인공지능 개론
L03 Regression (2)

국민대학교
소프트웨어융합대학원
박하명

지도학습 Supervised Learning

훈련 데이터(Training Data)로부터 하나의 함수를 유추해내기 위한 기계 학습(Machine Learning)의 한 방법

Training Data

```
[1.2,  3.8, -1.4, …,  4.1] →  1.1
[3.2, -1.2, -0.2, …,  2.1] →  2.7
[2.8, -1.4, -0.3, …,  2.3] →  2.8
[1.2,  3.4, -1.5, …,  4.2] →  0.9
[4.2,  2.1,  2.8, …, -0.5] → -0.1
                   …
[3.2,  2.2,  2.2, …, -0.4] → -0.2
```

Test

```
[1.3,  3.2, -1.5, …,  4.1] →  ?
```

이진 분류 문제 Binary Classification

종속 변수 y가 0 또는 1인 경우의 회귀 분석

Training Data

```
[1.2,  3.8, -1.4, …,  4.1] →  0
[3.2, -1.2, -0.2, …,  2.1] →  0
[2.8, -1.4, -0.3, …,  2.3] →  1
[1.2,  3.4, -1.5, …,  4.2] →  0
[4.2,  2.1,  2.8, …, -0.5] →  1
                  …
[3.2,  2.2,  2.2, …, -0.4] →  1
```

Test

```
[1.3,  3.2, -1.5, …,  4.1] →  ?
```

Logistic Regression

가설함수:

$$H(x) = \frac{1}{1 + e^{-(\mathbf{w}^\top \mathbf{x} + b)}}$$

비용:

$$cost(\mathbf{w}, b) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n} C(H(\mathbf{x}_i), y_i)$$

$$C(h, y) = \begin{cases} -log(1-h) & \text{if } y = 0 \\ -log(h) & \text{if } y = 1 \end{cases}$$

업데이트:

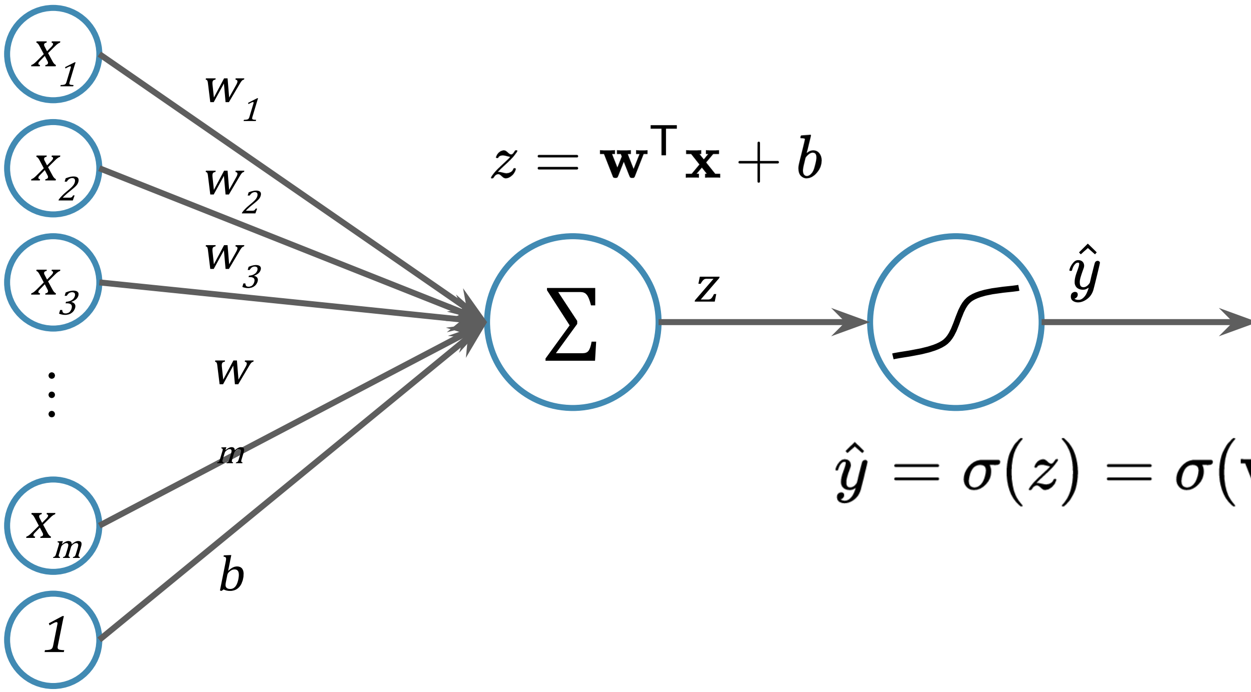
$$\mathbf{w} = \mathbf{w} - \alpha \frac{\partial cost(\mathbf{w}, b)}{\partial \mathbf{w}}$$

