

样条函数与逼近论

孙天阳

中国科学技术大学数学科学学院

`tysun@mail.ustc.edu.cn`

2024 年 11 月 7 日

目录

目录	1
1 差商	2
1.1 绪论	2
1.1.1 分段插值	2
1.1.2 B 样条基函数	2
1.2 Lagrange 插值	3
1.3 Newton 插值	5
1.4 误差估计	9
1.5 Hermite 插值	10
1.6 差商的性质	12
1.7 样条空间	14
1.8	16
2 B 样条的性质	17
2.1 基本性质	17
2.2 B 样条的分析性质	19
2.3 B 样条的代数性质	20
2.4 等距节点 B 样条	21
3 B 样条的相关算法	22
3.1 de Boor 算法	22
3.2 节点插入算法	23
3.3 开花算法	24
3.4 层次 B 样条	25
4 样条插值与逼近	26
4.1 变差减缩性	26
4.2 自然样条与样条插值	28
5 习题	29
5.1 第九章	29

Chapter 1

差商

1.1 绪论

多项式插值: Lagrange、Newton、Hermite。

P_m : 最高不超过 m 次的多项式。

Runge 现象: $f(x) = \frac{1}{1+x^2}, x \in [-5, 5]$, 用一个多项式插值不能很好地拟合这个函数。

1.1.1 分段插值

分段插值 \rightarrow 样条: 分段光滑多项式。插值方法不行, 不做插值, 改做逼近。

给定区间 $[a, b]$, 假设 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k < x_{k+1} = b$,

$$\{I_i = [x_i, x_{i+1}), i = 0, \cdots, k\}$$

每一段上都可以约定多项式的次数, 叫做 multi-degree spline, 就是每段上最高次数不一样。我们这门课, 每一段上多项式次数, 给一个统一的最高值。

$$S_m(\Delta) := \{s(x) \mid s(x)|_{I_i} \in \mathbb{P}_m, s(x) \in C^{m-1}[a, b]\}$$

以后每个结点可以指定不同的光滑次数。

$S_m(\Delta) \subset C^{m-1}[a, b]$ 线性空间 (关心基函数) + 对偶基。从计算的角度来说, 具有紧支集的基函数。学过有限元的话, 具有紧支集的函数 $\int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)dx$ 就很好算。

1.1.2 B 样条基函数

B 样条基函数 (B-spline), B 是 Basic。

其他的 $\varphi_i(x)$ 是同理的. 这样一来,

$$p_m(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \cdots + a_m\varphi_m(x)$$

中的系数 $\{a_i\}_{i=0}^m$ 就被确定为

$$a_i = f(x_i), \quad i = 0, \cdots, m.$$

我们给这组基一个专有的记号记作 l_i , 称作 Lagrange 插值多项式, 将这种插值方式

$$p_m(x) = \sum_{i=0}^m f(x_i)l_i(x)$$

称作 **Lagrange 插值**.

命题 1.2.2.

$$\sum_{i=0}^m l_i(x) \equiv 1$$

证明. 左侧其实就是 1 的 Lagrange 插值多项式, 按插值的要求它在 $m+1$ 个点取到 1, 这大于它的次数 m , 所以只能恒为 1. \square

如果引入记号

$$\omega_{m+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_m)$$

那么

$$l_i(x) = \frac{\omega_{m+1}(x)}{(x - x_i)\omega'_{m+1}(x_i)}.$$

1.3 Newton 插值

Lagrange 插值有一个缺点, 就是基函数高度依赖于节点的选择. 如果节点发生了变化, 哪怕是在原有的 m 个节点的基础上新增一个节点, 也需要重新算一遍基函数. 这就促使我们引入了 **Newton 插值**. 把握住目的是新增节点时能够复用原有的基函数, 就不难理解 Newton 插值的基函数的选择.

首先 $m = 0$ 只有一个节点的时候, 很平凡的情形自然会选 $\varphi_0 = 1$ 作为基函数. 当 $m = 1$ 也就是有两个节点的时候, 首先我们已经有了 $\varphi_0 = 1$, 所以矩阵长成

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \varphi_1(x_0) \\ 1 & \varphi_1(x_1) \end{pmatrix}$$

的样子, 我们为了 B 简单所以取 $\varphi_1 = x - x_0$. 当 $m = 2$ 时, 矩阵长成

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \varphi_2(x_0) \\ 1 & \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) \\ 1 & \varphi_1(x_2) & \varphi_2(x_2) \end{pmatrix}$$

依旧是为了矩阵简单我们取 $\varphi_2 = (x - x_0)(x - x_1)$. 这样一来, $\varphi_i(x)$ 的取法就比较清楚了

$$\varphi_0(x) = 1, \quad \varphi_i(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

根据这种取法, A 是一个下三角矩阵. 为什么不在 $\varphi_i(x)$ 前加系数来进一步简化矩阵? 因为给 $\varphi_1(x)$ 前加系数顶多把 $\varphi_1(x_1)$ 给调成 1, 不可能同时把 $\varphi_1(x_2)$ 给调成 1, 所以干脆摆烂, 这样系数还干净.

命题 1.3.1 (作业). $\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^m$ 线性无关.

证明.

$$\lambda_0 + \lambda_1(x - x_0) + \lambda_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + \lambda_m(x - x_0) \cdots (x - x_{m-1}) = 0$$

取 $x = x_0$ 推得 $\lambda_0 = 0$. 再取 $x = x_1$ 得 $\lambda_1 = 0$. 以此类推. □

接下来我们看一下此时怎么确定

$$p_m(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \cdots + a_m\varphi_m(x)$$

中的系数. 我们三个观察, 首先注意到有

$$p_m(x) = p_{m-1}(x) + a_m\varphi_m(x),$$

这是因为 φ_m 在 x_0, \dots, x_{m-1} 处全为零, 即 $a_m\varphi_m(x)$ 这一项对 $p_m(x)$ 在 x_0, \dots, x_{m-1} 处的值没有影响, 所以除去这部分就是插值前 m 个节点的插值多项式. 从这里看出来, 采用牛顿插值, 我们不仅可以复用基函数, 在计算插入新节点后的插值多项式时还可以复用之前的插值多项式. 另一个观察是 a_m 就是 p_m 中 x^m 前的系数, 由插值多项式的存在唯一性, 我们可以利用 Lagrange 插值

$$p_m(x) = \sum_{i=0}^m f(x_i)l_i(x)$$

来计算 a_m . 直接可以从上式与 $l_i(x)$ 的定义读出 $p_m(x)$ 的最高阶项次数就是

$$a_m = \sum_{i=0}^m f(x_i) \frac{1}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)}.$$

第三个观察是我们可以递归地计算出 a_i , 首先在 $x = x_0$ 处取值可以计算出

$$a_0 = f(x_0) =: [x_0]f$$

然后在 $x = x_1$ 处取值得到

$$[x_1]f = [x_0]f + a_1(x_1 - x_0) \implies a_1 = \frac{[x_1]f - [x_0]f}{x_1 - x_0} =: [x_0, x_1]f$$

