台州学院 2021-2022 学年 第 1 学期

____级________________专业《线性代数》期末试卷(A)(闭卷)

分项	选择题	填空题	计算题	证明题	总计
分值	15	15	50	20	100

一、选择题（共 15 分，共 5 个小题，每小题 3 分）

1. 下列四个选项中，与 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 8 \\ 7 & 9 & 5 \end{vmatrix}$ 的值相等的是(　　).

(A) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & 8 \\ 9 & 7 & 5 \end{vmatrix}$ (B) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 8 \\ 0 & 5 & 16 \end{vmatrix}$ (C) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 7 & 9 & 5 \end{vmatrix}$ (D) $-\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 6 & 4 & 10 \\ 7 & 9 & 16 \end{vmatrix}$

2. 若 A 和 B 为可逆方阵，下列计算正确的是(　　).

(A) $|A+B|=|A|+|B|$ (B) $|AB|=|B||A|$ (C) $(AB)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$ (D) $(AB)^T=A^TB^T$

3. 若 A 和 B 为可逆方阵，则矩阵方程 $ABX=C$ 的求解结果是(　　).

(A) $X=\frac{C}{AB}$ (B) $X=A^{-1}CB^{-1}$ (C) $X=B^{-1}A^{-1}C$ (D) $X=A^{-1}B^{-1}C$

4. 线性变换 $\begin{cases} y_1=x_3 \\ y_2=2x_2 \\ y_3=3x_1 \end{cases}$ 对应的 3 阶方阵为(　　).

(A) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. 下列选项是正交矩阵的是(　　).

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} cos\theta & sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

二、填空题（共 15 分，共 5 个小题，每小题 3 分）

1. 排列 87654321 的逆序数为__________.

2. 计算 $\begin{vmatrix} -3 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$ 的代数余子式 A_{21}=__________.

3. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$ 和 $B=\begin{pmatrix}4&2&-1\\3&-1&-2\end{pmatrix}^T$，则 $\left|\frac{1}{5}AB\right|=$ ________.

4. 齐次线性方程组 $A_{m\times n}X=0$ 只有零解的充要条件____________.

5. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 能够线性表示向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$，

则$R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$ ______$R(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$（提示：此处选填">、<、≥、≤、="等符号）.

三、计算题（共 50 分，共 5 小题，每小题 10 分）

1. 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}1+1&1&1&1\\1&1+2&1&1\\1&1&1+4&1\\1&1&1&1+8\end{vmatrix}$.

2. 设 $A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}$，且 $AX=2X+A$，求 X.

3. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&8&3&0\\2&-3&0&7&8\\3&-2&5&8&7\\1&0&3&2&1\end{pmatrix}$，求矩阵 A 的列向量组的一个最大无关组，

并把其余列向量用最大无关组线性表示.

4. 设线性方程组$\begin{cases}(2-\lambda)x_1+2x_2-2x_3=1\\2x_1+(5-\lambda)x_2-4x_3=2\\-2x_1-4x_2+(5-\lambda)x_3=-\lambda-1\end{cases}$，问 λ 取何值时，此方程组无解、

有惟一解、无限多解？并在有无限多解时求其通解.

5. 求解矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

四、证明题（共 20 分，共 2 小题，每小题 10 分）

1. 若方阵 A 满足 $A^2+A-3E=0$，证明：$A+2E$ 可逆，且 $(A+2E)^{-1}=A-E$.

2. 已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，且向量组 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 满足：

$$\begin{cases}\beta_1+\alpha_2+\alpha_3=0\\\beta_2+\alpha_3+\alpha_4=0\\\alpha_1+\beta_3+\alpha_4=0\\\alpha_1+\alpha_2+\beta_4=0\end{cases}$$

请判断：向量组 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 是线性相关的，还是线性无关的？并证明之.

台州学院 2021-2022 学年 第 1 学期

____级____________专业《线性代数》期末试卷(B)(闭卷)

分项	选择题	填空题	计算题	证明题	总计
分值	15	15	50	20	100

一、选择题 (共 15 分，共 5 小题，每小题 3 分)

1. 下列四个选项中，与$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$值不相等的是(　　).

(A) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 16 & 9 & 4 \end{vmatrix}$　(B) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{vmatrix}$　(C) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$　(D) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 5 & 16 \end{vmatrix}$

2. 若 A 和 B 为 n 阶可逆方阵，k 为一个实数，下列计算正确的是(　　).

(A) $AB=BA$　(B) $(AB)^2=A^2B^2$　(C) $|kA|=k|A|$　(D) $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

3. 若 A 和 B 为可逆方阵，则矩阵方程 $XAB=C$ 的求解结果是(　　).

(A) $X=\frac{C}{AB}$　(B) $X=A^{-1}CB^{-1}$　(C) $X=CB^{-1}A^{-1}$　(D) $X=CA^{-1}B^{-1}$

4. 线性变换 $\begin{cases} y_1=3x_1 \\ y_2=2x_2 \\ y_3=x_3 \end{cases}$ 对应的 3 阶方阵为(　　).

(A) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　(B) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$　(C) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　(D) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. 下列选项不是正交矩阵的是(　　).

(A) $\begin{pmatrix} -cos\theta & sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$

二、填空题 (共 15 分，共 5 小题，每小题 3 分)

1. 排列 183654729 的逆序数为__________.

2. 计算 $\begin{vmatrix} -3 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$ 的代数余子式 A_{23}=__________.

3. 设向量 $\alpha=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ 满足$(\alpha\alpha^T)^{2022}=k\cdot\alpha\alpha^T$，则 $k=$________.

