Раздел 4. Модели и методы теории графов

Построение минимального остовного дерева

Алгоритм построения минимального остовного дерева

Данный алгоритм предполагает соединение всех узлов сети с помощью путей наименьшей длины. Типичной задачей, для решения которой необходим такой алгоритм, является создание (проектирование) сети дорог с твёрдым покрытием, соединяющих населенные пункты в сельской местности, где дороги, соединяющие 2 каких-либо пункта, могут проходить через другие населённые пункты. Наиболее экономичный проект дорожной системы должен минимизировать общую длину дорог с твёрдым покрытием. Желаемый результат можно получить путём применения алгоритма построения минимального остовного дерева:

N-множество узлов сети; C_k - множество узлов, соединённых после выполнения k-итерации; $\overline{C_к}$ -множество узлов, не соединяющих с узлами множеств C_k, после выполнения k-й итерации алгоритма.

Шаг 0: C_0 = пустое множество; $\overline{C_к} = N$

Шаг i: выбираем любой узел i из множеств $\overline{C_o}$ и определяем $C_1=\{i\}$, тогда $\overline{C_1} = N-\{i\}$, $k=2$.

Основной шаг k: В множестве $\overline{C_{к-1}}$ выбираем узел j, который соединяем самой короткой дугой с каким-либо узлом из множеств C_{k-1}. Узел j присоединяется к множеству C_{k-1} и удаляется из $\overline{C_{к-1}}$, таким образом $C_k=C_{k-1}+\{j\}$; $\overline{C_к} = \overline{C_{к-1}}$ -j.

Если множество $\overline{C_к}$ пусто, то выполнение алгоритма заканчивается, в противном случае $k=k+1$ и повторяем последний шаг.

Пример. Телевизионная компания планирует подключение к своей кабельной сети 5 новых микрорайонов. На рис. 13 показана структура планируемой сети и расстояние между районами и телецентром. Необходимо спланировать наиболее экономичную кабельную сеть.

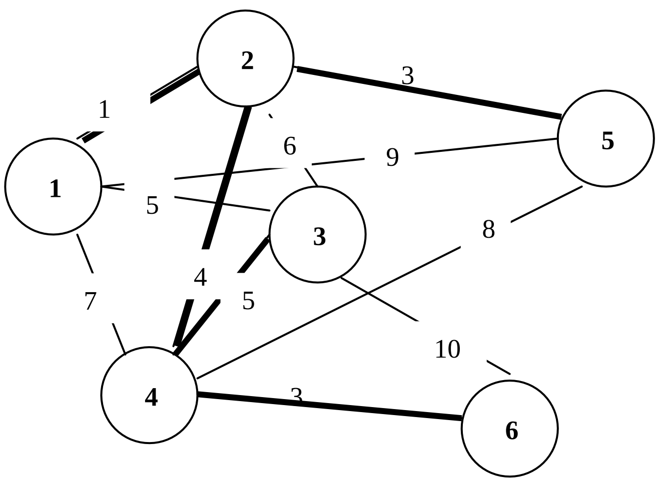

Рис. 13

Начнем алгоритм построения минимального остовного дерева с выбора узла 1.

$C_1=\{1\}$, $\overline{C_1} = \{2,3,4,5,6\}$.

C_2={1,2}, $\overline{C_2}$ ={3,4,5,6}.

C_3={1,2,5}, $\overline{C_3}$ ={3,4,6}.

C_4={1,2,5,4,}, $\overline{C_4}$ ={3,6}.

C_5={1,2,5,4,6}, $\overline{C_5}$ ={3}.

C_6={1,2,5,4,6,3}, $\overline{C_6}$ ={}.

Минимальное остовное дерево выделено на рис.13, минимальная длина кабеля для построения такой сети равна 1+3+4+5+3 = 16.

Пример. Решить эту же задачу, но начать с пункта 5. Убедится, что будет получено то же самое решение.

