Типы уравнений

Бирюк Илья Александрович

8 октября 2024 г.

Содержание

1 Проверка

Дано: $x = f(t)$ Пример: $x = t/2$
$D^2x + 2Dx + 1 = 3t$, $D^2x = x''$

1. Задаём I, по x. Так как в примере t сверху, то $I = (-\infty, +\infty)$
2. Подставляем x в уравнение. $0 + 1 + 1 = 3$

2 Просто решение уравнения с нулём на конце

Дано: $D^4x - 7D^3x + 17D^2x - 17Dx + 6 = 0$

1. Перепишем $D^n x = \lambda^n$

   $\lambda^4 - 7\lambda^3 + 17\lambda^2 - 17\lambda + 6 = 0$
2. Находим корни(решаем)
   (a) $\lambda_1 = 1, k = 2$, k — Степень корня
   (b) $\lambda_2 = 2, k = 1$
   (c) $\lambda_1 = 3, k = 1$
3. Перепишем уравнение в L_n виде

   $(D - 1D^0)^2(D - 2D^0)(D - 3D^0)x = 0$
4. Записываем x_i

   $x_1 = (C_0 + C_1 t)e^{1t}$

   $x_2 = C_2 e^{2t}$

   $x_3 = C_3 e^{3t}$
5. Сумируем x_i

3 Проверить является ли эти ϕ базисом

1. Строим вронскиан $(w(t))$

$$\begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \cdots & \varphi_N \\ D\varphi_1 & D\varphi_2 & \cdots & D\varphi_N \\ D^2\varphi_1 & D^2\varphi_2 & \cdots & D^2\varphi_N \\ D^3\varphi_1 & D^3\varphi_2 & \cdots & D^3\varphi_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix}$$

2. Проверяем его на базис, беря любое удобное t (обычно равное 0)

4 Метод вариации произвольных постоянных (Правило Лагранжа)

Дано: $D^2x - 2Dx + x = e^t/(t^2+1)$

1. Решаем λ

   $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$

   $\lambda_1 = 1, k = 2$

2. Выводим X_{oo}

   $X_{oo} = (C_0 + C_1 t)e^t$

   Идеал: $X_{oo} = \sum_{i=1}^{n}(C_0 + C_1 t + \cdots + C_{k_i-1}t^{k_i-1})e^{\lambda_i t}$

3. Составляем систему уравнений

   Идеал:

$$\begin{cases} \psi_0 Du_0 + \cdots + \psi_{n-1}Du_{n-1} = 0, \\ D\psi_0 Du_0 + \cdots + D\psi_{n-1}Du_{n-1} = 0, \\ \dots \\ D^{n-2}\psi_0 Du_0 + \cdots + D^{n-2}\psi_{n-1}Du_{n-1} = 0, \\ D^{n-1}\psi_0 Du_0 + \cdots + D^{n-1}\psi_{n-1}Du_{n-1} = f. \end{cases}$$

   Для того чтобы получить какие-либо ψ Надо взять X_{oo} и подставить некоторые, базисные C

$$\begin{cases} \psi_0 = [C_0 = 1, C_1 = 0] = (1 + 0 * t)e^t = e^t \\ \psi_1 = [C_0 = 0, C_1 = 1] = (0 + 1 * t)e^t = te^t \end{cases}$$

4. Решаем систему

$$\begin{cases} e^t Du_0 + te^t Du_1 = 0, \\ e^t Du_0 + (e^t + te^t)Du_1 = \dfrac{e^t}{t^2+1}, \end{cases}$$

5. Подставляем

$$x_{\text{чн}}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} u_k(t)\psi_k(t)$$

6. Складываем $x = x_{\text{оо}} + x_{\text{чн}}$

Если даны условия коши, то их подставляем в конце.