$$b = b - \alpha \frac{\partial cost(\mathbf{w}, b)}{\partial b}$$

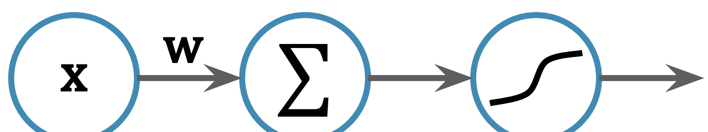
Logistic Regression

가설함수: $H(x) = \dfrac{1}{1 + e^{-(\mathbf{w}^\top \mathbf{x} + b)}} = \sigma(\mathbf{w}^\top \mathbf{x} + b)$

$$z = \mathbf{w}^\top \mathbf{x} + b$$



$$\hat{y} = \sigma(z) = \sigma(\mathbf{w}^\top \mathbf{x} + b)$$



다중 분류 문제 Multinomial Classification

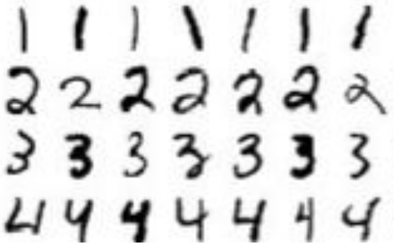
종속 변수 y가 두 가지 이상의 값을 가지는 경우의 회귀분석

활용

- **동물 사진 분류** (이 사진은 고양이? 멍멍이? 토끼?)

- **자율주행** (지금 신호는 직진? 정지? 좌회전?)

- **글자인식** (이 숫자는 무엇일까?)



다중 분류 문제 Multinomial Classification

종속 변수 y가 두 가지 이상의 값을 가지는 경우의 회귀분석

Training Data

```
[1.2,  3.8, -1.4, …,  4.1] →  A
[3.2, -1.2, -0.2, …,  2.1] →  B
[2.8, -1.4, -0.3, …,  2.3] →  C
[1.2,  3.4, -1.5, …,  4.2] →  B
[4.2,  2.1,  2.8, …, -0.5] →  A
                   …
[3.2,  2.2,  2.2, …, -0.4] →  A
```

Test

```
[1.3,  3.2, -1.5, …,  4.1] →  ?
```

다중 분류 문제 Multinomial Classification

이진 분류에서는 두 종류를 **0과 1**로 나타내면 됐는데, **3개 이상일 때는?**

"One-hot encoding"

Training Data

```
[1.2,  3.8, -1.4, …,  4.1] →  A [1,0,0]
[3.2, -1.2, -0.2, …,  2.1] →  B [0,1,0]
[2.8, -1.4, -0.3, …,  2.3] →  C [0,0,1]
[1.2,  3.4, -1.5, …,  4.2] →  B [0,1,0]
[4.2,  2.1,  2.8, …, -0.5] →  A [1,0,0]
                   …
[3.2,  2.2,  2.2, …, -0.4] →  A [1,0,0]
```

