# Типы уравнений

Бирюк Илья Александрович

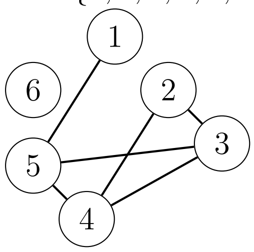
8 октября 2024 г.

# Содержание

# 1 Определение простого графа

Пусть $V \neq \varnothing$ - конечное множество и $V^{(2)}$ - множество всех двухэлементных подмножеств $V$. ($V^{(2)} = \{U \subseteq V || U| = 2\}$). Упорядоченная пара $(V, E)$, где $E \subseteq V^{(2)}$ называется **простым графом**, вершинами которого являются элементы $V$, а рёбрами - элементы $E$.
**Пример:**

$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, E = \{\{1, 5\}, \{2, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{4, 5\}, \{3, 5\}\}$



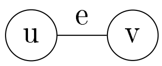

Число $|V|$ называют **порядком графа**, а число $|E|$ - **размером графа**.

$$G = (V, E), V = V(G), E = E(G)$$

Если порядок графа равен n, а размер равен m, то говорят, что это **(n,m)-граф**.

Две веришины $u$ и $v$ в графе **смежные**, если $\{u, v\} \in E(G)$. Два ребра $e_1, e_2$ **смежные**, если $e_1 \cap e_2 \neq \varnothing$

Вершина $v$ и ребро $e$ **инцедентны** если $v \in e$




Примечание: $\{u, v\} = uv$

**Окружением верешины** $u$ в графе $G$ называют множество: $N_G(u) = \{v \in V(G) | uv \in E(G)\}$

**Определение.** Число $deg_G v = |N_G(v)|$ - мощность окружения вершины $v$ - называют **степенью вершины** в $G$

Пусть $v \in V(G)$:

1. $deg_G v = 0 \leftrightarrow v$ - **изолированная вершина**
2. $deg_G v = |V(G)| - 1 \leftrightarrow v$ - **доминирующая вершина**
3. $deg_G v = 1 \leftrightarrow v$ - **висячая вершина**

**Определение.** Граф $G$ называют **регулярным**, если он имеет одинаковые степени вершин.

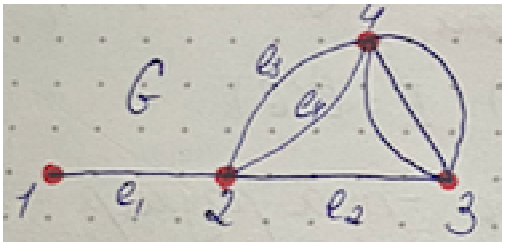
**Определение.** Граф $G$ называют **K-регулярным**, если $\forall v \in V(G), deg(v) = k$.

**Определение.** $K_n$ - **полный граф**(граф со всеми возможными вершинами)

# 2 Некоторые обобщения графов

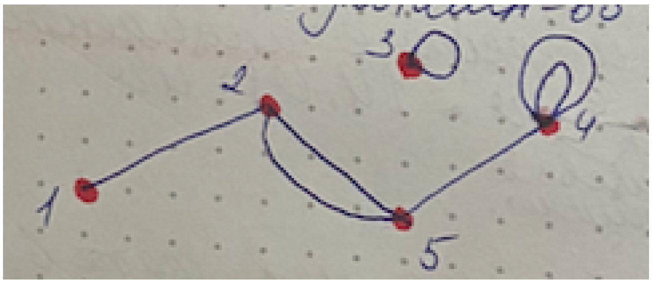
1. Мультиграф

   **Определение. Мультиграфом** называют упорядоченную пару $(V, E)$, где E - конечное мультимножество на множестве $V^{(2)}$ ($V$ - конечное непустое множество)




2. Псевдограф

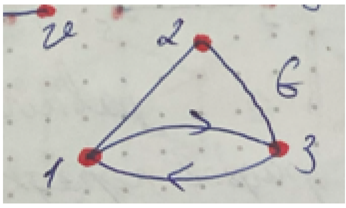
   **Определение. Псевдографом** называют упорядоченную пару $(V, E)$, где $E$ - конечное мультимножество на $V^{(2)} \cup V$

3. Орграф(Ориентированный граф)

