R07922118 資工碩一 翁子騰

Problem 5

(a)

此問題是一個 exact set cover reduce 到 subset sum 的問題。Subset sum 的 target sum 為 K。

假設$S = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$且$S_1, S_2, .., S_k$

為S之$subsets$，此為$exact\ set\ cover$中的任意$instance$。

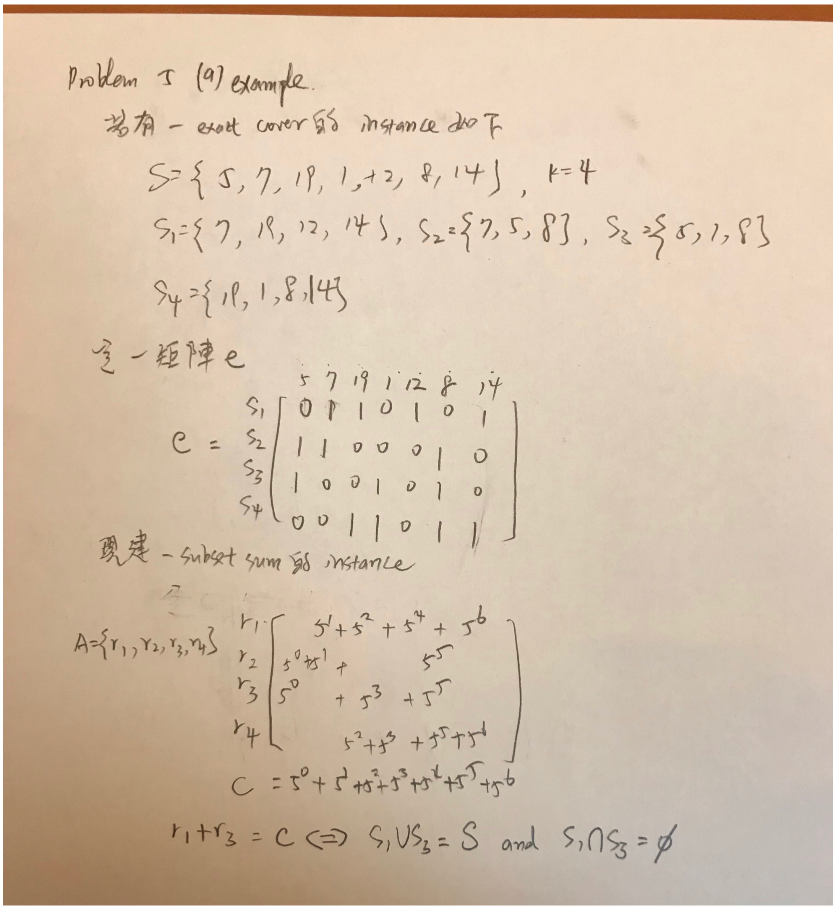
我們要把此 instance 在 polynomial time 時間內 reduced 成 subset sum 的 instance

Reduction 的方法為

讓$A = \{r_1, r_2, .., r_k\}$且$K = \sum_{i=0}^{m-1}(k+1)^i$ where for $1 \le j \le k,\ r_i = \sum_{i=1}^{m} e_{j,i}(k+1)^{i-1}, with\ e_{j,i} = 1\ if\ u_i \in S_j\ and\ \ e_{j,i} = 0\ if\ u_i \notin S_j$

如此可以讓exact problem 為yes $if\ and\ only\ if$ subset sum problem 為yes。

Ex.