Test

```
[1.3,  3.2, -1.5, …,  4.1] →  ?
```

이진 분류 → 다중 분류

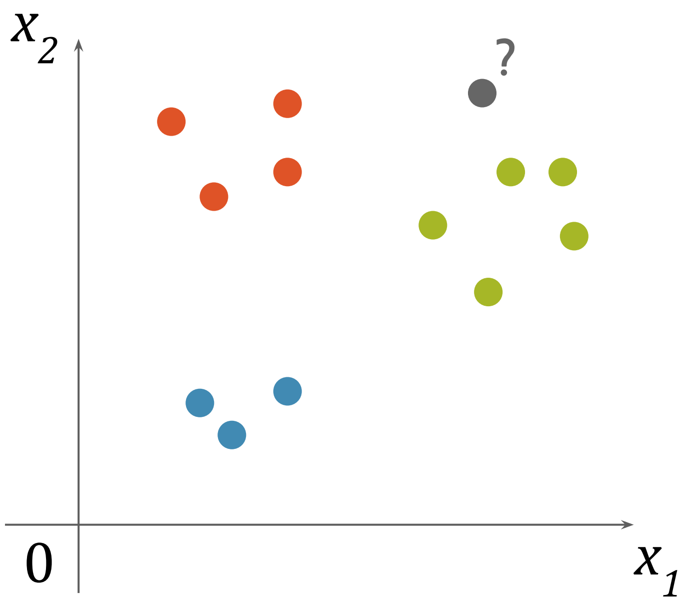
분류할 class가 k개 일 때? → **k 개의 이진 분류 수행!**

Training Data

```
[1.2,  3.8] →  [1,0,0]
[3.2, -1.2] →  [0,1,0]
[2.8, -1.4] →  [0,0,1]
[1.2,  3.4] →  [0,1,0]
[4.2,  2.1] →  [1,0,0]
             …
[3.2,  2.2] →  [1,0,0]
```

Test

```
[1.3,  3.2] →  ?
```



이진 분류 → 다중 분류

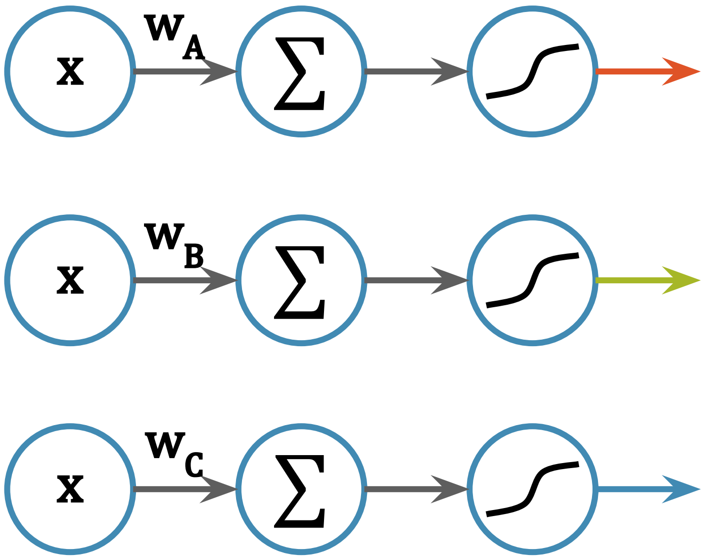
분류할 class가 k개 일 때? → **k 개의 이진 분류 수행!**

Training Data

```
[1.2,  3.8] →  [1,0,0]
[3.2, -1.2] →  [0,1,0]
[2.8, -1.4] →  [0,0,1]
[1.2,  3.4] →  [0,1,0]
[4.2,  2.1] →  [1,0,0]
             …
[3.2,  2.2] →  [1,0,0]
```