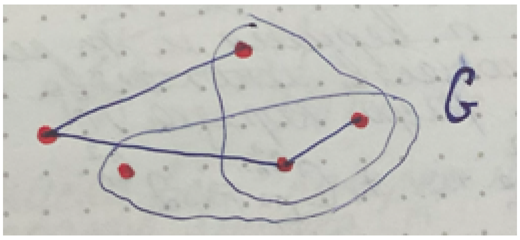
   **Определение.** $E \subseteq V \times V = \{\{u, v\} | u \in V, v \in V\}$ - **Орграф**

   $uv$ называется *дугой* (вместо ребра)

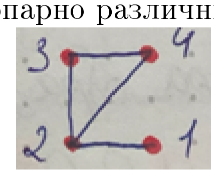
4. Гиперграф

   **Определение. Гиперграфом** называют граф, где $E \subseteq 2^V, 2^V = \{U | U \subseteq V\}$

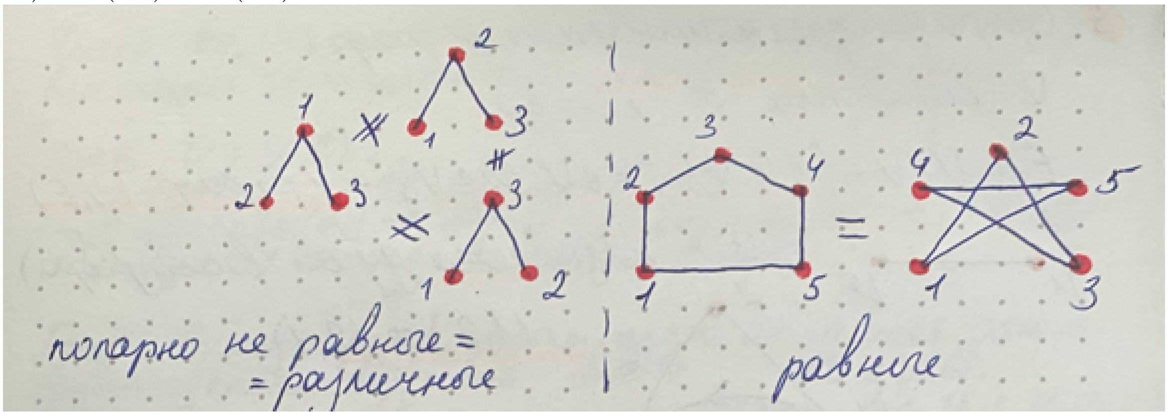
   
   

# 3 Помеченные графы. Изоморфизм графов

**Определение.** Граф назовут **помеченным**, если его вершинам принадлежат некоторые попарно различные метки.



Пусть $G_1, G_2$ - помеченные графы порядка n. Графы $G_1, G_2$ **равны**, если $V(G_1) = V(G_2) \wedge E(G_1) = E(G_2)$



