

オセロの実現可能局面数の推計

Estimation of the number of legal positions in Othello

石井颯太郎, 田中哲朗 (東京大学)

GPW2025

2025年 11月 16日

本研究の要約

課題

オセロの状態数に関して, 詳しい推定は明らかになっていない.

→ 先行研究の評価を改善したい.

提案手法

- **オセロの非合法局面 (実現不能局面) の判定手法を複数開発した.**
- 同アルゴリズムを用いて, **オセロの状態数を推計した.**

結果

約 $7.91 \times 10^{25} \sim 4.93 \times 10^{26}$ 個という推計値を得た.

研究背景 … ゲームの空間複雑性

状態数 (状態空間複雑性) … ゲームの規模を特徴づける量の1つ

- ゲームの規模それ自体が興味の対象になる
- “ゲームの解決” の可能性の目安としても利用できる

→ 多数のゲームに対して、状態数の計算が試みられてきた

〈参考：“ゲームの解決” の種類〉

弱解決 = 初期局面のゲーム値も、その証明に必要な各局面での最善手も判明している

強解決 = 初期局面から到達可能な全局面に対して、ゲーム値と最善手が判明している

先行研究 … オセロの状態数

下記の条件を満たす盤面の数をモンテカルロ法で推計し, 10^{28} と概算されている (Allis, 1994)

- 盤上の全ての石同士が8近傍で連結している
- 初期配置4マスが空白ではない

➔ 上界の改善, 下界の計算をおこなった研究は発見できなかった.

L.V. Allis. Searching for solutions in games and artificial intelligence. PhD thesis, Maastricht University, January 1994. <https://doi.org/10.26481/dis.19940923la>

提案手法

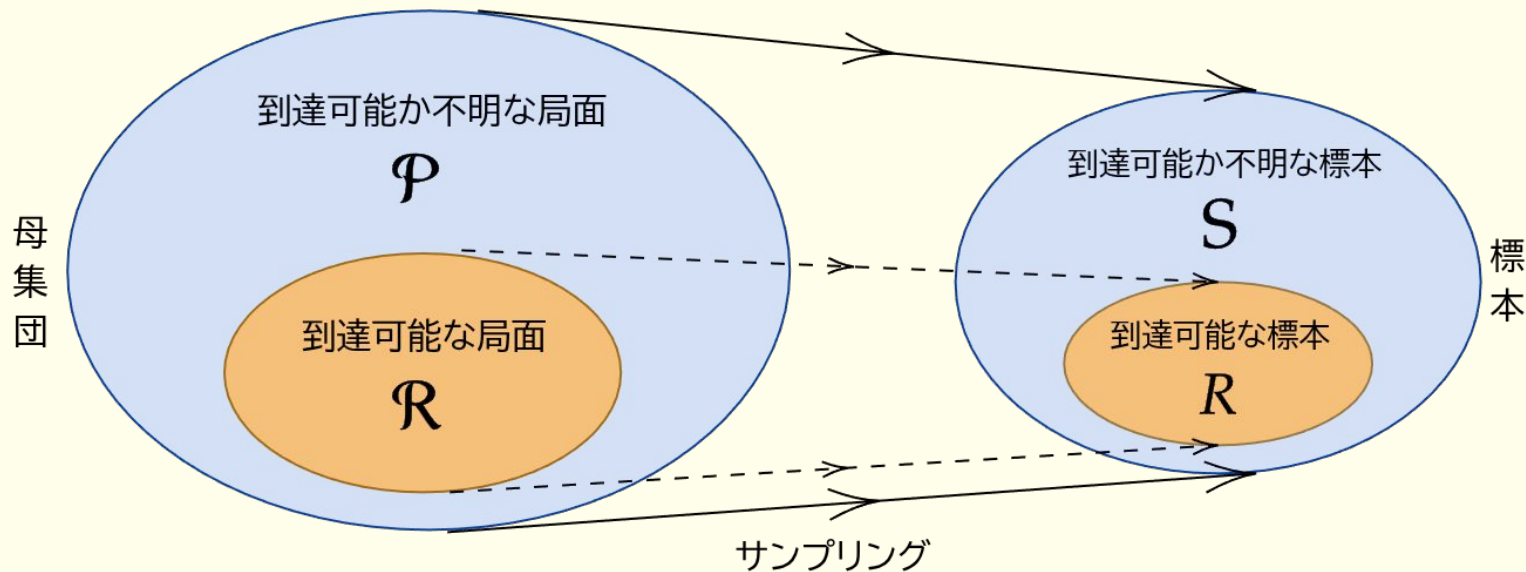
オセロの状態数を, 数え上げによらず確率的に求める

方針:

