Типы уравнений

Бирюк Илья Александрович

7 октября 2024 г.

Содержание

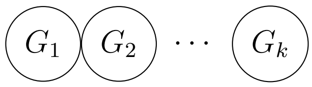
1 Name

Теорема. *Пусть G – это (n, m) граф, k – число компонент связности Тогда*

$$n - k \leqslant m \leqslant \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}, .$$

Доказательство. $m \leqslant n - k$ - Доказывается по мат индукции
$m \leqslant \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}$ -
Берём $k \geqslant 2$

1. рисуем k полных графов

2. Вынимаем из G_{k-1} точку и перемещаем её в G_k (сохраняя полноту). Возьмём, что $\forall n \leq k, V(G_k) \geqslant V(G_n)$. Тогда количество рёбер изменится на $V(G_k) - (V(G_n) - 1) > 0$.

3. Повторяем так, пока все кроме последнего подграфа не будут тривиальными (то есть пока они не будут иметь одну вершину).

4. Самый экстремальный случай, изолированные вершины и K_{n-k+1}, тогда число рёбер

$$C^2_{n-k+1} = \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}.$$

∎

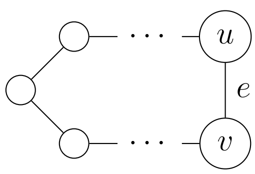
Теорема. *Пусть G связный граф и $e \in E(G)$.*

1. *Если принадлежит некоторому циклу, то граф $G - e$ связен*
2. *Если не принадлежит никакому циклу, то граф $G - e$ содержит ровно 2 компоненты связности*

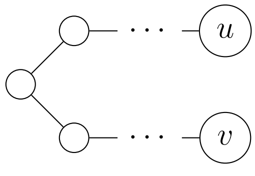
Доказательство. Возьмём $e = uv, e \in E(G)$

1. Если принадлежит некоторому циклу, то граф $G - e$ связен

   (a) Нарисуем цикл

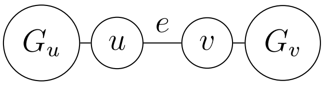
   (b) Удалим e

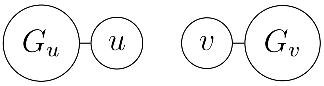
   Как можно заметить, не появилось ни одной компоненты связности.

2. Если не принадлежит никакому циклу, то граф $G-e$ содержит ровно 2 компоненты связности

    (a) Учитывая условия выше, мы можем разделить граф на 2 части, имеющие маршрут к u без v и наоборот

    (b) Удаляем ребро e, и видим, что появилось 2 компоненты связности

■

2 Метрические характеристики графов

Для параграфа: G - связен

Определение. Расстояние $d(u,v)$ между вершинами $u \neq v$ графа G – *длинна кратчайшей простой цепи*, если $u = v$, то $d(u,v) = 0$

Свойства:

1. **Свойство неотрицательности.**

$$d(u,v) \geqslant 0 \text{ и } d(u,v) = 0 \Leftrightarrow u = v,\ \forall u, v \in V(G).$$

2. **Свойство симметрии.**

$$d(u,v) = d(v,u),\ \forall u, v \in V(G).$$

3. **Свойство треугольников.**

$$d(u,v) \leqslant d(u,w) + d(w,u),\ \forall u, v \in V(G).$$

Определение. *Эксцентриситетом вершины* называется величина

$$e(v) = \max d(v,u), v \in V(G),$$

то есть максимальное расстояние от вершины до другой какой-либо вершины графа).

Определение. *Радиусом графа* называется величина

$$r(G) = \min e(v),\ v \in V(G).$$

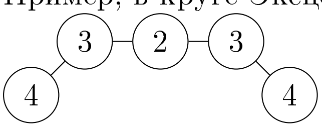
Определение. *Диаметром графа* называется величина

$$d(G) = \max e(v),\ v \in V(G).$$

Определение. *Вершина в графа G называется центральной, если $e(v) = r(G)$ и* ***периферической****, если $e(v) = d(G)$.*

Определение. Центр графа, множество всех его центральных вершин, перефирия, перефирийных.

Пример, в круге Эксцентриситет вершины:

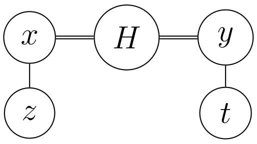


$r(P_5) = 2, d(P_5) = 4$

Теорема. *Для любого графа H существует граф G, центр которого порождает H.*

Доказательство. 1. Возьмём граф H

2. Добавим к нему вершины x, y, z, t, x и y Соедениены со всеми вершинами H



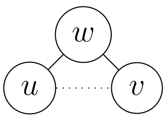
Как видно $\forall v \in V(H), e(v) = r(G) = 2$

■

Теорема. *Для любого связного графа ж верно: $r(G) \leqslant diam(G) \leqslant 2r(G)$*

Доказательство. 1. $r(G) \leqslant diam(G)$ - очевидно

2. $diam(G) \leqslant 2r(G)$. Берём две переферичиские(u, v) и одну центральную(w). Тогда данное равенство получается через равенство треугольника:



■