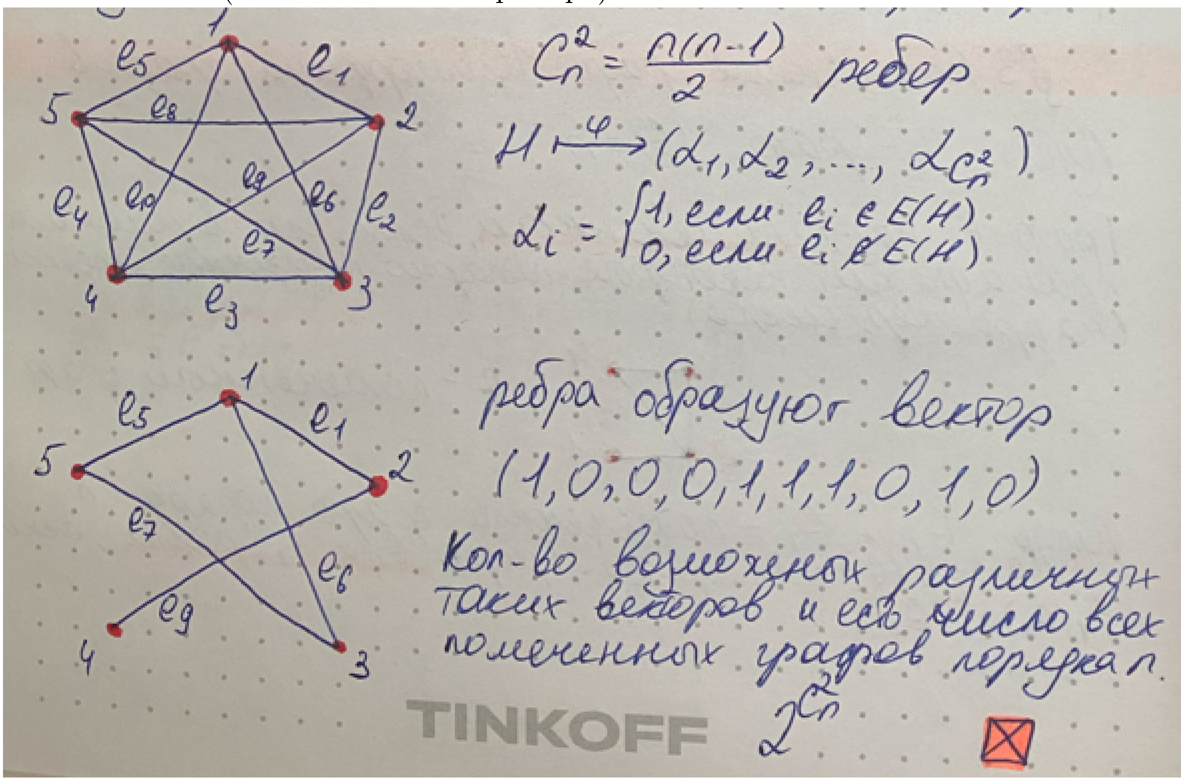

**Теорема.** *Число всех помеченных графов порядка $n \geqslant 1$ обозначается $l_n$ и равно $2^{C_n^2} = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$*

*Доказательство.* Пусть у графа n вершин и m рёбер. $0 \leqslant m \leqslant C_n^2$. Количество подмножеств множества всех возможных рёбер графа порядка n

$$C^0_{C_n^2} + C^1_{C_n^2} + C^2_{C_n^2} + \cdots + C^{C_n^2}_{C_n^2}$$

■

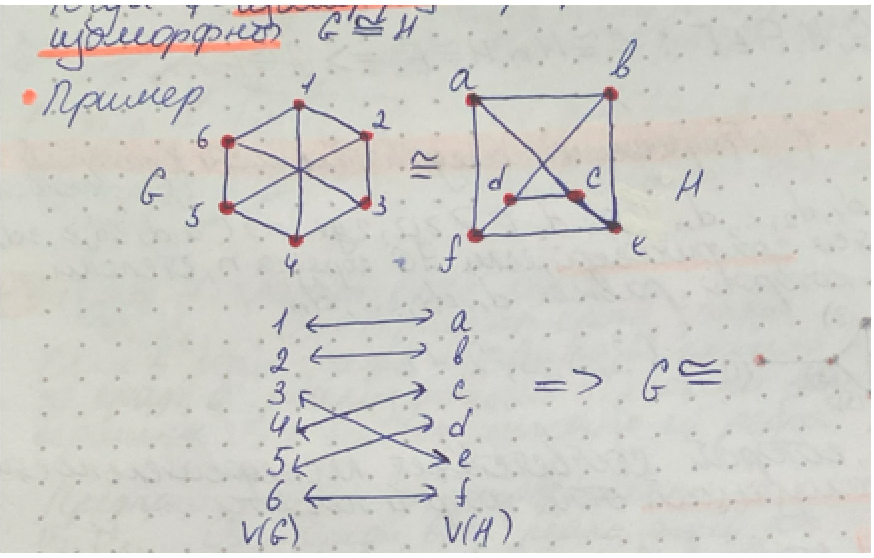
*Доказательство.* ($n = 5$ в качестве примера)