1. 合法性の不明な局面を多数生成し, ランダムサンプリングする
 2. 標本中の合法局面を発見する
 3. 標本中の合法局面の割合から, 全体の合法局面の割合 p を統計的に推定する
- ➡ p が分かれば, 全体の状態数の期待値を計算できる.

提案手法

オセロの状態数を, 数え上げによらず確率的に求める



※本研究では $|S| = 10^6$ (100万標本) とした.

上界と下界の推計

合法性を特定できない標本が発生した場合

→ そのような標本の合法性を“Unknown”として扱う

- Unknown標本が **全て到達可能** な場合 = 状態数の **上界**
- Unknown標本が **全て到達不能** な場合 = 状態数の **下界**

手法 > ① 標本局面集団の生成

以下の条件を満たす局面集合 \mathcal{P} の中から, ランダムに標本を抽出

- 初期配置4マス → 「白・黒」の2通りを取りうる
- その他の60マス → 「白・黒・空白」の3通りを取りうる

$$\begin{aligned}\therefore |\mathcal{P}| &= 2^4 \times 3^{60} \\ &= 678258532403459256228710931216 \\ &\approx 6.78 \times 10^{29}\end{aligned}$$

※オセロは先手・後手に対称性があるため, 本研究では先手番の状態のみを考慮する.

手法 > ② 標本中の合法局面を見つける

標本局面の組から, 段階を分けて非合法局面を除去する

A. 盤面を見ただけで到達不能と分かる局面を除去

- 1. 石の連結性, 占有到達性, 反転整合性で判定
 - ここで対称性のチェックも行う
- 2. SATソルバ, 線形計画ソルバで判定

B. 探索によって到達不能と分かる局面を除去

→ 除去されずに残った局面が, 合法局面 + Unknown局面となる.

手法 > ② 標本中の合法局面を見つける

標本局面の組から, 段階を分けて非合法局面を除去する

A. 盤面を見ただけで到達不能と分かる局面を除去

- 1. 石の連結性, 占有到達性, 反転整合性で判定
 - ここで対称性のチェックも行う
- 2. SATソルバ, 線形計画ソルバで判定

B. 探索によって到達不能と分かる局面を除去

→ 除去されずに残った局面が, 合法局面 + Unknown局面となる.

盤面の対称性のチェック

対称な盤面の組のうち, 辞書順で
最小の場合のみを残す.

- 通過: 12万4755個
 - 100万標本の **12.48%**
- 排除: 87万5245個

この時点の上界 8.52×10^{28}

	a	b	c	d	e	f	g	h
1	○		○		○	○	●	○
2	○	●		○	●	○	○	○
3	○	○	●	●		●		
4	●	○		●	●	○	○	●
5	●	●		●	○	○	○	○
6		○	○	○	○	●	○	○
7		○		●	●		●	●
8	○				●	●		○

