

## Теория игр

### 1 Основные понятия теории игр

В природе и обществе часто встречаются явления, в которых его участники имеют несовпадающие интересы и располагают различными путями для достижения своих целей. Например, рассмотрим ситуации, когда исход операции зависит от действия нескольких сторон, когда каждая сторона имеет свой интерес к проведению операции. Такие явления называются **конфликтами** (ситуации - конфликтными), и они являются предметом изучения [теории игр](#).

#### Конфликтные ситуации

Для конфликта характерно то, что ни один из его участников заранее не знает решений, принимаемых остальными участниками, т.е. вынужден действовать в условиях неопределённости.

Конфликт может возникнуть также из различия целей, которые отражают не только не совпадающие интересы различных сторон, но и многогранные интересы, согласуя противоречивые технико-экономические требования, предъявляемые к конструируемому изделию [минимизация габаритов и стоимости, максимизация надежности]. План любого предприятия разрабатывается с учетом интересов различных сторон (плановых органов, ведомств, предприятий изготовителей, предприятий потребителей).

Таким образом, единственная общность, которая объединяет все конфликты независимо от их физической и социальной природы, состоит в столкновении интересов нескольких сторон. Основным аспектом этого столкновения заключается в том, что стороны преследуют различные цели, имея для их достижения некоторые наборы альтернатив, каждая из которых приводит к одному или одному из нескольких возможных исходов. При этом результат любого мероприятия каждой из сторон зависит от того, какой образ действия выберут другие стороны. В таком представлении конфликты составляют содержание многих процессов из области экономики, военного дела, социологии, техники и других видов человеческой деятельности.

Представим себе простейшую экономическую ситуацию. Имеется несколько предпринимателей, каждый из которых стремится получить максимум прибыли. При этом каждый из них имеет ограниченную власть над переменными, определяющими эту прибыль. Предприниматель не может изменить значение переменных, которыми распоряжается другой предприниматель, но которые могут сильно повлиять на доход первого. Возникает конфликтная ситуация.

Обратимся от экономики к салонным играм, например, покеру, шахматам. В таких играх любой игрок стремится как можно больше выиграть. Результат может определяться по количеству набранных очков либо выигранной суммой денег, если игра велась на деньги. В салонной игре каждый игрок делает не один выбор, а целую серию, порядок и характер которых зависят от предыдущих выборов игроков.

Между салонными играми и экономическими ситуациями существует одно различие. Правила салонной игры почти всегда указывают, что между игроками не может быть сговора. В экономике понятие **коалиции**, т.е. сговора между предпринимателями с тем, чтобы улучшить положение каждого члена коалиции, в повседневной жизни признается законом. Это происходит за счет других предпринимателей, не входящих в коалицию, или за счет потребителя.

**Теория игр** – это математическая дисциплина, которая указывает, каким образом необходимо вести себя в конфликтных ситуациях, чтобы обеспечить получение лучших (в некотором заранее заданном смысле) результатов. Анализ математической стороны и основных принципов теории игр был дан Фон Нейманом в 1928 г. Наиболее полно ее стали изучать после выхода в 1944 г. книги Фон Неймана и Моргенштерна "Теория игр и экономического поведения".

**Теория игр** – это раздел исследования операции, в котором рассматриваются математические модели и методы принятия оптимальных решений в конфликтных ситуациях, т.е. когда действия одной стороны зависят от действия другой.

**Игра** – это математическая модель конфликтной ситуации, анализ которой ведется по определенным правилам.

Чтобы задать игру, надо определить:

- 1) Совокупность правил, указывающих порядок действия игроков, указывают перечень вариантов действий, из которых осуществляют выбор игроки.
- 2) Указать, какой информацией обладает игрок в каждый момент времени, когда осуществляет свой выбор.
- 3) Правилами должно быть строго определено, что значит, что игра закончена.
- 4) Как игроки рассчитываются между собой.

Каждый конкретный пример разыгрывания игры некоторым конкретным образом от начала и до конца представляет собой **партию**.

В теории игр противников принято называть **игроками**.

