

上海交通大学

SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

学士学位论文

THESIS OF BACHELOR



论文题目： 一类具有快慢结构的
Monod-Haldane 模型的张弛振荡

学生姓名： 朱天宇
学生学号： 515071910011
专 业： 数学与应用数学
指导教师： 张祥
学院(系)： 数学科学学院

上海交通大学

学位论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文《一类具有快慢结构的 Monod-Haldane 模型的张弛振荡》，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品成果。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本人完全意识到本声明的法律结果由本人承担。

学位论文作者签名：_____

日期：_____年 ____月 ____日

上海交通大学

学位论文版权使用授权书

本学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅。本人授权上海交通大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

本学位论文属于

保 密 ☐，在 _____ 年解密后适用本授权书。

不保密 ☐。

(请在以上方框内打“√”)

学位论文作者签名：_____

指导教师签名：_____

日期：_____年 ____月 ____日

日期：_____年 ____月 ____日

一类具有快慢结构的 Monod-Haldane 模型的张弛振荡

摘 要

本文研究了一类简化的 Monod-Haldane 捕食-被捕食模型。该模型已被证明存在 1 到 3 个正奇点,并在一定条件下于两个正奇点的小邻域内分别存在 Bogdanov-Takens 和亚临界 Hopf 分岔。本文将继续讨论该模型的动力学,重点研究张弛振荡。

本文首先从该系统的快慢结构入手,通过坐标变换构造了一个小参数 ϵ 。令 $\epsilon \rightarrow 0$,得到快、慢两个极限子系统,以及由 y 轴和 3 次曲线组成的临界集。

接着,本文了极限子系统的动力学:快子系统的轨道为水平直线,在临界曲线下方正向,在上方反向。慢子系统根据参数选取,存在 1 到 5 个奇点,包含 1 到 3 个正奇点,动力学共有 15 类情况。

然后利用极限子系统的轨道,本文构造了 3 类快慢环,并分析了它们的存在条件。为了确定快慢环离开 y 轴的位置,本文还引入了进出函数。

最后,根据几何奇异摄动理论,快慢环上的临界流形在小扰动下保存,且附近当 ϵ 充分小时存在原系统的不变流形。本文由此证明了这类 Monod-Haldane 模型张弛振荡环的存在性和唯一性。

关键词: 快慢系统, 进出函数, 几何奇异摄动, 张弛振荡

RELAXATION OSCILLATIONS IN A SLOW-FAST MODIFIED MONOD-HALDANE MODEL

ABSTRACT

In this paper, we study a simplified Monod-Haldane predator-prey model. This model has been proved existence of 1 to 3 positive equilibriums with Bogdanov – Takens and subcritical Hopf bifurcations in small neighborhoods of each under some conditions for 2. We continue discussing its dynamics and focus on relaxation oscillation.

We start with its slow-fast structure and construct a small parameter ϵ via rescaling. Let $\epsilon \rightarrow 0$, we obtain fast and slow subsystems with a critical set consisting of y axis and a cubic curve.

Then we discuss the dynamics of subsystems: fast orbits are horizontal lines forward below the curve and backward above, slow ones vary by parameters with 1 to 5 equilibriums, including 1 to 3 positive ones, and 15 cases in total.

Next we construct 3 kinds of slow-fast cycles with orbits of subsystems and analyse when they exist. In order to determine where the cycles exit y axis, we also introduce entry-exit function.

Finally, geometric singular perturbation theory show the critical manifold on slow-fast cycles preserves under small perturbation, where the invariant manifold of origin system exists nearby when ϵ is small enough. Thus we prove the existence and uniqueness of relaxation oscillation cycles of our model.

KEY WORDS: Slow-fast system, Entry-exit function, Geometric singular perturbation, Relaxation oscillation

目 录

插图索引	IV
表格索引	V
第一章 绪论	1
1.1 Monod-Haldane 模型	1
1.2 快慢结构	3
1.3 张弛振荡	3
1.4 进出函数	4
1.5 几何奇异摄动	4
第二章 动力学分析	7
2.1 快子系统	7
2.2 慢子系统	9
2.2.1 平凡切点	9
2.2.2 两个切点	11
2.3 快慢环	16
第三章 主要结论及证明	20
全文总结	21
参考文献	22
致 谢	24

插图索引

1-1 功能反应	2
1-2 一般快慢系统的动力学	4
1-3 临界流形、慢流形和折点	5
2-1 曲线 $C_0 : K = 1, 3$	8
2-2 快子系统轨道 : $K = 1, 3$	8
2-3 慢子系统轨道 : $K = 1; h = 1$	10
2-4 慢子系统轨道 : $K = 3; h = 0.1, 0.5, 2$	12
2-5 慢子系统轨道 : $K = 3; h \approx 0.2, 1.1$	12
2-6 慢子系统轨道 : $K = 10; h = 0.4$	15
2-7 慢子系统轨道:2-10,11,12 定性分析	15
2-8 慢子系统轨道:2-13,14,15 定性分析	15
2-9 慢子系统轨道:2-16,17,18 定性分析	16
2-10 快慢系统轨道 : $K = 2, h = 0.5, \epsilon = 0.01$	19

表格索引

1-1 模型 1-1 参数的实际意义	1
2-1 慢子系统 2-2 的动力学	14
2-2 慢子系统 2-2 的奇点	16

第一章 绪论

捕食者与猎物间的动态关系是生态学中的重要数学课题。Holling 模型^[1]是一类具有功能反应的捕食-被捕食模型:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= rx(1 - \frac{x}{K}) - yp(x), \\ \frac{dy}{dt} &= sy(1 - \frac{y}{hx}).\end{aligned}\tag{1-1}$$

参数的实际意义见表1-1。其中猎物、捕食者种群 x, y 分别以内在增长率 r, s 逻辑斯蒂 (logistic)

表 1-1 模型1-1参数的实际意义

Table 1-1 Real meaning of parameters in model (1-1)

参数	意义
t	时间
x	猎物种群
r	猎物内在增长率
K	猎物内在环境承载能力
y	捕食者种群
s	捕食者内在增长率
h	每个猎物供给的捕食者数量
$p(x)$	功能反应

增长, 猎物的环境承载能力为常数 K ; 但捕食者的环境承载能力 hx 与猎物种群成比例, 在 $y = hx$ 处达到平衡。从生态学的角度出发, 我们假设模型1-1中的参数都是正的。

功能反应 (Functional response)^[2] 是生态学中消费者的摄食率与食物密度 (给定生态环境中可获得的食物量) 的函数关系。在种群动力学中, 功能反应指单位时间内供给每个捕食者的猎物密度变化; 在生物化学动力学中, 功能反应也描述微生物对培养基的吸收。

Holling 首先提出了三类不同的功能反应, 它们在第一象限内都是单调的, 如图1-1所示。但一些观察和实验表明, 当营养浓度达到一定高度时, 种群增长会受到一定抑制作用, 此时将发生非单调反应, 下节将给出对应的非单调反应函数。

1.1 Monod-Haldane 模型

针对上文的非单调反应建模, Andrews^[3] 提出了 Monod-Haldane 型功能反应 (或称第四类 Holling 功能反应)

$$p(x) = \frac{mx}{x^2 + bx + a}.$$

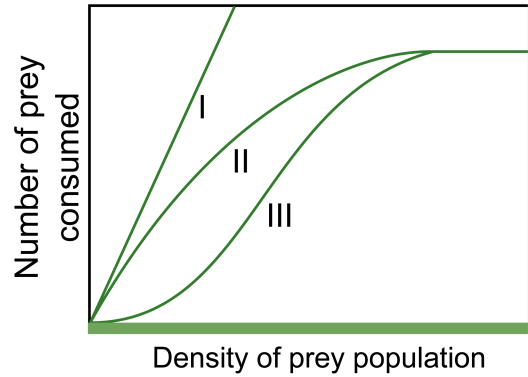


图 1-1 功能反应

Figure 1-1 Functional response

在洗涤细胞的苯酚氧化动力学研究^[4]中, Sokol 和 Howell 提出了一类简化的 Monod-Haldane 反应函数

$$p(x) = \frac{mx}{ax^2 + 1}, \quad (1-2)$$

描述了猎物自卫能力的提高导致捕食减少等现象, Tener 给出了这种现象的一个实例^[5]。

将1-2代入1-1, 得:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= rx(1 - \frac{x}{K}) - \frac{mxy}{ax^2 + 1}, \\ \frac{dy}{dt} &= sy(1 - \frac{y}{hx}). \end{aligned} \quad (1-3)$$

即本文研究的简化 Monod-Haldane 模型。

具有功能反应1-2的许多模型得到过研究, 例如 Xiao 和 Ruan^[6] 证明了类似1-3的 Monod-Haldane 模型

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= rx(1 - \frac{x}{K}) - \frac{xy}{a + x^2}, \\ \frac{dy}{dt} &= y(\frac{\mu y}{a + x^2} - D); \end{aligned} \quad (1-4)$$

存在多种分岔现象, 包括鞍点分岔、超临界和亚临界 Hopf 分岔以及同宿分岔, 并存在一个不能共存的极限环或同宿环。Xiao 和 Ruan^[7] 还证明了1-4存在一个 Bogdanov-Takens 奇点, 并在此处存在通用开折。

针对模型1-3, Li 和 Xiao^[8] 证明了根据参数选取, 该模型存在 1 到 3 个正奇点; 并选择存在 2 个正奇点的一组具体参数, 证明了当实际参数位于给定参数小邻域内时, 该模型于两个正奇点的小邻域内分别存在 Bogdanov-Takens 分岔和亚临界 Hopf 分岔。

文献 [8] 仅围绕一组具体参数给出了详尽的动力学分析, 未给出区分奇点数量的参数范围。实际上, 模型1-3的奇点坐标涉及含多个参数的三次方程求根, 结果较为复杂, 无法直观比较。本文也将回避显式计算, 以几何观察代替方程求根, 用新思路给出该模型奇点位置的隐式分析。

1.2 快慢结构

作变换:

$$\bar{x} = \sqrt{a}x, \bar{y} = \frac{m}{r}y, \bar{t} = \frac{r}{\bar{x}(\bar{x}^2 + 1)}t, \bar{K} = K\sqrt{a}, \bar{h} = \frac{r\sqrt{a}}{mh}, \epsilon = \frac{s}{r}.$$

