인공지능 개론

L03.2 인공지능 기본 수학

국민대학교

소프트웨어융합대학원

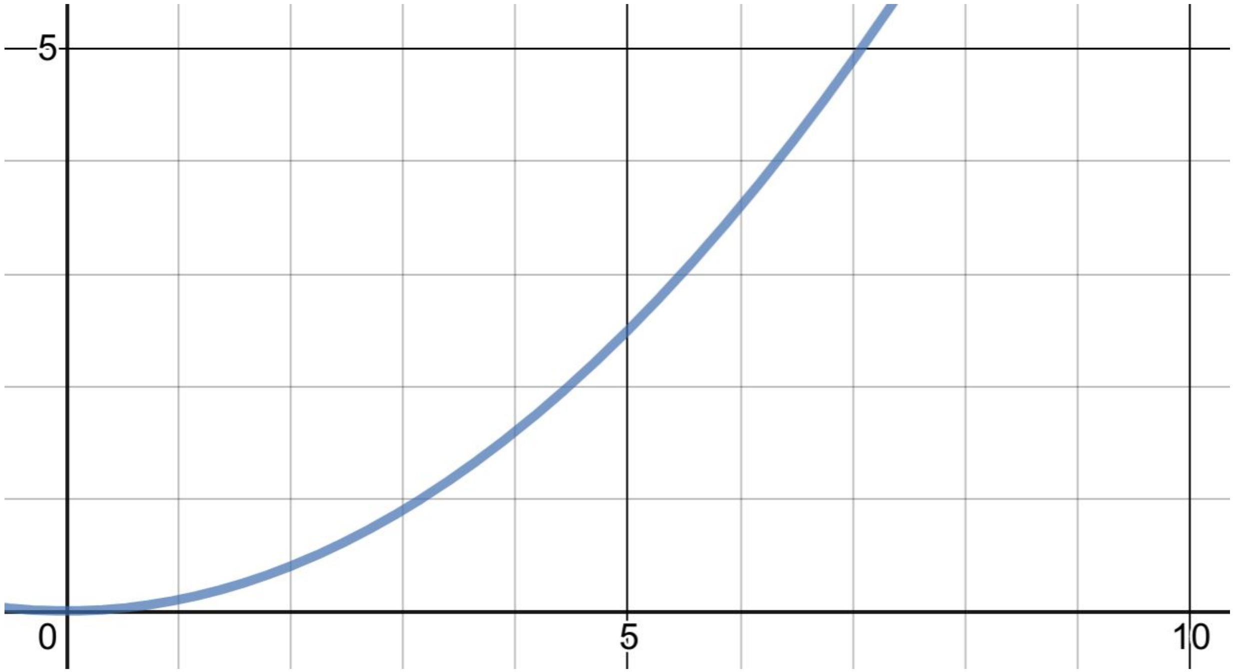
박하명

Contents

평균변화율

x가 a에서 b로 증가하는 동안, f(x)가 평균적으로 증가한 양은?

