\int_{x_0}^{x} f(x,y_{k-1}(x))dx\right| \\ &\leqslant \left|\int_{x_0}^{x} |f(x,y_k(x))-f(x,y_{k-1}(x))|dx\right| \\ &\leqslant \left|\int_{x_0}^{x} L|y_k(x)-y_{k-1}(x)|dx\right| \\ &\leqslant \left|\int_{x_0}^{x} ML^n\frac{|x-x_0|^n}{n!}dx\right| \\ &\leqslant ML^n\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}\end{aligned}$$

因此，

$$\sum_{n=0}^{\infty}|y_{n+1}(x)-y_n(x)|\leqslant\frac{M}{L}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(L|x-x_0|)^n}{n!}\leqslant\frac{M}{L}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(Lh)^n}{n!}<+\infty$$

因此，$\exists\phi(x) s.t. y_n(x)\to\phi(x)$ 在 I 上一致收敛. 由于 $y_n(x)$ 在 I 上是连续的，故 $\phi(x)$ 在 I 上也连续.

再由

$$y_{n+1}(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,y_n(x))dx$$

关于 n 取极限得

$$\phi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,y_n(x))dx$$

即 $y=\phi(x)$ 是 (E) 在 I 上的解.

Step4 唯一性

令 $y=u(x)$ 和 $y=v(x)$ 是 (E) 的两个不同的解，它们共同的存在区间是 (x_0-d,x_0+d)

令 $w(x)=u(x)-v(x)$，则

$$\begin{aligned}|u(x)-v(x)| &= \left|\int_{x_0}^{x} |f(x,u(x))-f(x,v(x))|dx\right| \\ &\leqslant \int_{x_0}^{x} L|u(x)-v(x)|dx \\ &\leqslant Lk|x-x_0|\end{aligned}$$

将第三行得到的不等式带入到第二行中，得到

$$\begin{aligned}|u(x)-v(x)| &\leqslant \int_{x_0}^{x} L|u(x)-v(x)|dx \\ &= \int_{x_0}^{x} L^2k|x-x_0|dx \\ &\leqslant \frac{k(L|x-x_0|)^2}{2}\end{aligned}$$

重复上述过程可得，

$$|u(x)-v(x)|\leqslant\frac{K(L|x-x_0|)}{n!}\leqslant\frac{k(Ld)^n}{n!}\to 0, \text{当} n\to\infty$$

由 *Gronwell* 不等式，$u(x)-v(x)\equiv 0 \quad on[x_0-d,x_0+d]$

注记. 出现单个 f，以 M 为界；出现两个 f 作差，利用 *Lipschitz* 条件得到界

注记. 为什么要转化为积分方程？我们要求微分方程的解必须连续且可导，而对于积分方程我们只需要要求解连续，连续且满足积分方程一定可微，这是一个很大的好处。

对解的正则性的要求降低了

积分号与极限可以换序... 开始触及到知识盲区了...

积分满足一些很显然的很好的估计，比如

$$|\int f(x,y)dx| \leqslant \int |f(x,y)|dx$$

只是说在常微分方程及阶段这个优势不是很明显，在偏微分方程阶段，把微分方程化为积分方程是非常重要的手段

涉及到估计往往需要积分方程

注记. 现在我只知道 f 在矩形上有定义，现在我假设 y 满足积分方程，$(x, y(x))$ 是否落到矩形中？
$|y(x) - y_0| = || \leqslant |\int_{x_0}^{x} M dx| \leqslant M|x - x_0| < M(h - \epsilon) < b - \widetilde{\epsilon}$

注记. 第一步，构造逼近解；第二步，说明极限存在；第三步，说明极限就是我们要找的

例 2.1.1 (Ricatti 方程).

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2, y(x_0) = y_0$$

先判断关于 y 是否 *Lipschitz*，事实上有一个更强的条件，即 f 关于 y 是否有连续的偏导数，若有，关于 y 用中值定理，得到 f 关于 y 确实 *Lipschitz*

由 *Picard* 定理，存在唯一的积分曲线经过 (x_0, y_0)

定理 2.1.2 (存在性 (Peano 存在定理)). 设函数 $f(x, y)$ 在矩形区域 R 内连续，则初值问题 (E) 在区间 $|x - x_0| < h$ 上至少存在一个解 $y = y(x)$.

定义 2.1.1. 设函数 $f(x, y)$ 在区域 G 内连续且满足不等式 $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant F(|y_1 - y_2|)$，其中 $F(r) > 0$ 是 $r > 0$ 的连续函数，而且积分 $\int_0^{r_1} \frac{r}{F(r)} = +\infty$，其中 $r_1 > 0$ 是常数，则称 f 在 G 内对 y 满足 *Osgood* 条件；特别地，当取 $F(r) = Lr$ 时，得到 *Lipschitz* 条件.

定理 2.1.3. 设 $f(x, y)$ 在区域 G 内对 y 满足 *Osgood* 条件，则微分方程 (3.9) 在 G 内经过每一点的解是唯一的.

证明. 用反证法，假设在 G 内存在一个点 (x_0, y_0)，使得方程 (3.9) 有两个解 $y = y_1(x), y = y_2(x)$ 都经过这个点，存在一个 $x_1 \neq x_0$ 使得 $y_1(x_1) \neq y_2(x_1)$. 不妨设 $x_1 > x_0$，$y_1(x_1) > y_2(x_1)$. 令

$$\bar{x} = sup\{x_0 \leqslant x < x_1 : y_1(x) = y_2(x)\}$$

. 则

$$y_1(x) > y_2(x), \forall \bar{x} < x \leqslant x_1$$

$$\frac{d(y_1(x) - y_2(x))}{dx} = f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x)) \leqslant F(y_1 - y_2), \forall \bar{x} < x < x_1$$

令 $r(x) = y_1(x - y_2(x))$，则 $\frac{dr}{dx} \leqslant F(r), \forall \bar{x} < x < x_1$

$$\int_0^{r_1} \frac{dr}{F(r)} \leqslant \frac{\bar{x}}{x_1} dx = x_1 - \bar{x} < +\infty$$

由 Osgood 条件，$\frac{0}{r_1}\frac{dr}{F(r)}=+\infty$，矛盾. □

2.2 解的延伸

考虑方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$$

定理 2.2.1. 设 P_0 为区域 G 内任意一点，并设 Γ 是微分方程（*3.18*）的经过 P_0 点的任意一条积分曲线，积分曲线 Γ 将在区域 G 内延伸到边界. 对于任意的含在区域 G 中的有界闭区域 G_1 包含 P_0，那么 Γ 可以延伸到 G_1 之外.

