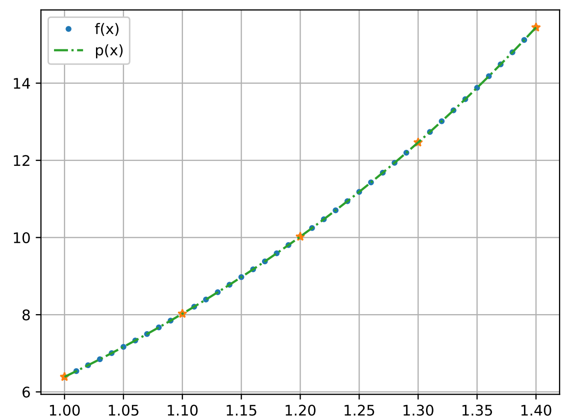
1η Άσκηση

Ζητείται το πολυώνυμο Lagrange τετάρτου βαθμού που παρεμβάλει την $f(x) = e^{2x} - 1$ στα σημεία $\{1, 1.1, 1.2, 1.3, 1.4\}$. Η επίλυση αυτού το προβλήματος είναι απλή. Γίνεται εφαρμογή των εξισώσεων (1) και (2), με το αποτέλεσμα να δίνεται στο Σχήμα 1.

$$L_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{4} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \tag{1}$$

$$p_4(x) = \sum_{i=0}^{4} L_i(x) f(x_i) \tag{2}$$

Η τιμή της συνάρτησης στο σημείο $x = 1.25$ είναι $f(1.25) = 11.1824939607$



Σχήμα 1: Παρεμβολή με πολυώνυμο Lagrange

ενώ η τιμή του πολυωνύμου είναι $p_4(1.25) = 11.1824517251$. Παρατηρείται ότι η διαφορά των δύο τιμών είναι της τάξης του 10^{-5}.

Παρακάτω ακολουθεί ο κώδικας που γράφτηκε σε Python και έγινε χρήση της βιβλιοθήκης Numpy.

ex1.py

```
import numpy as np
```

```python
import matplotlib.pyplot as plt


def f(x):
    return np.exp(2 * x) - 1.


def L(x, i, xValues):
    """Evaluates ith degree
    Lagrange Polynomial"""
    xi = xValues[i]
    product = 1.
    for j, xj in enumerate(xValues):
        if j != i:
            product = product * (x - xj) / (xi - xj)
    return product


def Lagrange(x, xValues, fValues):
    """Evaluates Lagrange Polynomial"""
    val = 0.
    for i, fi in enumerate(fValues):
        val = val + L(x, i, xValues) * fi
    return val


xValues = np.array([1, 1.1, 1.2, 1.3, 1.4])
fValues = f(xValues)
p = Lagrange(1.25, xValues, fValues)
print('Function Value f(1.25)=', f(1.25))
print('Lagrange polyn p(1.25)=', p)

plt.close('all')
x = np.arange(1.0, 1.41, 0.01)
ps = Lagrange(x, xValues, fValues)
plt.plot(x, f(x), '.', label='f(x)')
plt.plot(xValues, fValues, '*')
plt.plot(x, ps, '-.', label='p(x)')
plt.legend()
plt.grid()
```