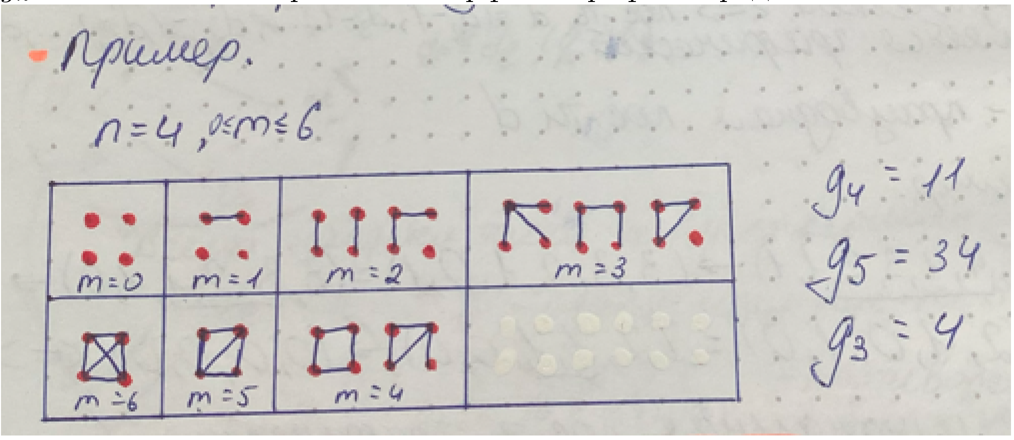

■

## Изоморфизм графов

Пусть G и H - графы и $\phi : V(G) \to V(H)$ - биекция. Тогда $\phi$ - **изоморфизм** графа G на H, а G и H **изоморфны**. $G \cong H$



$g_n$ - число всех попарно неизоморфных графов порядка n.




**Теорема.** ***(Лойа)***

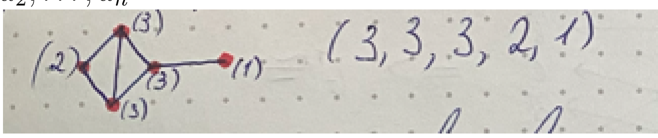
$$g_n \geqslant [\frac{2^{C_n^2}}{n!}] или g_n \sim_{n\to\infty} \frac{2^{C_n^2}}{n!}$$

**Свойства** изоморфизма:

1. $G \cong G$ для конечных графов
2. $\forall G, H : G \cong H \leftrightarrow H \cong G$
3. $\forall G, H, F : G \cong H \cap H \cong F \to G \cong F$

# 4 Графические последовательности. Критерий графичности

**Определение.** Последовательность $d_1, d_2, \ldots, d_n$, где $d_i \in Z \geqslant 0$, где $n \geqslant 1$ и $d_1 \geqslant d_2 \geqslant \ldots \geqslant d_n$, называется **графической**, если $\exists G$ порядка n, степени вершин которого равны $d_1, d_2, \ldots, d_n$




**Определение.** Граф, который соответствует последовательности называют **реализацией** этой графической последовательности.

**Теорема.** ***(Гавела-Хакими), критерий графичности***

*Последовательность* $(D = d_1, d_2, \ldots, d_n)$*, где* $n \geqslant 2$ *и* $d_1 \geqslant d_2 \geqslant \ldots \geqslant d_n$*, является графической тогда и только тогда, когда последовательность* $(D' = d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{d_1+1}, d_{d_1+2}, \ldots, d_n)$ *является графической.*

# 5 Name

**Теорема.** *Пусть* $G$ *– это* $(n, m)$ *граф,* $k$ *– число компонент связности Тогда*

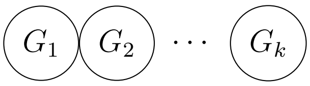
$$n - k \leqslant m \leqslant \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}, .$$

*Доказательство.* $m \leqslant n - k$ - Доказывается по мат индукции

$m \leqslant \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}$ -

Берём $k \geqslant 2$

1. рисуем $k$ полных графов




2. Вынимаем из $G_{k-1}$ точку и перемещаем её в $G_k$ (сохраняя полноту). Возьмём, что $\forall n \leq k, V(G_k) \geqslant V(G_n)$. Тогда количество рёбер изменится на $V(G_k) - (V(G_n) - 1) > 0$.

3. Повторяем так, пока все кроме последнего подграфа не будут тривиальными (то есть пока они не будут иметь одну вершину).

