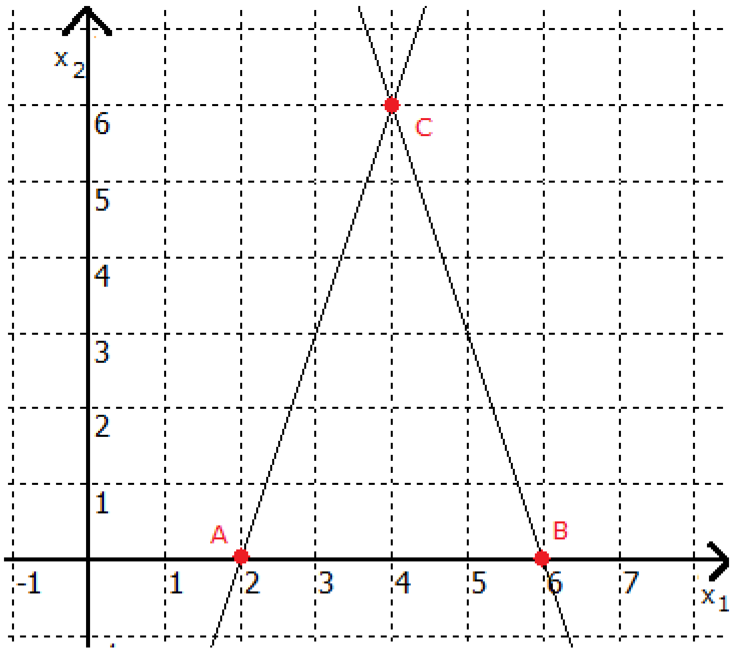
Exercise 12.1 (Positiv-affine Transformationen)

Zu zeigen: Ein gleichschenkliges Dreieick (im $\mathbb{R}^2$), dessen Basis in der x_1-Achse liegt, wird durch eine komponentenweise positiv-affine Transformation in ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Basis auf einer Parallelen zur x_1-Achse liegt, überführt.

Beweis: Wir haben ein gleichschenkliges Dreieck gegeben, dessen Basis in der x_1-Achse liegt. Daher wissen wir folgendes über die drei Eckpunkte A, B und C:

- $A = (a_1, a_2) = (a_1, 0)$
- $B = (b_1, b_2) = (a_1 + c, 0)$
- $C = (c_1, c_2) = (a_1 + \frac{c}{2}, c_2)$



Sei $\alpha x + \beta$ eine komponentenweise positiv-affine Transformation von $x \in \mathbb{R}^2$, d.h. $\alpha > 0$ und $\beta \in \mathbb{R}^2$. Wir wenden diese Transformation auf A, B und C an:

- $A' = \alpha A + \beta = (\alpha_1 a_1 + \beta_1, 0 + \beta_2)$
- $B' = \alpha B + \beta = (\alpha_1 \cdot (a_1 + c) + \beta_1, 0 + \beta_2)$

- $C' = \alpha C + \beta = (\alpha_1 \cdot (a_1 + \frac{c}{2}) + \beta_1, \alpha_2 c_2 + \beta_2)$

Wir stellen fest:

- A' und B' haben beide den x_2-Wert $\beta_2 \Rightarrow A'$ und B' liegen auf der Parallele zur x_1-Achse durch $(0, \beta_2)$. $\overline{A'B'}$ ist die Basis des gleichschenkligen Dreiecks.
- Die Distanz zwischen A' und B' beträgt $\alpha_1 \cdot (a_1 + c) + \beta_1 - (\alpha_1 a_1 + \beta_1) = \alpha_1 \cdot c$. Die Differenz der x_1-Werte von A und C beträgt $\alpha_1 \cdot (a_1 + \frac{c}{2}) + \beta_1 - (\alpha_1 a_1 + \beta_1) = \alpha_1 \cdot \frac{c}{2}$. Das ist genau die Hälfte der Differenz der x_1-Werte von A' und $B' \Rightarrow C'$ liegt auf der Mittelsenkrechten zu $\overline{A'B'}$.

