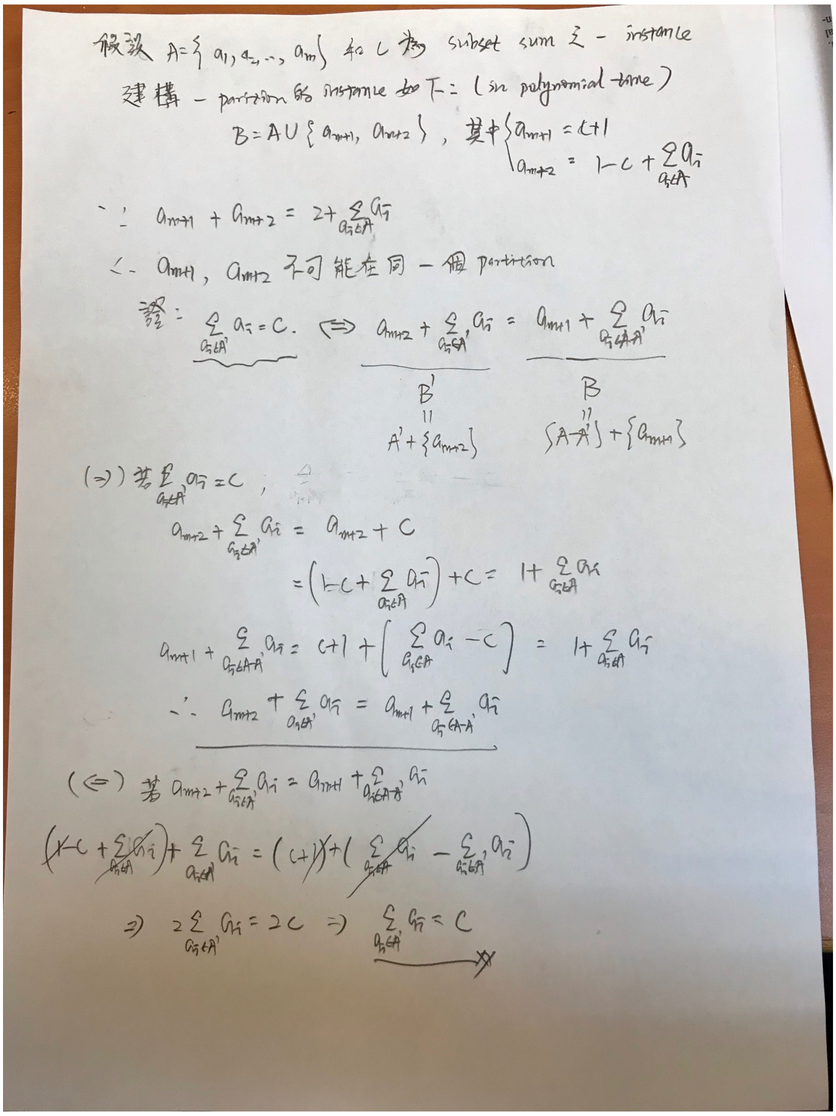
R07922118 資工碩一 翁子騰

Problem 6

(a)

Reduce subset sum to Partition



假設 $A=\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ 和 c 為 subset sum 之一 instance

建構一 partition 的 instance 如下：(in polynomial time)

$B = A \cup \{a_{m+1}, a_{m+2}\}$，其中 $\begin{cases} a_{m+1} = c+1 \\ a_{m+2} = 1-c+\sum_{a_i \in A} a_i \end{cases}$

$\because a_{m+1} + a_{m+2} = 2 + \sum_{a_i \in A} a_i$

$\therefore a_{m+1}, a_{m+2}$ 不可能在同一個 partition

證：$\sum_{a_i \in A'} a_i = c. \iff \underbrace{a_{m+2} + \sum_{a_i \in A'} a_i}_{B' = A' + \{a_{m+2}\}} = \underbrace{a_{m+1} + \sum_{a_i \in A-A'} a_i}_{B = \{A-A'\} + \{a_{m+1}\}}$

($\Rightarrow$) 若 $\sum_{a_i \in A'} a_i = c$，

$a_{m+2} + \sum_{a_i \in A'} a_i = a_{m+2} + c$

$= \left(1-c+\sum_{a_i \in A} a_i\right) + c = 1 + \sum_{a_i \in A} a_i$

$a_{m+1} + \sum_{a_i \in A-A'} a_i = c+1 + \left[\sum_{a_i \in A} a_i - c\right] = 1 + \sum_{a_i \in A} a_i$

$\therefore a_{m+2} + \sum_{a_i \in A'} a_i = a_{m+1} + \sum_{a_i \in A-A'} a_i$

($\Leftarrow$) 若 $a_{m+2} + \sum_{a_i \in A'} a_i = a_{m+1} + \sum_{a_i \in A-A'} a_i$

$\left(\cancel{1}-c+\cancel{\sum_{a_i \in A} a_i}\right) + \sum_{a_i \in A'} a_i = (c+\cancel{1}) + \left(\cancel{\sum_{a_i \in A} a_i} - \sum_{a_i \in A'} a_i\right)$

$\Rightarrow 2\sum_{a_i \in A'} a_i = 2c \Rightarrow \sum_{a_i \in A'} a_i = c$ ※

(b)

