R07922118 資工碩一 翁子騰

Problem 6

(a)

假設 outerplanar graph 的 vertex 數為 n, edge 數為 e, face 數為 f。

n=1 時，e=0，但 2n-3= -1 不成立。

故我們只考慮$n \geq 2$的情況。

1.若此圖為 tree，tree 有 n-1 條邊，$e = n - 1 \leq 2n - 3$ 成立

2.若此圖不為 tree。

若把每一個 face 所涵蓋到的邊數加起來，可以得到 2e。(因為每個邊會被加到 2 次)

圖內的 face(f-1 個 face)至少涵蓋三條邊，圖外的一個 face 涵蓋 n 條邊

所以 $2e \geq 3(f-1) + n = 3f - 3 + n$

可得$f \leq \frac{2e-n+3}{3}$

根據 Euler's formula

$$n - e + f = 2 \rightarrow f = 2 - n + e \leq \frac{2e-n+3}{3}$$

$$6 - 3n + 3e \leq 2e - n + 3$$

$$e \leq 2n - 3$$

得證。

(b)

1.首先我們證明一個 outerplanar graph G 存在一個 vertex 其 degree 不超過 2。

假設此 G 有 n 個 vertex，我們慢慢的將 G 加上邊，加邊的同時要維持他是 outerplanar，直到不能再加為止。此時可以觀察到 v1,v2,…vn 會形成一個 cycle，隔出 outer face。我們找邊(v_i, v_j)，此邊不能在最外層的 cycle 上，v_i, v_j必不連續，而v_i, v_j之間必存在有一點v_k，而v_k的 degree 為 2，得證。

若此邊(v_i, v_j)不存在則 G 中每一個點 degree 都是 2 亦得證。

2.利用 1.的結果來證明 outerplanar graph G 是 3-colorable。假設 G 有 n 個點。

Base case:

n=1 時，G 只有一個點，為 3-colorable，必成立。

Inudction hypothesis: 假設有 k 個點時亦成立。

那當 n=k+1 時。

因為由 1.可知，G_{k+1}必存在一點v其 degree 至多為 2。我們將此點移除，所得之G_k亦為$outerplanar\ graph$，且根據$induction\ hypothesis$，亦為 $3-colorable$。再加上 v，由於此點 degree 至多為 2，所以我們必可找到第三種顏

色將其塗成與其相鄰點不同的顏色。由此可見G_{k+1}仍為 $3-colorable$。得證。

(c)

假設此 outerplanar graph 有 n vertices 和 m edges。其中根據(a)，$m \leq 2n-3 = O(n)$

Initialization:

圖上所有的 node 都 traverse 一遍，把每個 node 的 degree 記下來存在 d[n]中。

做一個 List L 存所有 degree=1 or2 的 vertices。 //O(m+n) time=O(n)

Recursion: G 存還沒塗色的 vertices，一開始 G 有全部的 vertices

```
color(G, d, L)
if L is empty
    {return;}
x← removeElement(L)
S<-和 x 相鄰的點，存到一個 set 裡面
for y in S:
    d[y]--;
    if(d[y]==2){
        addElement(L, y)
    }
G=G-{x}
Color(G, d, L) //recursion
將 x 塗 S 中沒用過的顏色
```

其中根據我們選 L 的條件，可知 S 中 vertex 的數目小於等於 2。由於 outerplanar graph 中，至少會有一點其 vertex degree 至多為 2，且把該 vertex 拿掉後，該 graph 仍為 outerplanar，可知 L 一定要在全部 vertex 都走訪完才會為 empty。

(d)

Initialization 花 O(n)時間，recursion 走訪每一個 vertex 恰一次，每個邊至多 2 次，花 O(n+2m)=O(n+2n)=O(3n)=O(n)時間。

所以總共花 O(n)+O(n)=O(n)時間。

(e)

Polygon triangulation:

每一個 polygon 若只連內部的點，連的時候線不能重疊，可以被切成很多不重疊的三角形。(不另外加新的點)