Problem 5 (a) example

若有一 exact cover 的 instance 如下

$S = \{5, 7, 19, 1, 12, 8, 14\}$, $k=4$

$S_1 = \{7, 19, 12, 14\}$, $S_2 = \{7, 5, 8\}$, $S_3 = \{5, 1, 8\}$

$S_4 = \{19, 1, 8, 14\}$

定一矩陣 e

$$e = \begin{array}{c} \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 5 & 7 & 19 & 1 & 12 & 8 & 14 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

現建一 subset sum 的 instance

$$A = \{r_1, r_2, r_3, r_4\} \quad \begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{array} \begin{bmatrix} 5^1 + 5^2 + 5^4 + 5^6 \\ 5^0 + 5^1 + 5^5 \\ 5^0 + 5^3 + 5^5 \\ 5^2 + 5^3 + 5^5 + 5^6 \end{bmatrix}$$

$$C = 5^0 + 5^1 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + 5^5 + 5^6$$

$$r_1 + r_3 = C \iff S_1 \cup S_3 = S \ \text{and}\ S_1 \cap S_3 = \emptyset$$

(b)

假設 K 無窮接近 1。

$$L = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}\text{和}tagert\ sum\ K\text{為}subset\ sum\text{的一個}instance\text{。}$$

$$\text{其中}\sum_{a_i \epsilon L'} a_i = K$$

我們可以在$polynomial\ time$內將此$instance$轉換為$equation(1)$問題的$instance$

假設$\sum_{a_i \in L} a_i = S$

現在多了兩的元素$a_{n+1} = S + K, a_{n+2} = 2S - K$，因為$a_{n+1} + a_{n+2} = 3S$，所以$a_{n+1}$和$a_{n+2}$不可能在同一組

令$A = L' \cup \{a_{n+2}\}, B = (L - L') \cup \{a_{n+1}\}$

證明：$\sum_{a_i \epsilon L'} a_i = K\ \ iff\ \ {S_A}/{S_B} \leq 1$ 或${S_B}/{S_A} \leq 1$

(⟹)

若$\sum_{a_i \epsilon L'} a_i = K$

$$S_A = K + (2S - K) = 2S$$
$$S_B = (S - K) + (S + K) = 2S$$

所以${S_A}/{S_B} \leq K$ (K無窮接近 1)

(⟸)

若${S_A}/{S_B} \leq 1$

$S_A = \sum_{a_i \epsilon L'} a_i + a_{n+2} = \sum_{a_i \epsilon L'} a_i + (2S - K)$

$S_B = \sum_{a_i \epsilon L-L'} a_i + a_{n+1} = S - \sum_{a_i \epsilon L'} a_i + S + K$

其中$S_A \leq S_B$

$$\sum_{a_i \epsilon L'} a_i + (2S - K)\ \leq\ S - \sum_{a_i \epsilon L'} a_i + S + K$$

$$2\sum_{a_i \epsilon L'} a_i \leq 2K$$

$$\sum_{a_i \epsilon L'} a_i \leq K$$

同理可證$\sum_{a_i \epsilon L'} a_i \geq K$

所以$\sum_{a_i \epsilon L'} a_i = K$

(c)

不失一般性，假設$S_A \geq S_B$，假設$S_A = x + y, S_B = z$，假設 x 是 greedy algorithm 最後被選到的物品(給 A)的值。

根據 greedy algorithm 的假設，我們可以得到$y \leq z$

$$\frac{S_A}{S_B} = \frac{x+y}{z} = \frac{x}{z} + \frac{y}{z} = 2 * \frac{x}{2z} + \frac{y}{z} = 2 * \frac{x}{z+z} + \frac{y}{z} \leq 2 * \frac{x}{y+z} + 1$$

$$\leq 2 * OPT + 1$$

$$\leq 2 * OPT + OPT = 3 * OPT (\because OPT \geq 1)$$

所以我們可以證明這是一個 3-approximation algorithm。

證明$\frac{x}{y+z} \leq OPT$:

假設$x > \frac{x+y+z}{2}$，則 OPT=$\frac{x}{y+z}$，因為 x 一定自己一組

若$x \leq \frac{x+y+z}{2}$則$\frac{x}{2} \leq \frac{y+z}{2} \rightarrow \frac{x}{y+Z} \leq 1 \leq OPT$

(d)

{1,1,2}就是其中一個例子。

$$Greedy\text{求完}S_A = 1, S_B = 3，\frac{S_B}{S_A} = 3 \text{ 但是}OPT\text{為}S_A = 2, S_B = 2，\frac{S_B}{S_A} = 1$$