4. 齐次线性方程组 $A_{m\times n}X=0$ 有非零解的充要条件____________.

5. 设向量组 A: $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 能由向量组 B: $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性表示，则这两个向量组的秩 $R(A)$ ___=___ $R(B)$（提示：此处选填“>、<、≥、≤、=”等数学符号）.

三、计算题（共 50 分，共 5 个小题，每小题 10 分）

1. 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}1&1&1&2\\2&2&4&2\\4&8&4&4\\16&8&8&8\end{vmatrix}$

2. 求解矩阵方程 $\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&2&-2\\1&-2&3\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}3&-1\\4&2\\1&-1\end{pmatrix}$.

3. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&1&1&2\\-1&5&0&2&1\\3&-1&2&0&3\\1&4&1&1&0\end{pmatrix}$，求矩阵 A 的列向量组的一个最大无关组，并把其余列向量用最大无关向量组线性表示.

4. 求解线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=1\\x_1+2x_2+3x_3+4x_4=5\\3x_1+4x_2+5x_3+6x_4=7\end{cases}$.

5. 求解矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

四、证明题（共 20 分，共 2 个小题，每小题 10 分）

1. 若$A^k=0\ (k\in Z^+)$，证明：$(E-A)^{-1}=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}$.

2. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 与向量组 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 满足关系式：

$$\begin{cases}\beta_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=0\\\alpha_1+\beta_2+\alpha_3+\alpha_4=0\\\alpha_1+\alpha_2+\beta_3+\alpha_4=0,\\\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\beta_4=0\end{cases}$$

证明：向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 与向量组 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 等价.

____级____________专业《线性代数》期末试卷(A)(闭卷)

分项	选择题	填空题	计算题	综合题	总计
分值	15	15	50	20	100

一、选择题 (共 15 分，共 5 小题，每小题 3 分)

1. 下列四个选项中，与 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}$ 值不相等的是(　　).

(A) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c & b & a \\ f & e & d \end{vmatrix}$ (B) $\begin{vmatrix} 1 & a & d \\ 1 & b & e \\ 1 & c & f \end{vmatrix}$ (C) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & e-d & f-d \end{vmatrix}$ (D) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ d & e-d & f-d \end{vmatrix}$

2. 若 A 和 B 为 n 阶可逆方阵，k 为一个实数，下列计算正确的是(　　).

(A) $AB=BA$　(B) $(AB)^2=A^2B^2$　(C) $|kA|=k|A|$　(D) $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

3. 设$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31}+a_{11} & a_{32}+a_{12} & a_{33}+a_{13} \end{pmatrix}$，以及初等矩阵

$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$和$Q=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，则下述成立的关系式是（　）

(A) $APQ=B$　(B) $AQP=B$　(C) $PQA=B$　(D) $QPA=B$

4. 设 n 阶方阵 A 的行列式 $|A|=0$，则下列结论正确的是(　)

(A) A 中必有两列元素对应成比例

(B) A 列向量组的秩 $R(A)=n$

(C) A 中必有一列向量是其余列向量的线性组合

(D) A 中任意一列向量均可由其余列向量线性表示

5. 下列选项不是正交矩阵的是(　　).

(A) $\begin{pmatrix} -cos\theta & sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 0.6 & 0.8 \\ 0.8 & -0.6 \end{pmatrix}$

二、填空题 (共 15 分，共 5 小题，每小题 3 分)

1. 排列 81726354 的逆序数为__________.

2. 行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & k \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$ 中的代数余子式 A_{23}=__________.

3. 设$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}$，则 A^2 的秩为______.

4. 已知α_1,α_2为 2 维列向量，矩阵$A=(2\alpha_1-\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2),B=(\alpha_1,\alpha_2)$，若 $|A|=6$，则 $|B|=$ ______.

5. 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&k&3\\3&-1&1\end{pmatrix}$，$B$ 是一个 3 阶非零方阵，且 $AB=0$，则 $k=$____.

三、计算题 (共 50 分，共 5 小题，每小题 10 分)

1. 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}2&2&3&4\\1&4&3&4\\1&2&6&4\\1&2&3&8\end{vmatrix}$.

2. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}$和 $B=\begin{pmatrix}1&1\\4&-1\\-1&0\end{pmatrix}$满足 $AX=2X+B$，求矩阵 X.

3. 求列向量组 A: $\alpha_1=(1,-1,2,4)^T,\alpha_2=(0,3,1,2)^T,\alpha_3=(3,0,7,14)^T$,

   $\alpha_4=(2,1,5,6)^T$, $\alpha_5=(1,-1,2,0)^T$ 的一个最大无关组，并把其余列向量用该最大无关组线性表示.

4. 求五元齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_5=0\\x_2+x_3+x_4=0\\x_3+x_4+x_5=0\end{cases}$ 的基础解系.

5. 求方阵 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&3\\0&3&2\end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

四、综合题 (共 20 分，共 2 小题，每小题 10 分)

1(证明题). 已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，且向量 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$,

证明：向量组 $\beta-\alpha_1,\beta-\alpha_2,\beta-\alpha_3$也线性无关.

2(应用题). 在一千多年前的《孙子算经》中记载一题：“今有物不知其数，三三数之剩二，五五数之剩三，七七数之剩四，问物几何?”

请你列出相应的线性方程组，确定该“物”之“数”(该“物”之“数”约百余).

(提示：设该数为x_1，三三数的次数为x_2，五五数的次数为x_3，七七数的次数为x_4，……)