代入1-3, 仍用 x, y, t, K, h 表示 $\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}, \bar{K}, \bar{h}$, 得:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x^2(x^2 + 1)(1 - \frac{x}{K}) - x^2y, \\ \frac{dy}{dt} &= \epsilon y(x^2 + 1)(x - hy), \end{aligned} \quad (1-5)$$

其中 ϵ 在一些模型中可以是很大的参数, 例如当捕食者寿命远长于猎物时。在这种情况下, 模型1-5可被视为具有快变量 x 和慢变量 y 的快慢系统 (Slow-fast system)。

快慢结构是 Holling 模型一般具有的一类重要性质, 能够通过进出函数和几何奇异摄动理论进行研究, 例如 Wang 和 Zhang^[9] 运用这两项工具, 对一类 Leslie-Gower 模型 (或称第二类 Holling 模型)

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dT} &= (r_1 - b_1x - \frac{a_1y}{x + k_1})x, \\ \frac{dy}{dT} &= (r_2 - \frac{a_2y}{x + k_2})y, \end{aligned} \quad (1-6)$$

证明了张弛振荡环的存在性和唯一性。

本文将效仿这一思路, 从快慢结构入手, 探索 Monod-Haldane 模型中的张弛振荡现象。

1.3 张弛振荡

张弛振荡 (Relaxation oscillation)^[10] 是一类发生在物理、化学和生物等领域的周期现象, 也是快慢系统特有的一类周期解。它的特点是周期中存在不同时间尺度的相位, 缓慢变化的长相位与快速变化的短相位交替发生、周而复始。这些自持的非线性振荡意味着系统反复经历着能量的耗散与吸收, 因而张弛振子 (Relaxation oscillator) 比常见的单摆 (谐振子, Harmonic oscillator) 更适合模拟现实生活中的振动。

针对 Monod-Haldane 模型的张弛振荡, Atabaigi 和 Barati^[11] 证明了亚临界 Hopf 分岔将产生稳定的张弛振荡, 并由此在一定条件下对唯一正奇点的情形证明了一般的 Monod-Haldane 模型

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= rx(1 - \frac{x}{K}) - \frac{mxy}{ax^2 + bx + 1}, \\ \frac{dy}{dt} &= sy(1 - \frac{y}{hx}); \end{aligned} \quad (1-7)$$

当 $b \leq 1$ 时张弛振荡环的存在性和唯一性。

本文将从不同角度进行后续研究, 不涉及 Hopf 分岔理论, 直接运用几何奇异摄动理论构造1-7中 $b = 0$ 时的张弛振荡环。以下两节列出了进出函数和几何奇异摄动理论中本文主要使用的结论。

1.4 进出函数

考虑一般的快慢系统

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, y, \epsilon)P(x), \\ \frac{dy}{dt} &= \epsilon g(x, y, \epsilon).\end{aligned}\quad (1-8)$$

其中 $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 是状态空间变量, 小参数 $0 \leq \epsilon \ll 1$ 表示时间尺度的比率。假设1-8中的函数 f 和 g 足够光滑, $P(x)$ 为关于 x 的多项式, 使得 f 和 g 满足

$$g(0, y, 0) < 0; f(0, y, 0) < 0, y > 0; f(0, y, 0) > 0, y < 0. \quad (1-9)$$

当 $\epsilon = 0$ 时, y 轴为系统1-8的奇点集, 且在正半轴 $Y^+ := \{(x, y) | x = 0, y > 0\}$ 上吸引, 在负半轴 $Y^- := \{(x, y) | x = 0, y < 0\}$ 上排斥, 如图1-2(a) 所示。

当 $\epsilon > 0$ 时, 由于 Y^+ 吸引, 当 $y_0 > 0$ 且 $0 < x_0 \ll 1$ 时, 系统1-8从 (x_0, y_0) 出发的轨道被 Y^+ 吸引, 但不穿过 y 轴; 接着受慢子系统控制, 以 $O(\epsilon)$ 的速率贴 Y^+ 缓慢下降; 当轨道穿过 x 轴后, 它倾向于离开排斥的 Y^- , 设离开位置为 $(0, p_0(y_0))$; 最后与直线 $x = x_0$ 于 $(0, p_\epsilon(y_0))$ 处相交, 满足极限 $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} p_\epsilon(y_0) = p_0(y_0)$, 如图1-2(b) 所示。

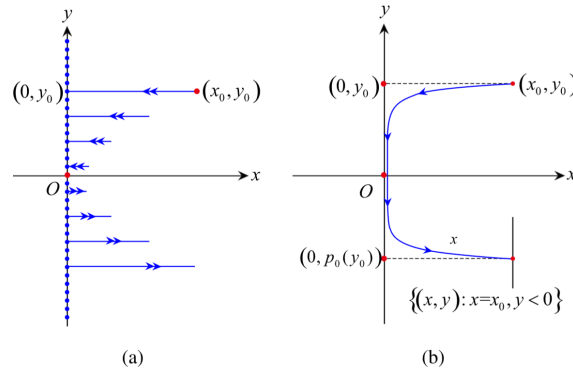


图 1-2 一般快慢系统的动力学

Figure 1-2 Dynamics of general slow-fast systems

从 (x_0, y_0) 出发的轨道离开 y 轴的纵坐标 $p_0(y_0)$ 满足

$$\int_{y_0}^{p_0(y_0)} \frac{f(0, y, 0)}{g(0, y, 0)} dy = 0. \quad (1-10)$$

方程1-10确定的隐函数称为进出函数 (Entry-exit function)^[12]。

1.5 几何奇异摄动

近年来, 几何奇异摄动 (Geometric singular perturbation) 理论已经发展成为分析一些快慢生物学系统的严格数学工具。Fenichel^[13] 关于不变流形的

定理 1.

临界流形 C_0 在小扰动下保存；即当 $0 < \epsilon \ll 1$ 时，任取 C_0 紧致的法相双曲子流形 S_0 ，其附近存在一个不变流形 S_ϵ ，且与 S_0 距离为 $O(\epsilon)$ 。

等结论构成了 GSP 理论的基础，现在被称为 Fenichel 理论。今天，GSP 理论已经广泛包含了处理快慢系统的各种几何工具，例如交换引理^[14]、爆破技术^[15]和快慢标准型理论^[16]等等。

现在考虑一般的快慢系统

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, y, \epsilon), \\ \frac{dy}{dt} &= \epsilon g(x, y, \epsilon),\end{aligned}\tag{1-11}$$

其中 $(x, y) \in \mathbb{R}, 0 < \epsilon \ll 1$ 。作非退化假设

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0, 0) > 0, \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0, 0) < 0.$$

令 $S = \{(x, y) : f(x, y, 0) = 0\}$ 为临界流形。由假设，存在 $(0, 0)$ 的邻域 U ，使得 $U \cap S = \{(0, 0)\}$ ，此处 $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0, 0) \rightarrow 0$ ， $U \cap S$ 近似抛物线。如图1-3， $(0, 0)$ 为折点，记 S_a, S_r 分别为左、右分支，则 $S = S_a \cup S_r$ 。由假设 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0, 0) > 0$ ，当 $y > 0$ 时， S_a 吸引， S_r 排斥； $(0, 0)$ 非双曲，故 x 轴左半吸引，右半排斥。

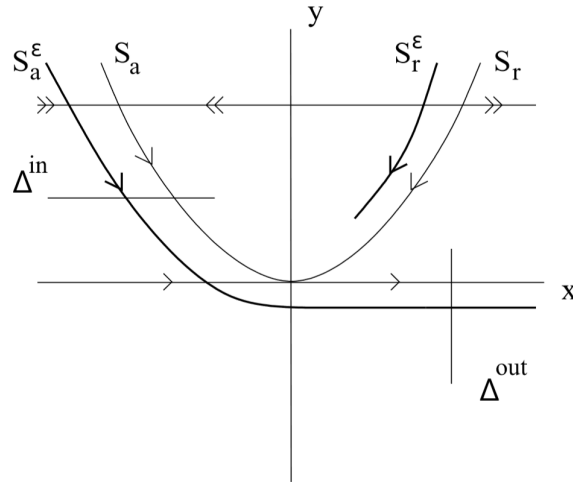


图 1-3 临界流形、慢流形和折点

Figure 1-3 Critical manifold, slow manifolds and the fold point

为了确定慢系统的动力学，求解方程 $f(x, y, 0) = 0$ 得函数 $y = \phi(x)$ ，则慢动力学由方程

$$\frac{d\phi(x)}{dx} \frac{dx}{dt} = g(x, \phi(x), 0)$$

确定， $x = 0$ 为奇点，慢流方向由 $g(0, 0, 0)$ 的符号确定。由假设 $g(0, 0, 0) < 0$ ，则 S_a, S_r 均指向折点。实际上，由于折点的奇性， S_a, S_r 上的轨道在有限时间内抵达折点，而离开此处奇异极限的唯一可能是图1-3中 x 轴上的不稳定轨道。 $g(0, 0, 0) > 0$ 的情形类似。

根据定理1, 在 $(0,0)$ 任意小邻域 V 内, S_a, S_r 在充分小的 ϵ 扰动下存在不变流形 $S_{a,\epsilon}, S_{r,\epsilon}$ 。给定 ϵ , 两维慢流形由三维扩展系统

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, y, \epsilon), \\ \frac{dy}{dt} &= \epsilon g(x, y, \epsilon), \\ \frac{d\epsilon}{dt} &= 0\end{aligned}\tag{1-12}$$

局部不变的中心状流形 M_a, M_r 获得, $S \times \{0\}$ 是该系统的奇点流形。在邻域 V 外, 系统1-12在 $S_a \times \{0\}$ 上有双重零特征值和一个一致的稳定双曲特征值, 这确保了吸引的中心状流形 M_a 的存在性, 类似地可以获得 M_r 。在折点 $(0,0,0)$ 处, 系统存在唯一的三重零特征值, 慢流形退化。我们重点研究 $S_{a,\epsilon}$ 及其附近的解经过折点周围的行为, 希望得到折点附近沿 $S_{a,\epsilon}$ 的慢运动向沿几乎平行于 x 轴的不稳定轨道快运动过渡, $S_{r,\epsilon}$ 的分析类似。

对小参数 $\rho > 0$ 以及适当的区间 $J \subset \mathbb{R}$, 定义

$$\Delta^{in} = \{(x, \rho^2), x \in J\}, \Delta^{out} = \{(\rho, y), y \in \mathbb{R}\}.$$

$$\pi : \Delta^{in} \rightarrow \Delta^{out}$$

为系统1-11的过渡映射。

根据以上假设, Krupa 和 Szmolyan^[17] 证明了

定理 2.