Нахождение кратчайшего пути по заданной сети

Рассмотрим алгоритм нахождения кратчайшего пути в сетях, как имеющих циклы, так и в сетях, не имеющих циклов.

Алгоритм Дейкстры

При переходе от узла i к следующему узлу j используется специальная процедура пометки рёбер. Обозначим через u_i – кратчайшее расстояние от узла 1 до узла j, d_{ij} – длина ребра (i, j). Тогда для узла j метка определится как $[u_j,i] =[u_i+d_{ij},i]$, $d_{ij} \geq 0$.

Метки могут быть двух типов – временные и постоянные. Временная метка может быть впоследствии заменена на другую временную метку, если будет найден более короткий путь к данному узлу. Когда же станет очевидным, что не существует более короткого пути от исходного узла к данному, статус временной метки изменяется на постоянный. Вычислительная схема алгоритма состоит из следующих шагов:

Шаг 0: исходному узлу (1) присваивается метка [0,-], $i =1$.

Шаг i:

а) вычисляются временные метки $[u_i+d_{ij},i]$ для всех узлов j, которые можно достичь непосредственно из узла i и которые не имеют постоянных меток. Если узел j уже имеет метку $[u_j,k]$, полученную от другого узла k, и если $u_i+_{dij}+u_j$, тогда метка $[u_j,k]$ заменяется на $[u_j+d_{ij},i]$.

б) если все узлы имеют постоянные метки, процесс вычислений заканчивается. В противном случае выбирается метка $[u_r,s]$ с наименьшим значением расстояния u_r среди всех временных меток. Полагаем $i=r$ и и повторяем шаг i.

Кратчайший маршрут между 1 и любым другим узлом сети определяется с узла назначения путём прохождения в обратном порядке с помощью информации, представленной в постоянных метках,

Пример. Найти кратчайшее расстояние из 1 в 2 на сети, изображенной на рис.14. Применив алгоритм Дейкстры получаем такую обратную последовательность: $2 \to 4 \to 3 \to 1$. Общая длина пути при этом равна 15+10+30=55.

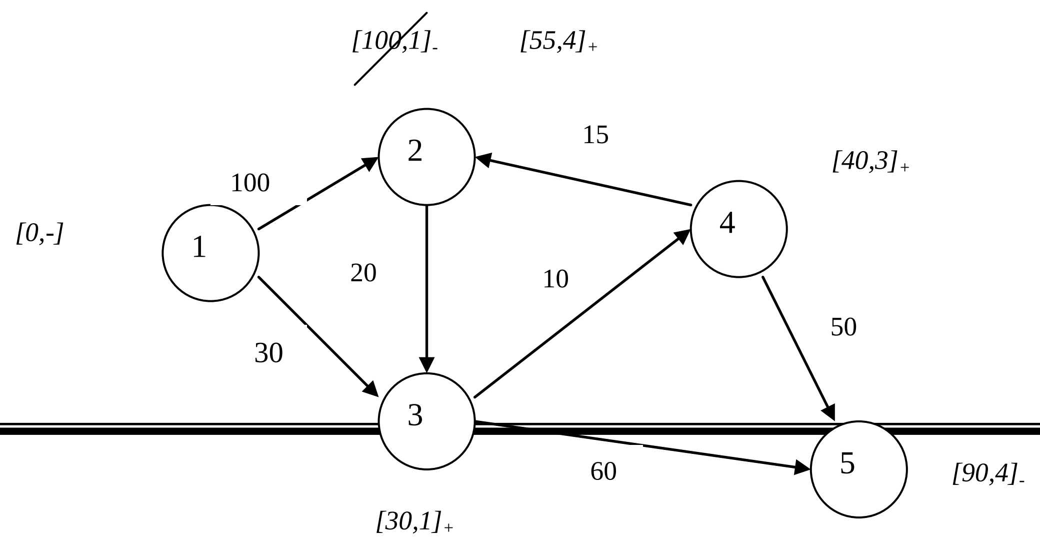

Рис. 14.