假設 partition 的 instance 為$a_1, a_2, \dots, a_n$，且$\sum_{i=1}^{n} a_i = U$，我們將 bin packing 每一個物品的 weight令為$w_i = \frac{2a_i}{U}$

若 partition 有解，分為兩個 set，每一個 set 的總和為$\frac{U}{2}$，在 bin packing 的 instance 當中，可以將球分到恰 2 個 bin 裡面。每一個 bin 的重量恰為$\frac{2*(U/2)}{U} = 1$kg。反之若 bin packing 恰可以分到 2 個 bin 裡面，partition problem 中，剛好可以分成兩堆 sum 為 U/2 的 partition。

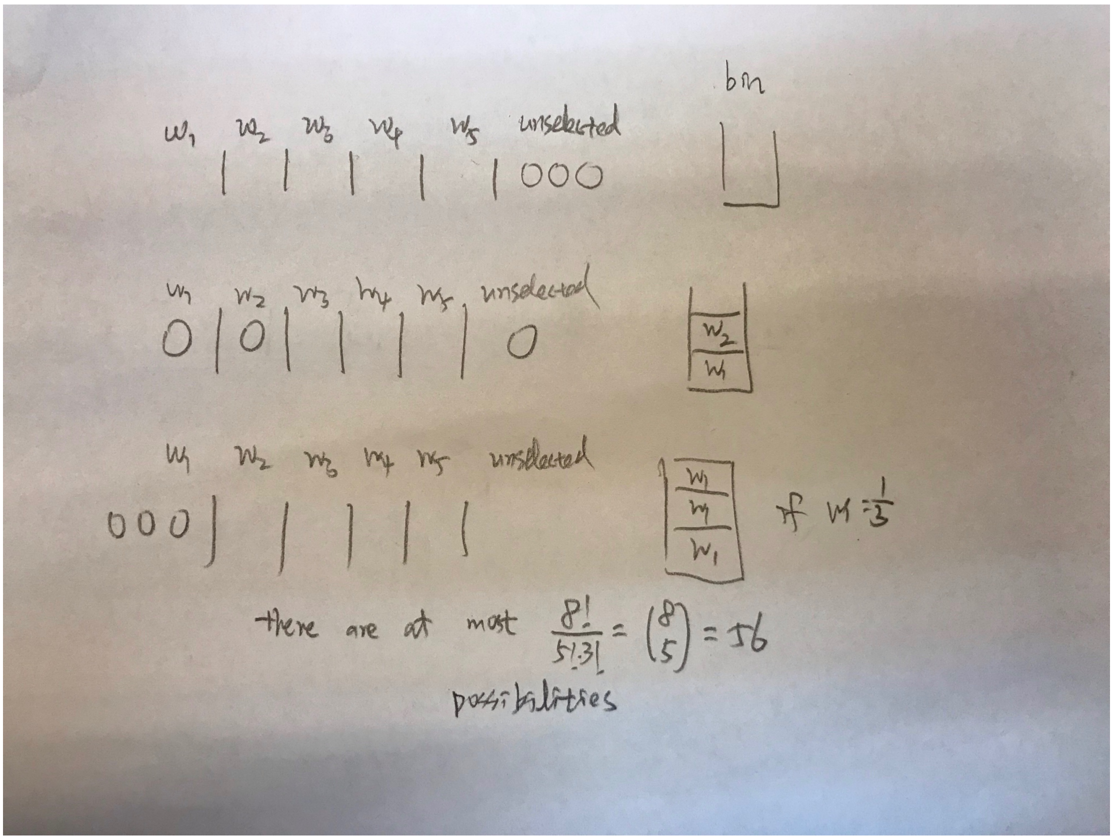
R07922118 資工碩一 翁子騰

(c)

假設存在一個$polynomial\ time\ \left(\frac{3}{2}-\epsilon\right) approximation\ algorithm$，如果 bin packing problem 的 exact minimun 恰好是 2，則這個 approximation algorithm 一定可以在 polynomial time 內解出來。因為假如用一個 approximation algorithm 得到的 approximate solution 是 3 的話，這個 approximation algorithm 會變成 $\left(\frac{3}{2}\right) - \mathrm{approximation\ algorithm}$。那假如可以在 polynomial time 內解出 bin packing，根據 6-(b)的證明，我們也可以在 polynomial time 內解出 Partition problem。如此，就會得到 P=NP。和題目假設矛盾！

(d)

每一個物品的重量至少 1/3 且有 5 種不同重量，那每一個 bin 最多也只能放 3 個物品。(當然不可能放到 3 個，大部分情況只能放 2 個)



所以最多有$\binom{8}{5} = 56$ 種可能。

$$T = 56 \leq 65$$

(e)

由(d)可知，單一個 bin 最多可以有 56 種不同可能的物品組合，我們現在將這 56 種不同重量組合的 bin 分配到 k 個相同的 bin 中。

$$\binom{56+k}{56} = \frac{(56+k)!}{56!\,k!} = \frac{(56+k)(55+k)\ldots(1+k)}{56!} \le (56+k)^{56} \le k^{56}$$
$$= O(k^{65})$$

(f)

既然所有可能的 bin 組合至多只有k^{56}種(polynomial of k)，直接用 brute-force 爆搜，exhaustive search 所有的可能，找出 bin 的數量是最小的情況，就可以得到解答。如此能在 polynomial time 內找到解答。