存在 $\epsilon_0 > 0$, 使得以下结论对 $\forall \epsilon \in (0, \epsilon_0]$ 成立:

1. 流形 $S_{a,\epsilon}$ 于点 $(\rho, h(\epsilon))$ 处经过 Δ^{out} , 其中 $h(\epsilon) = O(\epsilon^{2/3})$ 。
2. 过渡映射 π 是压缩率为 $O(e^{-c/\epsilon})$ 的压缩映射, 其中 c 为正常数。

本文将主要运用定理1和定理2证明张弛振荡环的存在性和唯一性。

第二章 动力学分析

分析快慢系统的第一步是考虑极限 $\epsilon \rightarrow 0$ 。在1-5中令 $\epsilon = 0$ ，得快子系统：

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x^2(x^2 + 1)(1 - \frac{x}{K}) - x^2y, \\ \frac{dy}{dt} &= 0.\end{aligned}\tag{2-1}$$

该系统中 $y \equiv c, c \in \mathbb{R}$ ，其轨道是不变直线。

对快慢系统1-5在慢时间尺度 $\tau = \epsilon t$ 而非快时间尺度 t 下取极限，得慢子系统：

$$\begin{aligned}0 &= x^2(x^2 + 1)(1 - \frac{x}{K}) - x^2y, \\ \frac{dy}{d\tau} &= y(x^2 + 1)(x - hy),\end{aligned}\tag{2-2}$$

该系统是微分代数方程，限制于临界集：

$$C = \{(x, y) : x = 0\} \cup \{(x, y) : y = F(x) := (x^2 + 1)(1 - \frac{x}{K})\}.$$

本章将首先分析极限子系统2-1和2-2的动力学，进而根据进出函数1-10和定理2得到原系统1-5的动力学。

2.1 快子系统

快子系统2-1由于

$$\frac{dy}{dt} = 0,$$

其纵坐标不随时间变化，因而其轨道为平行于 x 轴的直线族

$$y = k, \forall k \in \mathbb{R}.$$

为了确定轨道的方向，令

$$\frac{dx}{dt} = x^2(F(x) - y) > 0,$$

得

$$y < F(x),$$

即快子系统2-1的轨道在曲线 $C_0 = \{y = F(x)\}$ 下方为正向(向右)；反之，在 C_0 上方为反向(向左)；曲线 C_0 为其奇点的集合。

为了分析曲线上的奇点种类，令

$$\frac{dF}{dx} = -\frac{1}{K}(3x^2 - 2Kx + 1) > 0,$$

要求判别式

$$\Delta = 4(K^2 - 3) > 0,$$

由假设 $K > 0$ ，即要求

$$K > \sqrt{3},$$

得

$$0 < x_1 := \frac{K - \sqrt{K^2 - 3}}{3} < x < x_2 := \frac{K + \sqrt{K^2 - 3}}{3}.$$

其中 x_1, x_2 为函数 $F(x)$ 的极值点。记

$$C_0 = C_1^a \cup C_2^r \cup C_3^a; C_1^a = C_0|_{(-\infty, x_1)}, C_2^r = C_0|_{(x_1, x_2)}, C_3^a = C_0|_{(x_2, +\infty)}. \quad (2-3)$$

反之，当 $0 < K \leq \sqrt{3}$ 时，导数 $\frac{dF}{dx} \leq 0$ ，函数 $F(x)$ 单调递减，因此奇点种类保持不变。

综上所述，快子系统2-1的奇点当 $K > \sqrt{3}$ 时在 C_1^a 和 C_3^a 上吸引，在 C_2^r 上排斥；当 $0 < K \leq \sqrt{3}$ 时在 C_0 上均吸引。

以 $K = 1$ 和 $K = 3$ 为例，图2-1和图2-2分别给出了曲线 C_0 和快子系统轨道的数值模拟。

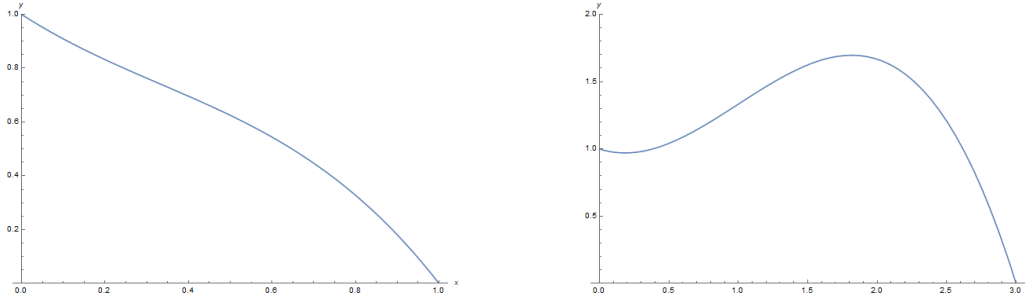


图 2-1 曲线 $C_0 : K = 1, 3$

Figure 2-1 Curve $C_0 : K = 1, 3$

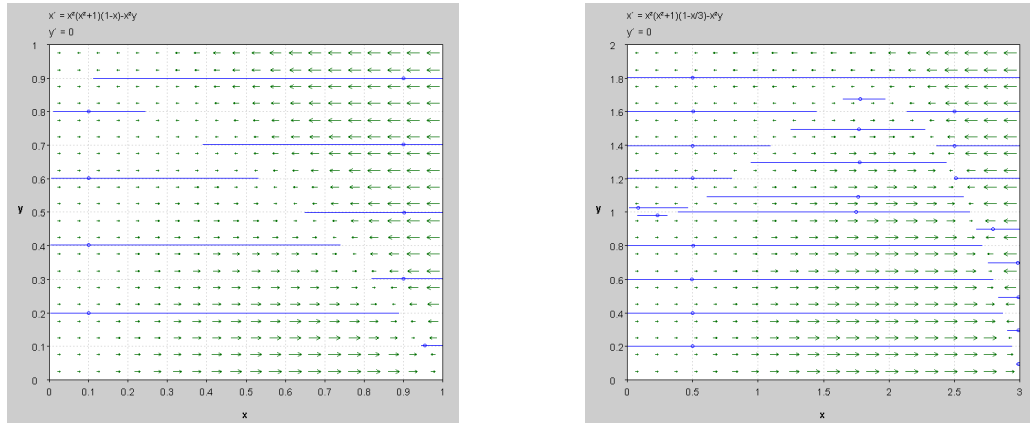


图 2-2 快子系统轨道： $K = 1, 3$

Figure 2-2 Fast subsystem orbits: $K = 1, 3$

实际上，当 $0 < K \leq \sqrt{3}$ 时，快子系统2-1的图形均如图2-2(左)；当 $K > \sqrt{3}$ 时，2-1的图形均如图2-2(右)。

2.2 慢子系统

慢子系统2-2的轨道，即临界集 C ，由 y 轴和曲线 C_0 组成。本节中慢子系统的时间尺度 τ 仍用 t 表示，限制在本节内将不会与快子系统混淆。

首先分析 y 轴上的动力学，令 $x = 0$ ，得

$$\frac{dy}{dt} = -hy^2.$$

由假设 $h > 0$ ，得

$$\frac{dy}{dt} < 0, \forall y \in \mathbb{R},$$

即慢子系统2-2在 y 轴上始终反向(向下)， $(0, 0)$ 为其上唯一且退化的奇点。

为了分析曲线 C_0 上的动力学，将曲线方程 $y = F(x)$ 代入2-2第2个方程，得

$$\frac{dF}{dx} \frac{dx}{dt} = F(x)(x^2 + 1)(x - hF(x)) = (1 - \frac{x}{K})(x^2 + 1)^2(x - hF(x)).$$

轨道的方向即 $\frac{dx}{dt}$ 的符号，其中等号左端 $\frac{dF}{dx}$ 的符号已于2.1中讨论；等号右端由假设 $y > 0$ ，故 $x < K$ ，仅需寻找如下方程

$$x - hF(x) = 0$$

的根，即直线 $y = \frac{1}{h}x$ 与曲线 C_0 的交点。当曲线在直线上时， $\frac{1}{h}x < F(x)$ ，即 $x - hF(x) < 0$ ；反之，当曲线在直线下方时， $x - hF(x) > 0$ ，结合 $\frac{dF}{dx}$ 的符号就能判断轨道的方向。

由代数基本定理，三次方程

$$x - hF(x) = \frac{h}{K}[x^3 - Kx^2 + (1 + \frac{K}{h})x - K] = 0$$

有1到3个实根。由于包含两个参数，根的显式表达式较为复杂、难以判断数值大小，因此本文选择从几何角度入手，在不显式求解交点坐标的前提下，就交点的数量和位置隐式分析。对于给定参数具体数值实际问题，将上述方程数值求解后，通过下文的分类讨论，能够立刻得出结论。下文也给出了一些定量和定性的实例。

由假设 $h, K > 0$ ，过原点 $(0, 0)$ 的直线 $y = \frac{1}{h}x$ 经过1, 3象限，而曲线 C_0 与 y 轴的交点 $(0, 1)$ 和与 x 轴的唯一交点 $(K, 0)$ 均位于正半轴，因而所有交点均位于第一象限。

为了讨论交点数量、进而确定曲线 C_0 上的动力学，首先考虑直线与曲线相切的极限情况。令与直线 $y = \frac{1}{h}x$ 平行的直线族 $y = \frac{1}{h}x + k, \forall k \in \mathbb{R}$ 与曲线相切，即令两者导数相等：

$$\frac{dF}{dx} = -\frac{1}{K}(3x^2 - 2Kx + 1) = \frac{1}{h},$$

即

$$3hx^2 - 2hKx + h + K = 0.$$

2.2.1 平凡切点

令判别式

$$\Delta = 4h^2(K^2 - 3 - 3\frac{K}{h}) \leq 0,$$

得

$$(h, K) \in U = U_1 \cup U_2, U_1 = \{0 < K \leq \sqrt{3}\}, U_2 = \{K > \sqrt{3}, 0 < h \leq \frac{3K}{K^2 - 3}\}.$$

