Θεωρία και υποδείγματα βελτιστοποίησης

1η Σειρά Ασκήσεων

Άσκηση 1

α) Έστω x^* βέλτιστη λύση του $\max[f(x)+g(x)]$

Τότε $\max[f(x)+g(x)] = f(x^*)+g(x^*)$

Όμως
$$\left.\begin{aligned} f(x^*) &\leq \max f(x) \\ g(x^*) &\leq \max g(x) \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(x^*)+g(x^*) \leq \max f(x) + \max g(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\max[f(x)+g(x)] \leq \max f(x) + \max g(x)}$$

β) Επιλέγουμε τις συναρτήσεις $f(x) = -x^2$

$g(x) = -(x-2)^2$

Για $k(x) = f(x)+g(x) = -x^2-x^2+4x-4 = -2x^2+4x-4$

$k'(x) = -4x+4$

	$-\infty$	1	$+\infty$
$k'(x)$	$+$	0	$-$
$k(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

Η $k(x)$ έχει τοπικό μέγιστο στο $x=1$ το $k(1)=2$

Άρα
$$\boxed{\underbrace{\max(f(x)+g(x))}_{k(1)=-2=f(1)+g(1)} \neq \underbrace{\max f(x)}_{f(0)=0} + \underbrace{\max g(x)}_{g(2)=0}}$$

γ) Επιλέγουμε τις συναρτήσεις $f(x)=5 \rightsquigarrow \max f(x)=5$

$g(x)=10 \rightsquigarrow \max g(x)=10$

Για $K(x)=f(x)+g(x) \Rightarrow K(x)=15$

$\rightsquigarrow \max K(x)=15$

Άρα $\underbrace{\max(f(x)+g(x))}_{15} = \underbrace{\max f(x)}_{5} + \underbrace{\max g(x)}_{10}$

$\boxed{\text{Άσκηση 2}}$

Εφόσον το πεδίο ορισμού των f, g είναι κυρτό σύνολο άρα και το πεδίο ορισμού της h κυρτό σύνολο

Έστω $x_1, x_2 \in D_h$ και $t \in (0,1)$

$$th(x_1)+(1-t)h(x_2) \geq tf(x_1)+(1-t)f(x_2) \geq f(tx_1+(1-t)x_2)$$

$$th(x_1)+(1-t)h(x_2) \geq tg(x_1)+(1-t)g(x_2) \geq g(tx_1+(1-t)x_2)$$

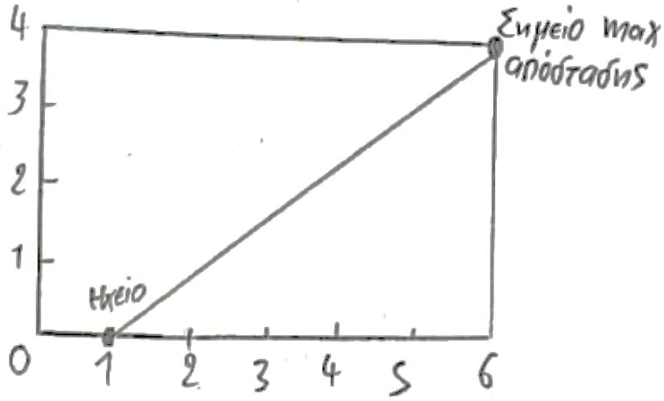
Άρα:

$$th(x_1)+(1-t)h(x_2) \geq \max\left[f(tx_1+(1-t)x_2), g(tx_1+(1-t)x_2)\right] = h(tx_1+(1-t)x_2)$$

Άρα h κυρτή συνάρτηση

Ασκηση 3

α)



Χρησιμοποιώντας Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε :

max απόσταση $= \max\sqrt{(x-1)^2+\psi^2}$ με $x \leq 6$

$\psi \leq 4$

$x \geq 0, \psi \geq 0$

β) Από Εσσιανό Πίνακα έχουμε :

$$H(x,\psi) = \frac{1}{\left((x-1)^2+\psi^2\right)^{\frac{3}{2}}} \begin{bmatrix} 1-x & \psi(1-x) \\ (1-x)\psi & \psi \end{bmatrix}$$

Για $x=3, \psi=2$ $\qquad H(3,2) = \frac{1}{8^{\frac{3}{2}}} \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$

↳ Αρνητική Ιδιοτιμή $=-20$

Ο πίνακας δεν είναι θετικά ημιορισμένος

Άρα η αντικειμενική συνάρτηση δεν είναι κυρτή

Άρα ούτε το πρόβλημα είναι κυρτό

δ) Με χρήση AMPL :

```
var X>=0 ;
var ψ>=0 ;

maximize f: sqrt((x-7)^2+ψ^2);
s.t. c1: X<=6 ;
s.t. c2: ψ<=4 ;

data :
let X:=2
let ψ:=2

solve;
display X,ψ,f;
```

