Типы уравнений

Бирюк Илья Александрович

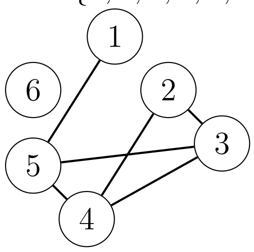
7 октября 2024 г.

Содержание

1 Определение простого графа

Пусть $V \neq \varnothing$ - конечное множество и $V^{(2)}$ - множество всех двухэлементных подмножеств V. ($V^{(2)} = \{U \subseteq V||U| = 2\}$). Упорядоченная пара (V, E), где $E \subseteq V^{(2)}$ называется **простым графом**, вершинами которого являются элементы V, а рёбрами - элементы E.
Пример:

$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, E = \{\{1, 5\}, \{2, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{4, 5\}, \{3, 5\}\}$



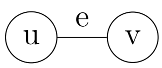
Число $|V|$ называют **порядком графа**, а число $|E|$ - **размером графа**.

$$G = (V, E), V = V(G), E = E(G)$$

Если порядок графа равен n, а размер равен m, то говорят, что это **(n,m)-граф**.

Две верищины u и v в графе **смежные**, если $\{u, v\} \in E(G)$. Два ребра e_1, e_2 **смежные**, если $e_1 \cap e_2 \neq \varnothing$

Вершина v и ребро e **инцедентны** если $v \in e$



Примечание: $\{u, v\} = uv$

Окружением верншины u в графе G называют множество: $N_G(u) = \{v \in V(G)|uv \in E(G)\}$

Определение. Число $deg_G v = |N_G(v)|$ - мощность окружения вершины v - называют **степенью вершины** в G

Пусть $v \in V(G)$:

1. $deg_G v = 0 \leftrightarrow v$ - **изолированная вершина**
2. $deg_G v = |V(G)| - 1 \leftrightarrow v$ - **доминирующая вершина**
3. $deg_G v = 1 \leftrightarrow v$ - **висячая вершина**

Определение. Граф G называют **регулярным**, если он имеет одинаковые степени вершин.

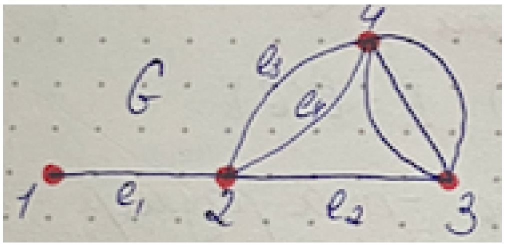
Определение. Граф G называют **K-регулярным**, если $\forall v \in V(G), deg(v) = k$.

Определение. K_n - **полный граф**(граф со всеми возможными вершинами)

2 Некоторые обобщения графов

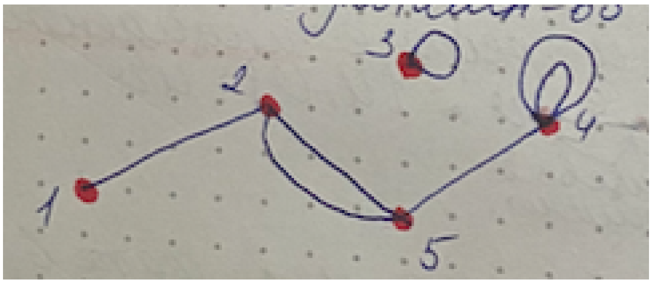
1. Мультиграф

   Определение. Мультиграфом называют упорядоченную пару (V, E), где Е - конечное мультимножество на множестве $V^{(2)}$ (V - конечное непустое множество)



2. Псевдограф

   Определение. Псевдографом называют упорядоченную пару (V, E), где E - конечное мультимножество на $V^{(2)} \cup V$



3 Name

Теорема. *Пусть G – это (n, m) граф, k – число компонент связности Тогда*

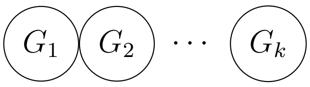
$$n - k \leqslant m \leqslant \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}, .$$

Доказательство. $m \leqslant n - k$ - Доказывается по мат индукции

$m \leqslant \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}$ -

Берём $k \geqslant 2$

1. рисуем k полных графов



2. Вынимаем из G_{k-1} точку и перемещаем её в G_k (сохраняя полноту). Возьмём, что $\forall n \leq k, V(G_k) \geqslant V(G_n)$. Тогда количество рёбер изменится на $V(G_k) - (V(G_n) - 1) > 0$.