此时直线族 $y = \frac{1}{h}x + k$ 与曲线 C_0 仅有 0 或 1 个切点, 因而根据几何, 直线族中的一条 $y = \frac{1}{h}x$ 与曲线仅有唯一交点或切点, 对应三次方程 $x - hF(x) = 0$ 仅有唯一实根或唯一三重实根, 记为 x_a 。

当 $(h, K) \in U_1$ 时, 满足 $0 < K \leq \sqrt{3}$, 根据 2.1 的计算, 此时导数 $\frac{dF}{dx} \leq 0$, 曲线 C_0 上没有极值点奇点, 仅在导数为 0 处存在唯一一个退化的奇点, 因而曲线上的动力学不因导数而改变, 取决于直线与曲线相交的一点。记

$$C_0 = C_a^+ \cup C_3^-; C_a^+ = C_0|_{(0, x_a)}, C_3^- = C_0|_{(x_a, K)}. \quad (2-4)$$

则慢子系统 2-2 在 C_a^+ 上为正向 (向右), 在 C_3^- 上为反向 (向左)。

以 $K = 1, h = 1$ 为例, 图 2-3 画出了慢子系统的两条轨道: y 轴和曲线 C_0 , 以及直线 $y = x$, 直线与曲线的交点为该例中唯一的非平凡奇点, 坐标约为 $(0.6, 0.6)$, 将曲线分为动力学不同的 C_a^+ 和 C_b^- 两部分, 方向由箭头标出。由于 y 轴上的动力学不随参数改变, 后文的例子中将不再重复标出其上的箭头。

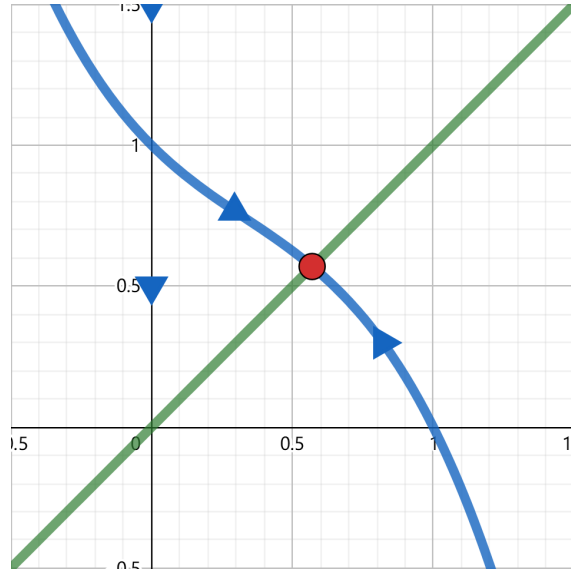


图 2-3 慢子系统轨道: $K = 1; h = 1$

Figure 2-3 Slow-subsystem orbits: $K = 1; h = 1$

当 $(h, K) \in U_2$ 时, 满足 $K > \sqrt{3}$, 根据 2.1 的计算, 曲线 C_0 存在两个极值点奇点

$$x_1 = \frac{K - \sqrt{K^2 - 3}}{3}, x_2 = \frac{K + \sqrt{K^2 - 3}}{3}.$$

当 $x_1 < x < x_2$ 时, 导数 $\frac{dF}{dx} > 0$, 反之为负, 因此需要考虑交点相对极值点的位置。

当 $0 < x_a < x_1$ 时, 记

$$C_0 = C_a^+ \cup C_1^- \cup C_2^+ \cup C_3^-; C_a^+ = C_0|_{(0, x_a)}; C_1^- = C_0|_{(x_a, x_1)}, C_2^+ = C_0|_{(x_1, x_2)}, C_3^- = C_0|_{(x_2, K)}. \quad (2-5)$$

则在 C_a^+ 和 C_2^+ 上为正向 (向右), 在 C_1^- 和 C_3^- 上为反向 (向左)。

当 $x_a = x_1$ 时, 记

$$C_0 = C_1^+ \cup C_2^+ \cup C_3^-; C_1^+ = C_0|_{(0,x_1)}, C_2^+ = C_0|_{(x_1,x_2)}, C_3^- = C_0|_{(x_2,K)}. \quad (2-6)$$

则在 $C_1^+ \cup C_2^+$ 上为正向 (向右), 在 C_3^- 上为反向 (向左)。

当 $x_1 < x_a < x_2$ 时, 记

$$C_0 = C_1^+ \cup C_a^- \cup C_2^+ \cup C_3^-; C_a^- = C_0|_{(x_1,x_a)}; C_1^+ = C_0|_{(0,x_1)}, C_2^+ = C_0|_{(x_a,x_2)}, C_3^- = C_0|_{(x_2,K)}. \quad (2-7)$$

则在 C_1^+ 和 C_2^+ 上为正向 (向右), 在 C_a^- 和 C_3^- 上为反向 (向左)。

当 $x_a = x_2$ 时, 记

$$C_0 = C_1^+ \cup C_2^- \cup C_3^-; C_1^+ = C_0|_{(0,x_1)}, C_2^- = C_0|_{(x_1,x_2)}, C_3^- = C_0|_{(x_2,K)}. \quad (2-8)$$

则在 C_1^+ 上为正向 (向右), 在 $C_2^- \cup C_3^-$ 上为反向 (向左)。

当 $x_2 < x_a < K$ 时, 记

$$C_0 = C_1^+ \cup C_2^- \cup C_a^+ \cup C_3^-; C_a^+ = C_0|_{(x_2,x_a)}; C_1^+ = C_0|_{(0,x_1)}, C_2^- = C_0|_{(x_1,x_2)}, C_3^- = C_0|_{(x_a,K)}. \quad (2-9)$$

则在 C_1^+ 和 C_a^+ 上为正向 (向右), 在 C_2^- 和 C_3^- 上为反向 (向左)。

2.2.2 两个切点

令判别式 $\Delta > 0$, 得

$$(h, K) \in U^c = \{K > \sqrt{3}, h > \frac{3K}{K^2 - 3}\}.$$

满足 $K > \sqrt{3}$, 根据2.1的计算, 曲线 C_0 存在两个极值点奇点 $x_1 < x_2$ 。此时直线族 $y = \frac{1}{h}x + k$ 与曲线 C_0 有两个切点, 即直线族中两条不同的直线

$$y = \frac{1}{h}x + k_m, y = \frac{1}{h}x + k_n, k_m \neq k_n$$

分别与曲线相切, 解得

$$x_1 < x_m = \frac{K - \sqrt{K^2 - 3 - 3\frac{K}{h}}}{3} < x_n = \frac{K + \sqrt{K^2 - 3 - 3\frac{K}{h}}}{3} < x_2,$$

不妨设

$$k_m = F(x_m) - \frac{1}{h}x_m, k_n = F(x_n) - \frac{1}{h}x_n,$$

对应两个三次方程

$$F(x) = \frac{1}{h}x + k_m, F(x) = \frac{1}{h}x + k_n$$

均存在一个两重实根和另一个实根。

当 $k_n < 0$, 即直线 $y = \frac{1}{h}x$ 位于与之斜率相同的两条切线 $y = \frac{1}{h}x + k_m, y = \frac{1}{h}x + k_n$ 上方时, 根据几何, 该直线与曲线 C_0 仅有唯一交点, 对应三次方程 $x - hF(x) = 0$ 仅有一个实根

x_a ，且位于曲线拐点 $x_3 = \frac{K}{3}$ 左侧；当 $k_n = 0$ ，即直线恰好与曲线上切时，与曲线另有一个交点，分别对应二重实根 x_n 和另一实根 x_a ，同样地 $x_a < x_3$ 。由于切点 x_n 前后直线与曲线的位置关系不变，不改变动力学，因而与 $k_n < 0$ 时的动力学相同。

当 $k_m > 0$ ，即直线位于两条切线下方时，与曲线同样仅有唯一交点，对应唯一实根 $x_a > x_3$ ；当 $k_m = 0$ ，即直线恰好与曲线下切时，与曲线另有一个交点，分别对应二重实根 x_m 和另一实根 $x_a > x_3$ ，同样与 $k_m > 0$ 时的动力学相同。

于是，当 $k_n \leq 0$ 或 $k_m \geq 0$ 时，直线与曲线仅有一个交点 x_a ，其前后直线与曲线的位置关系不同，进而改变动力学，这与上节 2.2.1 中当 $(h, K) \in U_2$ 时的动力学一致，仅随 x_a 的位置发生变化，即当 $0 < x_a < x_1, x_a = x_1, x_1 < x_a < x_2, x_a = x_2, x_2 < x_a < K$ 时分别为 2-5, 2-6, 2-7, 2-8, 2-9。

以 $K = 3; h = 0.1, 0.5, 2$ 为例，计算本节两个切点的存在条件为 $h > \frac{3K}{K^2-3} = 1.5$ ，仅 $h = 2$ 时满足，而 $h = 0.1, 0.5$ 的情形实际分别对应上节 2.2.1 中的 2-5 和 2-7，但如图 2-4 所示， $h = 0.1, 0.5, 2$ 三个例子实际可以看作一个直线顺时针转动的连续变化过程，这验证了上文中的动力学一致。

同时，利用交点的唯一性，可以通过给定的交点确定直线，进而确定与曲线交于该点的直线所需要的参数 h 。以 $K = 3$ 为例，图 2-5 中分别连接原点 $(0, 0)$ 和曲线的两个极值点，算得 $h \approx 0.2, 1.1$ ，并给出了曲线上此时较为特殊的动力学。

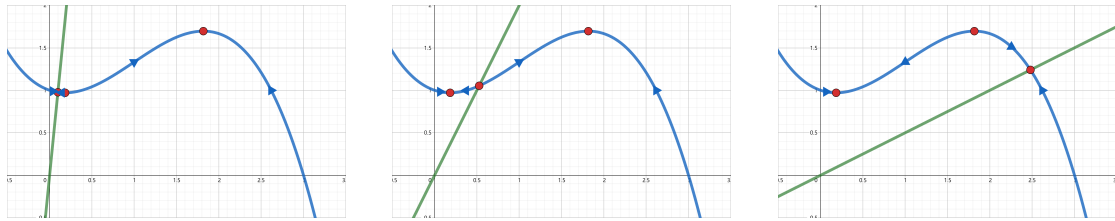


图 2-4 慢子系统轨道： $K = 3; h = 0.1, 0.5, 2$

Figure 2-4 Slow-subsystem orbits: $K = 3; h = 0.1, 0.5, 2$



图 2-5 慢子系统轨道： $K = 3; h \approx 0.2, 1.1$

Figure 2-5 Slow-subsystem orbits: $K = 3; h \approx 0.2, 1.1$

当 $k_m < 0 < k_n$ ，即直线位于两条切线之间时，与曲线有三个交点，对应三个不同实根，不妨设 $x_a < x_b < x_c$ ，且由几何 $x_a < x_3 < x_c, x_1 < x_b < x_2$ 。下面讨论这三个交点的详细位置。