Test

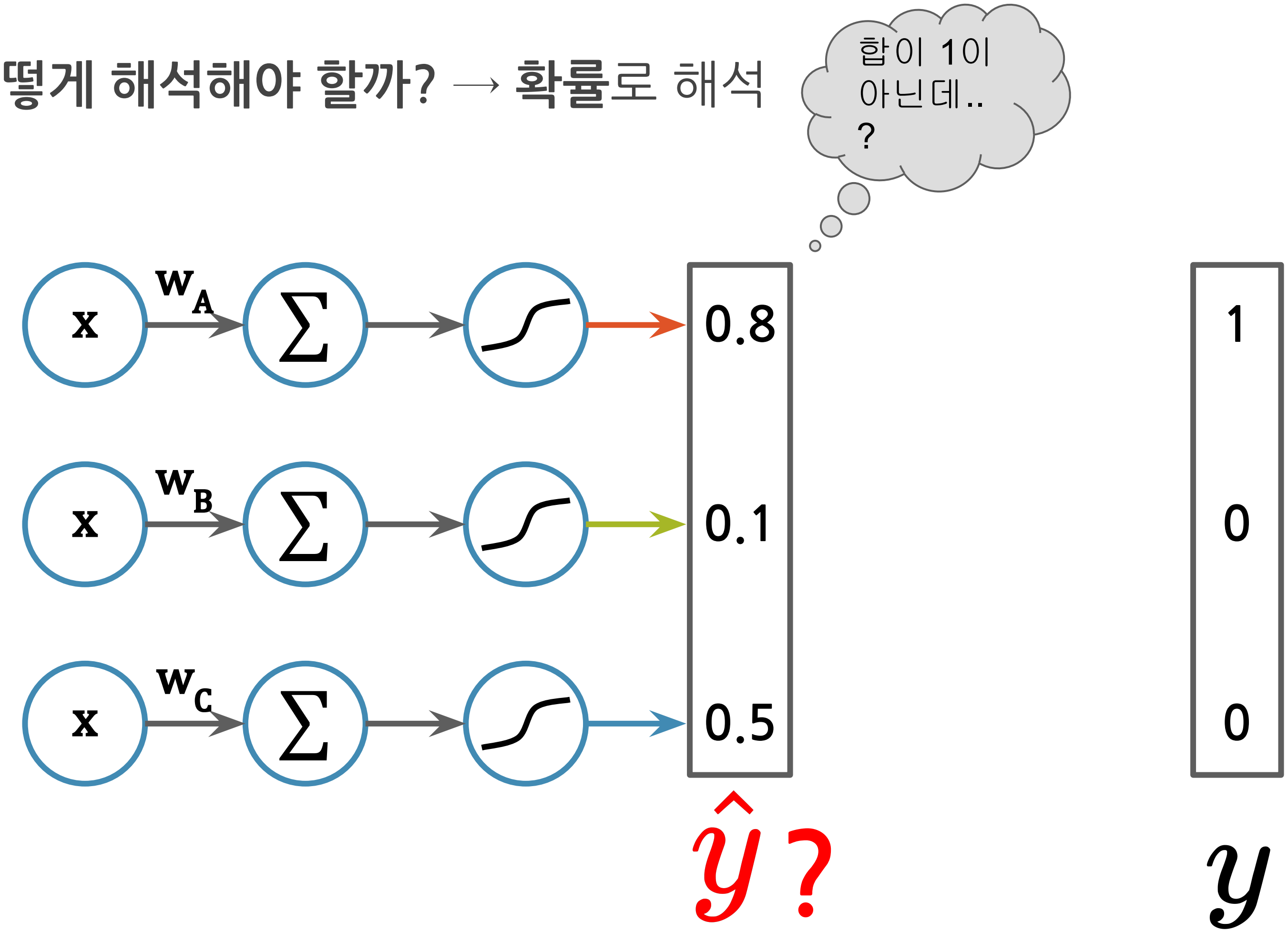
```
[1.3,  3.2] →  ?
```



각각의 이진 분류에서 계산된 출력을 어떻게 해석해야 할까?