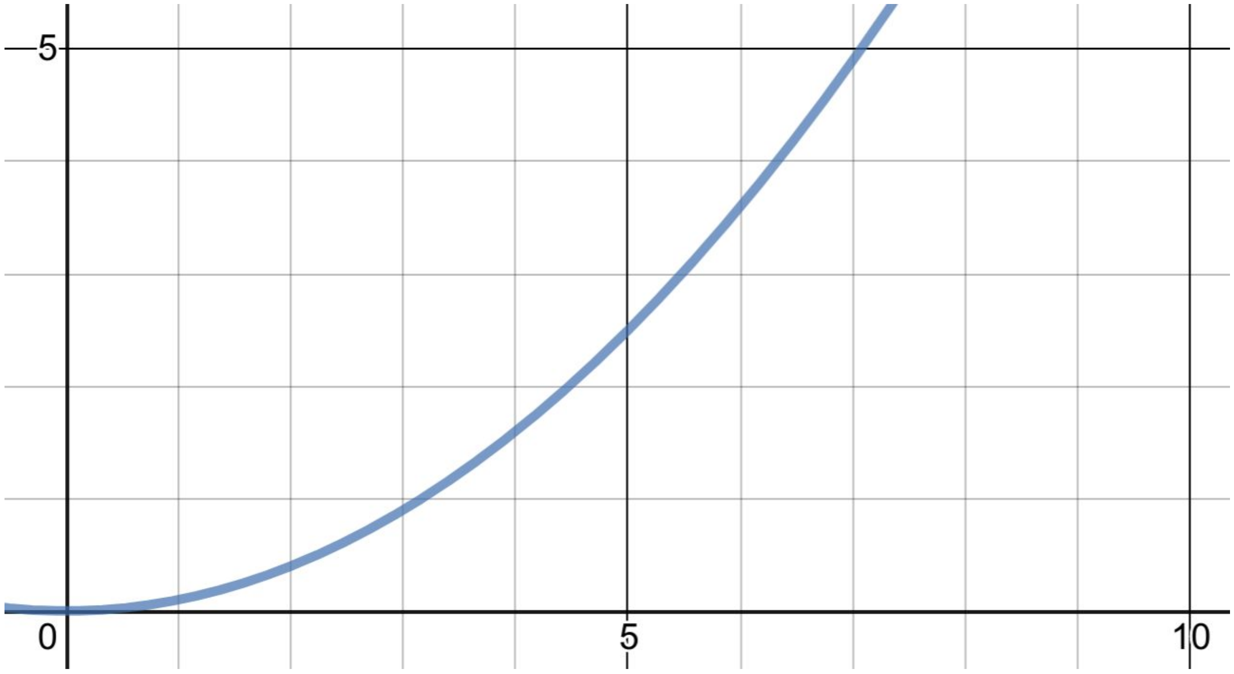
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$



순간변화율 = 미분계수

x가 a일 때, f(x)의 증가율은? = x가 a일 때, f(x)의 미분계수는?

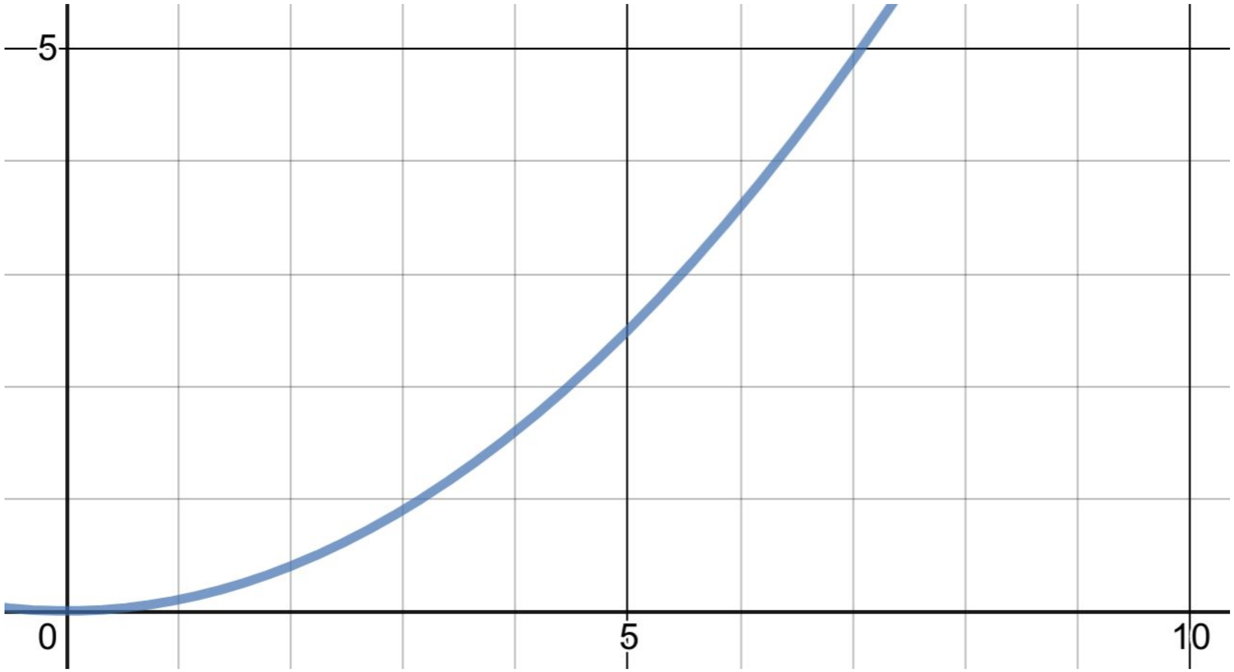
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$