4. Самый экстремальный случай, изолированные вершины и $K_{n-k+1}$, тогда число рёбер

$$C^2_{n-k+1} = \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}.$$

■

**Теорема.** *Пусть* $G$ *связный граф и* $e \in E(G)$*.*

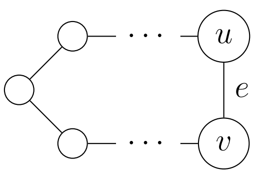
1. *Если  принадлежит некоторому циклу, то граф* $G - e$ *связен*

2. *Если  не принадлежит никакому циклу, то граф* $G - e$ *содержит ровно* 2 *компоненты связности*

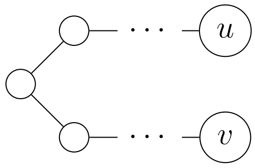
*Доказательство.* Возьмём $e = uv, e \in E(G)$

1. Если  принадлежит некоторому циклу, то граф $G - e$ связен

   (a) Нарисуем цикл



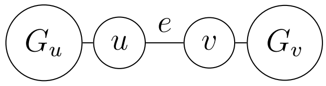
(b) Удалим $e$



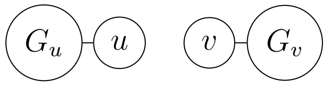

Как можно заметить, не появилось ни одной компоненты связности.

2. Если  не принадлежит никакому циклу, то граф $G-e$ содержит ровно 2 компоненты связности

   (a) Учитывая условия выше, мы можем разделить граф на 2 части, имеющие маршрут к $u$ без $v$ и наоборот

   (b) Удаляем ребро $e$, и видим, что появилось 2 компоненты связности

■

# 6 Метрические характеристики графов

Для параграфа: G - связен

**Определение.** Расстояние $d(u,v)$ между вершинами $u \neq v$ графа G – *длинна кратчайшей простой цепи*, если $u=v$, то $d(u,v)=0$

**Свойства:**

1. **Свойство неотрицательности.**

$$d(u,v) \geqslant 0 \text{ и } d(u,v)=0 \Leftrightarrow u=v,\ \forall u,v \in V(G).$$

2. **Свойство симметрии.**

$$d(u,v)=d(v,u),\ \forall u,v \in V(G).$$

3. **Свойство треугольников.**

$$d(u,v) \leqslant d(u,w)+d(w,u),\ \forall u,v \in V(G).$$

**Определение.** *Эксцентриситетом вершины* называется величина

$$e(v)=\max d(v,u), v \in V(G),$$

то есть максимальное расстояние от вершины до другой какой-либо вершины графа).

**Определение.** *Радиусом графа* называется величина

$$r(G)=\min e(v),\ v \in V(G).$$

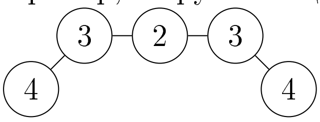
**Определение.** *Диаметром графа* называется величина

$$d(G)=\max e(v),\ v \in V(G).$$

**Определение.** *Вершина в графа G называется центральной, если* $e(v) = r(G)$ *и* ***периферической****, если* $e(v) = d(G)$.

**Определение.** Центр графа, множество всех его центральных вершин, перефирия, перефирийных.

Пример, в круге Эксцентриситет вершины:



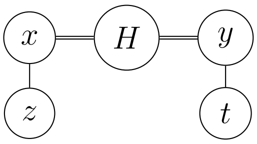

$r(P_5) = 2, d(P_5) = 4$

**Теорема.** *Для любого графа H существует граф G, центр которого порождает H.*

*Доказательство.*

1. Возьмём граф $H$


2. Добавим к нему вершины $x, y, z, t$, $x$ и $y$ Соедениены со всеми вершинами $H$




Как видно $\forall v \in V(H), e(v) = r(G) = 2$

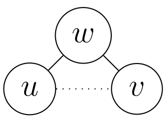
■

**Теорема.** *Для любого связного графа ж верно:* $r(G) \leqslant d(G) \leqslant 2r(G)$

*Доказательство.* .

1. $r(G) \leqslant d(G)$ - очевидно

2. $diam(G) \leqslant 2r(G)$. Берём две переферичиские$(u, v)$ и одну центральную$(w)$. Тогда данное равенство получается через равенство треугольника:




По свойству треугольников:

$$d(u, v) \leqslant d(u, w) + d(w, v) \to d(G) \leqslant 2r(G)$$

■