当 $x_a < x_1 < x_b < x_c < x_2$ 时, 记

$$\begin{aligned} C_0 &= C_a^+ \cup C_1^- \cup C_b^+ \cup C_c^- \cup C_2^+ \cup C_3^-; \\ C_a^+ &= C_0|_{(0, x_a)}, C_b^+ = C_0|_{(x_1, x_b)}, C_c^- = C_0|_{(x_b, x_c)}; C_1^- = C_0|_{(x_a, x_1)}, C_2^+ = C_0|_{(x_c, x_2)}, C_3^- = C_0|_{(x_2, K)}. \end{aligned} \quad (2-10)$$

则在 C_a^+, C_b^+ 和 C_2^+ 上为正向 (向右), 在 C_1^-, C_c^- 和 C_3^- 上为反向 (向左)。

当 $x_a < x_1 < x_b < x_c = x_2$ 时, 记

$$\begin{aligned} C_0 &= C_a^+ \cup C_1^- \cup C_b^+ \cup C_2^- \cup C_3^-; \\ C_a^+ &= C_0|_{(0, x_a)}, C_b^+ = C_0|_{(x_1, x_b)}; C_1^- = C_0|_{(x_a, x_1)}, C_2^- = C_0|_{(x_b, x_2)}, C_3^- = C_0|_{(x_2, K)}. \end{aligned} \quad (2-11)$$

则在 C_a^+ 和 C_b^+ 上为正向 (向右), 在 C_1^- 和 $C_2^- \cup C_3^-$ 上为反向 (向左)。

当 $x_a < x_1 < x_b < x_2 < x_c$ 时, 记

$$\begin{aligned} C_0 &= C_a^+ \cup C_1^- \cup C_b^+ \cup C_2^- \cup C_c^+ \cup C_3^-; \\ C_a^+ &= C_0|_{(0, x_a)}, C_b^+ = C_0|_{(x_1, x_b)}, C_c^+ = C_0|_{(x_2, x_c)}; C_1^- = C_0|_{(x_a, x_1)}, C_2^- = C_0|_{(x_b, x_2)}, C_3^- = C_0|_{(x_c, K)}. \end{aligned} \quad (2-12)$$

则在 C_a^+, C_b^+ 和 C_c^+ 上为正向 (向右), 在 C_1^-, C_2^- 和 C_3^- 上为反向 (向左)。

当 $x_a = x_1 < x_b < x_c < x_2$ 时, 记

$$\begin{aligned} C_0 &= C_1^+ \cup C_b^+ \cup C_c^- \cup C_2^+ \cup C_3^-; \\ C_b^+ &= C_0|_{(x_1, x_b)}, C_c^- = C_0|_{(x_b, x_c)}; C_1^+ = C_0|_{(0, x_1)}, C_2^+ = C_0|_{(x_c, x_2)}, C_3^- = C_0|_{(x_2, K)}. \end{aligned} \quad (2-13)$$

则在 $C_1^+ \cup C_b^+$ 和 C_2^+ 上为正向 (向右), 在 C_c^- 和 C_3^- 上为反向 (向左)。

当 $x_a = x_1 < x_b < x_c = x_2$ 时, 记

$$C_0 = C_1^+ \cup C_b^+ \cup C_2^- \cup C_3^-; C_b^+ = C_0|_{(x_1, x_b)}; C_1^+ = C_0|_{(0, x_1)}, C_2^- = C_0|_{(x_b, x_2)}, C_3^- = C_0|_{(x_2, K)}. \quad (2-14)$$

则在 $C_1^+ \cup C_b^+$ 上为正向 (向右), 在 $C_2^- \cup C_3^-$ 上为反向 (向左)。

当 $x_a = x_1 < x_b < x_2 < x_c$ 时, 记

$$\begin{aligned} C_0 &= C_1^+ \cup C_b^+ \cup C_2^- \cup C_c^+ \cup C_3^-; \\ C_b^+ &= C_0|_{(x_1, x_b)}, C_c^+ = C_0|_{(x_2, x_c)}; C_1^+ = C_0|_{(0, x_1)}, C_2^- = C_0|_{(x_b, x_2)}, C_3^- = C_0|_{(x_c, K)}. \end{aligned} \quad (2-15)$$

则在 $C_1^+ \cup C_b^+$ 和 C_c^+ 上为正向 (向右), 在 C_2^- 和 C_3^- 上为反向 (向左)。

当 $x_1 < x_a < x_b < x_c < x_2$ 时, 记

$$\begin{aligned} C_0 &= C_1^+ \cup C_a^- \cup C_b^+ \cup C_c^- \cup C_2^+ \cup C_3^-; \\ C_a^- &= C_0|_{(x_1, x_a)}, C_b^+ = C_0|_{(x_a, x_b)}, C_c^- = C_0|_{(x_b, x_c)}; C_1^+ = C_0|_{(0, x_1)}, C_2^+ = C_0|_{(x_c, x_2)}, C_3^- = C_0|_{(x_2, K)}. \end{aligned} \quad (2-16)$$

则在 C_1^+, C_b^+ 和 C_2^+ 上为正向 (向右), 在 C_a^-, C_c^- 和 C_3^- 上为反向 (向左)。

当 $x_1 < x_a < x_b < x_c = x_2$ 时, 记

$$\begin{aligned} C_0 &= C_1^+ \cup C_a^- \cup C_b^+ \cup C_2^- \cup C_3^-; \\ C_a^- &= C_0|_{(x_1, x_a)}, C_b^+ = C_0|_{(x_a, x_b)}; C_1^+ = C_0|_{(0, x_1)}, C_2^- = C_0|_{(x_b, x_2)}, C_3^- = C_0|_{(x_2, K)}. \end{aligned} \quad (2-17)$$

则在 C_1^+ 和 C_b^+ 上为正向 (向右), 在 C_a^- 和 $C_2^- \cup C_3^-$ 上为反向 (向左)。

当 $x_1 < x_a < x_b < x_2 < x_c$ 时, 记

$$\begin{aligned} C_0 &= C_1^+ \cup C_a^- \cup C_b^+ \cup C_2^- \cup C_c^+ \cup C_3^-; \\ C_a^- &= C_0|_{(x_1, x_a)}, C_b^+ = C_0|_{(x_a, x_b)}, C_c^+ = C_0|_{(x_2, x_c)}; C_1^+ = C_0|_{(0, x_1)}, C_2^- = C_0|_{(x_b, x_2)}, C_3^- = C_0|_{(x_c, K)}. \end{aligned} \quad (2-18)$$

则在 C_1^+, C_b^+ 和 C_c^+ 上为正向 (向右), 在 C_a^-, C_2^- 和 C_3^- 上为反向 (向左)。

慢子系统2-2的动力学简记为表2-1, 其中 C_m 总代表曲线 C_0 以点 x_m 为终点的分支, 最后一支 C_3^- 代表以 $(0, K)$ 为终点的分支, 其方向总是反向 (向左)。

表 2-1 慢子系统2-2的动力学

Table 2-1 Dynamics of slow subsystem 2-2

分支	条件
$C_a^+ C_3^-$	$K \leq \sqrt{3}$
$C_a^+ C_1^- C_2^+ C_3^-$	$K > \sqrt{3}, h \leq \frac{3K}{K^2-3}, x_a < x_1$
$C_1^+ C_2^+ C_3^-$	$K > \sqrt{3}, h \leq \frac{3K}{K^2-3}, x_a = x_1$
$C_1^+ C_a^- C_2^+ C_3^-$	$K > \sqrt{3}, h \leq \frac{3K}{K^2-3}, x_1 < x_a < x_2$
$C_1^+ C_2^- C_3^-$	$K > \sqrt{3}, h \leq \frac{3K}{K^2-3}, x_a = x_2$
$C_1^+ C_2^- C_a^+ C_3^-$	$K > \sqrt{3}, h \leq \frac{3K}{K^2-3}, x_a > x_2$
$C_a^+ C_1^- C_b^+ C_c^- C_2^+ C_3^-$	$K > \sqrt{3}, h > \frac{3K}{K^2-3}, x_a < x_1, x_c < x_2$
$C_a^+ C_1^- C_b^+ C_c^- C_2^+ C_3^-$	$K > \sqrt{3}, h > \frac{3K}{K^2-3}, x_a < x_1, x_c = x_2$
$C_a^+ C_1^- C_b^+ C_c^- C_2^+ C_3^-$	$K > \sqrt{3}, h > \frac{3K}{K^2-3}, x_a < x_1, x_c > x_2$
$C_1^+ C_b^+ C_c^- C_2^+ C_3^-$	$K > \sqrt{3}, h > \frac{3K}{K^2-3}, x_a = x_1, x_c < x_2$
$C_1^+ C_b^+ C_2^- C_3^-$	$K > \sqrt{3}, h > \frac{3K}{K^2-3}, x_a = x_1, x_c = x_2$
$C_1^+ C_b^+ C_2^- C_c^+ C_3^-$	$K > \sqrt{3}, h > \frac{3K}{K^2-3}, x_a = x_1, x_c > x_2$
$C_1^+ C_a^- C_b^+ C_c^- C_2^+ C_3^-$	$K > \sqrt{3}, h > \frac{3K}{K^2-3}, x_a > x_1, x_c < x_2$
$C_1^+ C_a^- C_b^+ C_c^- C_2^+ C_3^-$	$K > \sqrt{3}, h > \frac{3K}{K^2-3}, x_a > x_1, x_c = x_2$
$C_1^+ C_a^- C_b^+ C_c^- C_2^+ C_3^-$	$K > \sqrt{3}, h > \frac{3K}{K^2-3}, x_a > x_1, x_c > x_2$