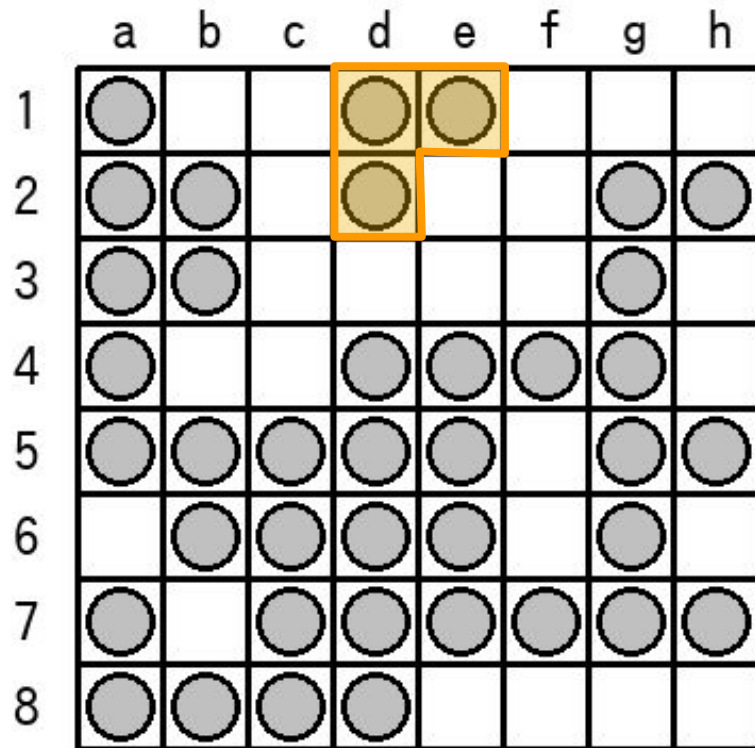
石の連結性を満たさない局面の排除

石の色に関係なく、盤上の石の並び方だけで判定可能

- 通過: 9万3892個
 - 100万標本の **9.39%**
- 排除: 3万0863個

この時点の上界 6.42×10^{28}

先行研究のチェックはここまで.



石の占有到達性を満たさない局面の排除

石の色に関係なく、盤上の石の並び方だけで判定可能

- 通過: 1万1150個
 - 100万標本の **1.12%**
- 排除: 8万2342個

この時点の上界 8.04×10^{27}

	a	b	c	d	e	f	g	h
1	●	●	●	●	●		●	●
2	●		●	●		●		●
3	●	●	●	●			●	●
4	●		●	●	●	●		●
5	●	●	●	●	●	●		●
6			●	●			●	●
7	●			●	●	●	●	
8	●	●	●	●		●		●

石の占有到達性を満たさない局面の排除

	a	b	c	d	e	f	g	h
1	●	●	●	●	●		●	●
2	●		●	●		●		●
3	●	●	●	●			●	●
4	●		●	●	●	●		●
5	●	●	●	●	●	●		●
6			●	●			●	●
7	●			●	●	●	●	
8	●	●	●	●		●		●

合法性を判定したい局面

	a	b	c	d	e	f	g	h
1								
2								
3								
4				●	●			
5				●	●			
6								
7								
8								

左図中の説明可能な石を計算する様子

石の占有到達性を満たさない局面の排除

	a	b	c	d	e	f	g	h
1	○	○	○	○	○		●	○
2	○		○	○		○		○
3	○	○	○	○			○	○
4	○		○	○	○	○		○
5	○	○	○	○	○	○		○
6			○	○			○	○
7	●			○	○	○	○	
8	●	●	●	○		○		●

	a	b	c	d	e	f	g	h
1	○	○	○	○	○			○
2	○		○	○		○		○
3	○	○	○	○			○	○
4	○		○	○	○	○		○
5	○	○	○	○	○	○		○
6			○	○			○	○
7				○	○	○	○	
8				○		○		

合法性を判定したい局面 → 到達不能

左図中の説明可能な石

反転整合性を満たさない局面の排除

盤面を見れば判定可能

- 通過: 2522個
 - 100万標本の **0.25%**
- 排除: 9028個

この時点の上界 1.81×10^{27}

	a	b	c	d	e	f	g	h
1	●	○	○	○	●	●	●	○
2	○	○	○	○	●	○	○	○
3	○	●	●	●	●	●	●	●
4	●	○	●	○	○	○	○	○
5	○	○	●	○	●	●	●	○
6	○	●	●	○	●	●	○	○
7	○	●	○	●	○	●	●	●
8	○	○	○	●	○	○	○	○

手法 > ② 標本中の合法局面を見つける

標本局面の組から, 段階を分けて非合法局面を除去する

A. 盤面を見ただけで到達不能と分かる局面を除去

- 1. 石の連結性, 占有到達性, 反転整合性で判定
 - ここで対称性のチェックも行う
- 2. SATソルバ, 線形計画ソルバで判定

B. 探索によって到達不能と分かる局面を除去

→ 除去されずに残った局面が, 合法局面 + Unknown局面となる.