证明. 设经过 P_0 的方程的解 Γ 为 $y=\phi(x)$. 设 J 是它的极大存在区间，只考虑 Γ 在 P_0 右侧的延伸情况. 令 $J^+=J\cap[x_0,+\infty)$ 是 Γ 在 P_0 右侧的极大存在区间.

- $J^+=[x_0,+\infty)$，则 Γ 是延伸到边界的.
- $J^+=[x_0,x_1],x_1<+\infty$，以 $(x_1,\phi(x_1))$ 为中心，作矩形 $|x-x_1|\leqslant a,|y-y_1|\leqslant b$，由 Peano 存在定理，存在 $h>0$ 使得（3.18）在 (x_1-h,x_1+h) 上存在一个解 $y=\phi_1(x)$ 令 $y_1(x)$，则 y_x 是（3.18）在 $x_0\leqslant x\leqslant x_1+h$ 上的解

  事实上，当 $x_0\leqslant x\leqslant x_1$，$\phi(x)=\phi(x_0)+\int_{x_0}^{x_1}f(x,\phi(x))dx$

  特别地，$\phi(x_1)=\phi(x_0)+\int_{x_0}^{x_1}f(x,\phi(x))dx$

  当 $x_1\leqslant x\leqslant x_1+h$，$\phi_1(x)=\phi(x_0)+\int_{x_0}^{x_1}f(x,\phi_1(x))dx$

  $$y_1(x)=\phi(x_1)+\int_{x_1}^{x}f(x,y_1(x)dx)=\phi(x_0)+\int_{x_0}^{x}f(x,y_1(x))dx$$

  这与 J^+ 是 Γ 的右行极大存在区间矛盾！
- $J^+=[x_0,x_1),x_1<+\infty$ 用反证法，假设存在有界闭集 $G_1\subset G,p\in G_1,\Gamma\subset G_1$. claim: 当 $x\to x_1$ 时，$\lim\limits_{x\to x_1}\varphi(x)$ 存在

  $\forall x_n\to x_1,|\varphi(x_n)-\varphi(x_m)|=|\int_{x_m}^{x_n}\frac{d\varphi}{dx}dx|=|\int_{x_m}^{x_n}f(x,\varphi(x))dx|\leqslant\max\limits_{(x,y)\in G}|f(x,y)|\leqslant M_1|x_n-x_m|$

  故 $\{\varphi(x_n)\}$ 是 Cauchy 列

  令 $\bar{y}=\lim\limits_{x\to x_1}\varphi(x)$ 令，则 $\tilde{y}(x)$ 是（3.18）在 $x_0\leqslant x\leqslant x_1$ 上的解

  事实上，$\varphi(x)=\varphi(x_0)+\int_{x_0}^{x_1}f(x,\varphi(x))dx,\forall x_0\leqslant x\leqslant x_1$

  当 $x\to x_0$ 时，$\bar{y}=\varphi(x_0)+\int_{x_0}^{x_1}f(x,\varphi(x)dx)\Leftrightarrow\tilde{y}(x_1)=\varphi(x_0)+\int_{x_0}^{x_1}f(x,\tilde{y}(x))dx$

□

例 2.2.1. 试证微分方程

$$\frac{dy}{dx}=x^2+y^2$$

的任一解的存在区间都是有界的.

证明. 令 $f(x,y)=x^2+y^2$ 在 R^2 上连续，且在 R^2 上关于 y 是局部 Lipschitz. 由 Picard 存在唯一性定理，过任意一点 P_0 存在唯一的积分曲线 Γ，要证 Γ 的极大存在区间是有界的.

否则，设 Γ 的极大存在区间 J 是无界的. 不妨设 $(c,+\infty)\subset J$. 事实上，如果 $y=y(x)$ 是原方程的解，且 $(-\infty,c)\subset J$ 令 $\hat{y}(x)=-y(-x)$，则

$$\frac{d\hat{y}}{dx}=\frac{dy}{dx}(-x)=(-x)^2+(y(-x))^2=x^2+(\hat{y}(x))^2$$

则 $\hat{y}(x)$ 也是原方程的解.

设 $x_1>0$，$(x_1,+\infty)\subset J$，则

$$\frac{dy}{dx}>x_1^2+y^2,\forall x\in(x_1,+\infty)$$

故

$$\frac{1}{x_1^2+y^2}\frac{dy}{dx}\leqslant 1$$

$$\frac{d\frac{y}{x_1}}{x_1(1+\frac{y^2}{x_1^2})}=\frac{1}{x_1}darctan\frac{y}{x_1}$$

$$\frac{1}{x_1}\frac{darctan\frac{y}{x_1}}{dx}\leqslant 1$$

两边同时从 x_1 到 x 积分可得，

$$\frac{\pi}{x_1}\leqslant\frac{1}{x_1}(arctan\frac{y(x)}{x_1}-arctan\frac{y(x_1)}{x_1})\leqslant x-x_1,\forall x>x_1$$

令 $x\to+\infty$，则得到矛盾！ □

例 2.2.2. 在平面上任取一点 $P_0=(x_0,y_0)$，试证初值问题

$$\frac{dy}{dx}=(x-y)e^{xy^2},y(x_0)=y_0$$

的右行解都在区间 $x_0\leqslant x<\infty$ 存在.

证明. $f(x,y)=(x-y)e^{xy^2}$ 在 R^2 上连续，局部 Lip，由 Picard 定理，过任意一点 P_0 存在唯一的积分曲线 Γ. 要证 Γ 的右行部分的存在区间是 $[x_0,+\infty)$

若 P_0 在直线 $y=x$ 的上方，则过 P_0 的积分曲线会下降，穿过 $y=x$ 到达它的下方. 由延伸定理，Γ 会延伸到 $G=\{(x,y)|x_0\leqslant x<+\infty\}$ 的边界. 由于在 $L:y=x$ 下方与它接近的点，斜率远小于 1，故 Γ 无法穿过 L 到达它的上方. 故 Γ 一直位于 L 的下方. 因此 Γ 的右行存在区间为 $[x_0,+\infty)$. □

定理 2.2.2. 设微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)$，其中函数 $f(x,y)$ 在条形区域 $S:\alpha<x<\beta,-\infty<y<+\infty$ 内连续，且满足不等式 $f(x,y)\leqslant A(x)|y|+B(x)$，其中 $A(x)\geqslant 0,B(x)\geqslant 0$ 在区间 $\alpha<x<\beta$ 上连续，则方程的每一个解都以区间 $\alpha<x<\beta$ 为最大存在区间.

