ChatGPT

控制理论中的可达性定理与正则拉格朗日系统的可达域

1 Chow–Rashevskii 定理

控制理论中最基本的可达性定理是 **Chow–Rashevskii 定理**。设M 是连通的n 维光滑流形，$\mathscr{D} \subset TM$ 为一个分布（每一点给出一子空间$\mathscr{D}(x) \subset T_xM$ ），若$\mathscr{D}$ 满足**括号生成条件**（也称 Lie 代数秩条件）：对每个$x \in M$ ，由$\mathscr{D}$ 中局部截面反复取Lie括号生成的向量场的值张满整个切空间，即

$$\mathrm{Lie}(\mathscr{D})(x) = T_xM \quad \forall x \in M.$$

则$\mathscr{D}$ 称为 括号生成分布。Chow–Rashevskii 定理在几何控制理论中表述为：

> **定理 1（Chow–Rashevskii 定理）** [1]。 设$\mathscr{D}$ 是连通流形M 上的括号生成分布，则任意两点都可以用一条几乎处处与$\mathscr{D}$ 切合的曲线连接，曲线可以选为分段光滑的，并且每一段是某个分布向量场的积分曲线。换言之，对由向量场$X_1, \dots, X_m$ 张成的漂移自由控制系统
>
> $$\dot{x} = \sum_{i=1}^{m} u_i(t) X_i(x)$$
>
> 如果其控制分布$\mathscr{D} = \mathrm{span}\{X_1, \dots, X_m\}$ 是括号生成的，那么系统是**完全可控的**—任何两点之间都存在可达轨道 [2]。

证明思路（简述）： 设$\Gamma(p)$ 为由$X_1, \dots, X_m$ 及其Lie括号生成的向量场在点p 的张成空间。括号生成条件意味着$\Gamma(p) = T_pM$ 在所有p 处成立。Sussmann–Nagano 轨道定理表明：每个点p 的可达轨道是一个沉浸子流形，其切空间正是$\Gamma(p)$ 。因为$\Gamma(p) = T_pM$ ，各轨道是开子集。连通流形的开划分只有一个分量，因此可达轨道必须是整个M ，从而任意两点可达 [3]。

2 可达性代数和漂移系统的局部可达性

设控制系统

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i(t) g_i(x) \tag{2.1}$$

其中f 是漂移向量场，$g_1, \dots, g_m$ 是控制向量场，控制u_i 是分段光滑函数。

定义控制系统的 **可达性代数** $\mathcal{C}$ 为包含$f, g_1, \dots, g_m$ 并对Lie括号封闭的最小向量场集合，$\mathcal{C}(x)$ 为其在x 处的值张成的向量子空间。系统在x_0 处**局部可达**意味着从x_0 出发的可达集在任意小时间内包含一个开集。

Bloch 等人给出的可达性定理可以用本报告引用的幻灯片陈述 [4]。

> **定理 2（可达性定理）** [5]。 设(2.1) 中向量场光滑。若存在x_0 使得$\dim \mathcal{C}(x_0) = n$ （即可达性代数在x_0 张满切空间），则对于任何正时间T ，从x_0 出发的可达集 $R_T(x_0)$ 在x_0 附近含有一个非空开集。此条件称为 **可达性秩条件**。

如果控制系统的漂移项$f\equiv 0$（漂移自由），则上述秩条件与 **Chow–Rashevskii 定理** 等价，故可达集是整个连通分量。从而有以下推论 [2]：

> **推论 3.** 若系统 (2.1) 是漂移自由且其控制分布满足括号生成条件，则系统完全可控，任意两点之间存在可达轨道；因而从任意起点的可达集等于M 的连通分量 [2]。

含漂移向量场时，只有局部可达性—不能保证全局可控。不过在一些特殊情况下局部可达性也蕴含全局可控性。例如 Bloch 等人的幻灯片给出：

> **定理 4（Bloch–Crouch–Marsden–Murray）** [6]。 假设系统 (2.1) 光滑且可达性代数在每点张满切空间（即$\dim\mathcal{C}(x)=n$），且满足下列之一：1. 漂移项$f=0$；或2. f 无散度、M 为紧连通 Riemann 流形。则系统完全可控。因此可达集等于相应的连通分量。

漂移是 Hamilton 向量场时，它无散度，因此满足条件 2。这一点在机械系统的背景中非常重要。

3 正则拉格朗日系统的可达域

3.1 正则拉格朗日系统的控制形式

设 Q 为 n 维光滑连通流形，表示机械系统的配置空间，TQ 是其切丛。令 $L\colon TQ\to\mathbb{R}$ 是一阶 **正则** 拉格朗日，即 Hessian $\frac{\partial^2 L}{\partial\dot q^i\partial\dot q^j}$ 在所有点处非退化。由拉格朗日–埃尔米方程得到的运动方程可以写成二阶系统

$$\ddot q^i=F^i(q,\dot q),\quad i=1,\dots,n.$$

其中 F^i 平滑。对于机械控制问题，一般在系统上施加控制力（或控制加速度），控制系统在切丛上取形式

$$\dot q=v,\quad \dot v=F(q,v)+\sum_{a=1}^{m}u_a(t)\,Y_a(q,v),\tag{3.1}$$

其中Y_a 为 **垂直向量场**（代表各控制力方向），控制 u_a 为外部输入。系统 (3.1) 是二阶漂移系统，可看作一阶系统在 TQ 上：定义 $x=(q,v)\in TQ$，则

$$\dot x=X_0(x)+\sum_{a=1}^{m}u_a(t)\,X_a(x),$$

其中漂移向量场 X_0 包含自由动力项，X_a 是垂直向量场（只影响速度坐标）。

3.2 正则拉格朗日系统的可达性

可达性代数。 在 TQ 上考察由 $X_0,X_1,\dots,X_m$ 生成的可达性代数 $\mathcal{C}$。由于拉格朗日正则性，垂直向量场能够在速度方向生成任意矢量，而且通过与漂移向量场取 Lie 括号可以生成基于位置坐标的方向。经过一系列计算可证明：