然后在 $x = x_2$ 处取值得到

$$\begin{aligned} [x_2]f &= [x_0]f + [x_0, x_1]f \cdot (x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_1)(x_2 - x_0) \\ [x_2]f - [x_1]f + [x_1]f - [x_0]f &= [x_0, x_1]f \cdot (x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_1)(x_2 - x_0) \\ [x_1, x_2]f \cdot (x_2 - x_1) + [x_0, x_1]f \cdot (x_1 - x_0) &= [x_0, x_1]f \cdot (x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_1)(x_2 - x_0) \\ [x_1, x_2]f \cdot (x_2 - x_1) - [x_0, x_1]f \cdot (x_2 - x_1) &= a_2(x_2 - x_1)(x_2 - x_0) \\ a_2 &= \frac{[x_1, x_2]f - [x_0, x_1]f}{x_2 - x_0} =: [x_0, x_1, x_2]f \end{aligned}$$

然后在 $x = x_3$ 处取值, 移项并合并产生更高阶项, 得到

$$\begin{aligned} &[x_2, x_3]f \cdot (x_3 - x_2) + [x_1, x_2]f \cdot (x_2 - x_1) + [x_0, x_1]f \cdot (x_1 - x_0) \\ &= [x_0, x_1]f \cdot (x_3 - x_0) + [x_0, x_1, x_2]f \cdot (x_3 - x_1)(x_3 - x_0) + a_3(x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_3 - x_0) \end{aligned}$$

移项并插入中间项得到

$$\begin{aligned} &[x_2, x_3]f \cdot (x_3 - x_2) - [x_1, x_2]f \cdot (x_3 - x_2) + [x_1, x_2]f \cdot (x_3 - x_1) - [x_0, x_1]f \cdot (x_3 - x_1) \\ &= [x_0, x_1, x_2]f \cdot (x_3 - x_1)(x_3 - x_0) + a_3(x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_3 - x_0) \end{aligned}$$

合并产生更高阶项得到

$$\begin{aligned} &[x_1, x_2, x_3]f \cdot (x_3 - x_2)(x_3 - x_1) + [x_0, x_1, x_2]f \cdot (x_3 - x_1)(x_2 - x_0) \\ &= [x_0, x_1, x_2]f \cdot (x_3 - x_1)(x_3 - x_0) + a_3(x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_3 - x_0) \end{aligned}$$

移项得到

$$\begin{aligned} &[x_1, x_2, x_3]f \cdot (x_3 - x_2)(x_3 - x_1) - [x_0, x_1, x_2]f \cdot (x_3 - x_2)(x_3 - x_1) = a_3(x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_3 - x_0) \\ &\implies a_3 = \frac{[x_1, x_2, x_3]f - [x_0, x_1, x_2]f}{x_3 - x_0} =: [x_0, x_1, x_2, x_3]f \end{aligned}$$

一般的, 在 $x = x_m$ 处取值得到

$$[x_m]f = [x_0]f + [x_0, x_1]f \cdot (x_m - x_0) + \cdots + a_m(x_m - x_{m-1}) \cdots (x_m - x_0)$$

接下来我们将归纳证明, 将式子右侧的前 k 项挪到式子左侧, 会得到

$$\sum_{i=1}^{m-k+1} [x_{m-i+2-k}, \cdots, x_{m-i+1}]f \cdot (x_m - x_{m-i}) \cdots (x_m - x_{m-i+2-k}) - [x_{m-i+1-k}, \cdots, x_{m-i}]f \cdot (x_m - x_{m-i}) \cdots (x_m - x_{m-i+2-k})$$

当 $k = 1$ 时, 这就是

$$\sum_{i=1}^m [x_{m-i+1}]f - [x_{m-i}]f = [x_m]f - [x_{m-1}]f + [x_{m-1}]f - [x_{m-2}]f + \cdots + [x_1]f - [x_0]f$$

这是显然的, 假设上式对 k 成立, 下证对 $k+1$ 成立, 对 k 的式子变形并移项得

$$= \sum_{i=1}^{m-k+1} [x_{m-i+1-k}, \cdots, x_{m-i+1}]f \cdot (x_m - x_{m-i}) \cdots (x_m - x_{m-i+2-k})(x_{m-i+1} - x_{m-i+1-k}) - [x_0, \cdots, x_k]f \cdot (x_m - x_{k-1}) \cdots (x_m - x_0)$$

要证这玩意等于

$$\sum_{i=1}^{m-k} [x_{m-i+1-k}, \cdots, x_{m-i+1}]f \cdot (x_m - x_{m-i}) \cdots (x_m - x_{m-i+1-k}) - [x_{m-i-k}, \cdots, x_{m-i}]f \cdot (x_m - x_{m-i}) \cdots (x_m - x_{m-i+1-k})$$

首先可以看到含 $[x_{m-k}, \cdots, x_m]$ 的项是一样的, 接下来就是证

$$- [x_{m-j-k}, \cdots, x_{m-j}]f \cdot (x_m - x_{m-j}) \cdots (x_m - x_{m-j+1-k}) + [x_{m-j-k}, \cdots, x_{m-j}]f \cdot (x_m - x_{m-j-1}) \cdots (x_m - x_{m-j-k}) \\ = [x_{m-j-k}, \cdots, x_{m-j}]f \cdot (x_m - x_{m-j-1}) \cdots (x_m - x_{m-j+1-k})(x_{m-j} - x_{m-j-k})$$

即证

$$-(x_m - x_{m-j}) \cdots (x_m - x_{m-j+1-k}) + (x_m - x_{m-j-1}) \cdots (x_m - x_{m-j-k}) = (x_m - x_{m-j-1}) \cdots (x_m - x_{m-j+1-k})(x_{m-j} - x_{m-j-k})$$

消去公因式, 即证

$$-(x_m - x_{m-j}) + (x_m - x_{m-j-k}) = x_{m-j} - x_{m-j-k}$$

这是显然的. 最后还需要额外验证

$$-[x_0, \cdots, x_k]f \cdot (x_m - x_k) \cdots (x_m - x_1) = [x_0, \cdots, x_k]f \cdot (x_m - x_{k-1}) \cdots (x_m - x_1)(x_k - x_0) - [x_0, \cdots, x_k]f \cdot (x_m - x_{k-1}) \cdots (x_m - x_0)$$

即证

$$-(x_m - x_k) \cdots (x_m - x_1) = (x_m - x_{k-1}) \cdots (x_m - x_1)(x_k - x_0) - (x_m - x_{k-1}) \cdots (x_m - x_0)$$

消去公因式, 即证

$$-(x_m - x_k) = (x_k - x_0) - (x_m - x_0),$$

这是显然的. 所以当 $k = m$ 时我们得到

$$[x_1, \cdots, x_m]f \cdot (x_m - x_{m-1}) \cdots (x_m - x_1) - [x_0, \cdots, x_{m-1}]f \cdot (x_m - x_{m-1}) \cdots (x_m - x_1) = a_m(x_m - x_{m-1}) \cdots (x_m - x_1)(x_m - x_0)$$

$$\implies a_m = \frac{[x_1, \cdots, x_m]f - [x_0, \cdots, x_{m-1}]f}{x_m - x_0}$$

定义 1.3.2. 设 $\{x_i\}_{i=0}^m$ 是 $[a, b]$ 中互异的 $m+1$ 个节点, f 是定义在 $[a, b]$ 上的函数. 定义

$$[x_0, \cdots, x_m]f := \frac{[x_1, \cdots, x_m]f - [x_0, \cdots, x_{m-1}]f}{x_m - x_0} = \sum_{i=0}^m f(x_i) \frac{1}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)} = \frac{D \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \cdots & x_{m-1} & x_m \\ 1 & x & \cdots & x^{m-1} & f \end{pmatrix}}{D \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \cdots & x_{m-1} & x_m \\ 1 & x & \cdots & x^{m-1} & x^m \end{pmatrix}}$$

命题 1.3.3. 设 $\sigma \in S_{m+1}$ 是一个全排列, 则 $[x_0, \cdots, x_m]f = [x_{\sigma(0)}, \cdots, x_{\sigma(m)}]f$.