Έξοδος

⋮

X=6
ψ=4
f=6,40312

Άρα η βέλτιστη λύση είναι το σημείο με συντεταγμένες (6,4)
(Πάνω δεξιά γωνία)

Άσκηση 4

α) Έχουμε :

X : Ενέργεια που παράγουμε από τα φωτοβολταϊκό

Ψ : Ενέργεια που αγοράζουμε από τον πάροχο

$$\min \text{ κόστος} = \min(0{,}1X + 0{,}3\Psi) \quad , \text{ με } \quad \begin{aligned} &0 \le X \le 2000 \\ &\Psi \geq 0 \\ &X + \Psi = 5000 \end{aligned}$$

β)
```
Var X>=0 ;
var ψ>=0 ;
minimize f : 0.1*X+ 0.3*ψ ;
s.t. c1 : X<=2000 ;
     c2 : X+ψ>=5000 ;

solve ;
display X,ψ,f ;
```

Έξοδος

X=2000

ψ=3000

f=1100

Το βέλτιστο είναι να παραχθεί η μέγιστη δυνατή ποσότητα μέσω φωτοβολταϊκού και η υπόλοιπη να αγοραστεί από τον πάροχο γ) X, ψ όμοια με (α)

Z: Δυαδικός τελεστής για το αν θα υπάρχει ή όχι κόστος συντήρησης για το φωτοβολταϊκό
(0: ΟΧΙ, 1: ΝΑΙ)

$$\min \text{κόστος} = \min(0{,}1X + 0{,}3\psi + 50z + 30)$$

με: $0 \leq X \leq 2000$

$\psi \geq 0$

$X + \psi = 5000$

$X \leq 2000z$

$z \in \{0,1\}$

Άσκηση 5

Το πρόβλημα είναι στιγμιότυπο του bin packing

Ως ακέραιο γραμμικό πρόγραμμα διατυπώνεται :

min σακούλες = $\min(\psi_1+\psi_2+\psi_3+\psi_4)$

Ε.Ш.

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=1$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=1$$
$$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=1$$
$$x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}=1$$
$$x_{11}+x_{21}+1{,}5x_{31}+2{,}5x_{41}\leq 4\psi_1$$
$$x_{12}+x_{22}+1{,}5x_{32}+2{,}5x_{42}\leq 4\psi_2$$
$$x_{13}+x_{23}+1{,}5x_{33}+2{,}5x_{43}\leq 4\psi_3$$
$$x_{14}+x_{24}+1{,}5x_{34}+2{,}5x_{44}\leq 4\psi_4$$

- $x_{ij}=1$ ανν το i-οστό αντικείμενο τοποθετείται στη j-οστή σακούλα
- $\psi_j=1$ ανν η j-οστή σακούλα δεν είναι άδεια
- $x_{ij},\psi_j\in\{0,1\}$

  $i,j=1,\dots,4$

x_{ij} ; ψ_j

Άσκηση 6

Έχουμε την αντικειμενική συνάρτηση $F(x_1,x_2) = 2x_1 + x_2^2 + \log(x_1+x_2+1)$

Χρησιμοποιούμε τον Εσσιανό πίνακα:

$$H_f(x_1,x_2) = \begin{bmatrix} \frac{d^2f}{dx^2} & \frac{d^2f}{dx\,d\psi} \\ \frac{d^2f}{d\psi\,dx} & \frac{d^2f}{d\psi^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d^2f}{dx_1^2} & \frac{d^2f}{dx_1\,dx_2} \\ \frac{d^2f}{dx_2\,dx_1} & \frac{d^2f}{dx_2^2} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2-\frac{1}{x_1+x_2+1} & 2-\frac{1}{x_1+x_2+1} \\ -\frac{1}{x_1+x_2+1} & 2-\frac{1}{x_1+x_2+1} \end{bmatrix}$$

$\hookrightarrow$ Ιδιοτιμή $= 4 - 2\frac{1}{x_1+x_2+1}$

Θα είναι πάντα θετική διότι $x_1+x_2 > -1$

Άρα το αρχικό πρόβλημα είναι <u>κυρτό</u>

Άσκηση 6

Οι τοποθεσίες θα συμβολίζονται ως εξής:

- Ακρόπολη → A
- Ναός του Ολυμπίου Διος → N
- Βιβλιοθήκη του Αδριανού → B
- Εθνικός Αρχαιολογικό Μουσείο → Є