Da $A'B'$ parallel zur x_1-Achse ist und C' auf der Mittelsenkrechten zu $A'B'$ liegt, ist $A'B'C'$ ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Basis auf einer Parallelen zur x_1-Achse liegt.

Exercise 1.2 (Characterization of Nash-solutions in bargaining games) Let (S, d) with $S \subset \mathbb{R}^2$ be a bargaining game. We want to show that $y \in S$ is a Nash-solution, that is[1]

$$y = \mathcal{N}(S, d) := \operatorname{argmax}_{s \in S} \operatorname{vol}[d, s] := \operatorname{argmax}_{s \in S}(s_2 - d_2)(s_1 - d_1)$$

if and only if the following three conditions hold:

(i) $y \in PO(S) := \{s \in S \mid \forall t \in S : \quad t \geq s \Rightarrow t = s\}$

(ii) $y \gg d$

(iii) S is contained in one of the closed half-planes delimited by the line through the points y and $(d_1 + 2(y_1 - d_1), d_2)$. *(The original formulation of the same statement seemed awkward. To be precise: it was wrong, because it was not told where the base of the triangle is supposed to be. No existence-quantor is needed here: the line is uniquely determined by the "isosceles triangle"-property, one only has to check whether S is completely on one side of this line or not).*

Without loss of generality we can assume that $d = (0, 0)$.
First, we show that if $y = \mathcal{N}(S, d)$, then all three properties hold.

(i) Suppose $z \in S$ with $z \geq y$. Suppose for the sake of contradiction that $z \neq y$. Then either $z_1 > y_1$ or $z_2 > y_2$. Either way:

$$\operatorname{vol}[d, z] = (z_1 - d_1)(z_2 - d_2) > (y_1 - d_1)(y_2 - d_2) = \operatorname{vol}[d, y],$$

which is a contradiction to the definition of y. Therefore it must hold for all $z \in S$:

$$z \geq y \Rightarrow z = y,$$

which means that $y \in PO(S)$.

- (ii) By the non-degeneracy assumption there must be an $s \in S$ such that $s \gg d$. By definition of y it must hold:

  $$\operatorname{vol}[d, y] \geq \operatorname{vol}[d, s] = (d_1 - s_1)(d_2 - s_2) > 0,$$

  therefore both $(y_1 - d_1)$ and $(y_2 - d_2)$ must be positive, that is $y \gg d$.

- (iii) Notice that the normal vector for the line through y and $(2y_1, 0)$ is given by:

  $$n := ((2y_1, 0) - y)^{\perp} = (2y_1 - y_1, -y_2)^{\perp} = (y_2, y_1).$$

  Now suppose for the sake of contradiction that there exists an $s \in S$ such that [2]:

  $$(s - y) \bullet n > 0.$$

[1] We introduce additional notation for rectangles ("2D-intervals"): $[a, b] := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b\}$, and denote the area of a rectangle by $\operatorname{vol}[a, b]$.

[2] We use $\bullet$ to denote the usual scalar product in $\mathbb{R}^2$.

Since S is assumed to be convex, all points between y and s are also contained in S. Let's see how the area of the rectangle changes as we move from y to s:

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{vol}[d,(1-t)y+ts]\right)|_{t=0}\\
&=\left(\frac{\partial}{\partial t}((1-t)y_1+ts_1)((1-t)y_2+ts_2)\right)|_{t=0}\\
&=((-y_1+s_1)((1-t)y_2+ts_2)+((1-t)y_1+ts_1)(-y_2+s_2))\,|_{t=0}\\
&=(-y_1+s_1)y_2+y_1(-y_2+s_2)\\
&=(s-y)\bullet n\\
&>0.
\end{aligned}
$$

Therefore, there must exist some $\varepsilon > 0$ such that

$$\mathrm{vol}[d,(1-\varepsilon)y+\varepsilon s] > \mathrm{vol}[d,y],$$

which is a contradiction to the definition of y. Therefore, there can not be such an s, therefore:

$$\forall\ s\in S:(s-y)\bullet n\le 0,$$

this is exactly what it means that the entire set S is contained in one of the half-planes.