证明. 从差商是 Lagrange 插值多项式的首项系数的定义来看是显然的. \square

命题 1.3.4. 从差商是 Lagrange 插值多项式的首项系数的定义验证递归定义成立.

证明.

$$\begin{aligned}
 [x_1, \dots, x_m]f - [x_0, \dots, x_{m-1}]f &= \sum_{i=1}^m f(x_i) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^m \frac{1}{x_i - x_k} - \sum_{i=0}^{m-1} f(x_i) \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{m-1} \frac{1}{x_i - x_k} \\
 &= f(x_m) \prod_{k=1}^{m-1} \frac{1}{x_m - x_k} - f(x_0) \prod_{k=1}^{m-1} \frac{1}{x_0 - x_k} + \sum_{i=1}^{m-1} f(x_i) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{m-1} \frac{1}{x_i - x_k} \left(\frac{1}{x_i - x_m} - \frac{1}{x_i - x_0} \right) \\
 &= f(x_m) \prod_{k=1}^{m-1} \frac{1}{x_m - x_k} - f(x_0) \prod_{k=1}^{m-1} \frac{1}{x_0 - x_k} + \sum_{i=1}^{m-1} f(x_i) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{m-1} \frac{1}{x_i - x_k} \frac{x_m - x_0}{(x_i - x_m)(x_i - x_0)} \\
 &= (x_m - x_0) \left[f(x_m) \prod_{k=0}^{m-1} \frac{1}{x_m - x_k} + f(x_0) \prod_{k=1}^m \frac{1}{x_0 - x_k} + \sum_{i=1}^{m-1} f(x_i) \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^m \frac{1}{x_i - x_k} \right]
 \end{aligned}$$

□

命题 1.3.5. 设 $f \in C^m[a, b]$, 则存在 $\xi \in (a, b)$ 使得

$$[x_0, x_1, \dots, x_m]f = \frac{f^{(m)}(\xi)}{m!}$$

证明. 令 $e(x) = f(x) - P_m(x)$, 则它是以 $\{x_i\}_{i=0}^m$ 为零点的函数, 由 Rolle 中值定理, 存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $e^{(m)}(\xi) = 0$, 而 $P_m^{(m)}(\xi) = m![x_0, \dots, x_m]f = f^{(m)}(\xi)$. □

例 1.3.6 (作业). 计算 $f = x^n$ 的各阶差商.

$$[x_0, \dots, x_m]f = \begin{cases} 0 & m > n \\ 1 & m = n \\ ? & m < n \end{cases}$$

1.4 误差估计

1.5 Hermite 插值

设

$$a \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_r \leq b$$

为插值节点, 对节点 x_i , 给定 $l_i \geq 1$ 个实数

$$y_i^{(k)} = f^{(k)}(x_i), \quad k = 0, \cdots, l_i - 1$$

记 $\sum_{i=1}^r l_i = m + 1$. Hermite 问题: 寻找一个 m 次多项式 $H_m(x) \in \mathbb{P}_m$ 满足插值条件

$$H_m^{(k)}(x_i) = y_i^{(k)}, \quad k = 0, \cdots, l_i - 1, \quad i = 1, \cdots, r.$$

定理 1.5.1. 满足上述插值条件的多项式 $H_m(x) \in \mathbb{P}_m$ 存在且唯一.

假设 $\{u_i(x)\}_{i=0}^m$ 是 \mathbb{P}_m 的一组基, 设 $H_m(x) = \sum_{i=0}^m c_i u_i(x)$, 代入 Hermite 插值条件有

$$\begin{cases} c_0 u_0(x_1) + c_1 u_1(x_1) + \cdots + c_m u_m(x_1) = f(x_1) \\ c_0 u_0^{(1)}(x_1) + c_1 u_1^{(1)}(x_1) + \cdots + c_m u_m^{(1)}(x_1) = f^{(1)}(x_1) \\ \cdots \cdots \cdots \\ c_0 u_0^{(l_1-1)}(x_1) + c_1 u_1^{(l_1-1)}(x_1) + \cdots + c_m u_m^{(l_1-1)}(x_1) = f^{(l_1-1)}(x_1) \\ \cdots \cdots \cdots \end{cases}$$

则关于 $\{c_i\}_{i=0}^m$ 的系数矩阵为

$$B = \begin{bmatrix} u_0(x_1) & u_1(x_1) & \cdots & u_m(x_1) \\ Du_0(x_1) & Du_1(x_1) & \cdots & Du_m(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D^{l_1-1}u_0(x_1) & D^{l_1-1}u_1(x_1) & \cdots & D^{l_1-1}u_m(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_0(x_r) & u_1(x_r) & \cdots & u_m(x_r) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D^{l_r-1}u_0(x_r) & D^{l_r-1}u_1(x_r) & \cdots & D^{l_r-1}u_m(x_r) \end{bmatrix}$$

证明一. B 可逆 $\Leftrightarrow Bx = 0$ 只有零解, 即满足齐次 Hermite 插值条件的只有零解. 数零点个数. \square

证明二. 根据尽可能简化矩阵 B 的思路, 选取

$$u_0(x) = 1, u_1(x) = x - x_1, \cdots, u_{l_1-1}(x) = (x - x_1)^{l_1-1}, u_{l_1}(x) = (x - x_1)^{l_1}, \cdots, u_m(x) = (x - x_1)^{l_1} \cdots (x - x_r)^{l_r-1}$$

\square

定义 1.5.2. 给定节点

$$t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_{m+1} = \underbrace{x_1 = \cdots = x_1}_{l_1} < \underbrace{x_2 = \cdots = x_2}_{l_1} < \cdots < \underbrace{x_r = \cdots = x_r}_{l_r}$$

定义函数 $f(x)$ 在 t_1, \cdots, t_{m+1} 处的差商为满足 Hermite 插值条件

$$H_m^{(k)}(x_i) = f^{(k)}(x_i), \quad k = 0, \cdots, l_i - 1, \quad i = 1, \cdots, r.$$

的插值多项式 $H_m(x)$ 的首项系数, 记作 $[t_1, \cdots, t_{m+1}]f$.

定理 1.5.3 (Cramer 法则).

$$[t_1, \dots, t_{m+1}]f = D \begin{pmatrix} t_1 & \cdots & t_m & t_{m+1} \\ 1 & \cdots & x^{m-1} & f \end{pmatrix} / D \begin{pmatrix} t_1 & \cdots & t_m & t_{m+1} \\ 1 & \cdots & x^{m-1} & x^m \end{pmatrix}$$

命题 1.5.4. 将出现在上式分母中的行列式称作带重节点的 Vandermonde 行列式, 证明

$$V(t_1, \dots, t_m) = \prod_{1 \leq i < j \leq r} (x_i - x_j)^{l_i l_j} \prod_{i=1}^r \prod_{k=1}^{l_i-1} k!$$

证明.