证明. 设 $P_0\in S$ 是任意一点. 由于 $f(x,y)$ 在 S 上是连续的，由 Peano 定理，一定存在过 P_0 的积分曲线 Γ. 要证 Γ 的最大存在区间是 (α,β) 只考虑右行解，要证右行解的最大存在区间是 (x_0,β).

否则，存在 $x_0<\beta_0<\beta$，使得右行解的最大存在区间是 $[x_0,\beta_0)$

任取 Γ 上一点 (x_1,y_1)，在矩形 $R:|x-x_1|\leqslant a,|y-y_1|\leqslant b$ 上，$f(x,y)$ 是连续的.

由 Peano 定理，在 (x_1-h,x_1+h) 上存在解，$h=\min\{a,\dfrac{b}{M}\}$
设在 R 上，$A(x),B(x)$ 的最大值是 A_0,B_0，则 $|f(x,y)|\leqslant A_0(|y|+b)+B_0$
取 $M=A_0(|y_1|+b)+B_0+1$，则

$$\frac{b}{M}=\frac{b}{A_0(|y_1|+b)+B_0+1}\to\frac{1}{A_0}$$

当 b 充分大时，$\dfrac{b}{M}>\dfrac{1}{2A_0}$
选取 $a=\dfrac{1}{4A_0}$，则 $h=\dfrac{1}{4A_0}$
取 x_1 充分接近 β_0，则 Γ 可延伸到 $x_1+\dfrac{1}{4A_0}>\beta_0$，这与 $[x_0,\beta_0)$ 是右行最大存在区间矛盾！ □

2.3 第一次习题课

例 2.3.1.

$$\frac{dy}{dx}\leqslant\frac{f(x)}{g(y)},g(y)>0$$

$$g(y)dy\leqslant f(x)dx$$

$$\int_0^y g(t)dt-\int_0^x f(t)dt\leqslant C$$

$$\psi(x):=\int_0^{y(x)}g(t)dt-\int_0^x f(t)dt$$

$$\dot{\psi}(x)=$$

例 2.3.2.

$$\frac{dy}{dx}=x^2+y^2\geqslant y^2$$

$$y(0)=1$$

$$\frac{dy}{y^2}\geqslant dx$$

$$\psi(x)=\frac{1}{y}+x\leqslant\psi(0)=1$$

$$\dot{\psi}(x)=-\frac{\dot{y}}{y^2}+1=-\frac{x^2+y^2}{y^2}+1\leqslant 0$$

注记. *若要证 $f=g$，可证 f 和 g 满足相同的方程并且有相同的初值条件*

例 2.3.3.

$$\frac{dy}{dx}=f(y)in(x,y)\in R\times[a,a+\epsilon)]$$

其中 $f(a)=0$，$f(y)>0in(a,a+\epsilon)$ 当 $|\displaystyle\int_a^{a+\epsilon}\frac{1}{f(y)}dy<\infty|$ 时，有两条过 (x_0,a) 的积分曲线；当 $|\displaystyle\int_a^{a+\epsilon}\frac{1}{f(y)}dy|=\infty$ 时，只有一条

证明. 内容... □

2.4 比较定理

定理 2.4.1 (第一比较定理)**.** *假设函数 $f(x,y)$ 和 $F(x,y)$ 都在平面区域 G 内连续，并且满足不等式 $f<F,\forall(x,y)\in G$，又设函数 $y=\phi(x)$ 与 $y=\Phi(x)$ 在区间 $a<x<b$ 上分别是初值问题*

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y),y(x_0)=y_0$$

$$\frac{dy}{dx}=F(x,y),y(x_0)=y_0$$

的解，其中 $(x_0,y_0)\in G$，则我们有 $\phi(x)<\Phi(x),when \quad x_0<x<b;\phi(x)>\Phi(x),when \quad a<x<x_0$

证明. 只证明右行部分.

令 $\psi(x)=\Phi(x)-\phi(x)$，则

$$\frac{d\psi}{dx}=F(x,\Phi(x))-f(x,\phi(x)),\psi(x_0)=0$$

由于 $F(x_0,\Phi(x_0))>f(x_0,\phi(x_0))$，故 $\dfrac{dy}{dx}(x_0)>0$，所以存在 $\sigma>0$，使得 $\psi(x)>0,\forall x\in(x_0,x_0+\sigma)$

要证的是 $\psi(x)>0,\forall x_0<x<b$ 否则，存在 $x_0+\sigma<x_1<b$，使得 $\psi(x_1)=0$

令 $\beta=min\{x_0<x<b|\psi(x)=0\}$，则 $\psi(\beta)=0$，且 $\psi'(\beta)\leqslant 0$

但是，$\dfrac{d\psi}{dx}(\beta)=F(x_1,\Phi(\beta))-f(x,\phi(\beta))>0$，矛盾！ □

现在考虑初值问题

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y),y(x_0)=y_0$$

其中 $f(x,y)$ 在矩形区域 $R:|x-x_0|\leqslant a,|y-y_0|\leqslant b$ 上连续. 令 $M>\max\limits_{(x,y)\in R}|f(x,y)|,h=mina,\dfrac{b}{M}$，在区间 $[x_0-h,x_0+h]$ 上至少存在一个解如果在区间 $[x_0-h,x_0+h]$ 上初值问题 E 有两个解 $y=Z(x),y=W(x)$ 使得 E 的任何的解 $y=y(x)$ 都满足 $W(x)\leqslant y(x)\leqslant Z(x),x_0-h\leqslant x\leqslant x_0+h$，则称 $W(x),Z(x)$ 分别是初值问题的最小解和最大解

定理 2.4.2. *存在 $0<\sigma<h$，使得在区间 $[x_0-\sigma,x_0+\sigma]$ 上初值问题存在最大解和最小解.*

定理 2.4.3 (Ascoli-Azela)**.** *设在区间 I 上给定一个函数列 $\{f_n(x)\}_1^\infty$，称 $\{f_n(x)\}$ 在 I 上一致有界是指 $\exists K>0$，使得 $|f_n(x)|\leqslant K,\forall x\in J,\forall n\geqslant 1$. 称 $\{f_n(x)\}$ 在 I 上等度连续，如果 $\forall\epsilon>0,\exists\delta$，使得 $\forall|x_1-x_2|<\delta,|f_n(x_1)-f_n(x_2)|<\epsilon,\forall n=1,2,\cdots$*

若 $\{f_n(x)\}$ 在有界闭区间 I 上一致有界，并且等度连续，则存在子列 $\{f_{n_k}(x)\}$ 在 I 上一致收敛.