**Ход** представляет собой возможность выбора между различными альтернативами, производимый либо одним из игроков, либо некоторым случайным устройством, в условиях, точно определяемый правилами игры. Ходы бывают *личные* и *случайные*. Личным ходом называют сознательный выбор игроком одного из возможных вариантов действия и его осуществление. Случайным ходом называют выбор, осуществляемый не волевым решением игрока, а каким-либо механизмом случайного выбора (бросание монеты, пасовка, сдача карт).

**Стратегия игрока** – это установленный игроком метод выбора ходов в течение игры, т.е. совокупность правил выбора решения. Результаты или платежи в игре задаются функциями, зависящими от стратегии каждого из игроков.

**Выигрыш** – это оценка результатов ходов игроков, которая осуществляется с помощью специальной функции выигрыша.

## 2 Классификация игр

Существуют различные признаки классификации игр.

Классификацию игр можно проводить: по количеству игроков, количеству стратегий, характеру взаимодействия игроков, характеру выигрыша, количеству ходов, состоянию информации и т.д.

1) В зависимости от количества игроков различают игры двух и  $n$  игроков. Первые из них наиболее изучены. Игры трёх и более игроков менее исследованы из-за возникающих принципиальных трудностей и технических возможностей получения решения. Чем больше игроков - тем больше проблем.

2) По количеству стратегий игры делятся на **конечные** и **бесконечные**.

- Если в игре все игроки имеют конечное число возможных стратегий, то она называется **конечной**. Примерами конечных игр могут быть такие игры, как «крестики-нолики», домино, шахматы, шашки, карты.

- Если же хотя бы один из игроков имеет бесконечное количество возможных стратегий, игра называется **бесконечной**.

3) По характеру взаимодействия игроков игры делятся на:

- **бескоалиционные**: игроки не имеют права вступать в соглашения, образовывать коалиции;

- **коалиционные** (кооперативные) – игроки могут вступать в коалиции.

В кооперативных играх коалиции наперёд определены.

4) По характеру выигрышей игры делятся на:

- игры **с нулевой суммой** (общий капитал всех игроков не меняется, а перераспределяется между игроками; сумма выигрышей всех игроков равна нулю)

- игры **с ненулевой суммой**.

5) По виду функций выигрыша игры делятся на:

- **матричные**,

- **биматричные**,

- **непрерывные**,

- **выпуклые**,

- **сепарабельные**,

- **типа дуэлей** и др.

6) по количеству ходов, которые делают игроки для достижения своих целей игры делятся на:

- **одношаговые** – игрок выбирает одну из доступных ему стратегий и делает всего один-единственный ход

- **многошаговые** – делают последовательно ряд ходов, которые могут ограничиваться правилами игры либо могут продолжаться до тех пор, пока у одного из игроков не останется ресурсов для продолжения игры.

**Матричная игра** – это конечная игра двух игроков с нулевой суммой, в которой задаётся выигрыш первого игрока в виде матрицы. Строка матрицы соответствует номеру применяемой стратегии первого игрока, столбец – номеру применяемой стратегии второго игрока; на пересечении строки и столбца матрицы находится выигрыш первого игрока и проигрыш второго игрока, соответствующий применяемым стратегиям.

Для матричных игр доказано, что любая из них имеет решение и оно может быть легко найдено путём сведения игры к задаче линейного программирования.

**Биматричная игра** – это конечная игра двух игроков с ненулевой суммой, в которой выигрыши каждого игрока задаются матрицами отдельно для соответствующего игрока. В каждой матрице строка соответствует стратегии игрока 1, столбец – стратегии игрока 2, на пересечении строки и столбца в первой матрице находится выигрыш игрока 1, во второй матрице – выигрыш игрока 2.

Для биматричных игр также разработана теория оптимального поведения игроков, однако решать такие игры сложнее, чем обычные матричные.

**Непрерывной** считается игра, в которой функция выигрышей каждого игрока является непрерывной в зависимости от стратегий. Доказано, что игры этого класса имеют решения, однако не разработано практически приемлемых методов их нахождения.

Если функция выигрышей является выпуклой, то такая игра называется **выпуклой**. Для них разработаны приемлемые методы решения, состоящие в отыскании чистой оптимальной стратегии (определённого числа) для одного игрока и вероятностей применения чистых оптимальных стратегий другого игрока. Такая задача решается сравнительно легко.

Наиболее распространены игры двух лиц.