□

定理 1.5.5.

$$[t_1, \dots, t_{m+1}]f = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{l_i} \alpha_{ij} D^{j-1} f(x_i)$$

推论 1.5.6.

定理 1.5.7. 如果 $t_1 < t_{m+1}$, 那么

$$[t_1, \dots, t_{m+1}]f = \frac{[t_2, \dots, t_{m+1}]f - [t_1, \dots, t_m]f}{t_{m+1} - t_1}$$

如果 $t_1 = \dots = t_{m+1}$, 那么

$$[t_1, \dots, t_{m+1}]f = \frac{1}{m!} D^{(m)} f(t_1)$$

证明.

□

推论 1.5.8. 若 $D^m f(x) = 0$, 则 $[t_1, \dots, t_{m+1}]f = 0$

1.6 差商的性质

命题 1.6.1 (Leibniz 公式). 对光滑函数 f, g , 有

$$[t_1, \dots, t_{m+1}](f \cdot g) = \sum_{i=1}^{m+1} [t_1, \dots, t_i]f \cdot [t_i, \dots, t_{m+1}]g$$

证明一. 设 p, q 是 f, g 满足 t_1, \dots, t_{m+1} 作为插值条件的 Hermite 插值问题的解.

$$p = \sum_{i=1}^m (x - t_1) \cdots (x - t_i) [t_1, \dots, t_i]f$$

$$q = \sum_{i=1}^m (x - t_{i+1}) \cdots (x - t_{m+1}) [t_i, \dots, t_{m+1}]g$$

□

证明二. 当 $m = 0$ 时,

$$[t_1](f \cdot g) = (f \cdot g)(t_1) = f(t_1) \cdot g(t_1) = [t_1]f \cdot [t_1]g$$

假设对 m 个插值节点成立, 下面推对 $m + 1$ 个插值节点成立.

(1) 当 $t_1 = \dots = t_{m+1}$,

$$[t_1, \dots, t_{m+1}](f \cdot g) = \frac{D^m}{m!}(f \cdot g)(t_1)$$

$$LHS = \sum_i^{m+1} \frac{D^{(i-1)}f}{(i-1)!}(t_1) \cdot \frac{D^{m+1-i}g}{(m+1-i)!}(t_1) = \frac{1}{m!} \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} D^i f(t_1) \cdot D^{m-i} g(t_1) = \frac{D^m f \cdot g(t_1)}{m!}$$

(2) 若 $t_1 < t_{m+1}$

$$[t_1, \dots, t_{m+1}](f \cdot g) = \frac{[t_2, \dots, t_{m+1}](f \cdot g) - [t_1, \dots, t_m](f \cdot g)}{t_{m+1} - t_1}$$

$$= \frac{\sum_{i=2}^{m+1} [t_2, \dots, t_i]f \cdot [t_i, \dots, t_{m+1}]g - \sum_{i=1}^m [t_1, \dots, t_i]f \cdot [t_i, \dots, t_m]g}{t_{m+1} - t_1}$$

看分子

$$\sum_{i=2}^{m+1} ((t_i - t_1)[t_1, \dots, t_i]f + [t_1, \dots, t_{i-1}]f) [t_i, \dots, t_{m+1}]g - \sum_{i=1}^m [t_1, \dots, t_i](- (t_{m+1} - t_i)[t_i, t_{i+1}, \dots, t_{m+1}]g +$$

注意

$$\sum_{i=2}^{m+1} [t_1, \dots, t_{i-1}]f \cdot [t_i, \dots, t_{m+1}]g = \sum_{i=1}^m [t_1, \dots, t_i]f \cdot [t_{i+1}, \dots, t_{m+1}]g$$

从而上式为

$$\sum_{i=2}^{m+1} (t_i - t_1)[t_1, \dots, t_i]f \cdot [t_i, \dots, t_{m+1}]g + \sum_{i=1}^m (t_{m+1} - t_i)[t_1, \dots, t_i]f \cdot [t_i, \dots, t_{m+1}]g$$

$$= \sum_{i=1}^{m+1} [t_1, \dots, t_i]f \cdot [t_i, \dots, t_{m+1}]g(t_{m+1} - t_1)$$

□

推论 1.6.2.

$$[t_1, \dots, t_{m+1}](x - t_{m+1})f = [t_1, \dots, t_m]f$$

命题 1.6.3. 当 $\varepsilon_i \rightarrow 0$ 时, 若 $\{t_{i,\varepsilon_i}\}_{i=1}^{n+1}$ 是 $[t_1, t_n]$ 的某个分割, 则

$$\{t_i\}_{i=1}^{n+1} \rightarrow \{t_i\}_{i=1}^{n+1}$$

对光滑函数 f 有:

$$\lim_{\varepsilon_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{n+1} f(t_i, \xi_i) \Delta t_i = \int_{t_1}^{t_n} f(t) dt$$

证明. 只需 (真的吗?) 针对节点 t_i , 做扰动 ε . 设原插值节点为

$$t_1 \leq \dots \leq t_{i-1} < t_i = t_{i+1} = \dots = t_{i+l-1} < t_{i+l} \leq \dots \leq t_{m+1}$$

做扰动 ε 后

$$t_1 \leq \dots \leq t_{i-1} < t_{i+1} = \dots = t_{i+l-1} < t_i + \varepsilon < t_{i+l} \leq \dots \leq t_{m+1}$$

$$[t_1, \dots, t_i + \varepsilon, t_{i+1}, \dots, t_{m+1}]f = \frac{D}{D}$$

□

命题 1.6.4.

$$\frac{\partial}{\partial t_i} [t_1, \dots, t_{m+1}]f = [t_1, \dots, t_{i-1}, t_i, t_i, t_{i+1}, \dots, t_{m+1}]f$$

证明.

$$\frac{\partial}{\partial} \square f =$$

□

命题 1.6.5.

证明.

□

例 1.6.6. 求 $H_3(x)$ 满足 $H_3(1) = 1, H'_3(1) = 2, H_3(2) = 2, H'_4(2) = 3$.

解.

i	右	左	(右, 左)		
1	1	1'	(右 = 2)		
2	1	1'	(右 = 1)		
3	2	2'	(右 =)		
4	2	2'			

□

例 1.6.7.

1.7 样条空间

定义 1.7.1. 设 $[a, b]$ 给定, 有分割 $\Delta = \{x_i\}_{i=1}^k$ 满足

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k < x_{k+1} = b$$

将 $[a, b]$ 分为 $k+1$ 个小区间 $I_i := [x_i, x_{i+1}) (i = 0, 1, \cdots, k-1), I_k := [x_k, x_{k+1}]$. 称空间

$$S_m^\mu(\Delta) := \left\{ s(x) \mid s(x)|_{I_i} =: s_i(x) \in \mathbb{P}_m(I_i), i = 0, \cdots, k, D^j s_{i-1}(x_i) = D^j s_i(x_i), i = 1, \cdots, k, j = 0, \cdots, \mu_i \right\}$$

为 m 次 μ 阶光滑样条空间, 其中 $\mu = (\mu_1, \cdots, \mu_k)$, μ_i 在 -1 到 m 之间取值.

引理 1.7.2. 证明 $S_m^\mu(\Delta)$ 为一个有限维线性空间.

