Aufgabe 11.2

a)

Wir versuchen, den erwarteten Nutzen für jeden Spieler zu maximieren. Wir nehmen dabei an, dass $b_i \leq 2$, da es nicht sinnvoll ist, ein Gebot abzugeben, welches größer ist als der mögliche Wert des Gegenstandes für einen Spieler.

Wir zeigen, dass folgende Strategie für jeden Spieler ein symmetrisches Gleichgewicht ist:

$$b_i(v_i) = \frac{v_i}{2}, \quad i = 1, 2, 3$$

Wir betrachten ohne Einschränkung den Nutzen für Spieler I und bezeichnen mit b^* das Gebot, welches abgesehen vom Gebot von Spieler I, das höchste Gebot sei (unter der Annahme, dass diese auch diese Strategie spielen - ihre Gebote seien daher b_2^* und b_3^*):

$$b^* = \frac{v^*}{2} = max\{b_2^*, b_3^*\} = max\{\frac{v_2}{2}, \frac{v_3}{2}\}$$

Damit ist der Nutzen für Spieler 1:

$$\begin{aligned} u_1(b_1, b^*, v_1) &= u_1(b_1, \frac{v^*}{2}, v_1) \\ &= P(b_1 > \frac{v^*}{2}) \cdot (v_1 - b_1) \\ &= P(2b_1 > v^*) \cdot (v_1 - b_1) \\ &= min\{2b_1, 1\} \cdot (v_1 - b_1) \end{aligned}$$

Diese Funktion ist quadratisch auf dem Intervall $b_1 \in [0, \frac{1}{2}]$ (erreicht das Maximum bei $b_1 = \frac{v_1}{2}$), und linear mit negativer Steigung, wenn $b_1 > \frac{1}{2}$.

Fazit: Wenn die beiden anderen Spieler die Strategie $b_i = \frac{v_i}{2}$ spielen, so ist für Spieler I $b_1 = \frac{v_1}{2}$ die beste Antwort. Damit ist $b^* = b_i(v_i) = \frac{v_i}{2}$ ein symmetrisches Gleichgewicht.