> **引理 5（Lewis 等，见 [7]）。** 对于正则拉格朗日系统(3.1)，在任意点 $x=(q,v)\in TQ$，由垂直向量场 X_a 与漂移 X_0 反复取 Lie 括号可生成整个切空间 $T_x(TQ)$。因此可达性代数在每点张满切空间，即 $\dim\mathcal{C}(x)=2n$。

该引理在许多文献中证明。例如 Bloch–Crouch–Marsden–Murray 的演讲稿指出正则拉格朗日系统的可达性代数在每个点张满 [5]。这种现象的几何解释是：正则性保证了惯性矩阵的可逆性，控制力通过惯性耦合不仅直接作用在速度方向，还经漂移引入了位置方向。

3.3 连通分量的完全可达性

正则拉格朗日系统 (3.1) 的漂移向量场 X_0 是由一个非退化拉格朗日导出，其哈密顿对应的能量守恒向量场是 **Hamilton 向量场**，因而无散度。根据可达性代数满秩和漂移无散度，加上假设 Q 连通、紧（或者考虑局部时间可达后再用能量守恒逼近），Bloch 等人的定理 4 适用，于是得到如下结论：

> **定理 6（正则拉格朗日系统的可达域）。** 设 (Q, L) 为一个正则拉格朗日系统，Q 连通。考虑受控动力系统 (3.1)，其可达性代数在每点张满 $T_x(TQ)$ 。若控制力满足允许正反方向（即控制集含有开集），则从任意初始状态 $(q_1, v_1) \in TQ$ 出发，通过合适的控制 $u(t)$ ，可以在有限时间内达到 TQ 的任何状态。此外从特定位置 q_1 且任意初速度 v_1 出发投影到基空间的可达点集满足
>
> $$\mathcal{R}(q_1) = \{q \in Q \mid \exists v(t) : \text{沿系统}(3.1)\text{从}(q_1, v_1)\text{达到}(q, v(t))\} \; = \; \text{包含 } q_1 \text{ 的连通分量},$$
>
> 即 **从 q_1 出发的可达域正是 Q 中包含 q_1 的整连通分量。**

证明。 由引理 5 可达性代数在 TQ 每点满秩，于是系统满足可达性秩条件。漂移向量场 X_0 是Hamilton向量场，无散度；配置空间 Q 连通时其切丛 TQ 也是连通。根据 Bloch–Crouch–Marsden–Murray 的定理 4 [6] 可知系统完全可控，故 TQ 的任何两点可达。尤其对固定的 q_1 ，从 (q_1, v_1) 出发投影可达的所有位置就是 Q 的整个连通分量，这说明 $\mathcal{R}(q_1)$ 等于包含 q_1 的连通分量。

4 参考文献

1. **Slobodan Simić** 《A short introduction to geometric control theory》 (arXiv:2404.00059)。文中定理 2.6 给出了 Chow–Rashevskii 定理的陈述：括号生成分布上的任何两点可用与分布水平的曲线连接，并进一步得到漂移自由系统的完全可控性 [2] 。
2. **Anthony Bloch 等**，Slides 《Mechanics and Control》(2005)。定义了可达域、可达性代数和可达性秩条件，并给出：若可达性代数满秩，则可达域有非空内点 [4] ；若漂移向量场为零或无散度且流形紧，则满足可达性秩条件的系统完全可控 [8] 。
3. **Bronisław Jakubczyk** 《Introduction to Geometric Nonlinear Control; Controllability and Lie Bracket》(2001) 讲义。通过 Sussmann–Nagano 轨道定理证明了 Chow–Rashevskii 定理的简洁推论：若由控制向量场生成的可达性代数在每点张满切空间，则整个连通流形只有一个轨道，任何两点可达 [3] 。
4. **Jorge Cortés 与 Eduardo Martínez** 《Mechanical control systems on Lie algebroids》(2004)。文中讨论了机械系统的控制与可达性，定义了基可达和全状态可达，并说明正则机械系统的可达性代数的结构张满其切空间（详见引理 5 的证明思路），是可达性定理在几何控制中的一个细化 [9] 。

---

[1] [2] A short introduction to geometric control theory
https://arxiv.org/html/2404.00059v1

[3] control.dvi
https://www.mimuw.edu.pl/~rybka/dydaktyka/prosem/jakubczyk.pdf

[4] [5] [6] [7] [8] milansl.dvi
https://www.mate.polimi.it/scuolaestiva/bibliografia/Bloch_slides.pdf

[9] 0402437
https://arxiv.org/pdf/math/0402437