证明. 容易看出 $S_m^\mu(\Delta)$ 是一个线性空间, 为了证明它是有限维的, 只需构造如下单线性映射

$$\iota: S_m^\mu(\Delta) \longrightarrow P_m(I_0) \times \cdots \times P_m(I_k), \quad s(x) \longmapsto (s_0(x), \cdots, s_k(x)).$$

□

定义 1.7.3. 由 $D^{\mu_i} s_{i-1}(x_i) = D^{\mu_i} s_i(x_i)$ 产生的代数条件

$$s_i(x) = s_{i-1}(x) + c_i(x)(x - x_i)^{\mu_i+1}$$

其中 $c_i(x)$ 称为 $x = x_i$ 处的光滑余因子.

$$1, x, \cdots, x^m,$$

定理 1.7.4.

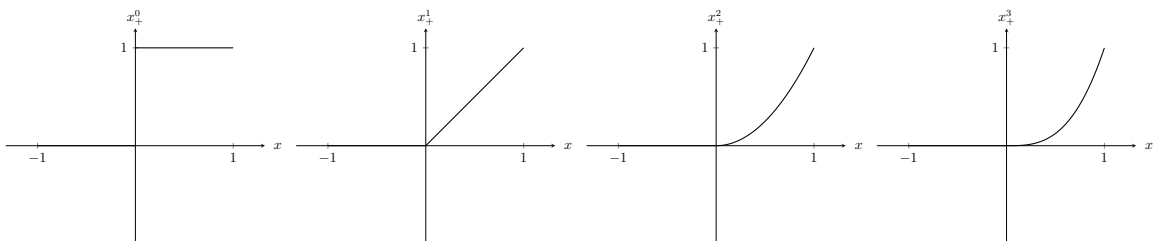
$$\dim S_m^\mu(\Delta) = m + 1 + \sum_{i=1}^k (m - \mu_i)$$

证明. 构造子空间, 然后是直和.

□

定义 1.7.5. 记

$$x_+^0 := \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$



定理 1.7.6. 对任意 $s(x) \in S_m^\mu(\Delta)$, 存在 $s_0(x) \in \mathbb{P}_m$ 以及 $\{\alpha_{ij}\}_{i=1, j=1}^{k, m-\mu_i-1}$

$$s(x) = s_0(x) + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m-\mu_i-1} \alpha_{ij} (x - x_i)_+^{\mu_i+j}$$

推论 1.7.7. $\{\rho_{ij}(x) = (x - x_i)_+^{\mu_i+j}\}_{i=1, j=1}^{k, m-\mu_i-1}$ 是 $S_m^\mu(\Delta)$ 的一组基.

$$\underbrace{1, x, \dots, x^m}_{m+1 \uparrow}, \underbrace{(x - x_1)_+^{\mu_1+1}, \dots, (x - x_1)_+^m}_{m-\mu_1 \uparrow}, \dots, \underbrace{(x - x_k)_+^{\mu_k+1}, \dots, (x - x_k)_+^m}_{m-\mu_k \uparrow}$$

例 1.7.8. 考虑 $m = 2$, $\Delta: a = 0 < 1 < 2 < 3 < 4 = b$, $\mu = (0, 0, 0)$

$$\text{span} \{(x - 0)_+^0, (x - 0)_+^1, (x - 0)_+^2, (x - 1)_+^1, (x - 1)_+^2, (x - 2)_+^1, (x - 2)_+^2, (x - 3)_+^1, (x - 3)_+^2\}$$

推论 1.7.9. 考虑 $\mu = (-1, \dots, -1)$

命题 1.7.10. $f(x) = (x - x_i)_+^r$ 在 $x = x_i$ 处是 C^{r-1} 连续的.

例 1.7.11. $m = 1$, $[a, b] = [0, 5]$, $\Delta = \{1, 2, 3, 4\}$, $\mu = (0, 0, 0, 0)$, 基函数为

$$(x - 0)$$

这个其实就是因为, 在同一段区间上, 几个线性相关, 所以从理论上我们肯定有能力找到几个参数使得叠加起来是 0

就其实这些东西无关是因为起点不一样, 每个人负责提供一小段上的

$$(x - x_i)_+^t \text{ 与 } (x - x_j)_+^t$$

$$\text{当 } x > x_j \text{ 时, } \deg[(x - x_i)_+^t - (x - x_j)_+^t] = t - 1$$

求导, 指对 x 求导, 感觉像求导一样.

$$\text{考虑 } [0, 1](x - 1)_+^1$$

格式很像差商

$$[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+p+1}](x - t)_+^p \text{ 与 } S_m^\mu(\Delta)$$

1.8

Chapter 2

B 样条的性质

2.1 基本性质

定义 2.1.1. 给定重节点序列 $t_1 \leq \dots \leq t_{n+m+1}$, 对于 $i = 1, 2, \dots, n$, 定义第 i 个 B 样条函数

$$B_{i,m,t}(x) = (t_{i+m+1} - t_i)[t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+m+1}](t - x)_+^m$$

命题 2.1.2. 当 $m = 0$ 时,

$$B_{i,t}(x) = (t_{i+1} - t_i)[t_i, t_{i+1}](t - x)_+^0 = [t_{i+1}](t - x)_+^0 - [t_i](t - x)_+^0 = 1, \quad t_i < x \leq t_{i+1}$$

命题 2.1.3. 假设 $t_i < t_{i+1} = \dots = t_{i+m+1}$, 则

$$B_{i,m}(x) = \left(\frac{x - t_i}{t_{i+m+1} - t_i} \right)^m, \quad t_i \leq x < t_{i+m+1}$$

命题 2.1.4. 令 $t_i \leq \dots \leq t_{i+m+1} = x_1 \dots x_1 < \dots < x_r \dots x_r$, 则

$$B_{i,m,t} = \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^l \alpha_{jk}(x_i - x)_+^{m-k+1}, j = 1, \dots, r, k = 0, \dots, m - l_j$$

命题 2.1.5 (局部性).

$$B_{i,m}(x) = \begin{cases} 0 & x \notin (t_i, t_{i+m+1}] \\ > 0 & x \in (t_i, t_{i+m+1}] \end{cases}$$

证明. 当 $x > t_{i+m+1}$ 时, 关于 t 的函数 $(t - x)_+^m$ 在 $[t_i, t_{i+m+1}]$ 上恒为 0, 所以 $B_{i,m}(x) = 0$.

当 $x < t_i$ 时, $(t - x)_+^m$ 在 $[t_i, t_{i+m+1}]$ 上就是 m 次多项式 $(t - x)^m$, 所以 $B_{i,m}(x) = 0$. \square

推论 2.1.6. 对于 $[t_i, t_{i+1}]$, 仅有 $m + 1$ 个非零 B 样条.