도함수

항상 limit 값을 계산해야하나…? 도함수 f'(x)를 정의하자! ~ 미분한다..는 듯

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

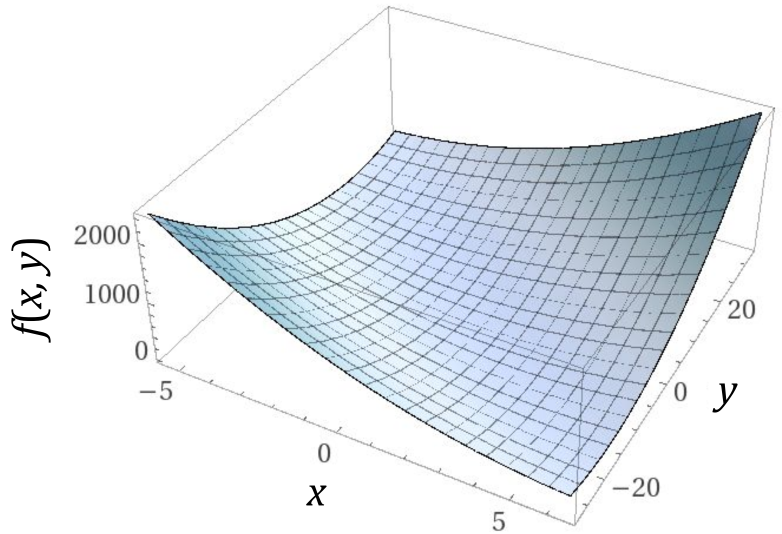


편미분

미지수가 2개일 때는 어떻게 미분을 하나...? 각각 나눠서.

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$



Contents

- 미분
- **행렬**

행렬

정의 6-1 행렬(Matrix): $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$

n, m이 양의 정수일 때 n행, m열로 나열된 실수의 2차원 배열

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} = [a_{ij}]$$

- 가로줄을 행(row), 세로줄을 열(column)이라 함
  - 행 크기와 열 크기로 행렬의 크기를 말함
  - 예) 3행 4열, 3x4 (3-by-4)
- $\boldsymbol{a_{ij}}$는 행렬 $\boldsymbol{A}$의 $\boldsymbol{i}$행, $\boldsymbol{j}$열 원소를 의미
- 행렬 $\boldsymbol{A}$의 $\boldsymbol{i}$번째 행, $\boldsymbol{j}$번째 열

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

행렬

예제 6-1

행렬 A에 대해 다음을 답하라.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 10 & 8 & 6 & 4 \\ 9 & 11 & 13 & 15 \\ 12 & 14 & 16 & 2 \end{bmatrix}$$

(1) 두 번째 행 (2) 첫 번째 열 (3) a_{24} (4) a_{33}

행렬의 덧셈과 뺄셈

정의 6-2 행렬의 덧셈과 뺄셈

두 행렬 A, B에서 같은 자리에 있는 원소들끼리 더하거나 빼는 연산

– 덧셈 표현: $A+B$

– 뺄셈 표현: $A-B$

- 두 행렬의 크기가 같아야만 연산 가능
- 응용 예)
  - 두 영화배급사의 연도 및 영화관별 매출액 합계?
  - 작년대비 올해의 상영관 및 영화배급사별 매출액 차이?
  - 작년대비 마트 및 라면종류별 가격 변화(차이 or 합계)?
  - 성적의 변화?

