章节内容

1. 矩阵连乘问题描述

2. 矩阵连乘问题分析

3. 矩阵连乘算法描述

01

矩阵连乘问题描述

例1：若A是P×q矩阵，B是q×r的矩阵，则乘积C=AB是p×r的矩阵（矩阵A和B可乘的条件是：A的列数等于B的行数），矩阵A和B相乘要多少次数乘？

根据矩阵乘法的相关知识（标准乘法），主要计算量在3重循环，总共需要p*q*r次数乘。

01 矩阵连乘问题描述

例2：若三个矩阵A_1,A_2,A_3的维数分别为10×100，100×5，5×50，若矩阵A_1,A_2,A_3相乘，数乘次数是多少呢？

由于矩阵乘法满足结合律，因此矩阵A1A2A3相乘的次数与矩阵相乘的计算次序有关(加括号方式)，如下式：

$(A_1A_2)A_3$　　$10\times100\times5+10\times5\times50=7500$

$A_1(A_2A_3)$　　$100\times5\times50+10\times100\times50=75000$

01 矩阵连乘问题描述

例3：若四个矩阵$A_1A_2A_3A_4$连乘，如何计算相乘次数呢？

如右图所示，四个矩阵连乘共有5种不同计算次序。尽管最终的乘积是相同的，但加括号的次序对求解矩阵的连乘的代价有很大影响，主要表现在矩阵元素的乘法次数上。

$(A_1(A_2(A_3A_4)))$，

$(A_1((A_2A_3)A_4))$，

$((A_1A_2)(A_3A_4))$，

$((A_1(A_2A_3))A_4)$，

$(((A_1A_2)A_3)A_4)$.

01 矩阵连乘问题描述

矩阵连乘问题的定义：给定n个矩阵 {A1, A2, ···, An} ，其中Ai与Ai+1是可乘的，且i=1，2···，n-1，，如何确定计算矩阵连乘积的计算次序，使得计算矩阵连乘的数乘次数最少？

由于矩阵乘法满足结合律，所以计算矩阵连乘可以有许多不同的计算次序，矩阵连乘问题即为求矩阵连乘的最优计算次序的问题。

02 矩阵连乘问题分析

为了方便起见，定义下列的符号：

矩阵连乘积 $A_i A_{i+1} \cdots A_j$ $\longrightarrow$ $A[i:j]$

$A[i:j]$ 最少数乘次数 $\longrightarrow$ $m[i][j]$

$\Downarrow$

$A[1:n]$ $\longrightarrow$ $m[1][n]$

02 矩阵连乘问题分析

(1) 最优子结构

假设 $A[1:n]=A[1:k]A[k+1:n]$ 为最优计算次序，

则子矩阵链 $A[1:k]$和$A[k+1:n]$的计算次序也应该是最优的，

若存在一个计算次序 $A'[1:k]$ 其需要的计算量更少，则矛盾！

令 $A[1:n]=A'[1:k]A[k+1:n]$

反证法

矩阵连乘问题具有最优子结构性质！

02 矩阵连乘问题分析

(2) 建立递归关系

1<=i<j<n

$A[i:j]$　$1 \square i \quad j\ ?\ n$

单一矩阵

(1)　$i = j$ → $m[i][i] = 0$

(2)　$i < j$　$A_i \; A_{i+1} \; A_{i+2} \; \cdots \text{k} \; A_{j-1} \; A_j$

$m[i][k] + m[k+1][j] + p_{i-1}p_kp_j$

$i\ ?\ k \quad j$

K的位置有（j-i）种

02 矩阵连乘问题分析

（2）建立递归关系

$$m[i][j]=\begin{cases} 0 & i=j \\ \min\limits_{i\le k<j}\{m[i][k]+m[k+1][j]+p_{i-1}p_kp_j\} & i<j \end{cases}$$

从k表示从**j-i**种选择中找出一个数乘次数最少的位置。

若将最优断开位置**k**记为**s[i][j]=k**，则计算出最优值**m[i][j]**后，可以由**s[i][j]**递归地构造出最优解。

03 矩阵连乘算法描述

```
void MatrixChain(int p, int n, int **m, int **s)
{
    for (int i=1; i<=n; i++)    //m[i][i]初始化
        m[i][i] =0;
    for (int r=2; r<=n; r++)    //r个矩阵连乘
        for (int i=1; i<=n-r+1;i++)
        {
            int j=i+r-1;                //本轮循环的最后一个矩阵
            m[i][j]=m[i][i]+m[i+1][j]+p[i-1]*p[i]*p[j];
            s[i][j]=i;                  //假设最优划分位于i处;
            for(int k=i+1;k<j;k++)      //变化最优分割的位置，逐一测试
            {
                int t=m[i][k]+m[k+1][j]+p[i-1]*p[k]*p[j];
                if (t<m[i][j])
                {
                    m[i][j]=t;
                    s[i][j]=k;        //如果更优，替换原位置
                }
            }
        }
}
```