三个交点的情况在实际中显然是存在的, 例如 $K = 10, h = 0.4$ 。但如图2-6所示, 由于这种情况当 K 较大时才比较明显, 图像尺度较大, 难以直接读出所有动力学。于是本文对于三个交点的例子仅给出定性分析: 如图2-7, 2-8, 2-9所示, 选取一般的形状较直观的三次函数而非曲线 $y = F(x)$, 在其上也仅标出固定两个的极值点以及变动的三个交点, 其中三个交点均在每个情形的对应范围中独立选择较为直观的位置, 不要求共线, 因此定性分析与实际形状会有较大出入, 仅供判断轨道方向参考。

最后将系统2-2的动力学按照奇点的数量和位置分类。在不同条件下, 该子系统可能有 1, 3, 5 个奇点, 其中正奇点 (吸引的奇点) 分别有 1, 2, 3 个, 可能为曲线 $y = (x^2 + 1)(1 - \frac{x}{K})$ 的极小值点 $x_1 = \frac{K - \sqrt{K^2 - 3}}{3}$, 极大值点 $x_2 = \frac{K + \sqrt{K^2 - 3}}{3}$, 以及直线 $y = \frac{1}{h}x$ 与曲线的唯一交点 x_a 或三个交点 $x_a < x_b < x_c$ (直线与曲线相切的情形, 不计切点, 归为唯一交点), 交点与极值点重合的

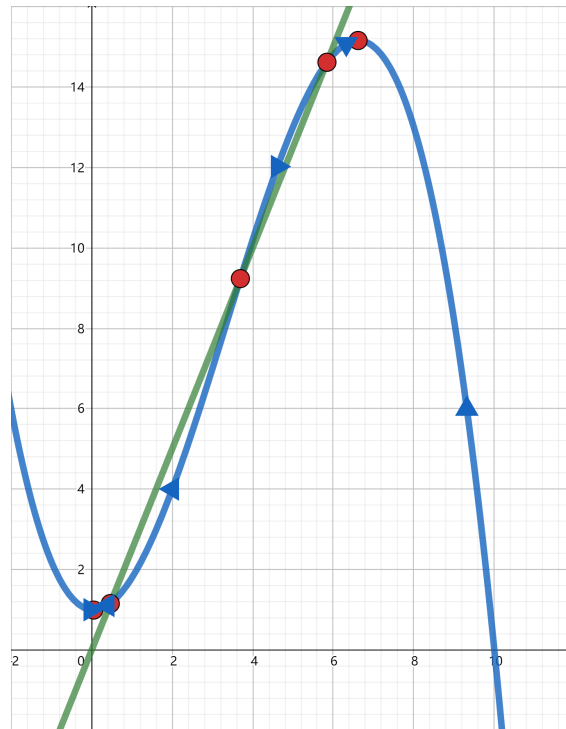


图 2-6 慢子系统轨道 : $K = 10; h = 0.4$

Figure 2-6 Slow-subsystem orbits: $K = 10; h = 0.4$

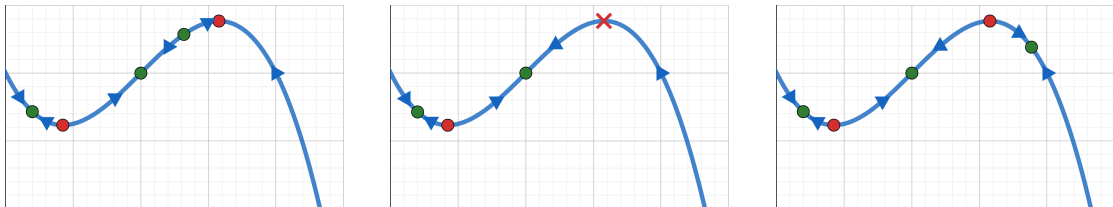


图 2-7 慢子系统轨道:2-10,11,12 定性分析

Figure 2-7 Slow-subsystem orbits: qualitative analysis for 2-10,11,12

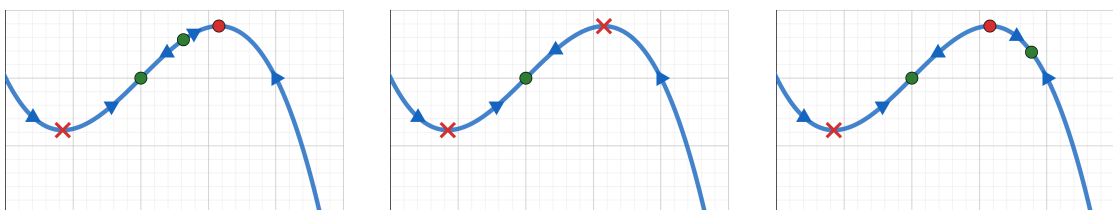


图 2-8 慢子系统轨道:2-13,14,15 定性分析

Figure 2-8 Slow-subsystem orbits: qualitative analysis for 2-13,14,15

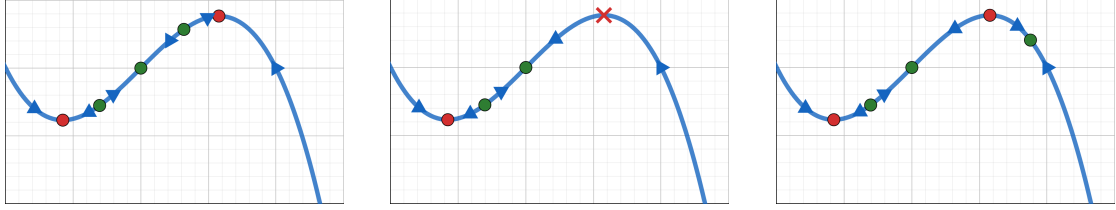


图 2-9 慢子系统轨道:2-16,17,18 定性分析

Figure 2-9 Slow-subsystem orbits: qualitative analysis for 2-16,17,18

情形只计极值点和非平凡 (与极值点不重合的) 交点。详见表2-2，吸引记 x^a ，排斥记 x^r 。

表 2-2 慢子系统2-2的奇点

Table 2-2 Equilibrium of slow subsystem 2-2

奇点	条件
x_a^a	$K \leq \sqrt{3}$
x_2^a	$K > \sqrt{3}, h \leq \frac{3K}{K^2-3}, x_a = x_1$
x_1^a	$K > \sqrt{3}, h \leq \frac{3K}{K^2-3}, x_a = x_2$
x_b^a	$K > \sqrt{3}, h > \frac{3K}{K^2-3}, x_a = x_1, x_c = x_2$
$x_a^a < x_1^r < x_2^a$	$K > \sqrt{3}, h \leq \frac{3K}{K^2-3}, x_a < x_1$
$x_1^a < x_a^r < x_2^a$	$K > \sqrt{3}, h \leq \frac{3K}{K^2-3}, x_1 < x_a < x_2$
$x_1^a < x_2^r < x_a^a$	$K > \sqrt{3}, h \leq \frac{3K}{K^2-3}, x_a > x_2$
$x_a^a < x_1^r < x_b^a$	$K > \sqrt{3}, h > \frac{3K}{K^2-3}, x_a < x_1, x_c = x_2$
$x_b^a < x_c^r < x_2^a$	$K > \sqrt{3}, h > \frac{3K}{K^2-3}, x_a = x_1, x_c < x_2$
$x_b^a < x_2^r < x_c^a$	$K > \sqrt{3}, h > \frac{3K}{K^2-3}, x_a = x_1, x_c > x_2$
$x_1^a < x_a^r < x_b^a$	$K > \sqrt{3}, h > \frac{3K}{K^2-3}, x_a > x_1, x_c = x_2$
$x_a^a < x_1^r < x_b^a < x_c^r < x_2^a$	$K > \sqrt{3}, h > \frac{3K}{K^2-3}, x_a < x_1, x_c < x_2$
$x_a^a < x_1^r < x_b^a < x_2^r < x_c^a$	$K > \sqrt{3}, h > \frac{3K}{K^2-3}, x_a < x_1, x_c > x_2$
$x_1^a < x_a^r < x_b^a < x_c^r < x_2^a$	$K > \sqrt{3}, h > \frac{3K}{K^2-3}, x_a > x_1, x_c < x_2$
$x_1^a < x_a^r < x_b^a < x_2^r < x_c^a$	$K > \sqrt{3}, h > \frac{3K}{K^2-3}, x_a > x_1, x_c > x_2$

2.3 快慢环

本节讨论系统1-5张弛振荡的存在条件。为了利用定理1(Fenichel 理论)，我们需要构造一个临界流形。本节将通过快子系统2-1和慢子系统2-2的轨道，构造一个快慢环 (Slow-fast cycle)，并给出它的存在条件。根据本文第三章定理3，张弛振荡环由快慢环唯一确定，因此本节讨论的快慢环存在条件就是张弛振荡存在条件。

根据张弛振荡现象的全局性，自全局任意一点出发的轨道经过有限时间后都将进入张弛

振荡环的邻域,不妨考虑始于临界曲线 $C_0 = \{(x, y) | y = F(x) = (x^2 + 1)(1 - \frac{x}{K})\}$ 上方的轨道。由于曲线 C_0 是慢子系统2-2的临界集,故当轨道远离曲线时,原系统1-5仅受快子系统2-1控制。根据2.1节对快子系统的动力学分析,其轨道为水平直线族 $y = k, \forall k \in \mathbb{R}$,并且在曲线上方取反向,在曲线下方取正向。

当 $K \leq \sqrt{3}$ 时, $F(x)$ 单调递减,曲线 C_0 为快子系统吸引奇点的集合。因此对于系统1-5始于曲线上的任何轨道,都将被其所在直线与曲线的交点吸引,最终接触曲线,进入慢子系统。当 $K \leq \sqrt{3}$ 时,慢子系统2-2存在唯一且吸引的奇点 x_a 。由于 $x_a \in C_0$,它也是快子系统的吸引奇点,进而原系统存在被 x_a 吸引的全局轨道,因而张弛振荡不存在。事实上,此时 x_a 就是原系统的全局吸引奇点。

当 $K > \sqrt{3}$ 时, $F(x)$ 有极小值点 $x_1 = \frac{K - \sqrt{K^2 - 3}}{3}$ 和极大值点 $x_2 = \frac{K + \sqrt{K^2 - 3}}{3}$,把曲线分为 $C_1|_{(0, x_1)}, C_2|_{(x_1, x_2)}, C_3|_{(x_2, K)}$ 三段, C_2 段为快子系统排斥奇点的集合,其余部分为吸引,不妨仅考虑 C_3 上方的轨道。同理, C_3 将原系统的轨道吸引至曲线上,进而其动力学进入慢子系统的控制范围。