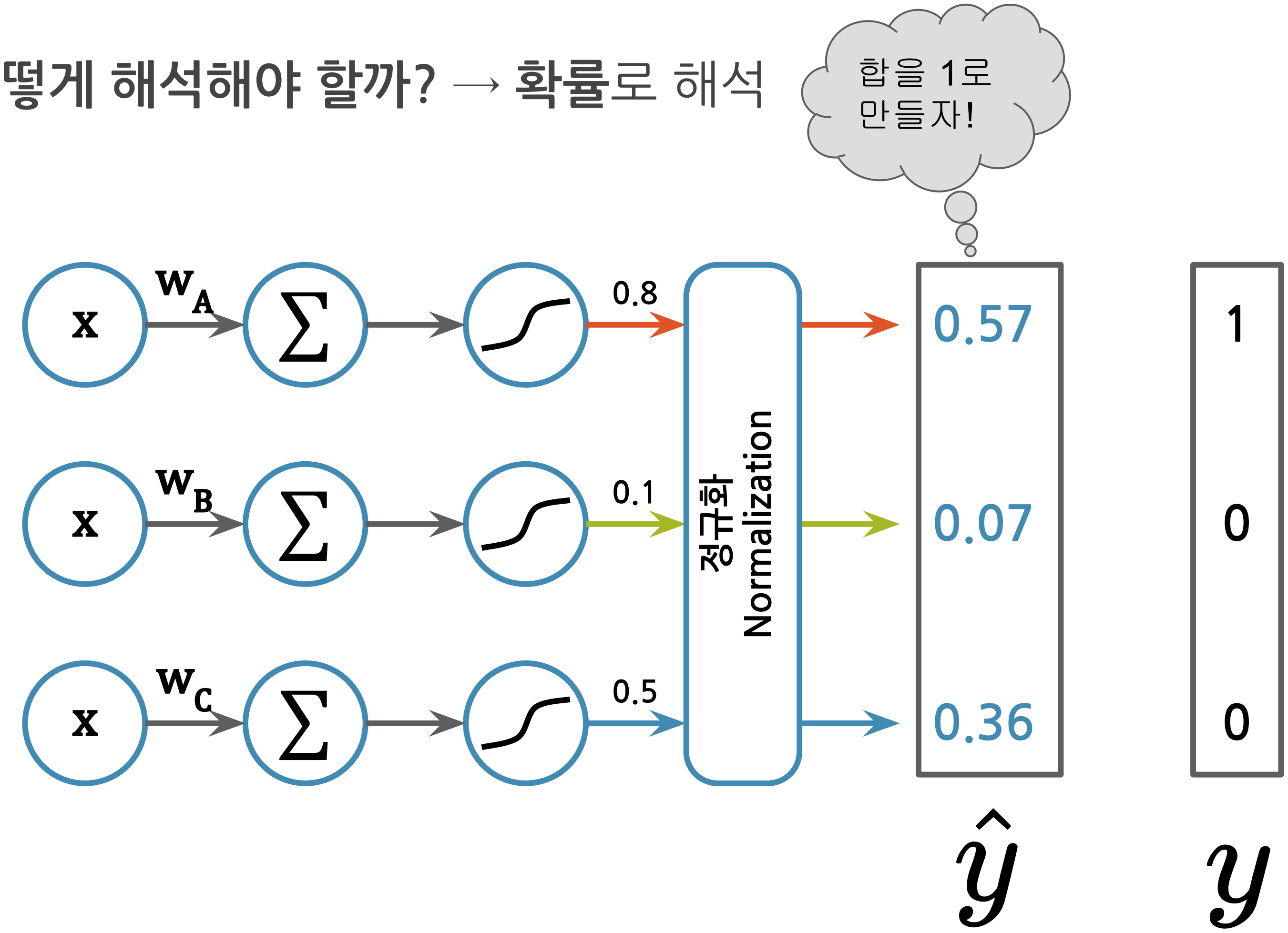
이진 분류 → 다중 분류

출력을 어떻게 해석해야 할까? → **확률**로 해석



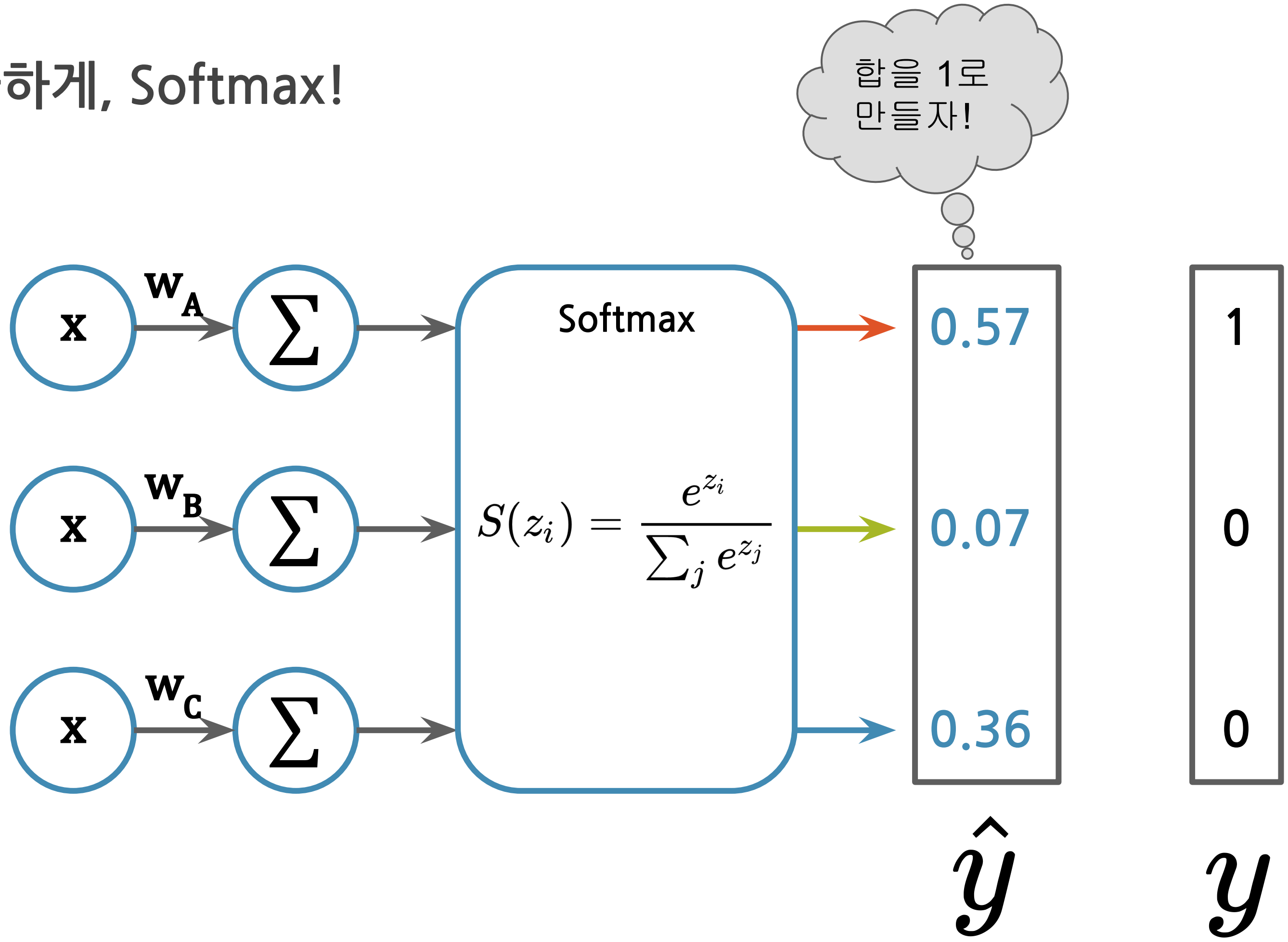
이진 분류 → 다중 분류

출력을 어떻게 해석해야 할까? → **확률**로 해석



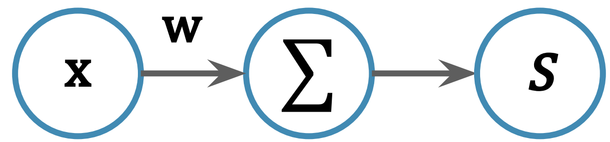
이진 분류 → 다중 분류

좀 더 깔끔하게, Softmax!

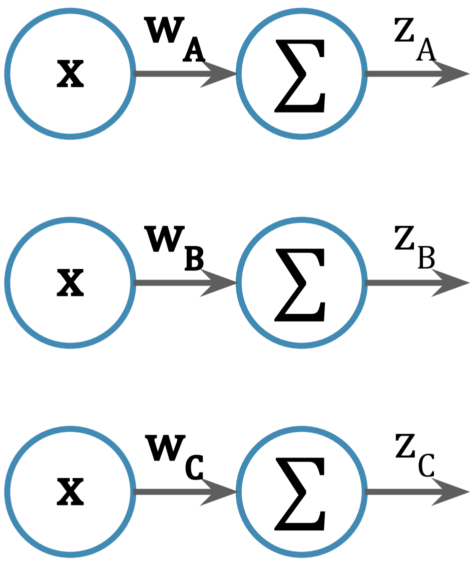