先行研究 … SATソルバによるオセロの合法局面判定

Takizawa (2023) … “オセロの最大分岐数は33”

パスを合法手に含めるよう緩和したオセロで「合法手数 34 (**石数 30**) の局面が到達可能」という条件を論理式に変換し, 充足可能性を判定.

本研究では, ここまでのチェックを通過した盤面が **石数48個** (平均) を超えた.

➡ 先行研究より問題の規模が大きく, 同じ手法の適用が困難だった.

SATソルバで到達不能と分かる局面の排除

着手が満たすべき最低限の順序関係を論理式で表す.

→ SAT問題に帰着して判定.

- 通過: 1001個
 - 100万標本の **0.1%**
- 排除: 1521個

※制約, 変数は予稿参照

この時点の上界 7.42×10^{26}

	a	b	c	d	e	f	g	h
1	●	○	●	○	○		●	○
2		●	○	○			●	○
3	●	●	○	●		○	●	
4		○	●	●	●	○	●	●
5	○			●	●		○	●
6	●	○	○	●	●	●	○	●
7	○	●	●		●			●
8	○			●				●

線形計画ソルバで到達不能と分かる局面の排除

石の反転回数の制約を線形計画問題で表す.

➡ 実行可能解の有無のみ判定.

- 通過: 847個
 - 100万標本の **0.08%**
- 排除: 154個

※制約, 変数は予稿参照

この時点の上界 6.33×10^{26}

	a	b	c	d	e	f	g	h
1	●		●	●		●	●	●
2		●	●		○	●	○	●
3	●	○	●	●		●	○	●
4	●			○	●		○	○
5	●		●	○	●	●	●	○
6		●	●	○		○	○	●
7	○	●	○	●	○		○	●
8		●		○	●	●		

手法 > ② 標本中の合法局面を見つける

標本局面の組から, 段階を分けて非合法局面を除去する

A. 盤面を見ただけで到達不能と分かる局面を除去

- 1. 石の連結性, 占有到達性, 反転整合性で判定
 - ここで対称性のチェックも行う
- 2. SATソルバ, 線形計画ソルバで判定

B. 探索によって到達不能と分かる局面を除去

→ 除去されずに残った局面が, 合法局面 + Unknown局面となる.

先行研究 … 探索によるオセロの合法局面判定

- Yamana (2022) … 初期配置からの順方向探索
- Takizawa (2020, 2023) … 初期配置 + 目的配置からの双方向探索

本研究では, ここまでのチェックを通過した盤面の平均石数が49個を超えた.

➡ 順方向探索だと, この規模では現実的な時間での判定が困難.

➡ 本研究では, 初期配置 + 目的配置からの双方向探索を採用.

Takuto Yamana. Nyanyan/reverse_othello: Find a path to the given othello board.

https://github.com/Nyanyan/Reverse_Othello.

Hiroki Takizawa. eukaryo/retrospective-dfs-reversi. <https://github.com/eukaryo/retrospective-dfs-reversi>.

先行研究 … 探索によるオセロの合法局面判定

- Yamana (2022) … 初期配置からの順方向探索
- Takizawa (2020, 2023) … 初期配置 + 目的配置からの双方向探索

- Takizawaの探索 = 石30個 から逆探索をスタート
- 本研究の探索 = 石49個 (平均) から逆探索をスタート

➡ 同じ双方向探索でも, 本研究の方が大規模な探索をおこなっている.

Takuto Yamana. Nyanyan/reverse_othello: Find a path to the given othello board.

https://github.com/Nyanyan/Reverse_Othello.

Hiroki Takizawa. eukaryo/retrospective-dfs-reversi. <https://github.com/eukaryo/retrospective-dfs-reversi>.

双方向探索による到達不能局面の排除

15手目付近までのleaf nodesを列挙し, 目的配置からleaf nodesに至るパスを逆方向に探索.