행렬의 덧셈과 뺄셈

$n \times m$ 크기의 행렬 A와 B가 각각 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{22} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{22} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix}$일 때,

두 행렬의 덧셈과 뺄셈 연산은 다음과 같이 수행한다.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1m}+b_{1m} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2m}+b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \dots & a_{nm}+b_{nm} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \dots & a_{1m}-b_{1m} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \dots & a_{2m}-b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}-b_{n1} & a_{n2}-b_{n2} & \dots & a_{nm}-b_{nm} \end{bmatrix}$$

행렬의 덧셈과 뺄셈

예제 6-2

다음 행렬 A, B를 이용해 주어진 문제를 연산하라.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ -7 & 3 & 6 & 1 \\ 8 & -4 & -2 & 3 \\ 1 & 9 & 4 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 7 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & -5 & 1 \\ -3 & -4 & 2 & -2 \\ 9 & 6 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

(1) $A+B$ (2) $A-B$ (3) $B-A$

행렬의 스칼라곱

정의 6-3 행렬의 스칼라곱(Scalar Multiplication): $kA = Ak = [ka_{ij}]$

행렬 A에 실수 k를 곱하는 연산

$$kA = k\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1m} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & \cdots & ka_{nm} \end{bmatrix}$$

- 응용 예)
  - 은행 및 연도별 이자수익 = 투자금액 × 은행 및 연도별 이자율

예제 6-3

다음을 연산하라.

$$-4\begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & -7 \\ 8 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

행렬의 곱셈

정의 6-4 행렬의 곱셈

$n \times m$ 행렬 A와 $r \times s$ 행렬 B가 있고 $m = r$일 때, $n \times s$ 행렬 $A \cdot B = [c_{ij}]$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{r1} & b_{r2} & \dots & b_{rs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{i1} & \dots & c_{ij} & \dots & c_{is} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & \dots & c_{nj} & \dots & c_{ns} \end{bmatrix}$$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{im}b_{mj} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}$$

- 응용 예)
  - 시간대 및 기계 종류 별 가동시간 × (시간당) 기계 종류 및 자원별 필요량 = 시간대 및 자원별 필요량

행렬의 곱셈

연산

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{ms} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\dots+a_{1m}b_{m1} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+\dots+a_{1m}b_{m2} & \dots & a_{11}b_{1s}+a_{12}b_{2s}+\dots+a_{1m}b_{ms} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+\dots+a_{2m}b_{m1} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+\dots+a_{2m}b_{m2} & \dots & a_{21}b_{1s}+a_{22}b_{2s}+\dots+a_{2m}b_{ms} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}b_{11}+a_{n2}b_{21}+\dots+a_{nm}b_{m1} & a_{n1}b_{12}+a_{n2}b_{22}+\dots+a_{nm}b_{m2} & \dots & a_{n1}b_{1s}+a_{n2}b_{2s}+\dots+a_{nm}b_{ms} \end{bmatrix}$$

- $\boldsymbol{A}$의 i번째 행과 $\boldsymbol{B}$의 j번째 열이 서로 대응하여 연산
  - $\boldsymbol{A}$의 열 크기와 $\boldsymbol{B}$의 행 크기가 같아야 연산 가능
- 행렬 $\boldsymbol{A}$의 크기가 **n×m** 이고 행렬 $\boldsymbol{B}$의 크기가 **m×s** 일 때, 곱 $\boldsymbol{AB}$의 결과로 나오는 행렬의 크기는 **n×s** 임.
- $\boldsymbol{A \times A \times A = A^3}$, $\underbrace{\boldsymbol{A \times A \times A \times \dots \times A}}_{n개} \boldsymbol{= A^n}$

행렬의 곱셈

예제 6-4

행렬 A, B, C가 다음과 같을 때, 연산이 가능한 것을 골라 연산하라.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3\\4 & 6\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\9 & 3 & 8\\4 & 7 & 5\end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix}0 & 6 & 1\\3 & 5 & 2\end{bmatrix}$$

(1) AB (2) BA (3) AC (4) CA (5) BC (6) CB

Question?