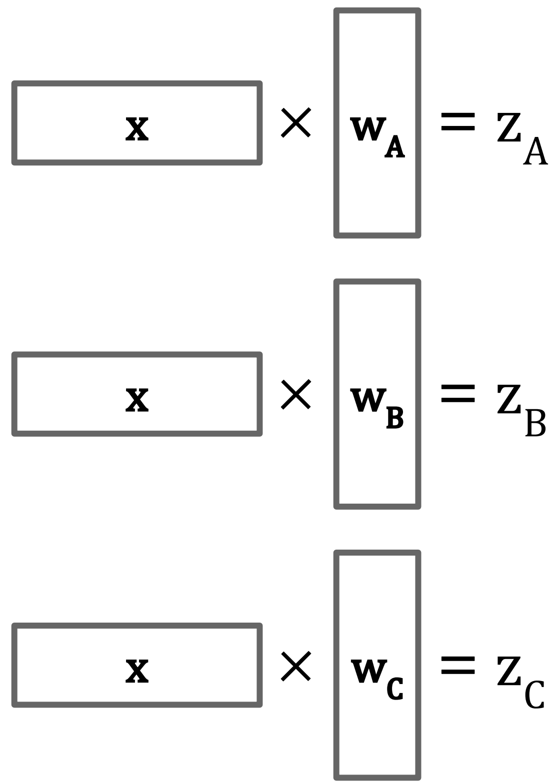
다중 분류 단순화

$$H(\mathbf{x}) = S(\mathbf{x}^\top \mathbf{w} + b)$$



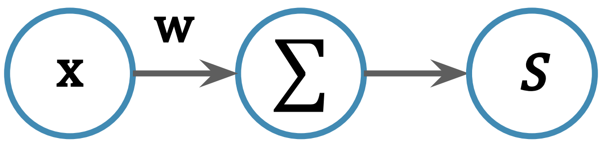
그래프 표현 → 행렬 표현





다중 분류 단순화

$$H(\mathbf{x}) = S(\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{w} + b)$$