Рассмотрим матричную игру двух лиц с нулевой суммой.

### 3 Матричная игра двух лиц с нулевой суммой

В игре участвуют два игрока. Функция выигрыша задается прямоугольной матрицей  $m \times n$   $A = (a_{ij}), i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$ , которую называют **платежной матрицей игры**. Стратегии первого игрока – это строки, а стратегии второго игрока – это ее столбцы. Партия такой игры разыгрывается следующим образом. Первый игрок тайно выбирает некоторую строку, а второй – столбец, и затем оба объявляют о своем выборе. Если первый игрок выбрал стратегию  $k$ , а второй –  $t$ , то результат (исход) –  $a_{kt}$ , который, как правило, означает выигрыш первого игрока.

Если число  $a_{kt} > 0$ , то это действительно его выигрыш, а если  $a_{kt} < 0$ , то это выигрыш второго игрока. После выбора строки и столбца партия закончена.

Игра называется *игрой с нулевой суммой*, так как в ней выигрыш одного игрока всегда равен проигрышу другого. Если первый игрок имеет выигрыш  $a$ , второй  $b$ , то выполняется условие  $a + b = 0$ . Если  $a > 0$ , то говорят, что первый игрок выиграл  $a$  единиц, следовательно,  $b < 0$ , т.е. второй проигрывает  $b = -a$ . Интересы игроков строго противоречивы.

Такие игры называют еще **антагонистическими**. Важно уметь составлять матрицу игры.

Рассмотрим примеры.

**Пример 1.** Игра в “орлянку”. Первый игрок кладет монету, а второй отгадывает - орел или решка. Если второй угадал, то он выигрывает 1, если нет, то выигрывает первый 1. Матрица игры представлена ниже в таблице, где О – орел, Р – решка.

	О	Р
О	-1	1
Р	1	-1

**Пример 2.** Игра «в прятки»: есть две комнаты. Игрок А прячется, В – ищет в одной из этих 2-х комнат. А спрятался, В идет искать. Если он заходит туда, где спрятался А, то он выиграл 1 очко, если он его не находит, то проиграл 1. Стратегии игроков: для А – 1-ая – спрятаться в комнате 1, 2-ая – спрятаться в комнате 2, для В – 1-ая – ищет 2 комнате 1, 2-ая – ищет в комнате 2. Матрица игры имеет вид

	1	2
1	-1	1
2	1	-1

**Пример 3.** Игра “камень, мешок и ножницы”. В этой игре каждый из двух игроков может выбрать камень, мешок или ножницы. Камень уносится в миске, ножницы режут мешок. Камень точит ножницы. Таким образом, игрок 1 выигрывает единицу, если выигрывает игрока 2, и проигрывает единицу, если оказывается побежденным. Если оба игрока дают одинаковый выбор, игра заканчивается вничью. Матрица игры представлена ниже в таблице, где К – камень, М – мешок, Н – ножницы.

	К	М	Н
К	0	-1	1
М	1	0	-1
Н	-1	1	0

### Упражнения:

Составить матрицу игры

1. Две фирмы производят 2 конкурирующих товара. Эти товары контролируют 50% рынка. Улучшив качество товаров, обе фирмы собираются развернуть рекламные компании. Если фирмы не будут делать этого, то состояние на рынке не изменится. Однако, если одна фирма будет более активно рекламировать свои товары, то другая фирма потеряет соответствующий процент потребителей. Обследование рынка показывает, что 50% потенциальных потребителей получают информацию по телевидению, 30% - через газету, остальные 20% - по радио. Цель каждой фирмы выбрать подходящие средства рекламы.

2. Для отопления помещения необходимо приобрести топливо. Однако расход топлива и цены на него зависят от погоды в зимнее время. Зимы бывают мягкие, нормальные, суровые. Зависимость расхода топлива и цены на него в зависимости от зимы показана в таблице:

зима	мягкая	нормальная	Суровая
Расход, т	5	10	18
Цена за 1 т.(руб)	10	16	20

В настоящее время уголь можно приобрести по цене 10 руб. за 1 т. и излишек продать весной по 5 руб. за т. Можно выбирать одну из 3-х стратегий: закупать 5 т, 10 т. или 18 т.