命题 2.1.7 (de Boor-Cox 递推公式). 给定重节点序列 $t_1 \leq \dots \leq t_{n+m+1}$, 则

$$B_{i,m}(x) = \frac{x - t_i}{t_{i+m} - t_i} B_{i,m-1}(x) + \frac{t_{i+m+1} - x}{t_{i+m+1} - t_{i+1}} B_{i+1,m-1}(x)$$

证明.

$$\frac{B_{i,m,t}(x)}{t_{i+m+1} - t_i} = [t_i, \dots, t_{i+m+1}](t - x)_+^m$$

$$\begin{aligned}
&= [t_i, \dots, t_{i+m+1}](t-x)(t-x)_+^{m-1} \\
&= [t_i]g(t) \cdot [t_i, \dots, t_{i+m+1}]h(t) + [t_i, t_{i+1}]g(t) \cdot [t_{i+1}, \dots, t_{i+m+1}]h(t) \\
&= (t_i - x)[t_i, \dots, t_{i+m+1}]h(t) + [t_{i+1}, \dots, t_{i+m+1}]h(t) \\
&= (t_i - x) \frac{[t_{i+1}, \dots, t_{i+m+1}]h(t) - [t_1, \dots, t_{i+m}]h(t)}{t_{i+m+1} - t_i} + [t_{i+1}, \dots, t_{i+m+1}]h(t) \\
B_{i,m,t}(x) &= (t_i - x)([t_{i+1}, \dots, t_{i+m+1}]h(t) - [t_1, \dots, t_{i+m}]h(t)) + (t_{i+m+1} - t_i)[t_{i+1}, \dots, t_{i+m+1}]h(t) \\
&= (t_{i+m+1} - t_i)[t_{i+1}, \dots, t_{i+m+1}]h(t) + (x - t_i)[t_i, \dots, t_{i+m}]h(t) \\
&= \frac{t_{i+m+1} - x}{t_{i+m+1} - t_{i+1}} B_{i+1,m-1}(x) + \frac{x - t_i}{t_{i+m} - t_i} B_{i,m-1}(x)
\end{aligned}$$

□

2.2 B 样条的分析性质

命题 2.2.1. 对于 $m \geq 1$,

$$D_+ B_{i,m}(x) = m \left(\frac{B_{i,m-1}(x)}{t_{i+m} - t_i} - \frac{B_{i+1,m-1}(x)}{t_{i+m+1} - t_{i+1}} \right)$$

证明.

$$\begin{aligned} B_{i,m}(x) &= (t_{i+m+1} - t_i)[t_i, \dots, t_{i+m+1}](t-x)_+^m \\ &= [t_{i+1}, \dots, t_{i+m+1}](t-x)_+^m - [t_i, \dots, t_{i+m}](t-x)_+^m \\ D_+ B_{i,m}(x) &= m(-[t_{i+1}, \dots, t_{i+m+1}](t-x)_+^{m-1} + [t_i, \dots, t_{i+m}](t-x)_+^{m-1}) \end{aligned}$$

□

命题 2.2.2. 对于 $m \geq 1$,

$$D_+^r B_{i,m}(x) = \frac{m}{m-r} \left(\frac{x-t_i}{t_{i+m}-t_i} D^r B_{i,m-1}(x) - \frac{t_{i+m+1}-x}{t_{i+m+1}-t_{i+1}} D^r B_{i+1,m-1}(x) \right)$$

证明.

□

命题 2.2.3.

$$\int_{t_i}^{t_{i+m+1}} B_{i,m}(x) dx = \frac{t_{i+m+1} - t_i}{m+1}$$

证明.

$$0 = \int_{t_i}^{t_{i+m+2}} D_+ B_{i,m+1}(x) dx = \frac{m+1}{t_{i+m+1}-t_i} \int_{t_i}^{t_{i+m+1}} B_{i,m}(x) dx - \frac{m+1}{t_{i+m+2}-t_{i+1}} \int_{t_{i+1}}^{t_{i+m+2}} B_{i+1,m}(x) dx$$

记

$$J_i = \frac{m+1}{t_{i+m+1}-t_i} \int_{t_i}^{t_{i+m+1}} B_{i,m}(x) dx$$

则上式等价于 $J_i = J_{i+1}$, 构造 $\{s_i\}$ 满足

$$s_1 = \dots = s_{m+1} = a, \quad s_{m+2+j} = t_{i+j}, \quad j = 0, 1, \dots, m+1$$

则有

$$J_1 = \frac{m+1}{s_{m+2}-s_1} \int_{s_1}^{s_{m+2}} \frac{(s_{m+2}-x)^m}{(s_{m+2}-s_1)^m} dx = 1$$

□

命题 2.2.4. 对 $B_{i,m}(x)$ 考察端点处的连续性, 以 t_i 为例

$$(1) (-1)^{k+m-\alpha_i} D_+^k B_{i,m}(t_i) = 0, k = 0, 1, \dots, m - \alpha_i$$

$$(2) (-1)^{k+m-\alpha_i} D_+^k B_{i,m}(t_i) > 0, k = m - \alpha_i + 1, \dots, m$$

2.3 B 样条的代数性质

考虑节点 $t_1 \leq \cdots \leq t_{n+m+1}$, 考虑 B 样条基函数 $B_{1,m}, \cdots, B_{n,m}$.

$$B_{i,m}(x) = [t_{i+1}, \cdots, t_{i+m+1}](t-x)_+^m - [t_i, \cdots, t_{i+m}](t-x)_+^m$$

令 $P_i^x(t) \in \mathbb{P}_m$ 是关于函数 $f(t) = (t-x)_+^m$ 插值于 t_i, \cdots, t_{i+m} 的插值多项式, 那么 $P_{i+1}^x(t) - P_i^x(t)$ 是以 t_{i+1}, \cdots, t_{i+m} 为零点的多项式, 那么

$$P_{i+1}^x(t) - P_i^x(t) = c(t-t_{i+1}) \cdots (t-t_{i+m})$$

根据差商的定义, 常数 c 其实就是 $B_{i,m}(x)$, 所以我们得到

$$P_{i+1}^x(t) - P_i^x(t) = B_{i,m}(x)(t-t_{i+1}) \cdots (t-t_{i+m}) =: B_{i,m}(x)\rho_{i,m}(t), \quad i = 1, \cdots, n$$

对 i 从 1 到 n 求和得到

$$P_{n+1}^x(t) - P_1^x(t) = \sum_{i=1}^n B_{i,m}(x)\rho_{i,m}(t).$$

分析 $P_{n+1}^x(t)$, 它与 $f(t) = (t-x)_+^m$ 在 $t_{n+1}, \cdots, t_{n+1+m}$ 处一致, 而当 $x < t_{n+1}$ 时, $(t-x)_+^m$ 在 $[t_{n+1}, t_{n+1+m}]$ 就是 $(t-x)^m$, 所以此时 $P_{n+1}^x(t) = (t-x)^m$. 再分析 $P_1^x(t)$, 它与 $f(t) = (t-x)_+^m$ 在 t_1, \cdots, t_{m+1} 处一致, 而当 $x > t_{m+1}$ 时, $(t-x)_+^m$ 在 $[t_1, t_{m+1}]$ 就是 0, 所以此时 $P_1^x(t) = 0$.

定理 2.3.1 (Marsden 恒等式). 任意 $x \in [t_{m+1}, t_{n+1}]$, 任意 $y \in \mathbb{R}$, 有

$$(y-x)^m = \sum_{i=1}^n \rho_{i,m}(y)B_{i,m}(x).$$

推论 2.3.2. 任意 $x \in [t_{m+1}, t_{n+1}]$, 任意 $0 \leq r \leq m$, 有

$$x^r = \sum_{i=1}^n c_{i,r} B_{i,m}(x)$$

推论 2.3.3. 任意 $x \in [t_\mu, t_{\mu+1}]$,

$$x^r = \sum_{i=\mu-m}^{\mu} c_{i,r} B_{i,m}(x)$$

定理 2.3.4 (Curry-Schoenberg). 1

2.4 等距节点 B 样条

定义 2.4.1. 取 $t = [0, 1, \dots, m+1]$, 记 $N^m(x) = B_{0,t,m}(x)$.