- 通過: 147個 (標本の **0.01%**)
- 排除: 196個
- Unknown: 504個
 - ノード数上限に達しても探索が収束しない場合, 合法性をUnknownとした.

	a	b	c	d	e	f	g	h
1	●				○	●		○
2	●	●		●	●		○	○
3		○	●	●	●	●	○	●
4		○	○	○	●	●	○	●
5		○	●	○	○	●		
6	●	●		○	●	○	○	●
7	●	●	○	●	○	○		○
8		○		●		○		

手法 > ③ 母比率の区間推定

- \mathcal{P} 中の合法局面の割合 $p_R = \frac{|\mathcal{R}|}{|\mathcal{P}|}$
- 標本数 $|S|$, 合法的な標本の数 $|R|$, 合法性Unknownな標本の数 $|U|$
- 全Unknownが違法な場合の標本比率 $\hat{p}_1 = \frac{|R|}{|S|}$
- 全Unknownが合法的な場合の標本比率 $\hat{p}_2 = \frac{|R| + |U|}{|S|}$

この時, 二項分布の正規近似による99.5%信頼区間は

$$\hat{p}_1 - 2.8\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1 - \hat{p}_1)}{|S|}} \leq p_R \leq \hat{p}_2 + 2.8\sqrt{\frac{\hat{p}_2(1 - \hat{p}_2)}{|S|}}$$

手法 > ③ 母比率の区間推定

\mathcal{P} 中の合法局面の割合 $p_R = \frac{|\mathcal{R}|}{|\mathcal{P}|}$

二項分布の正規近似による99.5%信頼区間は

$$\hat{p}_1 - 2.8\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1 - \hat{p}_1)}{|S|}} \leq p_R \leq \hat{p}_2 + 2.8\sqrt{\frac{\hat{p}_2(1 - \hat{p}_2)}{|S|}}$$

p_R が分かれば, 全体の状態数 $|\mathcal{R}|$ の期待値も求まる

100万標本に対する信頼水準99.5%の区間推定

推定時の条件

- $|\mathcal{P}| \approx 6.78 \times 10^{29}$ (既出; 厳密な値は省略)
- 標本数 $|S| = 10^6$ (既出)
- 合法性チェックの結果：
 - 排除された局面 = 999349個
 - 到達可能性を証明した局面 = 147個
 - 到達可能性を特定できていない局面 (Unknown) = 504個

100万標本に対する信頼水準99.5%の区間推定

結果

- 合法と判明した標本の数 $|R| = 147$
- 合法性がUnknownな標本の数 $|U| = 504$
- 母比率の99.5%信頼区間 $p_R \in [0.000117, 0.000727]$

$$\therefore |\mathcal{R}| \in [7.913957 \cdots \times 10^{25}, 4.928495 \cdots \times 10^{26}]$$

関連研究 … ゲームの状態数の統計的推計

Tromp (2021) による実験

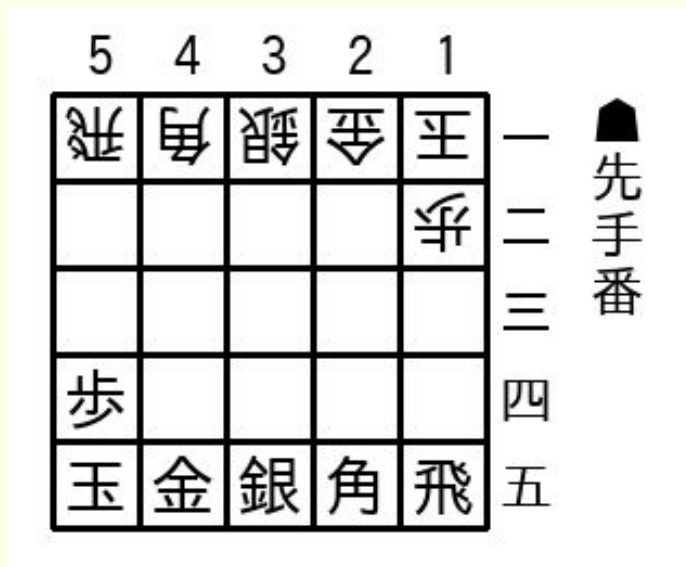
1. 合法性の不明な局面を多数列挙する
2. 合法性の不明な局面をランダムサンプリングし、その中の合法局面の数を調べる
3. 2.の結果から全体の状態数を推計する

→ チェスの状態数を 約 4.82×10^{44} 個と推計 (200万標本)

※合法局面の検出のため、初期局面からの最良優先探索で到達可能性を判定

関連研究 … ① 5五将棋

- 5×5マス盤で行う完全情報ゲーム
- **状態数を約 2.38×10^{18} 個と推定**
(石井・田中, 2024)
- 逆方向の最良優先探索で到達可能性を判定



石井颯太郎, 田中哲朗. 5五将棋の実現可能局面数の推計. 情報処理学会研究報告 ゲーム情報学 (GI), Vol. 2024-GI-53, No. 1, 2024.