证明. 考虑初值问题

$$(E_m):\frac{dy}{dx}=f(x,y)+\epsilon_m,y(x_0)=y_0$$

$$\epsilon_m>0,M_m=M+\epsilon_m,h_m=mina,\frac{b}{M_m}\leqslant h$$

若 ϵ_m 单调递减趋于 0，h_m 趋于 h.

则在 (x_0-h_m,x_0+h_m) 上存在 (E_m) 的解 $y=\varphi_m(x)$

由于 $\epsilon\to 0$, 故 $h_m\to h$，因此 $\exists\sigma>0$，当 m 充分大时，$\varphi(x)$ 在 $(x_0-\sigma,x_0+\sigma)$ 上都存在，并且

$$\varphi_m(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f_m(x,\varphi_m(x))dx,f_m(x,y)=f(x,y)+\epsilon_m$$

由第一比较定理，对于 (E) 的任一解 $y=\phi(x)$，有

$$\varphi_m(x) < \phi(x), x_0-\sigma < x < x_0$$

$$\varphi_m(x) > \phi(x), x_0 < x < x_0+\sigma$$

$$|| \leqslant || + \int_{min}^{max} dx \leqslant, \forall x \in [], \forall m$$

$$|| = || \leqslant (M+1)||, \forall \epsilon > 0, \exists \delta = \frac{\epsilon}{2(M+1)}, \forall || < \delta, || < \epsilon$$

由 $Arzela-Adcoli$，存在子列（仍记为 $\varphi_n(x)$）在 $[x_0-\sigma, x_0+\sigma]$ 上一致收敛到 $y=\Phi(x)$
令 $m\to\infty$，有

$$\Phi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f_m(x,\Phi(x))dx, \forall x \in [x_0-\sigma, x_0+\sigma]$$

且 $\Phi(x)$ 在 $[x_0-\sigma, x_0+\sigma]$ 上连续，因此，$\Phi(x)$ 是 (E) 在 $[x_0-\sigma, x_0+\sigma]$ 上的解.

由第一比较定理，(E) 的任意的解 $y=y(x)$，都有

$$y(x) < \varphi_m(x), x_0 < x \leqslant x_0+\sigma$$

则有

$$y(x) \leqslant \Phi(x), x_0 < x \leqslant x_0+\sigma$$

□

定理 2.4.4. 设函数 $f(x,y)$ 与 $F(x,y)$ 都在平面区域 G 内连续且满足 $f(x,y) \leqslant F(x,y,\forall(x,y)inG)$，又设函数 $\phi(x), \Phi(x)$ 分别是

$$(E_1): \frac{dy}{dx} = f(x,y), y(x_0) = y_0$$

$$(E_2): \frac{dy}{dx} = F(x,y), y(x_0) = y_0$$

的解 $((x_0,y_0)\in G)$ 并且 $y=\varphi(x)$ 是 (E_1) 的右行最小解和左行最大解，则由如下关系：

$$\varphi(x) \leqslant \Phi(x), x_0 \leqslant x < b$$

$$\varphi(x) \geqslant \Phi(x), a < x \leqslant x_0$$

Chapter 3

奇解

3.1　一阶隐式微分方程

$$F(x,y,\frac{dy}{dx})=0$$

3.1.1　微分法

若从 (4.1) 可解出

$$y=f(x,p),p=\frac{dy}{dx}$$

对 x 求导，

$$p=f_x^{'}+f_p^{'}\frac{dp}{dx}$$

$$\frac{dp}{dx}=\frac{p-f_x^{'}}{f_p^{'}}$$

$$f_p^{'}dp+(f_x^{'}-p)dx=0$$

若 (4.3) 可解得通解 $p=v(x,C)$，则原方程的解为 $y=f(x,v(x,C))$，C 为任意常数.

若 (4.3) 可解得一个特解 $p=w(x)$，则原方程的特解为 $y=f(x,w(x))$.

有时可解 (4.3) 得到 $x=v(p,C)$，则原方程的通解是 $y=f(v(p,C),p),x=v(p,C)$.

例 3.1.1. 求解克莱罗方程

$$y=xp+f(p)$$

其中 $f^{''}(p)\neq 0$

证明. 对 x 求导，可得

$$p=p+x\frac{dp}{dx}+f^{'}(p)\frac{dp}{dx}\rightarrow(x+f^{'}(p))\frac{dp}{dx}=0$$

若 $x+f^{'}(p)=0$，即 $x=-f^{'}(p),y=-pf^{'}(p)+f(p)$，是特解

若 $\frac{dp}{dx}=0$，则得到通解 $p=C$，故原方程通解 $y=Cx+f(C)$

由于 $f^{''}(p)\neq 0$，p 可写成 □

例 3.1.2. 求解微分方程

$$x(y^{'})^2-2yy^{'}+9x=0$$

证明. 当 p=0 时，不可能是方程的解当 $p\neq 0$ 时，

$$y=\frac{xp^2+9x}{2p}=\frac{xp}{2}+\frac{9x}{2p}$$

两边对 x 求导，可得

$$p=\frac{p}{2}+\frac{x}{2}\frac{dp}{dx}+\frac{9}{2p}-\frac{9x}{2p^2}\frac{dp}{dx}$$