5 Правило Коши

Дано:

$D^2x + 2Dx + x = e^{2t}$

$x|_{t=1} = 1, Dx|_{t=1} = 5$

1. Решаем λ

   $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$

   $(\lambda + 1)^2 = 0$

   $\lambda = -1, k = 2$

2. Выводим X_{oo}

   $X_{oo} = (C_0 + C_1 t)e^{-t}$

   $D_t X_{oo} = C_1 e^{-t} - (C_0 + C_1 t)e^{-t}$

3. Решаем систему

$$\begin{cases} X_{oo}(1) = 1 \\ DX_{oo}(1) = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{(C_0 + C_1)}{e} = 1 \\ \dfrac{C_0}{e} = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = -6e \\ C_0 = 5e \end{cases}$$

4. Находим φ

   Идеал:

   $\varphi(t) = (-5e + 6et)e^{-t}$

5. Решаем $x_{\text{чн}} = \int_0^t (-5e + 6e(t - \tau))e^{-(t-\tau)} d\tau$

6. $x = x_{oo} + x_{\text{чн}}$

6 Правило Эйлера

te^4 - квазиполином

$D^2 x - 2Dx + x = 6te^t$

1. Находим контрольные числа(перед т). И м для них(порядок(степень перед е) многочлена) если косинус, то левее.

   $\gamma_1 = 1, m_1 = 1$

   При синусах и косинусах

   $(\sin t + t \cos t)e^{0t} \to \gamma = (\gamma \pm \beta i)$

   $1e^{-t} \cos 2t \to \gamma = (\gamma \pm \beta i) = -1 \pm 2i, m = 0$ (sin тоже)

2. находим λ и $X_{oo}(t)$

   $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$

   $\lambda = 1, k = 2$

   $X_{oo_i}(t) = (C_0 + C_1 t)e^t$

3. Для каждого контрольного числа смотрим совпадает ли оно с лямбдой, если да r = k, иначе r = 0(ни с одним)

   да

4. $X_{\text{чн}_i}(t) = t^r$(многочлен m степени)$e^{\gamma i t}$

   $X_{\text{чн}_i}(t) = t^2(C_0 + C_1 t)e^t$

   Для комплексных

   $\gamma = -1 \pm 2i \to X_{cn} = t^r(C_0 \sin 2t + C_1 \cos 2t)e^{-t}$

5. $X_{\text{чн}}(t) = \sum X_{cn_i}(t)$ - **общий вид** (содержит константы)

   $X_{\text{чн}_i}(t) = t^2(C_0 + C_1 t)e^t$

6. Находим производные уравнения $(DX_{cn}, D^2 Xxn \dots)$ и решаем как многочлен.

   $DX_{\text{чн}} = 2C_0 te^t + C_0 t^2 e^t + 3C_1 t^2 e^t + C_1 t^3 e^t$

   $D^2 X_{\text{чн}} = 2C_0 e^t + 4C_0 te^t + C_0 t^2 e^t + 6C_1 te^t + 3C_1 t^2 e^t + 3C_1 t^2 e^t + C_1 t^3 e^t$

   $2C_0 e^t + 4C_0 te^t + C_0 t^2 e^t + 6C_1 te^t + 3C_1 t^2 e^t + 3C_1 t^2 e^t + C_1 t^3 e^t - (2C_0 te^t + C_0 t^2 e^t + 3C_1 t^2 e^t + C_1 t^3 e^t) + C_0 t^2 e^t + C_1 t^3 e^t = 6te^t$

   $C_1 - 2C_1 + C_1 = 0$

   $C_0 + 3C_1 + 3C_1 - 2C_0 - 6C_1 + C_0 = 0$

   $2C_0 + 2C_0 + 6C_1 + 3C_1 - 4C_0 = 6$

   $C_1 = 1, C_0 = 0$

7. подставляем C_i в $X_{\text{чн}}$

   $X_{\text{чн}} = t^3 e^t$

8. сумируем $x = x_{oo} + x_{\text{чн}}$