関連研究 … ② 将棋

- 9×9マス盤で行う完全情報ゲーム
- 状態数を約 6.55×10^{68} 個と推定
(石井・田中, 2024)
- 逆方向の最良優先探索で到達可能性を判定

9	8	7	6	5	4	3	2	1	
皇	科	爵	令	王	令	爵	科	皇	一
	飛						馬		二
歩	歩	歩	歩	歩	歩	歩	歩	歩	三
									四
									五
									六
歩	歩	歩	歩	歩	歩	歩	歩	歩	七
	角						飛		八
香	桂	銀	金	玉	金	銀	桂	香	九

▲ 先手番

石井颯太郎, 田中哲朗. 将棋の実現可能局面数の推定. ゲームプログラミングワークショップ2024論文集, pp. 150-157, 情報処理学会, 2024.

まとめ

課題

オセロの状態数に関して, 詳しい推定は明らかになっていない.

→ 先行研究の評価を改善したい.

提案手法

- **オセロの非合法局面 (実現不能局面) の判定手法を複数開発した.**
- 同アルゴリズムを用いて, **オセロの状態数を推計した.**

結果

約 $7.91 \times 10^{25} \sim 4.93 \times 10^{26}$ 個という推計値を得た.

予備スライド

Q. 上界・下界の改善の見込みは？

A.

- Unknown局面を減らせば改善可能. 予稿提出後, 双方向探索を大規模におこなう追加実験を進めている.
- 提出時点ではUnknownが504個残っていたが, 11/10時点で198個まで減った. 状態数は $1.675 \sim 3.765 \times 10^{26}$ と求まる.

謝辞: 追加実験の結果は, UTokyo Azure

(https://utelecon.adm.u-tokyo.ac.jp/research_computing/utokyo_azure/)

を利用して得られたものです.

Q. オセロの両側探索はそんなに難しいのか？

A.

- 合法局面はうまく行けば早く見つかるが, 非合法局面はすべての場合を探し尽くさなければならず, 必要なノード数が非常に多い.
 - Unknown局面は数億~数十億ノードを探索してもなお合法性が判定できていない.
- 予稿の実験はThreadripper 2990WXで5日半かかった.
提出後, さらに10倍程度のCPUパワーをUTokyo Azureでつぎ込み,
合計17日間 (計5900ドルほど) で p.34 の結果まで持っていった.
- 局面がUnknownとなる条件はopen problem. 石58個でも探索が終わった局面も, 石44個でもUnknownの局面もあった.

Q. オセロの両側探索にはどんな工夫をした？

A.

- 到達不能局面の枝刈り：占有到達性, 反転整合性, LPソルバの判定
- ハンドメイドのヒューリスティック関数による貪欲最良優先探索
 - マルチスレッド環境のため, ロックフリーなデータ構造 (skip list) を使った優先度付きキューを採用している.
- ヒューリスティック関数を学習で作る実験もしたが, 今のところ探索性能の改善にはつながっていない.
 - ランダムプレイで作ったノードの1手前を列挙し, 実際の棋譜に現れた1手前ノードを正解, それ以外を誤りとして, 正解に近づくようboostingアルゴリズムで学習させるというもの.

Q. 強解決された縮小盤オセロで実験すべきでは？

A.

- 縮小盤 (6x6, 4x6など) のオセロを強解決して得られる状態数の先行研究を見つけられなかった.
 - 先行研究では「弱解決のために探索を要した局面数」しか報告されていなかった.
 - ウィキペディアには「6x6の状態数は $3.6e+12$ 」とあるが, 出典とされているサイトには載っていなかった.
- 自分たちで改めて強解決することも検討したが, 予稿の提出には間に合わないため見送った.