3. Повторяем так, пока все кроме последнего подграфа не будут тривиальными (то есть пока они не будут иметь одну вершину).

4. Самый экстремальный случай, изолированные вершины и K_{n-k+1}, тогда число рёбер

$$C^2_{n-k+1} = \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}.$$

■

Теорема. *Пусть G связный граф и $e \in E(G)$.*

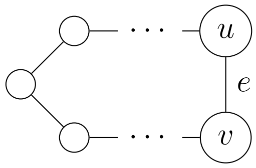
1. *Если принадлежит некоторому циклу, то граф $G - e$ связен*

2. *Если не принадлежит никакому циклу, то граф $G - e$ содержит ровно 2 компоненты связности*

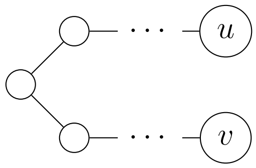
Доказательство. Возьмём $e = uv, e \in E(G)$

1. Если принадлежит некоторому циклу, то граф $G - e$ связен

   (a) Нарисуем цикл

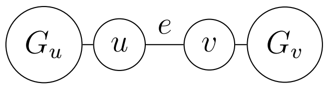
   (b) Удалим e

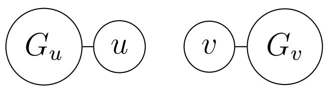
   Как можно заметить, не появилось ни одной компоненты связности.

2. Если не принадлежит никакому циклу, то граф $G - e$ содержит ровно 2 компоненты связности

   (a) Учитывая условия выше, мы можем разделить граф на 2 части, имеющие маршрут к u без v и наоборот

   (b) Удаляем ребро e, и видим, что появилось 2 компоненты связности

■

4 Метрические характеристики графов

Для параграфа: G - связен

Определение. Расстояние $d(u, v)$ между вершинами $u \neq v$ графа G – *длинна кратчайшей простой цепи*, если $u = v$, то $d(u, v) = 0$

Свойства:

1. **Свойство неотрицательности.**

$$d(u, v) \geqslant 0 \text{ и } d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v,\ \forall u, v \in V(G).$$

2. **Свойство симметрии.**

$$d(u, v) = d(v, u),\ \forall u, v \in V(G).$$

3. **Свойство треугольников.**

$$d(u, v) \leqslant d(u, w) + d(w, u),\ \forall u, v \in V(G).$$

Определение. *Эксцентриситетом вершины* называется величина

$$e(v) = \max d(v, u), v \in V(G),$$

то есть максимальное расстояние от вершины до другой какой-либо вершины графа).

Определение. *Радиусом графа* называется величина

$$r(G) = \min e(v),\ v \in V(G).$$

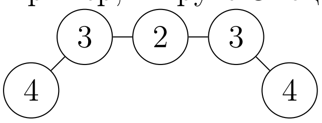
Определение. *Диаметром графа* называется величина

$$d(G) = \max e(v),\ v \in V(G).$$

Определение. *Вершина в графа G называется центральной, если $e(v) = r(G)$ и* ***периферической****, если $e(v) = d(G)$.*

Определение. Центр графа, множество всех его центральных вершин, перефирия, перефирийных.

Пример, в круге Эксцентриситет вершины:



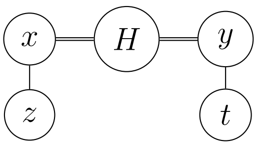
$r(P_5) = 2, d(P_5) = 4$

Теорема. *Для любого графа H существует граф G, центр которого порождает H.*

Доказательство.

1. Возьмём граф H

2. Добавим к нему вершины x, y, z, t, x и y Соедениены со всеми вершинами H



Как видно $\forall v \in V(H), e(v) = r(G) = 2$

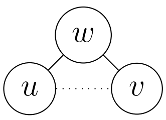
■

Теорема. *Для любого связного графа ж верно: $r(G) \leqslant d(G) \leqslant 2r(G)$*

Доказательство. .

1. $r(G) \leqslant d(G)$ - очевидно

2. $diam(G) \leqslant 2r(G)$. Берём две переферичиские(u, v) и одну центральную(w). Тогда данное равенство получается через равенство треугольника:



По свойству треугольников:

$$d(u, v) \leqslant d(u, w) + d(w, v) \to d(G) \leqslant 2r(G)$$

■