时间复杂度：

$T(n)=O(n^3)$

总结

矩阵连乘最优次序是一个经典动态规划问题。我们在本节中首先对矩阵连乘问题进行了介绍，其次对矩阵连乘问题进行了分析，最后给出了矩阵连乘的算法描述，供大家参考。

课后思考题

（1）请用高级语言编程实现矩阵连乘的动态规划算法。

矩阵连乘求解实例

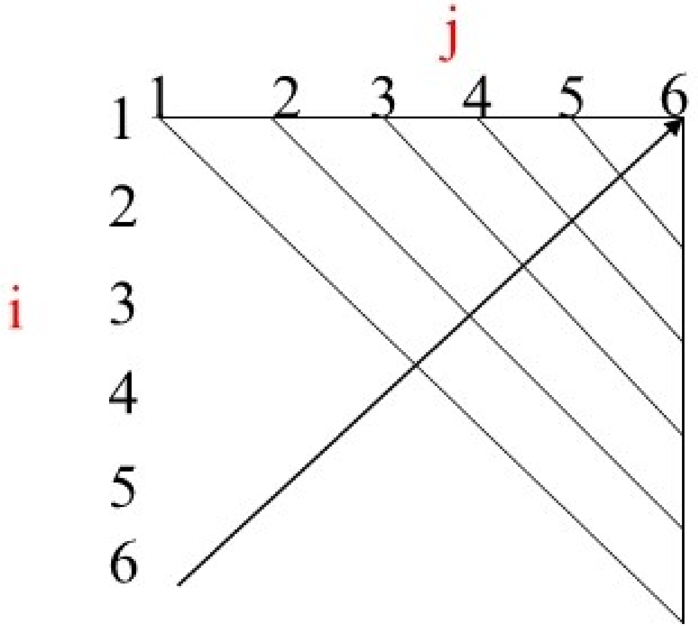
席景科

中国矿业大学 计算机学院

1.矩阵连乘求解实例

计算矩阵连乘积A[1:6]的最少数乘次数，其中各矩阵的维数分别为：

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
30×35	35×15	15×5	5×10	10×20	20×25



1）计算m[1][1], m[2][2],…,m[6][6];

2）计算m[1][2], m[2][3],…,m[5][6];

3）计算m[1][3], m[2][4], m[3][5],m[4][6];

4）计算m[1][4], m[2][5],m[3][6];

5）计算m[1][5], m[2][6];

6）计算m[1][6];

1.矩阵连乘求解实例

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
30×35	35×15	15×5	5×10	10×20	20×25

1） $m[1][1] = 0$　　$s[1][1] = 0$　　…

$A[i:j]$	$A[1:1]$	$A[2:2]$	$A[3:3]$	$A[4:4]$	$A[5:5]$	$A[6:6]$
$m[i][j]$	0	0	0	0	0	0
$s[i][j]$	0	0	0	0	0	0
最优计算次序	-	-	-	-	-	-

1. 矩阵连乘求解实例

$$\begin{array}{cccccc} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 \\ 30\times 35 & 35\times 15 & 15\times 5 & 5\times 10 & 10\times 20 & 20\times 25 \end{array}$$

2） $m[1][2]=m[1][1]+m[2][2]+30\times 35\times 15 \qquad s[1][2]=1$

$=0+0+15750$

$=15750$

$m[2][3]=m[2][2]+m[3][3]+35\times 15\times 5 \qquad s[2][3]=2$

$=0+0+2650$

$=2650$

1. 矩阵连乘求解实例

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
30×35	35×15	15×5	5×10	10×20	20×25

2）

$A[i:j]$	$A[1:2]$	$A[2:3]$	$A[3:4]$	$A[4:5]$	$A[5:6]$
$m[i][j]$	15750	2650	750	1000	5000
$s[i][j]$	1	2	3	4	5
最优计算次序	A_1A_2	A_2A_3	A_3A_4	A_4A_5	A_5A_6

1.矩阵连乘求解实例

$$\begin{array}{cccccc} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 \\ 30\times 35 & 35\times 15 & 15\times 5 & 5\times 10 & 10\times 20 & 20\times 25 \end{array}$$

3）$m[1][3] = \min \begin{cases} m[1][1] + m[2][3] + p_0 p_1 p_3 = 0 + 2625 + 5250 \\ m[1][2] + m[3][3] + p_0 p_2 p_3 = 15750 + 0 + 2250 \end{cases}$

$$= \min\{7875, 18000\} = 7875$$

$s[1][3] = 1$

$(A_1(A_2A_3))$

1.矩阵连乘求解实例

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
30×35	35×15	15×5	5×10	10×20	20×25

3） $$m[2][4]=\min\begin{cases} m[2][2]+m[3][4]+p_1p_2p_4=0+750+5250 \\ m[2][3]+m[4][4]+p_1p_3p_4=2625+0+1750 \end{cases}$$

$$=\min\{6000,4375\}=4375$$

$$s[2][4]=3$$

$$((A_2A_3)A_4)$$

1.矩阵连乘求解实例

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
30×35	35×15	15×5	5×10	10×20	20×25