$$-(\frac{p}{2}-\frac{9}{2p})+(\frac{x}{2}-\frac{9x}{2p^2})\frac{dp}{dx}=0$$

$$(\frac{1}{2}-\frac{9}{2p^2})(x\frac{dp}{dx}-p)=0$$

$\Rightarrow p=3$，原方程特解 $y=3x$

若 $x\dfrac{dp}{dx}-p=0$，则 $p=Cx$ 故原方程通解是

$$y=\frac{Cx^2}{2}+\frac{9}{2C}$$

□

3.1.2 参数法

设隐式方程不显含自变量，即 $F(y,p)=0$

设 $y=g(t),p=h(t)$ 是 (4.12) 的一个参数表示，则

$$dx=\frac{1}{p}dy=\frac{g^{'}(t)}{h(t)}dt$$

故

$$x=\int\frac{g^{'}(t)}{h(t)}dt+C$$

于是，原方程的解为 $\begin{cases} x=\int\dfrac{g^{'}(t)}{h(t)}dt+C \\ y=g(t)\end{cases}$

例 3.1.3. 求解微分方程

$$y^2+(\frac{dy}{dx})^2=1$$

若 $p=0$，则 $y=1$，是方程的特解

例 3.1.4. 考虑隐式微分方程 $F(x,y,p)=0$ 设 $x=f(u,v),y=g(u,v),p=h(u,v)$ 上述方程的参数化表示由于 $dy=pdx$ 故

$$g^{'}_udu+g^{'}_vdv=h(f^{'}_udu+f^{'}_vdv)$$

因此

$$(g^{'}_u-hf^{'}_u)du+(g^{'}_v-hf^{'}_v)dv=0$$

若从上式可以解出 $u=Q(v,C)$，那么原方程的通解为 $\begin{cases} x=f(Q(v,C),v) \\ y=g(Q(v,C),v) \end{cases}$ 若从上式可以解出特解 $u=S(v)$，则原方程的特解为 $\begin{cases} x=f(S(v),v) \\ y=g(S(v),v) \end{cases}$

例 3.1.5. 解微分方程

$$(\frac{dy}{dx})^2+y-x=0$$

Chapter 4

高阶微分方程

考虑 n 阶微分方程

$$\frac{d^n y}{dx^n} = F(x, y, \cdots, y^{n-1})$$

令

$$y_1 = y, y_2 = \frac{dy_1}{dx}, \cdots, y_n = \frac{dy_{n-1}}{dx}$$

原方程可以化为

$$\frac{dy_n}{dx} = F(x, y_1, \cdots, y_n)$$

一般地，考虑 $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \cdots, y_n) \\ \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \cdots, y_n) \\ \cdots \\ \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \cdots, y_n) \end{cases}$ $f_1, \cdots, f_n$ 是关于变量 $(x, y_1, \cdots, y_n)$ 在区域 D 上的连续函数. 上式可以写成

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

如果 $f_k(x, y_1, \cdots, y_k) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} y_i + e_k(x)$，则 $f(x, y) = A(x)y + e(x)$

此时，

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y + e(x)$$

若向量函数 $\vec{f}(x, \vec{y})$ 在 $|x - x_0| \leqslant a, |y - y_0| \leqslant b$ 连续，且 $\vec{f}(x, \vec{y})$ 关于 $\vec{y}$ 满足 Lipschitz 条件：$\exists L > 0$，使得

$$\left|\vec{f}(x, \vec{y_1}) - \vec{f}(x, \vec{y_2})\right| \leqslant L\left|\vec{y_1} - \vec{y_2}\right|$$

4.1 解对初值和参数的连续依赖性

考虑 $\begin{cases} \dfrac{d\vec{y}}{dx} = \vec{f}(x, \vec{y}, \lambda) \\ \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0 \end{cases}$ 要研究它的解 $y = \varphi(x; x_0, \vec{y}_0, \lambda)$ 对初值 $(x_0, \vec{y}_0)$ 及参数 λ 的连续依赖性令 $\tilde{x} = x - x_0, \tilde{\vec{y}} = \vec{y} - \vec{y}_0$

因此，只需讨论方程

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y, \lambda) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

关于参数 λ 的连续依赖性.

证明. 1. 等价于

$$y = \int_0^x f(x, y, \lambda) dx$$

2. 定义

$$\varphi(x)$$

3. k=0 时，结论成立

假设 k 时结论成立，当 k+1 时，$\forall (x_0, \lambda_0) \in D$，

$$\begin{aligned} \varphi_{k+1}(x, \lambda) - \varphi(x_0, \lambda_0) &= \int_0^x f(x, \varphi_k(x, \lambda), \lambda) dx - \int_0^{x_0} f(x, \varphi_k(x, \lambda_0), \lambda) dx \\ &= \end{aligned}$$

□

定理 4.1.1. *设 n 维向量函数 $f(x, y)$ 在 (x, y) 空间内的某个开区域 G 上连续，而且对 y 满足局部 Lipschitz 条件. 假设 $y = \xi(x)$ 是微分方程*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

的一个解，令它的存在区间为 J. 现在区间 J 内任取一个有界闭区间 $a \leqslant x \leqslant b$，存在常数 $\delta > 0$，使得对于任何初值 $(x_0, y_0), a \leqslant x_0 \leqslant b, |y_0 - \xi(x_0)| \leqslant \delta$，柯西问题

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), y(x_0) = y_0$$

的解 $y = \varphi(x, x_0, y_0)$ 也至少在区间 $a \leqslant x \leqslant b$ 存在，并且在闭区域 $D_\delta : a \leqslant x \leqslant b, a \leqslant x_0 \leqslant b, |y_0 - \xi(x_0)| \leqslant \delta$ 上是连续的.

证明. 设 f 在 G 上是 Lipschitz 的，令

$$\eta(x) = y(x) - \xi(x)$$

则

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{dy}{dx} - \frac{d\xi}{dx} = f(x, \eta + \xi) - f(x, \xi)$$
$$\eta(x_0) = y(x_0) - \xi(x_0) = y_0 - \xi(x_0)$$

把研究 y 转化为研究 η

由于 f 是 Lip 的，

$$|g(x, y)| \leqslant L|\eta|$$

$$|f(x, \eta_1) - g(x, \eta_2)| = |f(x, \eta_1 + \xi) - f(x, \eta_2 + \xi)| \leqslant L|\eta_1 - \eta_2|$$

构造 Picard 序列 $\Big\{$ ...