被切成許多三角形之後的 polygon 會形成一個 outerplanar graph，因為其

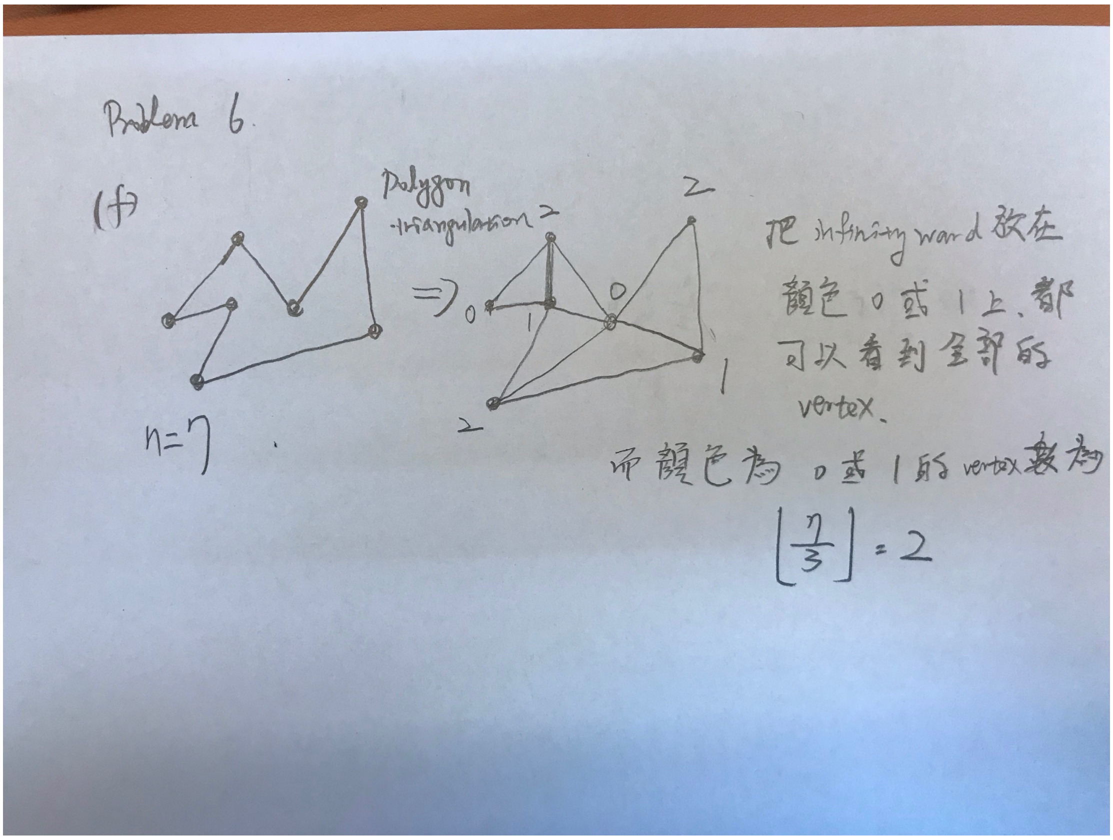
augmentation graph 為 planar(一個圖的 augmentation 就是加一點 vertex v 連到此 graph 的所有點)。

既然被切成許多三角形的 polygon 為 outerplanar graph，則其為 3-colorable。

每個三角形中，三個點的顏色必不相同。

我們將 infinity ward 放在此 polygon 上同一個顏色，且顏色數目最少的點，就可以看到 polygon 上所有的點，且使得 infinity ward 數目最少(也最大化 infinity ward 的效益)。而同一個顏色的點的最少數目為$\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor$，而 infinity ward 最多也只能是$\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor$。故$|S|$的$upper\ bound$為$\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor$。

(f)



如果放在顏色為 2 的 vertex 上，會需要 3 個 infinity ward，如此沒有最大化 infinity ward 的效益。