定义 2.4.2. 当 $t_{i+1} - t_i = h$ 时, 称 $B_{i,m}(x)$ 为等距节点 B 样条.

命题 2.4.3. 设 $t = (t_i, \dots, t_{i+m+1})$, $t' = (t_i + y, \dots, t_{i+m+1} + y)$, 则 $B_{i,t',m} = B_{i,t,m}(x - y)$.

证明. □

引理 2.4.4.

$$[at_i, \dots, at_{i+m+1}]f(t) = \frac{1}{a^{m+1}}[t_i, \dots, t_{i+m+1}]f(at)$$

推论 2.4.5. 设 $t'' = (at_i + b, \dots, at_{i+m+1} + b)$, 则

$$B_{t'',m}(x) = \frac{1}{a}B_{t,m}\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

命题 2.4.6.

$$N^m(x) = \frac{x}{m}N^{m-1}(x) + \frac{m+1-x}{m}N^{m-1}(x)$$

命题 2.4.7.

$$\int_0^{m+1} N^m(x) dx = 1$$

命题 2.4.8.

$$N^m(x) = N^m(m+1-x)$$

命题 2.4.9.

$$D_+ N^m(x) = N^{m-1}(x) - N^{m-1}(x-1)$$

命题 2.4.10.

$$N^m(x) = \frac{1}{m!} \sum_{i=0}^{m+1} (-1)^{m+1-i} \binom{m+1}{i} (i-x)_+^m$$

命题 2.4.11.

$$\Delta_h^r f(t) = r! h^r [t, t+h, \dots, t+rh] f(t)$$

Chapter 3

B 样条的相关算法

3.1 de Boor 算法

考虑 B 样条函数 $s(x) = \sum_{i=1}^n c_i B_{i,m}(x)$, 求 $s(x), s'(x)$ 在一点 $x = x_0$ 处的函数值. 设 $x_0 \in [t_\mu, t_{\mu+1}]$, 则在这个区间上非零的 B 样条为 $B_{\mu-m,m}$ 到 $B_{\mu,m}$, 则

$$\begin{aligned} s(x) &= \sum_{i=1}^n c_i B_{i,m}(x) = \sum_{i=\mu-m}^{\mu} c_i B_{i,m}(x) \\ &= \sum_{i=\mu-m}^{\mu} c_i \left(\frac{x - t_i}{t_{i+m} - t_i} B_{i,m-1}(x) + \frac{t_{i+m+1} - x}{t_{i+m+1} - t_{i+1}} B_{i+1,m-1}(x) \right) \\ &= \sum_{i=\mu-m+1}^{\mu} \left(\frac{t_{i+m} - x}{t_{i+m} - t_i} c_{i-1} + \frac{x - t_i}{t_{i+m} - t_i} c_i \right) B_{i,m-1}(x) \end{aligned}$$

记 c_i 为 $c_i^{[0]}$, 则我们有如下 de Boor 算法

$$c_i^{[r]} = \frac{t_{i+m+1-r} - x}{t_{i+m+1-r} - t_i} c_{i-1}^{[r-1]} + \frac{x - t_i}{t_{i+m+1-r} - t_i} c_i^{[r-1]}$$

例 3.1.1.

命题 3.1.2.

$$s'(x) = \sum_{i=1}^n c_i B'_{i,m}(x) = \sum_{i=1}^n c_i m() = \sum_{i=2}^n m \left(\frac{c_i - c_{i-1}}{t_{i+m} - t_i} \right) B_{i,m-1}(x)$$

3.2 节点插入算法

问题: 考虑 $t = (t_1, \dots, t_{n+m+1})$ 对应 n 个 B 样条基 $B_{1,t}, \dots, B_{n,t}$, 在区间 $[t_\mu, t_{\mu+1})$ 内插入一个新节点 z , 得到 $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_{n+m+2}) = (t_1, \dots, t_\mu, z, t_{\mu+1}, \dots, t_{n+m+1})$, 对应 $n+1$ 个 B 样条基 $B_{1,\tau}, \dots, B_{n+1,\tau}$, 看 $\{B_{1,t}, \dots, B_{n,t}\}$ 与 $\{B_{1,\tau}, \dots, B_{n+1,\tau}\}$ 之间的关系.

引理 3.2.1. $S_m^t \subset S_m^\tau$.

证明. 任取 $s(x) \in S_m^t$

(1) $z \neq t_\mu$.

(2) $z = t_\mu$. 设 $s(x)$ 在 t_μ 处光滑性为 p_i , 则 $s(x) \in C^{p_i} \subset C^{p_i-1}$.

□

因为 $z \in [t_\mu, t_{\mu+1})$, 有一个简单的观察

$$\begin{cases} B_{i,t} = B_{i,\tau}, & i = 1, \dots, \mu - m - 1 \\ B_{i,t} = B_{i+1,\tau}, & i = \mu + 1, \dots, n \end{cases}$$

引理 3.2.2.

$$[x_0, \dots, x_k]f = \frac{z - x}{x_k - x_0}[x_0, \dots, x_{k-1}, z]f + \frac{x_k - z}{x_k - x_0}[x_1, \dots, x_k, z]f$$

证明.

$$\begin{aligned} [x_0, \dots, x_k]f &= \frac{[x_1, \dots, x_k]f - [x_0, \dots, x_{k-1}]f}{x_k - x_0} \\ &= \frac{[x_1, \dots, x_{k-1}, z]f - [x_0, \dots, x_{k-1}]f + [x_1, \dots, x_k]f - [x_1, \dots, x_{k-1}, z]f}{x_k - x_0} \\ &= \frac{(z - x_0)[x_0, \dots, x_{k-1}, z]f + (x_k - z)[x_1, \dots, x_k, z]f}{x_k - x_0} \end{aligned}$$

□

定理 3.2.3.

$$\begin{cases} B_{\mu-m,t}(x) = B_{\mu-m,\tau}(x) + \frac{t_{\mu+1} - z}{t_{\mu+1} - t_{\mu-m+1}} B_{\mu-m+1,\tau}(x) \\ B_{i,t}(x) = \frac{z - t_i}{t_{i+m} - t_i} B_{i,\tau}(x) + \frac{t_{i+m+1} - z}{t_{i+m+1} - t_{i+1}} B_{i+1,\tau}(x) \\ B_{\mu,t}(x) = \frac{z - t_\mu}{t_{\mu+m} - t_\mu} B_{\mu,\tau}(x) + B_{\mu+1,\tau}(x) \end{cases}$$

$$s(x) = \sum_{i=1}^n c_i B_{i,t}(x) = \sum_{i=1}^{n+1} b_i B_{i,\tau}(x)$$

定理 3.2.4 (Boehm 算法).

$$b_i = \begin{cases} c_i & 1 \leq i \leq \mu - m \\ \frac{t_{i+m} - z}{t_{i+m} - t_i} c_{i-1} + \frac{z - t_i}{t_{i+m} - t_i} c_i & \mu - m + 1 \leq i \leq \mu \\ c_{i-1} & \mu + 1 \leq i \leq n + 1 \end{cases}$$

例 3.2.5.

