Problem 6 ADA Chocolate factory

(1)我們取機會成本最小的。假設先蓋x_1，機會成本就是$t_1 * v_2$，先蓋x_2，機會成本就是$t_2 * v_1$。若$t_1 * v_2 < t_2 * v_1$就先蓋x_1，反之則蓋x_2。也就是取$\frac{v_i}{t_i}$最大的

(2)

先把$\frac{v_i}{t_i}, i \in \{1, 2, \dots, N\}$算出來。//O(N) time

由大到小排序$\frac{v_i}{t_i}$。 //O(NlogN) time using merge sort

取$\frac{v_i}{t_i}$最大的x_i先蓋。算 total value 然後 return // O(N) time

Total time: O(N)+O(NlogN)+O(N)= O(NlogN)

(3)

令 V(i)為 the maximum total number of chocolate produced from day 1 to day Σti

A(i)為 total number of chocolate produced from day 1 to day Σti

所以 V(i)=max{A(i)}, A(i)總共有$(i!)$種可能。

以歸納法證明選$\frac{v_i}{t_i}$最大策略的 correctness(在證明過程中可以證明 optimal substructure 和 greedy choice property)

Base case:

k=2 時，由(1)可知，得證。

Induction:

假設 k=i-2 時，選擇$\frac{v}{t}$最大的策略為 correct

k=i 時，

現在已經知道 V(i-2) component 的蓋法，要蓋出 V(i)，而且要使得 V(N)為最大，有$x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_N$可選，可選兩個 component, x_a, x_b, $a, b \in \{i-1, i, \dots, N\}, a \neq b$。不失一般性，假設$\frac{v_{i-1}}{t_{i-1}} \geq \frac{v_i}{t_i} \geq \frac{v_{i+1}}{t_{i+1}} \geq \cdots \geq \frac{v_N}{t_N}$

V(i)= V(i-2)+ max{先蓋x_a所得之$value$, 先蓋x_b所得之$value$} (此處證明此問題有 optimal substructure)

考慮先蓋x_a的情況。

V(i)= V(i-2)+ $t_a * (v_1 + v_2 + \cdots + v_{n-2}) + t_b * (v_1 + v_2 + \cdots + v_{n-2} + v_a)$

=V(i-2)+ $(v_1 + v_2 + \cdots + v_{n-2}) * (t_a + t_b)$+ $t_b * v_a$

考慮先蓋x_b的情況。

V(i)= V(i-2)+ $t_b * (v_1 + v_2 + \cdots + v_{n-2}) + t_a * (v_1 + v_2 + \cdots + v_{n-2} + v_b)$

=V(i-2)+ $(v_1+v_2+\cdots+v_{n-2})*(t_a+t_b)$+ t_a*v_b

要使 V(i)最大，要取 max{$t_b*v_a,\ t_a*v_b$ }也就是 max{$\frac{v_a}{t_a},\frac{v_b}{t_b}$}$,a,b\in$

$\{i-1,i,\ldots,N\},a\neq b$，此處證明 greedy choice property(在此已經考慮$\binom{N-i+2}{2}$所有的情況)
所以我們一定選x_{i-1},x_i來蓋，求得 V(i)，得證。