3）

$A[i:j]$	$A[1:3]$	$A[2:4]$	$A[3:5]$	$A[4:6]$
$m[i][j]$	7875	4375	2500	3500
$s[i][j]$	1	3	3	5
最优计算次序	$(A_1(A_2A_3))$	$((A_2A_3)A_4)$	$(A_3(A_4A_5))$	$((A_4A_5)A_6)$

1.矩阵连乘求解实例

$$\begin{array}{cccccc} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 \\ 30\times 35 & 35\times 15 & 15\times 5 & 5\times 10 & 10\times 20 & 20\times 25 \end{array}$$

4） $$m[1][4]=\min\begin{cases} m[1][1]+m[2][4]+p_0p_1p_4=0+4375+30\times 35\times 10=14875 \\ m[1][2]+m[3][4]+p_0p_2p_4=15750+750+30\times 15\times 10=21000 \\ m[1][3]+m[4][4]+p_0p_3p_4=7875+0+30\times 5\times 10=9375 \end{cases}$$

$$=9375$$

$$s[1][4]=3$$

$$((A_1A_2A_3)A_4)$$

1.矩阵连乘求解实例

$$\begin{array}{cccccc} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 \\ 30\times 35 & 35\times 15 & 15\times 5 & 5\times 10 & 10\times 20 & 20\times 25 \end{array}$$

4）

$$m[2][5] = \min \begin{cases} m[2][2]+m[3][5]+p_1p_2p_5 = 0+2500+35\square 15 \quad 20 = 13000 \\ m[2][3]+m[4][5]+p_1p_3p_5 = 2625+1000+35\square 5 \quad 20 = 7125 \\ m[2][4]+m[5][5]+p_1p_4p_5 = 4375+0+35\square 10 \quad 20 = 11375 \end{cases}$$

$$= 7125$$

$$s[2][5] = 3$$

$$((A_2A_3)(A_4A_5))$$

1.矩阵连乘求解实例

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
30×35	35×15	15×5	5×10	10×20	20×25

4）

$A[i:j]$	$A[1:4]$	$A[2:5]$	$A[3:6]$
$m[i][j]$	9375	7125	5375
$s[i][j]$	3	3	3
最优计算次序	$((A_1A_2A_3)A_4)$	$((A_2A_3)(A_4A_5))$	$(A_3(A_4A_5A_6))$

1.矩阵连乘求解实例

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
30×35	35×15	15×5	5×10	10×20	20×25

5）

$$m[1][5]=\min\begin{cases} m[1][1]+m[2][5]+p_0p_1p_5 & \text{(A1(A2A3A4A5))} \\ m[1][2]+m[3][5]+p_0p_2p_5 & \text{((A1A2)(A3A4A5))} \\ m[1][3]+m[4][5]+p_0p_3p_5 & \text{((A1A2A3)(A4A5))} \\ m[1][4]+m[5][5]+p_0p_4p_5 & \text{((A1A2A3A4)(A5))} \end{cases}$$

$$=11875$$

$$s[1][5]=3 \qquad ((A_1A_2A_3)\,(A_4A_5))$$

1.矩阵连乘求解实例

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
30×35	35×15	15×5	5×10	10×20	20×25

5）

$$m[2][6]=\min\begin{cases} m[2][2]+m[3][6]+p_1p_2p_6 \\ m[2][3]+m[4][6]+p_1p_3p_6 \\ m[2][4]+m[5][6]+p_1p_4p_6 \\ m[2][5]+m[6][6]+p_1p_5p_6 \end{cases}$$

$$=10500$$

$$s[2][6]=3 \qquad ((A_2A_3)\,(A_4A_5A_6))$$

1.矩阵连乘求解实例

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
30×35	35×15	15×5	5×10	10×20	20×25

5）

$A[i:j]$	$A[1:5]$	$A[2:6]$
$m[i][j]$	11875	10500
$s[i][j]$	3	3
最优计算次序	$((A_1A_2A_3)(A_4A_5))$	$((A_2A_3)(A_4A_5A_6))$

1.矩阵连乘求解实例

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
30×35	35×15	15×5	5×10	10×20	20×25

m	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_1	0	15750	7875	9375	11875	15125
A_2		0	2625	4375	7125	10500
A_3			0	750	2500	5375
A_4				0	1000	3500
A_5					0	5000
A_6						0

s	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_1	0	1	1	3	3	3
A_2		0	2	3	3	3
A_3			0	3	3	3
A_4				0	4	5
A_5					0	5
A_6						0

1.矩阵连乘求解实例

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
30×35	35×15	15×5	5×10	10×20	20×25

s	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_1	0	1	1	3	3	3
A_2		0	2	3	3	3
A_3			0	3	3	3
A_4				0	4	5
A_5					0	5
A_6						0

从右上角的元素开始分割

(A1 | (A2A3)) | ((A4A5) | A6)

总结

我们在本节中以矩阵连乘问题为例，演示了使用动态规划方法求解矩阵连乘最优次序的过程。

课后思考题

1）设$n = 5, \mathrm{p} = [10,5,1,10,2,10]$，请求矩阵连乘积的最优次序。