3.3 开花算法

定理 3.3.1. 对于任一 n 次多项式 $F(x)$, 存在唯一的映射 f 满足

- (1) f 是对称的.
- (2) f 关于每个变量是仿射的.
- (3) $f(u, \dots, u) = F(u)$

此时称 f 是 F 的开花多项式.

3.4 层次 B 样条

Chapter 4

样条插值与逼近

4.1 变差减缩性

定义 4.1.1 (强符号改变). 令 $c = (c_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$, 定义 $S^-(c): c \rightarrow \mathbb{R}$ 表示 c 中元素的符号改变次数.

例 4.1.2.

$$S^-(1, -2) = 1, \quad S^-(1, 0, -1, 3, 2) = 2.$$

引理 4.1.3. 令 $s(x) = \sum_{i=1}^n c_i B_{i,t}(x) = \sum_{i=1}^{n+1} b_i B_{i,\tau}(x)$, 其中 τ 是由 t 插入一个节点得到. 则

$$S^-(b) \leq S^-(c),$$

其中 $b = (b_i)_{i=1}^{n+1}, c = (c_i)_{i=1}^n$.

证明. 由 Boehm 算法

$$b_i = (1 - \alpha_i)c_{i-1} + \alpha_i c_i, \quad i = 1, 2, \dots, n+1, \quad 0 \leq \alpha_i \leq 1, \quad c_0 = c_{n+1} = 0$$

那么 b_i 至少与 c_{i-1} 和 c_i 中一个符号相同, 所以

$$S^-(c) = S^-(b_1, c_1, b_2, c_2, b_3, \dots, b_n, c_n, b_{n+1}) \geq S^-(b).$$

□

推论 4.1.4. 令 $s(x) = \sum_{i=1}^n B_{i,t}(x) = \sum_{i=1}^k b_i B_{i,\tau}(x)$, 其中 τ 是由 t 插入 $k - n$ 个节点得到. 则

$$S^-(b) \leq S^-(c).$$

定理 4.1.5 (VDP). 令 $s(x) = \sum_{i=1}^n c_i B_{i,t}(x), x \in I$, 则 $S^-(s(x)) \leq S^-(c), c = (c_i)_{i=1}^n$

定义 4.1.6. 定义 $r = S^-(f(x))$ 为 $f(x)$ 在 I 上的符号改变数, 如果存在 $r+1$ 个数 $x_1 < x_2 < \dots < x_{r+1} \in I$ 满足

$$S^-(f(x_1), \dots, f(x_{r+1})) = r$$

且这样的 r 是最大的.

证明. 令 $r = S^-(s(x))$ 且 $(x_i)_{i=1}^{r+1}$ 为 $r+1$ 个递增的数满足

$$S^-(s(x_1), \dots, s(x_{r+1})) = r$$

于是可以在 t 中插入节点 $x_i, i = 1, 2, \dots, r+1$ 使得 x_i 的重数达到 m (m 为样条次数), 记新的节点向量为 τ . 对于每个点 x_i 而言, 仅有一个 B 样条基函数 $B_{j_i, \tau}(x)$ 在 x_i 处为 1, 于是 $s(x_i) = b_{j_i}$. 从而

$$S^l(s(x_1), \dots, s(x_{r+1})) = S^-(b_{j_1}, \dots, b_{j_{r+1}}) \leq S^-(b) \leq S^-(c)$$

□

定理 4.1.7 (VDP, 平面样条曲线). 令 $s(x) = \sum_{i=1}^n c_i B_{i,t}(x), x \in I, c_i \in \mathbb{R}^2$, 令 L 是任一条 \mathbb{R}^2 中的直线, 则

$$S \text{ 穿过 } L \text{ 的次数} \leq \text{控制多边形穿过 } L \text{ 的次数}$$

证明. 假设直线为 $L = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid p \cdot n - a = 0\}, n \in \mathbb{R}^2$ 为单位法向量, $a \in \mathbb{R}$ 为常数, 令 $\sigma(x) = s(x) \cdot n - a$ 是一个数值函数, 于是 $S^-(\sigma(x))$ 表示 s 穿过 L 的次数.

由于 $\sum_{i=1}^n B_{i,t}(x) \equiv 1$, 从而 $\sigma(x)$ 可以写为 $\sigma(x) = \sum_{i=1}^n \gamma_i B_{i,\tau}(x)$, 其中 $\gamma_i = c_i \cdot n - a$ 并且 $S^-(\gamma)$ 表示控制多边形穿过 L 的次数, 其中 $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ □

4.2 自然样条与样条插值

问题：给定插值节点 $(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, n$, 定义 m 次样条空间 $S_m^t(\Delta), \Delta = \{x_1, \dots, x_n\}$, 但 $\dim S_m^t(\Delta) = m + 1 + n$. 所以需要添加一些限制.

定义 4.2.1.

为自然样条空间, 其中的样条为自然样条.

Chapter 5

习题

5.1 第九章

1. 请尝试利用差商作为插值多项式的首项系数的定义, 证明

$$[t_1, \dots, t_r]f = [t_1, \dots, t_r, t_{r+1}](t - t_{r+1})f.$$

证明. 设 $r-1$ 次多项式 $p(t)$ 是于 $[t_1, \dots, t_r]$ 对函数 f 进行插值的插值多项式, 断言 r 次多项式 $(t - t_{r+1})p(t)$ 是于 $[t_1, \dots, t_r, t_{r+1}]$ 对函数 $(t - t_{r+1})f$ 进行插值的插值多项式. 我们在 t_1 处进行比较, 假设 t_1 在原始的节点中出现 l 次, 下面讨论 t_{r+1} 是否是 t_1 .

- $t_{r+1} \neq t_1$. 只需比较函数与插值多项式在 t_1 处从 C^0 到 C^{l-1} 阶是否一致

$$C_0 : (t_1 - t_{r+1})f(t_1) = (t_1 - t_{r+1})p(t_1)$$

$$C_1 : f(t_1) + (t_1 - t_{r+1})f'(t_1) = p(t_1) + (t_1 - t_{r+1})p'(t_1)$$

$$C_{l-1} : (l-1)f^{(l-2)}(t_1) + (t_1 - t_{r+1})f^{(l-1)}(t_1) = (l-1)p^{(l-2)}(t_1) + (t_1 - t_{r+1})p^{(l-1)}(t_1)$$

- $t_{r+1} = t_1$. 需要比较函数与插值多项式在 t_1 处从 C^0 到 C^l 阶是否一致

$$C_0 : 0 = 0$$

$$C_1 : f(t_1) = p(t_1)$$

$$C_{l-1} : (l-1)f^{(l-2)}(t_1) = (l-1)p^{(l-2)}(t_1)$$

$$C_l : lf^{(l-1)}(t_1) = lp^{(l-1)}(t_1)$$

□

6. 证明

$$[t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+m}](t - x)_+^{m-1} = (-1)^m [t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+m}](x - t)_+^{m-1}$$

证明.

$$(t - x)_+^{m-1} - (-1)^m (x - t)_+^{m-1} = (t - x)^{m-1}((t - x)_+^0 + (x - t)_+^0) = (t - x)^{m-1}$$

□