행렬로 간단하게

$$\boxed{\mathbf{x}} \times \boxed{\mathbf{w}_A} = z_A$$

$$\boxed{\mathbf{x}} \times \boxed{\mathbf{w}_B} = z_B$$

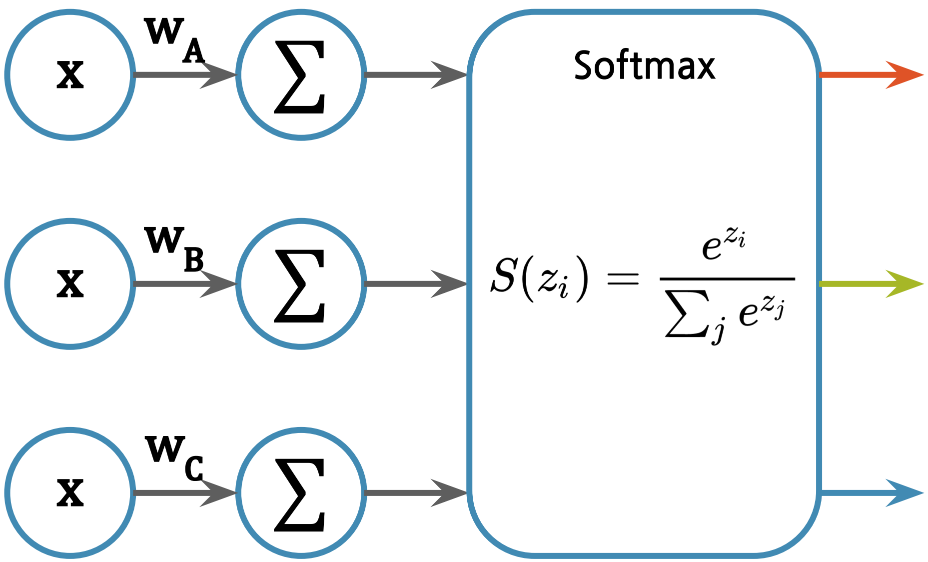
$$\boxed{\mathbf{x}} \times \boxed{\mathbf{w}_C} = z_C$$

$$\boxed{\mathbf{x}} \times \boxed{\mathbf{w}_A}\,\boxed{\mathbf{w}_B}\,\boxed{\mathbf{w}_C} = z_A, z_B, z_C$$

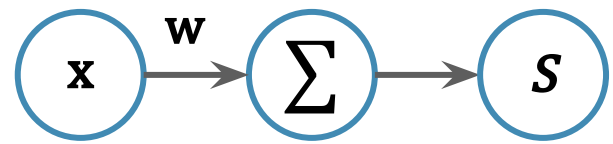
$$\boxed{\mathbf{x}} \times \boxed{\mathbf{w}} = \mathbf{z}$$

다중 분류 단순화

그래프 표현도 간단하게



$$H(\mathbf{x}) = S(\mathbf{x}^\top \mathbf{w} + b)$$



비용: Cross Entropy

비용 함수: 현재의 가설이 **얼마나 잘못되었는가**

- 값이 작을수록 가설이 정확, 값이 클수록 가설이 잘못 됨

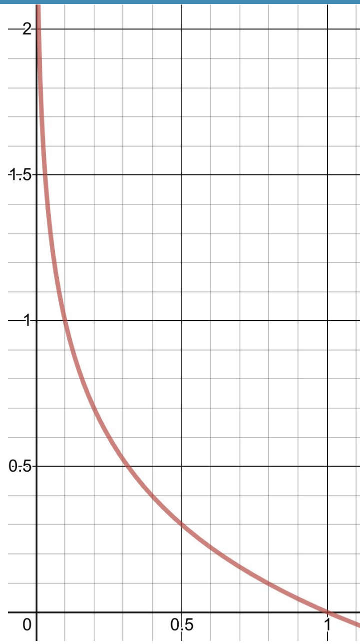
Training Data

$$H(\mathbf{x}) = S(\mathbf{x}^\top \mathbf{w} + b)$$

입력 $\mathbf{x}$	출력 (실제값) $\mathbf{y}$	출력 (예측값) $\mathbf{H(x)}$	
[1.2, 3.8]	→ [1,0,0]	[0.5,0.2,0.3]	$C(y_1, H(x_1))$
[3.2, -1.2]	→ [0,1,0]	[0.1,0.8,0.1]	$C(y_2, H(x_2))$
[2.8, -1.4]	→ [0,0,1]	[0.9,0.1,0.0]	$C(y_3, H(x_3))$
[1.2, 3.4]	→ [0,1,0]	[0.3,0.4,0.3]	$C(y_4, H(x_4))$
[4.2, 2.1]	→ [1,0,0]	[0.7,0.2,0.1]	$C(y_5, H(x_5))$
…		…	…
[3.2, 2.2]	→ [1,0,0]	[1.0,0.0,0.0]	$C(y_m, H(x_m))$

$$Cost(\mathbf{w}, b) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m} C(y_i, H(x_i))$$