Claim

$$||\leqslant \frac{(L|x-x_0|)^{k+1}}{(k+1)!}|y_0-\xi(x_0)|$$

$$|\varphi_k(x)|\leqslant \sigma$$

用数学归纳法证明 Claim1

当 k=0 时，

$$\varphi_1(x)-\varphi_0(x)=|\int_{x_0}^{x}|\leqslant L|y_0-\xi(x_0)|dx=L|y_0-xi(x_0)||x-x_0|$$

结论成立

设 k 时结论成立，则 k+1 时，

$$|\varphi_{k+1}(x)-\varphi_k(x)|=|\int_{x_0}^{x}(g(x,\varphi_k(x))-g(x,\varphi_{k-1}(x)))dx$$

取 $\sigma>0$，使得 $D=\{(x,y)||y-\xi(x)|\leqslant\sigma\}\subset G$ 由于 f 在 G 上局部 Lipschitz，则 f 在 D 上关于 y 是 Lipschitz 的. 取 $\delta>0$ 使得 $\delta e^{L|b-a|}=\dfrac{\sigma}{2}$ □

4.2 解对初值和参数的连续可微性

定理 4.2.1. 设 $f(x,y,\lambda)$ 在区域 $G:|x|\leqslant a,|y|\leqslant b,|\lambda-\lambda_0|\leqslant c$ 上连续，而且对 y,λ 又连续的偏导数，则 (5.5.2) 的解 $y=\varphi(x,\lambda)$ 在区域 D 上是连续可微的.

Chapter 5

线性微分方程组

考虑 n 阶线性微分方程组

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)y_j + f_i(x), a_{ij}(x), f_i(x) \in C(a,b), i = 1, \cdots, n, j = 1, \cdots, n$$

可写成矩阵乘法的形式：

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = A(x)\vec{y} + \vec{f}(x) := g(x, \vec{y})$$

若 $f(x)$ 恒为零，则称之为齐次的；若 $f(x)$ 不恒为零，则称之为非齐次的.
要想说明 (a,b) 上的唯一性，只需说明 (a,b) 中的任意的闭区间的唯一性.
$\forall I \subset (a,b)$ 是闭区间，

$$|g(x, y_1) - g(x, y_2)| = |A(x)(y_1 - y_2)| \leqslant L|y_1 - y_2|$$

由 Picard 存在唯一性定理，(6.1) 在 (a,b) 上有唯一解.

5.1　齐次线性方程组

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = A(x)\vec{y} \tag{5.1}$$

在式5.1中

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = A(x)\vec{y}$$

引理 5.1.1. 设 $y_1(x), y_2(x)$ 是 (6.2) 的两个解，则它们的线性组合 $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ 也仍然是 (6.2) 的解，C_1, C_2 是任意常数.

由该引理得，令 (6.2) 的所有的解构成集合 S，则 S 是一个线性空间.

引理 5.1.2. 线性空间 S 是 n 维线性空间.

证明. 固定 $x_0 \in (a,b)$，令，则有唯一的 (6.2) 的解在 (a,b) 上存在，记为 $y = y(x)$. 定义映射

$$H : \mathbb{R}^n \to S$$

$$y_0 \mapsto y(x)$$

1. H 是线性的由引理 4.1.1，$C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 仍是 (6.2) 的解，且其初值为，由解的唯一性，得证.
2. H 是单射
3. H 是满射

因此 $H:\mathbb{R}^n\to S$ 是一个同构，故 S 是 n 维的. □

定理 5.1.1. 设 (6.2) 在区间 (a,b) 上有 n 个线性无关的解 $\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x)$，则它的通解为 $y=C_1\varphi_1(x)+\cdots+C_n\varphi_n(x),C_1,\cdots,C_n$ 为任意常数.

称 (6.2) 的 n 个线性无关的解为一个基本解组.

如何判断 (6.2) 的 n 个解是线性无关的？令 n 个解是 $y_1(x)=\begin{pmatrix}y_{11}(x)\\y_{21}(x)\\y_{n1}(x)\end{pmatrix}$ 称 $W(x)$ 为解向量的朗斯基 $(Wronski)$ 行列式.

引理 5.1.3. 内容...

定理 5.1.2. (6.2) 的解组 (6.8) 是线性无关的充要条件为 $W(x)\neq 0,\forall a<x<b$

定义 5.1.1. 对应于解组 (6.8)，令矩阵 $Y(x)$

例 5.1.1. 内容...

证明.

$$\frac{d}{dx}$$

由于

故

$$\Phi^{-1}(s)\begin{pmatrix}0\\f(s)\end{pmatrix}=\frac{f(s)}{W(s)}\begin{pmatrix}-\varphi_2(s)\\\varphi_1(s)\end{pmatrix}$$

□

5.2 高阶线性微分方程式

5.2.1 常系数高阶线性微分方程

例 5.2.1. 设欧拉方程

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x) \tag{5.2}$$

其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 都是常数，$x > 0$. 试利用适当的变换把它化成常系数的非齐次线性微分方程.

解. 设 $x = \mathrm{e}^t$，即 $t = \ln x$.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} \\
&= \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) \\
&= -\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{1}{x^2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - 1\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{x^2}\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\right] \\
&= -2\frac{1}{x^3}\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) + \frac{1}{x^3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) \\
&= \frac{1}{x^3}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - 2\right)\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) \\
&= \frac{1}{x^3}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - 2\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - 1\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}$$

记

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} =: \mathrm{D}$$

不难由归纳法证明

$$y^{(k)} = \frac{1}{x^k}\mathrm{D}(\mathrm{D}-1)\cdots(\mathrm{D}-k+1)y$$

□

Chapter 6

幂级数解法

Chapter 7

定性理论与分支理论初步

7.1　动力系统、相空间与轨线

设 t 时刻质点的位置 $x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$，运动速度 $v=(v_1(x),\cdots,v_n(x))$，则质点的运动方程为

$$\frac{dx}{dt}=v(x) \tag{7.1}$$

这个方程不显含自变量，称这样的方程是自治的. 若 $v(x)$ 满足 Picard 定理的条件，则以 $x(t_0)=x_0$ 有唯一解 $x=\varphi(t;t_0,x_0)$.