为了讨论原系统由 C_3 进入曲线后的动力学,需要考虑它在曲线上遇到的首个奇点,即慢子系统最右端的奇点。根据2.2节对慢子系统的动力学分析,右端奇点可能为 x_a, x_b, x_c, x_1, x_2 ,均吸引。当右端奇点为 x_a, x_b, x_c 时,满足 $x_a, x_c > x_2, x_1 < x_b < x_2$,它们也是快子系统的吸引奇点,张弛振荡不存在;当右端奇点为 x_1, x_2 时,根据定理2, x_1, x_2 为折点,原系统应在此处发生跳跃,离开临界曲线,再次进入快子系统,但 x_1 处跳跃方向(反向)与快子系统(正向)相反,动力学无法判断,故要求右端奇点只能是 x_2 。

自临界曲线极大值点 x_2 出发、受快子系统控制水平向左的轨道,接下来将进入曲线的 $(0, x_1)$ 分支,或者直接进入 y 轴,由极大值点的纵坐标相对曲线纵截距的位置决定。令

$$G(x) = F(x) - 1 = -\frac{x}{K}(x^2 - Kx + 1) > 0,$$

要求判别式

$$\Delta = K^2 - 4 > 0 \Rightarrow K > 2,$$

得

$$x \in W = \left(\frac{K - \sqrt{K^2 - 4}}{2}, \frac{K - \sqrt{K^2 + 4}}{2} \right).$$

引理 1.

$$K > 2 \Rightarrow x_2 = \frac{K + \sqrt{K^2 - 3}}{3} \in W.$$

证明.

$$u(K) := x_2 - \frac{K - \sqrt{K^2 - 4}}{2} = -\frac{1}{6}(K - 2\sqrt{K^2 - 3} - 3\sqrt{K^2 - 4}),$$

$$u'(K) = -\frac{1}{6}\left(1 - \frac{2K}{\sqrt{K^2 - 3}} - \frac{3K}{\sqrt{K^2 - 4}}\right),$$

$$u'(K) > -\frac{1}{6}\left(1 - \frac{5K}{\sqrt{K^2 - 3}}\right) > 0 \Rightarrow u(K) > u(2) = 0;$$

$$v(K) := \frac{K - \sqrt{K^2 + 4}}{2} - x_2 = \frac{1}{6}(K + 3\sqrt{x^2 - 4} - 2\sqrt{K^2 - 3}),$$

$$v'(K) = \frac{1}{6}(1 + 3\sqrt{K^2 - 4} - 2\sqrt{K^2 - 3}),$$

$$v'(K) > \frac{1}{6}\left(1 + \frac{K}{\sqrt{K^2 - 3}}\right) > 0 \Rightarrow v(K) > v(2) = 0.$$

□

则当 $K > 2$ 时, 极大值大于纵截距, 轨道直接进入 y 轴; 当 $\sqrt{3} < K < 2$ 时, 轨道由 C_1 再次进入曲线。

首先讨论再次进入曲线后的动力学。同理, 张弛振荡要求曲线左端奇点为 x_1 , 此时 x_1 为折点, 轨道在 x_1 处再次离开曲线, 进入水平向右的快子系统轨道。最后, 这条轨道再次由 C_3 进入曲线, 周而复始, 形成闭合回路。至此, 我们找到了一个快慢环。记 $F(x_m) = F(x_2), x_m < x_2; F(x_n) = F(x_1), x_n > x_1$, 有定义

$$\gamma_0 = C_0|_{(x_m, x_1)} \cup \{y = F(x_1)\}|_{(x_1, x_n)} \cup C_0|_{(x_2, x_n)} \cup \{y = F(x_2)\}|_{(x_m, x_2)}, \quad (2-19)$$

要求 $\sqrt{3} < K < 2, h \leq \frac{3K}{K^2-3}, x_1 < x_a < x_2$, 或 $\sqrt{3} < K < 2, h > \frac{3K}{K^2-3}, x_1 < x_a < x_c < x_2$ 。

接下来讨论直接进入 y 轴后的动力学。为了计算轨道进入 y 轴后离开的位置, 本章需要引入进出函数。选取多项式 $P(x) = x^2$, 将快慢系统1-5改写为

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, y, \epsilon)x^2, \\ \frac{dy}{dt} &= \epsilon g(x, y, \epsilon), \end{aligned} \quad (2-20)$$

其中

$$f = (x^2 + 1)\left(1 - \frac{x}{K}\right) - y, g = y(x^2 + 1)(x - hy)$$

满足

$$g(0, y, 0) = -hy^2 < 0; f(0, y, 0) = 1 - y < 0, y > 1; f(0, y, 0) > 0, y < 1. \quad (2-21)$$

设折点 x_2 的纵坐标为 $y_M = (x_2^2 + 1)\left(1 - \frac{x_2}{K}\right)$, 由引理1得 $y_M > 1$, 下述引理证明了进出函数的存在性。

引理 2.

对于系统1-5, 存在唯一的 $\bar{y}^* < 1$, 使得

$$\int_{\bar{y}}^{y_M} \frac{f(0, y, 0)}{g(0, y, 0)} dy = 0. \quad (2-22)$$

证明. 将系统1-5代入方程2-22, 得

$$I(y) := \frac{1}{h} \int \frac{y-1}{y^2} dy = \frac{1}{h} \left(\frac{1}{y} + \log y \right).$$

$$I'(y) > 0 \Rightarrow y > 1 \Rightarrow I_{\min} = I(1), I_{\max} = I(0+) = I(+\infty) = +\infty.$$

因此 $I(y)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增。

对于 $\bar{y}^* < 1 < y_M$, 由介值定理, 存在唯一的 \bar{y}^* , 使得 $I(\bar{y}^*) = I(y_M)$, 即

$$\int_{\bar{y}^*}^{y_M} \frac{f(0, y, 0)}{g(0, y, 0)} dy = I(y)|_{\bar{y}^*}^{y_M} = 0.$$

□

离开 y 轴后, 若 $\bar{y}^* > y_N = (x_1^2 + 1)(1 - \frac{3}{K})$, 则轨道由 C_1 再次进入曲线, 先沿曲线下降至 (x_1, y_N) , 再沿快子系统返回 C_3 , 此处极小值点 (x_1, y_N) 也要求为左端奇点 (折点)。类似 2-19, 记 $F(x_m) = \bar{y}^*, x_m < x_1; F(x_n) = F(x_1), x_n > x_1$, 我们找到了第二类快慢环

$$\gamma_0 = \{x = 0\}|_{(\bar{y}^*, y_M)} \cup \{y = \bar{y}^*\}|_{(0, x_m)} \cup C_0|_{(x_m, x_1)} \cup \{y = y_N\}|_{(x_1, x_n)} \cup C_0|_{(x_2, x_n)} \cup \{y = y_M\}|_{(0, x_2)}, \quad (2-23)$$

首先左右端奇点要求 $K > 2, h \leq \frac{3K}{K^2-3}, x_1 < x_a < x_2$, 或 $K > 2, h > \frac{3K}{K^2-3}, x_1 < x_a < x_c < x_2$, 其次 $\bar{y}^* > y_N, I(y)|_{\bar{y}^*}^M = 0, I'(y > 1) > 0 \Rightarrow I(y_N) < I(y_M)$ 。

若 $\bar{y}^* \leq y_N$, 则轨道直接返回 C_3 , 记 $\bar{y}^* = F(\bar{x})$, 则第三类快慢环为

$$\gamma_0 = \{x = 0\}|_{(\bar{y}^*, y_M)} \cup \{y = \bar{y}^*\}|_{(0, \bar{x})} \cup C_0|_{(x_2, \bar{x})} \cup \{y = y_M\}|_{(0, x_2)}, \quad (2-24)$$

关于奇点仅要求右端为 (x_2, y_M) , 综合六种情形得 $K > 2, h \leq \frac{3K}{K^2-3}, x_a < x_2$ 或 $K > 2, h > \frac{3K}{K^2-3}, x_c < x_2$ 。当 $\bar{y}^* = y_N$ 时, 恰好为 2-23 和 2-24 的临界情况, 可以轨道与曲线下切并直接返回 C_3 , 张弛振荡没有丢失。

当 $K = 2$ 时, 自折点 (x_2, y_M) 出发的水平向左的轨道恰好经过慢子系统临界流形两个分支的交点 (称为临界点)。该点的动力学暂时无法判断, 但本文在图 2-10 中给出了当 $K = 2, h = 0.5, \epsilon = 0.01$ 时系统 1-5 张弛振荡的数值模拟, 这说明了上文给出的三种快慢环及其存在条件仅仅是必要条件, 系统 1-5 尚有更多的动力学等待研究。

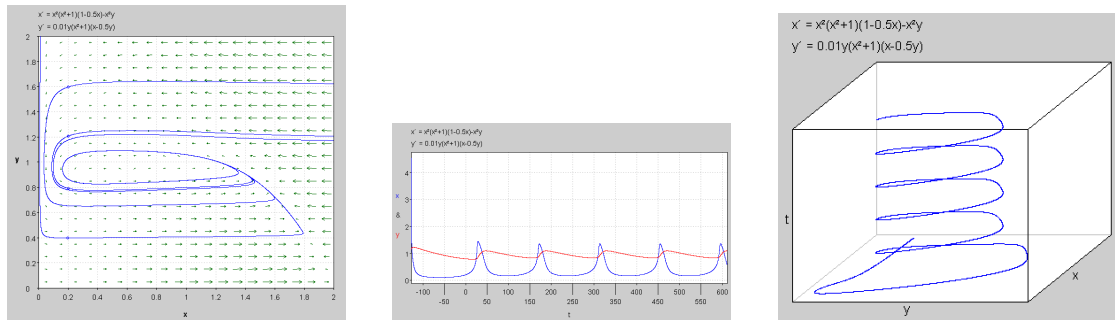


图 2-10 快慢系统轨道: $K = 2, h = 0.5, \epsilon = 0.01$

Figure 2-10 Slow-fast system orbits: $K = 2, h = 0.5, \epsilon = 0.01$

第三章 主要结论及证明

第二章主要分析了快子系统2-1和慢子系统2-2的完整动力学，进而使用极限子系统的轨道构造了快慢环 γ_0 ，并给出了对应的存在条件，计 W 。本章将利用 Fenichel 理论^[13] 与几何奇异摄动理论^[17]，证明以快慢环为临界流形的张弛振荡的存在性和唯一性。

定理 3.