Now we have to prove the other direction: starting with the three properties (i)-(iii), we have to show that y is a Nash-solution. So, let the three properties hold. First, we show that for all $s \in S$ it holds:

$$(s-y)\bullet n\le 0. \qquad (*)$$

Notice that this does not directly follow from (iii), because in (iii) we could also have a $\geq$ instead of $\leq$. To show that this must be $\leq$, we need the property (ii):

$$(d-y)\bullet n=(-y_1,-y_2)\bullet(y_2,y_1)=-2y_1y_2<0.$$

Now from this we can conclude using (iii) that for all s the inequality $(*)$ holds. From (i) we can conclude that for all s either both (s_1-y_1) and (s_2-y_2) are 0, or at least one of these expressions is negative, let's call this property $(\dagger)$. Either way, together with $(*)$ we obtain:

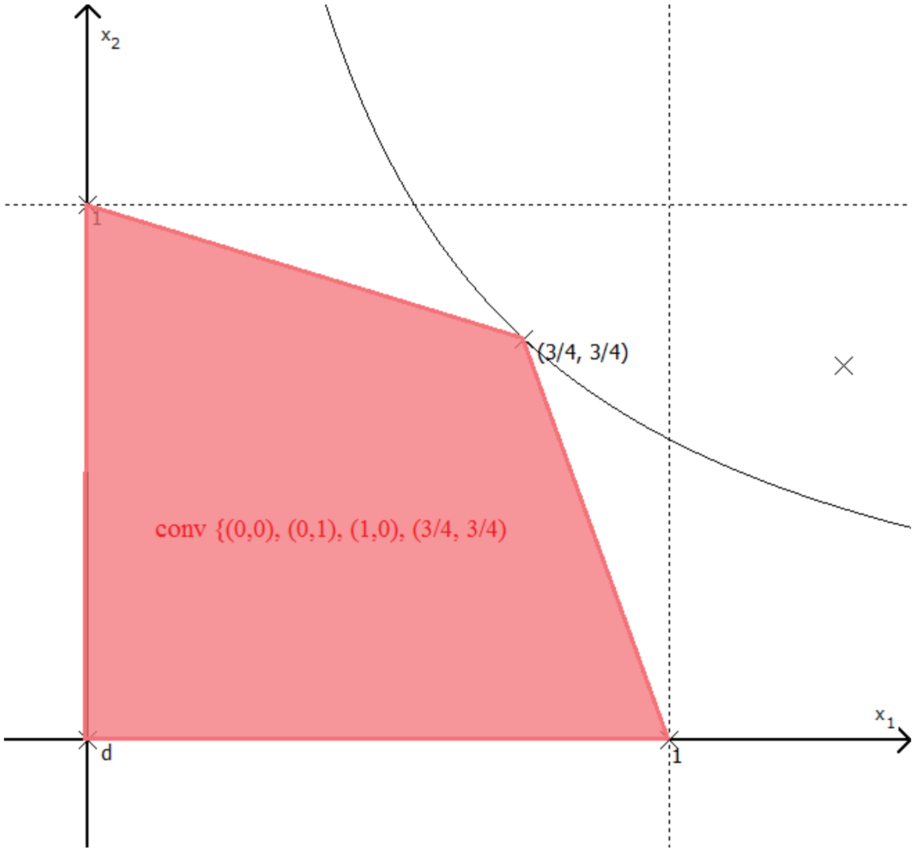
$$
\begin{aligned}
\mathrm{vol}[d,s] =&s_1s_2\\
=&(y_1+(s_1-y_1))(y_2+(s_2-y_2))\\
=&y_1y_2+(s_1-y_1)y_2+y_1(s_2-y_2)+(s_1-y_1)(s_2-y_2)\\
=&y_1y_2+(s-y)\bullet n+(s_1-y_1)(s_2-y_2)\\
\overset{*}{\le}&y_1y_2+(s_1-y_1)(s_2-y_2)\\
\overset{\dagger}{\le}&y_1y_2=\mathrm{vol}[d,y].
\end{aligned}
$$