注记. *为什么要将之视为 R^n 中的一条曲线而不是 R^{n+1} 中的一条曲线*

把 x 取值的的空间 $\mathbb{R}^n$ 称为相空间，把 (t,x) 所在的空间 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ 称为增广相空间

(8.3) 给出了与线速场 $u(x)$ 相吻合的一条“光滑”曲线，称之为轨线。用箭头在轨线标明对应于时间增加质点的运动方向.

目标：从向量场 $v(x)=(v_1(x),\cdots,v_n(x))$ 出发获取轨线的集合特征，或者更进一步，弄清轨线族的拓扑结构图

拓扑结构中有两个东西特别重要，

1. 平衡点：若 $v(x_0)=0$，则称 x_0 为方程7.1的一个平衡点. 对于平衡点我们需要关注它是否是稳定的、渐近稳定的，如果不稳定，我们想知道它为什么不稳定

2. 闭轨：若存在方程7.1的非定常的周期运动 $\varphi(t+T;t_0,x_0)=\varphi(t;t_0,x_0),\forall t$，我们想知道相图中是否存在闭轨，如果存在，有多少条

例 7.1.1. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-y+x(x^2+y^2-1)\\ \dfrac{dy}{dt}=x+y(x^2+y^2-1)\end{cases}$

令 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$ 则???

$\begin{cases}\dfrac{dr}{dt}=r(r^2-1),r(0)=r_0\\ \dfrac{d\theta}{dt}=1,\theta(0)=\theta_0\end{cases}$

那么我们可以找到平衡点

1. $r_0=0$

2. $r_0 \neq 0$

$$r(t) = \frac{1}{\sqrt{1-(1-\frac{1}{r_0^2})e^{2t}}}$$

注记. 这个极坐标的变换不保持平衡点???

本例中我们是通过把解解出来之后研究它的相图，本章的目的是不解它就研究它的相图

称方程7.1为一个动力系统，其基本性质如下：

1. 积分曲线的平移不变性设 $\varphi(t)$ 是方程7.1的一个积分曲线，则 $\varphi(t+C)$ 仍然是积分曲线. 注意，不重合.
   $\dfrac{d\varphi(t+C)}{dt} = \dfrac{d\varphi}{dt}(t+C) = v(\varphi(t+C))$
   要去思考一下对于非自治方程为什么就不成立了
2. 经过相空间每一点的轨线是唯一的.

   性质一和性质二说明，每条轨线都是增广相空间中沿 t 轴可平移重合的一族积分曲线在相空间中的投影，而且只是这族积分曲线的投影.
3. 群的性质，单参数连续变换群! 好耶

7.2 解的稳定性

考虑

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) \tag{7.2}$$

其中 $f(t,x)$ 对 $x \in G \subset \mathbb{R}^n, t \in (-\infty, +\infty)$ 连续，且关于 x 满足李氏条件.

定义 7.2.1. 假设(7.2)有一个解 $x = \varphi(t)$ 在 $t_0 \leqslant t < +\infty$ 有定义.

称(7.2)的解 $x = \varphi(t)$ 是 *Lyapunov* 稳定的，如果对于 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, s.t.$ 对于 $\forall x_0$ 满足 $|x_0 - \varphi(t_0)| < \delta$, 有 $|x(t;t_0,x_0) - \varphi(t)| < \varepsilon$ 对 $\forall t \geqslant t_0$ 成立.

称(7.2)的解 $x = \varphi(t)$ 是渐进稳定的，如果 $\exists \delta_1, s.t.$ 对于 $\forall x_0$ 满足 $|x_0 - \varphi(t_0)| < \delta_1$, 有 $\lim\limits_{t\to\infty} |x(t;t_0,x_0) - \varphi(t)| = 0$ 成立.

7.2.1 线性稳定性

令

$$y = \tilde{y} + y_*,$$

代入到

$$\frac{dy}{dt} = f(y)$$

则

$$LHS = \frac{d(\tilde{y}+y_*)}{dt} = \frac{d\tilde{y}}{dt}$$

$$\begin{aligned} RHS = f(\tilde{y}+y_*) &= f(y_*) + f^{'}(y_*)\tilde{y} + \left[f(\tilde{y}+y_*) - f(y_*) - f^{'}(y_*)\tilde{y}\right] \\ &= f^{'}(y_*)\tilde{y} + \left[f(\tilde{y}+y_*) - f^{'}(y_*)\tilde{y}\right] \end{aligned}$$

$$= A\tilde{y} + N(\tilde{y})$$

其中 $A = f^{'}(y_*)$ 是常数矩阵，而 $N(\tilde{y})$ 满足 $\lim\limits_{\tilde{y}\to 0}\dfrac{|N(\tilde{y})|}{|\tilde{y}|} = 0.$

在(7.2)中，设 $x = 0$ 是一个解，令 $f(t,x) = A(t)x + N(t,x), \lim\limits_{|x|\to 0}\dfrac{|N(t,x)|}{|x|} = 0, N(t,0) = 0$

$A(t)$ 是 n 阶矩阵，在 $t \geqslant t_0$ 上连续

考虑方程

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \tag{7.3}$$

的稳定性. 称它的稳定与不稳定为原方程7.2的线性稳定与不稳定

定理 7.2.1. 在 (7.3) 中，若 $A(t)$ 是常数矩阵，则

1. 零解是渐近稳定的，当且仅当 A 的全部特征根有负的实部
2. 零解是稳定的，当且仅当 A 的全部特征根实部非正，并且实部为零的特征根对应的 *Jordan* 块是一阶的
3. 零解是不稳定的，当且仅当 A 有实部为正的特征根或 A 有实部为零的特征根且它对应的 *Jordan* 块是高于一阶的

7.2.2 Lyapunov 第二办法 (针对非线性方程)

考虑自治系统

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = f(\vec{y}) \tag{7.4}$$

定理 7.2.2 (Lyapunov 稳定性)**.** 令 $\vec{y}_*$ 是方程 (7.4) 的平衡点，令 $L: O \to R$ 是包含 $\vec{y}_*$ 的开集 O 上的连续可微函数，假设

1. $L(\vec{y}_*) = 0$, 且 $L(\vec{y}) > 0, \forall \vec{y} \in O\backslash\{\vec{y}_*\}$
2. $$\dot{L}(\vec{y}) \ = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} L\circ\phi_t(\vec{y}) \leqslant 0, \forall \vec{y} \in O\backslash\{\vec{y}_*\}$$
   其中 $\phi_t(\vec{y})$ 表示以 $\vec{y}$ 为初值的(7.4)的解.