비용: Cross Entropy



$$C(y, \hat{y}) = -\sum_{j=1}^{d} y_j \log \hat{y}_j$$

$$H(\mathbf{x}) = S(\mathbf{x}^{\mathsf{T}}\mathbf{w} + b)$$

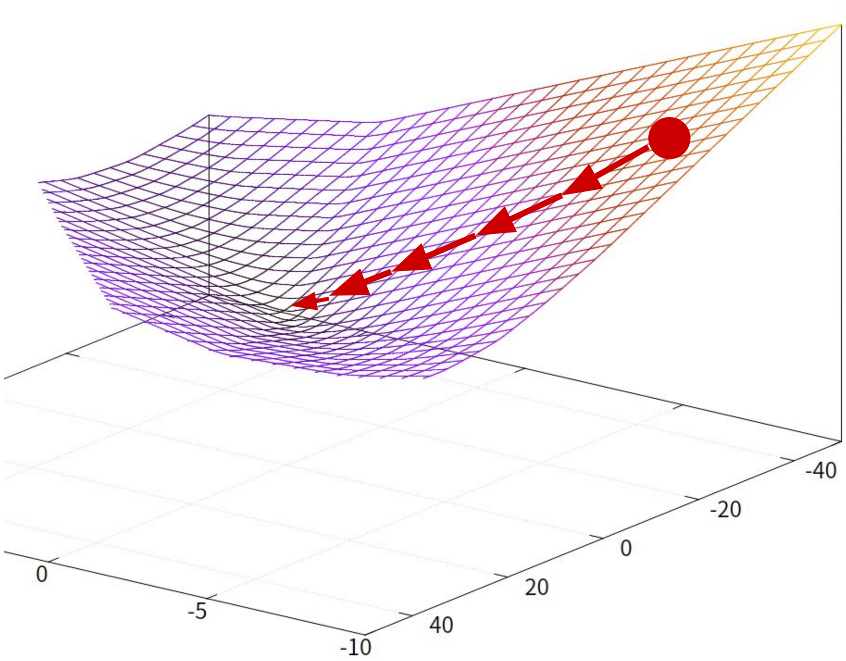
→	[1,0,0]	[0.5,0.2,0.3]	$C(y_1, H(x_1)) = -\log(0.5)$
→	[0,1,0]	[0.1,0.8,0.1]	$C(y_2, H(x_2)) = -\log(0.8)$
→	[0,0,1]	[0.9,0.0,0.1]	$C(y_3, H(x_3)) = -\log(0.1)$
→	[0,1,0]	[0.3,0.4,0.3]	$C(y_4, H(x_4)) = -\log(0.4)$
→	[1,0,0]	[0.7,0.2,0.1]	$C(y_5, H(x_5)) = -\log(0.7)$
...		...	...
→	[1,0,0]	[0.9,0.1,0.0]	$C(y_m, H(x_m)) = -\log(0.9)$

$$Cost(\mathbf{w}, b) = \sum_{i=1}^{m} C(y_i, H(x_i))$$

Gradient Descent

목표: 비용을 최소화 하자

$$\arg\min_{\mathbf{w},b} cost(\mathbf{w}, b)$$



업데이트:

$$\mathbf{w} = \mathbf{w} - \alpha \frac{\partial cost(\mathbf{w},b)}{\partial \mathbf{w}}$$

$$b = b - \alpha \frac{\partial cost(\mathbf{w},b)}{\partial b}$$

Softmax Regression (2)

가설함수:

$$H(\mathbf{x}) = S(\mathbf{x}^\top \mathbf{w} + b)$$

비용:

$$Cost(\mathbf{w}, b) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} C(y_i, H(x_i))$$

$$C(y, \hat{y}) = -\sum_{j=1}^{d} y_j \log \hat{y}_j$$

업데이트:

$$\mathbf{w} = \mathbf{w} - \alpha \frac{\partial cost(\mathbf{w}, b)}{\partial \mathbf{w}}$$

$$b = b - \alpha \frac{\partial cost(\mathbf{w}, b)}{\partial b}$$

Question?