This means that $y = \mathcal{N}(S, d)$.

Both implications together imply the claimed equivalence. ■

Exercise 12.3 (Nash-Lösungen)

a) Wir zeigen, dass $(\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$ die Nash-Lösung für das Spiel (S, d) ist.



Dazu zeigen wir einfach, dass $x = (\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$ die Alternative $x \in S$ ist, welche die Fläche des Rechtecks mit unterer linker Ecke d und oberer rechter Ecke x maximiert.

In der Abbildung ist neben S noch ein Teil der Funktion $x_2(x_1) = (\frac{3}{4})^2 \cdot \frac{1}{x_1}$ eingezeichnet, sprich dies sind genau die Punkte (x_1, x_2) mit $x_1 \cdot x_2 = (\frac{3}{4})^2$. Für die Punkte auf dieser Kurve ist der Flächeninhalt des Rechtecks mit unterer linker Ecke d und oberer Rechter Ecke $x = (x_1, x_2)$ genau $(\frac{3}{4})^2$.

Für x oberhalb dieser Kurve ist der Flächeninhalt größer, für x unterhalb kleiner. Da die Kurve genau durch $(\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$ verläuft und S mit Ausnahme von $(\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$ komplett unterhalb der Kurve liegt, ist $\mathcal{N}(S, d) = (\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$ die Nash-Lösung für dieses Spiel.

b) Die Nash-Lösung für dieses Spiel findet sich im Buch von *Maschler, Solan* und *Zamir*, wo auf Seite 642 genau dieses Beispiel als Kritik an der Nash-Lösung aufgeführt wird.

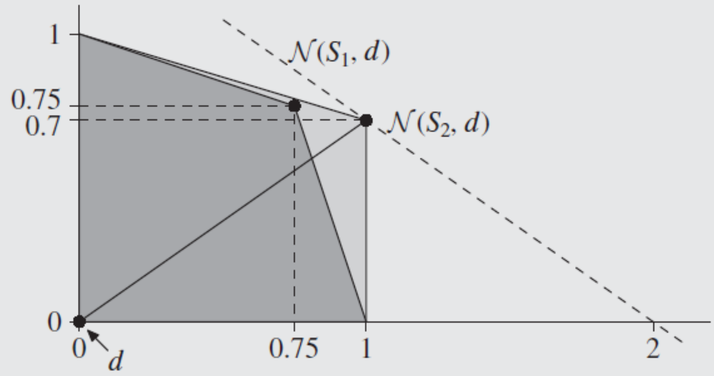


Figure 15.16 The Kalai–Smorodinsky critique of the Nash solution

Abbildung 1: entnommen aus *Maschler, Solan, Zamir*: Game Theory

Dort heißt es:

> [...] Since the bargaining game $(S_1, (0,0))$ is symmetric, $\mathcal{N}(S_1, (0,0)) = (0.75, 0.75)$. By drawing an equilateral triangle whose vertices are $(0,0), (1, 0.7), (2, 0)$ (see Figure 15.16) and using Theorem 15.20, we deduce that $\mathcal{N}(S_2, (0,0) = (1, 0.7)$. [...]

Theorem 15.20 ist genau der Satz, welcher in Aufgabe 2 bewiesen wurde. Damit ist $\mathcal{N}(S_2, (0,0) = (1, 0.7)$ die Nash-Lösung für dieses Spiel.