则 $\vec{y}_*$ 是稳定的，若再假设 $\dot{L}(\vec{y}) < 0, \forall \vec{y} \in O\backslash\{\vec{y}_*\}$，则 $\vec{y}_*$ 是渐近稳定的.

证明. 1. ε 充分小，使得 $B_\varepsilon(\vec{y}_*) \subset O$

定义 $\alpha = \min\{L(\vec{y})\big||\vec{y} - \vec{y}_*| = \varepsilon\}$

$u_\varepsilon = \{y \in B_\varepsilon(y_*)\big|L(y) < \alpha\}$，则 u_ε 是开集，且 $y_* \in u_\epsilon$

由 $\dot{L} \leqslant 0$，若 $y_0 \in u_\epsilon$，则

$$\frac{d}{dt}L(y(t)) \leqslant 0$$

以 y_0 为初值的解一定一直限制在 u_ϵ 中，

现在对于 $\forall\varepsilon > 0$，$\exists\delta$ 使得 $B_\delta \subset U_\epsilon$，以 y_0 为初值的解一直在 u_ϵ 中，

$$|y(t) - y_*| < \epsilon, \forall t$$

取 δ 使得 $B_\delta(y_*) \subset U_\epsilon$ 中，则 y_* 是稳定的.

2. 由稳定性，$|y(t)-y_*|<\epsilon,\forall t$，故 $|y(t)|\leqslant< M,\forall t$，故存在收敛子列 $t_n\to\infty$ 使得 $y(t_n)\to z_0$

   现在要证的是，

   $$\lim_{t\to\infty}|y(t)-y_*|=0$$

   现在先证 z_0 就是 y_*

   由于 $\dot{L}<0, L(y(t))$ 严格递减趋于 $L(z_0)$，（$L(y(t))$ 的极限你是知道存在的，但是你不知道 $y(t)$ 的极限，你只知道 $y(t_n)$ 的极限，但是对于 L 这个极限相同）

   令 $z(s)$ 是以 z_0 为初值的解，则有 3，

   $$L(z(s))<L(z_0),\forall s>0$$

   这里不能由 $L(z_0)$ 最小出点东西？

   令 $Y_n(s)$ 是以 $y(t_n)$ 为初值的解，则 $Y_n(s)=y(t_n+s)$

   并且我们还知道 $y(t_n)\to z_0, Y_n(s)$ 是以 $y(t_n)$ 的解，$z(s)$ 是以 z_0 为初值的解，由解对初值的连续依赖性，当 n 充分大时，$L(Y_n(s))=L(y(t_n+s))<L(z_0),\forall s>0$，这与 $L(y(t))>L(z_0)$ 矛盾.

   于是 $y(t)$ 只能以 y_* 为唯一的极限点??? $y(t)$ 咋就有极限了.

$\square$

例 7.2.1. 分析方程组 $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=(\varepsilon x+2y)(z+1)\\ \dfrac{dy}{dt}=(-x+\epsilon y)(z+1)\\ \dfrac{dz}{dt}=-z^3\end{cases}$ 的平衡点的稳定性

证明. $\begin{cases}(\varepsilon x+2y)=0\\ (-x+\epsilon y)=0\\ z=0\end{cases}\Rightarrow(0,0,0)$ 是平衡点找线性部分

$$(x,y,z)=(0+\tilde{x},0+\tilde{x},0+\tilde{x})$$

所以直接看线性化方程是什么，$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\epsilon x+2y\\ \dfrac{dy}{dt}=-x+\epsilon y\\ \dfrac{dz}{dt}=0\end{cases}$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\epsilon&2&0\\-1&\epsilon&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

$$det(A-\lambda E)=-\lambda((\lambda-\epsilon)^2+2)$$

$$\lambda_1=0,\lambda_2=\epsilon+\sqrt{2}i,\lambda_3=\epsilon-\sqrt{2}i$$

如果 $\epsilon>0$，那么这个系统是线性不稳定的，进而使不稳定的. 如果 $\epsilon\leqslant 0$，虽然是线性稳定的，但是不知道非线性怎么样.

构造 *Lypnouv* 函数，

$$L(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2$$

我要求一些系数 abc 使得满足应用定理的条件.

$$\dot{L}(x,y,z) = \frac{\partial L}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial L}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial L}{\partial x}\dot{x}$$

$$2ax((\epsilon x + 2y)(z+1)) + 2by(-x + \epsilon y)(z+1)$$

$$\epsilon(2ax^2 + 2by^2)(z+1) + (4a-2b)xy(z+1) - 2cz^4$$

当 $\epsilon = 0$ 时，取 a=1，b=2，c=1

$$\dot{L} = -z^4 \leqslant 0$$

$\Rightarrow (0,0,0)$ 是非线性稳定的.

当 $\epsilon < 0$ 时，

$$\dot{L}(x,y,z) = \varepsilon(2x^2 + 4y^2) - 2z^4 < 0$$

故 $(0,0,0)$ 是渐近稳定的. □

7.3 平面上的动力系统，奇点与极限环

考虑平面上的动力系统

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = X(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} = Y(x,y) \end{cases}$$

$X(x,y), Y(x,y)$ 是平面上的连续函数.

为什么要考虑平面上的动力系统，因为对于高维的动力系统，我们可以两两组合考虑多个平面上的动力系统

消去 t，得到 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{Y(x,y)}{X(x,y)}$

先来考虑线性系统

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

若 A 是非退化的，则称 $(0,0)$ 为初等奇点，否则，称之为高阶奇点. 令 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ 则原方程变为

$$T\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = AT\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = T^{-1}AT\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

不妨设 A 是 Jordan 标准形. 即 A 为以下三种之一

1. $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$

1. $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$

   $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \lambda x \\ \dfrac{dy}{dt} = \mu y \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\mu y}{\lambda x} \Rightarrow y = C|x|^{\frac{\mu}{\lambda}}$$

   (a) $\lambda = \mu, y = C|x|$，还要判断一下稳定性

   (b) λ, μ 同号

      i. $|\dfrac{\mu}{\lambda}| > 1$