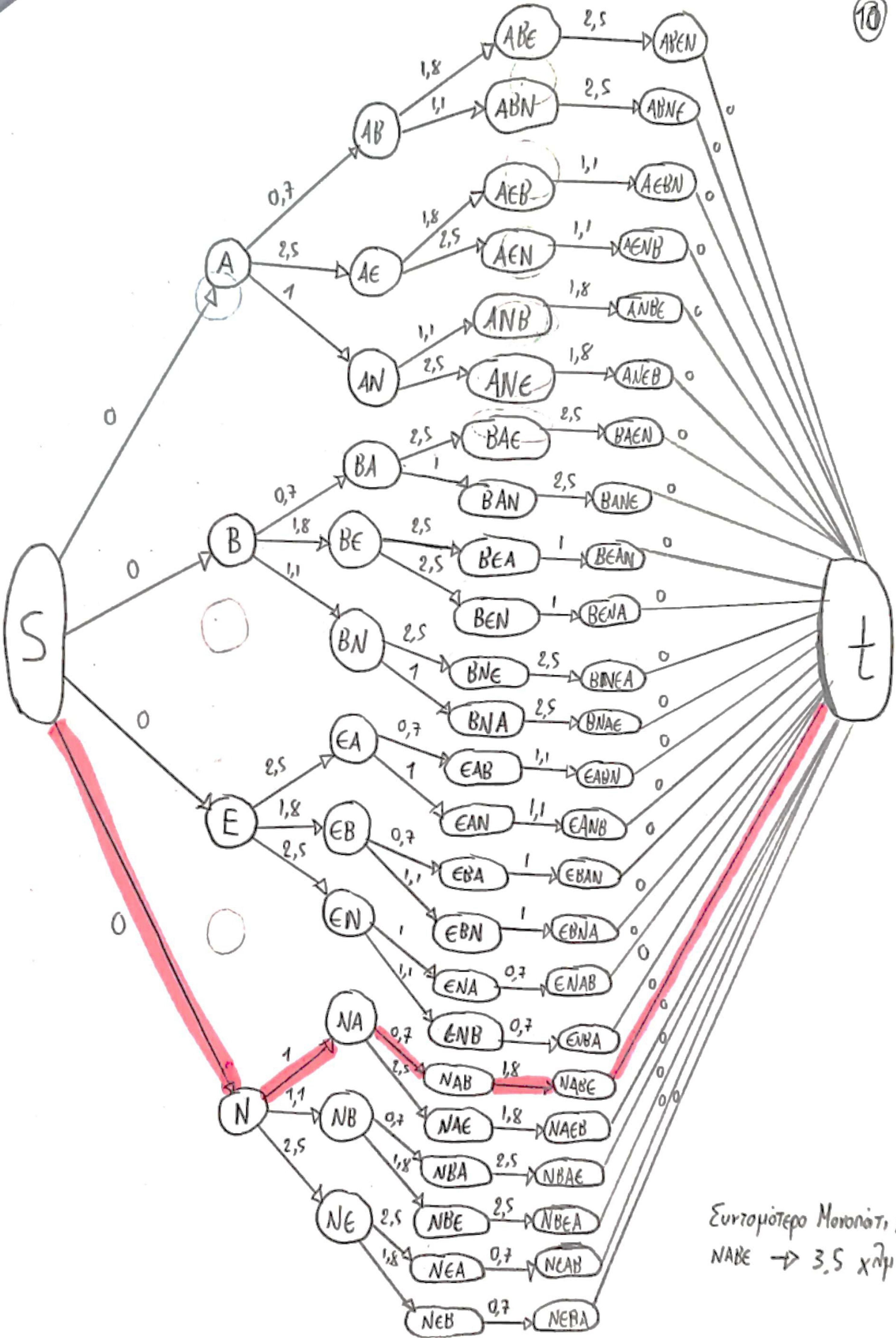
Οι Αποστάσεις ανάμεσα στους Αρχαιολογικούς Χώρους είναι: (σε χλμ)

A → N = 1
A → B = 0,7
A → Є = 2,5
N → B = 1,1
N → Є = 2,5
B → Є = 1,8

	A	N	B	Є
A	–	1	0,7	2,5
N	1	–	1,1	2,5
B	0,7	1,1	–	1,8
Є	2,5	2,5	1,8	–

Θα χρησιμοποιήσουμε γράφο για να διαμορφώσουμε το πρόβλημα με δυναμικό προγραμματισμό.

Το πρόβλημα διαμορφώνεται ισοδύναμα σε Πρόβλημα Εύρεσης Συντομότερου Μονοπατιού.



Συντομότερο Μονοπάτι:
NABE → 3,5 χλμ

Ασκηση 7

Παρατηρούμε ότι είναι στιγμιότυπο του Knapsack

Χωρητικότητα σακιδίου → 4

4 αντικείμενα αξίας 1,2,2,3

Αντίστοιχα βάρη 2,3,1,2

Το διατυπώνουμε λοιπόν ως εξής:

Μέγιστη χωρητικότητα = B

n Αντικείμενα

a_i : Αξία αντικ. i

β_i : Βάρος αντικ. i

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{Επιλέγεται το } i \\ 0 & \text{Δεν επιλέγεται το } i \end{cases}$$

$$\max \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \qquad \text{ε.ω.} \quad \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i \leq B$$

$$x_i \in \{0,1\}$$