对于系统1-5，设 $(h, K) \in W$ ，令 V 为环 γ_0 的管状邻域。则对于 $0 < \epsilon \ll 1$ ，存在唯一的极限环 $\gamma_\epsilon \subset V$ ，并随着 $\epsilon \rightarrow 0$ 在第一象限内以 Hausdorff 距离收敛于 γ_0 。

证明. 根据定理1，由于 C_0^- 正规双曲吸引，存在以 $O(\epsilon)$ 距离接近 C_0^- 的慢流形 C_ϵ^- 。根据定理2，慢流形 C_ϵ^- 靠近吸引的临界流形 C_0^- ，直到其抵达折点 (x_M, y_M) 附近，接着跳跃到另一个吸引分支 C_0^+ 附近。

令 x_l 为足够小的正数，定义两个交叉区域

$$\Delta^{in} := \{(x_l, y) \in V | y \in I_{in}\}, \Delta^{out} := \{(x_l, y) \in V | y \in I_{out}\},$$

其中 I_{in} 和 I_{out} 为以 y_M 和 $y_{out} = p_0(y_M)$ 为中心的小区间。定义由抽象的快慢系统2-20诱导的过渡映射

$$\Pi : \Delta^{in} \rightarrow \Delta^{in},$$

由以下两个映射复合：

$$\Pi_1 : \Delta^{in} \rightarrow \Delta^{out}, \Pi_2 : \Delta^{out} \rightarrow \Delta^{in}.$$

接下来讨论映射 Π_1, Π_2 的性质。

(1) 效仿引理2的证明步骤， $\forall y_0 \in I_{in}, \exists 0 < p_0(y_0) < 1$ s.t.

$$\int_{p_0(y_0)}^{y_0} \frac{f(0, y, 0)}{g(0, y, 0)} dy = 0.$$

由引理2， $p_0(y_M) = \bar{y}^*$ 。

根据1.4节的分析，系统1-5自 Δ^{in} 上 (x_0, y_0) 出发的轨道必须经过 Δ^{out} 上的 $(x_0, p_\epsilon(y_0))$ ，并且 $p_\epsilon(y_0)$ 随 $\epsilon \rightarrow 0$ 以 C^1 拓扑收敛于 $p_0(y_0)$ 。于是可以定义

$$\Pi(x_0, y_0) = (x_0, p_\epsilon(y_0)).$$

(2) 对于自 Δ^{out} 出发的两条轨道 γ_ϵ^1 和 γ_ϵ^2 ，根据定理2， γ_ϵ^1 和 γ_ϵ^2 将以 $O(e^{-1/\epsilon})$ 被 C_ϵ^- 吸引，接着沿 C_ϵ^- 上升，在折点 (x_M, y_M) 处指数收缩，一同跳至 Δ^{in} 。

由 (1) 和 (2) 可得过渡映射 Π 是 $O(e^{-1/\epsilon})$ 压缩映射。由压缩映射原理， Π 于 Δ^{in} 中存在唯一的稳定不动点。该不动点确定了 $0 < \epsilon \ll 1$ 时系统1-5经过 Δ^{in} 的唯一的张弛振荡环 $\gamma_\epsilon \subset V$ 。

再次运用定理1，我们证明了张弛振荡环 γ_ϵ 随 $\epsilon \rightarrow 0$ 以 Hausdorff 距离收敛于快慢环 γ_0 。 □

全文总结

本文通过极限子系统的动力学分析和几何奇异摄动理论，证明了一类简化的 Monod-Haldane 模型张弛振荡环的存在性和唯一性。

在模型方面，本文选取了带有第四类 Holling 功能反应的模型进行研究，在 Holling 捕食者-猎物模型中比较复杂、有更多的研究空间。

在动力学分析中，本文详细分析了慢子系统在 3 次临界曲线上的动力学，共计 15 种情况。为了回避带两个参数 3 次方程的求根困难，本文选择从几何角度入手，通过分离参数，令仅含单一参数的方程轨迹相交，能够快速给出交点位置的隐式分析，但显式分析的困难仍未得到正面解决，有待进一步研究。

通过几何奇异摄动理论，本文证明了特定参数范围中存在的张弛振荡现象，但对于其他条件下的动力学尚未触及。在张弛振荡不发生的情况下，临界集附近可能存在不同的极限环，同样有待通过几何奇异摄动理论进行研究。

参考文献

- [1] May R M C. Stability and complexity in model ecosystems[M]. Princeton university press, 2001.
- [2] Holling C S. The functional response of predators to prey density and its role in mimicry and population regulation[J]. The Memoirs of the Entomological Society of Canada, 1965, 97(S45): 5-60.
- [3] Andrews J F. A mathematical model for the continuous culture of microorganisms utilizing inhibitory substrates[J]. Biotechnology and Bioengineering, 1968, 10(6): 707-723.
- [4] Sokol W, Howell J A. Kinetics of phenol oxidation by washed cells[J]. Biotechnology and Bioengineering, 1981, 23(9): 2039-2049.
- [5] Tener J S. Muskoxen in Canada: a biological and taxonomic review[M]. Dept. of Northern Affairs and National Resources, Canadian Wildlife Service, 1965.
- [6] Xiao D, Ruan S. Global analysis in a predator-prey system with nonmonotonic functional response[J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 2001, 61(4): 1445-1472.
- [7] Xiao D, Ruan S. Multiple bifurcations in a delayed predator-prey system with nonmonotonic functional response[J]. Journal of Differential Equations, 2001, 176(2): 494-510.
- [8] Li Y, Xiao D. Bifurcations of a predator-prey system of Holling and Leslie types[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2007, 34(2): 606-620.
- [9] Wang C, Zhang X. Relaxation oscillations in a slow-fast modified Leslie-Gower model[J]. Applied Mathematics Letters, 2019, 87: 147-153.
- [10] Grasman J. Asymptotic methods for relaxation oscillations and applications[M]. Springer Science & Business Media, 2012.
- [11] Atabaigi A, Barati A. Relaxation oscillations and canard explosion in a predator-prey system of Holling and Leslie types[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2017, 36: 139-153.
- [12] De Maesschalck P, Schecter S. The entry-exit function and geometric singular perturbation theory[J]. Journal of Differential Equations, 2016, 260(8): 6697-6715.
- [13] Fenichel N. Geometric singular perturbation theory for ordinary differential equations[J]. Journal of differential equations, 1979, 31(1): 53-98.
- [14] Kaper T J, Jones C K R T. A primer on the exchange lemma for fast-slow systems[M]//Multiple-time-scale dynamical systems. Springer, New York, NY, 2001: 65-87.

- [15] Dumortier F, Roussarie R. Canard cycles and center manifolds[M]. American Mathematical Soc., 1996.
- [16] Arditi R, Ginzburg L R. How species interact: altering the standard view on trophic ecology[M]. Oxford University Press, 2012.
- [17] Krupa M, Szmolyan P. Extending geometric singular perturbation theory to nonhyperbolic points—fold and canard points in two dimensions[J]. SIAM journal on mathematical analysis, 2001, 33(2): 286-314.

致 谢

逝者如斯，不舍昼夜。匆匆四载，为君驻足。

结识张祥教授，是我大学时代的一则幸福。在我大四赴美交流后，您是第一位接受与我远程讨论的导师。在紧张不逊大一的课程安排下，我一年间的研究进度比国内的同伴们落后太多，唯有张老师的谅解、鞭策与灌顶醍醐激励我如期完成了毕业设计。

回国所见，数学科学学院的老师们搬进新大楼，2015 级的同学们各为前程奔走，那年从祖国各地召集我们共赴东方明珠的交大学风，仍在闵行校区日新月异的楼宇间“张弛振荡”，不变初心、吹向我们螺旋上升的长远未来。

党的领导、国家的培养、父母的爱、以及无数的你们，在此收敛，致敬！

RELAXATION OSCILLATIONS IN A SLOW-FAST MODIFIED MONOD-HALDANE MODEL

In this paper, we prove the existence and uniqueness of relaxation oscillation cycle of a simplified Monod-Haldane predator-prey model via the dynamics analysis of limit subsystems and geometric singular perturbation theory.

Our model is chosen according to its non-monotonic Holling type IV functional response, which is a bit more complicated among all Holling types. Since type I, II and III are all monotonic in first quadrant, our model has a larger space for further research and possibly more utilities in real ecology.

To begin with, we observe different time scales in our model with practical meaning, thus we are able to rescale the system and obtain a small parameter ϵ . Since ϵ is small, $\epsilon \rightarrow 0$ gives us the limit case of dynamics. To abandon or to focus on ϵ induce fast and small subsystems respectively. The slow-fast structure gives us more points of insight.

The fast subsystem is relatively easy, because $\frac{dy}{dt}$ indicates its orbit is a group of horizontal lines. On the other side, the slow one occurs to be rather difficult. Whose critical curve already provides up to 2 extreme points, the slow subsystem itself also supplies possibly 3 nontrivial travelling equilibriums, given by a cubic function with 2 parameters. To avoid intricate cubic formula sets, a geometric point of view seems more clear. After separating parameters, we transform the function into the problem that where are the points of intersection between a straight line and a cubic curve with single parameter. Although the coordinates are also difficult to compute, the equation of their derivatives appears rather concise, the geometric meaning of which is the tangency of our origin curve with a group of straight lines parallel to the primary one, or more technically the tangent space of curve. Similar to the method of linear programming, we move the origin line in the tangent space until tangent exactly with the curve, corresponding with the case of 2 roots. Inside or out of 2 limit cases, there are 3 or 1 points of intersection. After discussing on the position of possible roots against the fixed extreme points, we finally make it up to 15 cases. However, to compute 3 roots exactly will be another paper of work.

After a lot of work on limit dynamics, we have already work out the position of fold points, where the orbits of origin system will change from following slow subsystem to fast ones according to Fenichel's theory, while where the orbits jump back to slow curve should be studied by the entry-exit function. Such function has a strict condition to be followed, thus we must be careful when rescaling our system in preface. A new construction is applied in this paper to satisfy the condition.

At last, we show the existence and uniqueness of relaxation oscillation cycle both theoretically and numerically. The full cycle is constituted by 2 fragments from fast orbits and 2 from slow ones, whose connection is guaranteed by geometric singular perturbation.