Системы массового обслуживания. Обслуживание как марковский случайный процесс

Переход СМО из одного состояния в другое происходит случайным образом и представляет собой случайный процесс. Работа СМО — случайный процесс с дискретными состояниями, поскольку его возможные состояния во времени можно заранее перечислить. Причем переход из одного состояния в другое происходит скачкообразно, в случайные моменты времени, поэтому он называется процессом с непрерывным временем. Таким образом, работа СМО представляет собой случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем. На пример, в процессе обслуживания оптовых покупателей на фирме «Кристалл» в Москве можно фиксировать заранее все возможные состояния простейших СМО, которые входят в весь цикл коммерческого обслуживания от момента заключения договора на поставку продукции, ее оплаты, оформления документов до отпуска и получения продукции, погрузки и вывоза со склада готовой продукции. Из множества разновидностей случайных процессов наибольшее распространение в коммерческой деятельности получили такие процессы, для которых в любой момент времени его характеристики в будущем зависят только от его состояния в настоящий момент и не зависят от предыстории — от прошлого. Например, возможность получения с завода «Кристалл» зависит от наличия ее на складе готовой продукции, т.е. его состояния в данный момент, и не зависит от того, когда и как получали и увозили в прошлом эту продукцию другие покупатели.

Такие ***случайные процессы называются процессами без последствия, или марковскими, в которых при фиксированном настоящем будущее состояние СМО не зависит от прошлого.*** Случайный процесс, протекающий в системе, называется марковским случайным процессом, или процессом без последствия, если он обладает следующим свойством: для каждого момента времени t0 вероятность любого состояния t > t0 системы Si в будущем (t > t0) зависит только от ее состояния в настоящем (при t = t0) и не зависит от того, когда и каким образом система пришла в это состояние, т.е. от того, как развивался процесс в прошлом.

Марковские случайные процессы делятся на два класса: процессы с дискретными и непрерывными состояниями. Процесс с дискретными состояниями возникает в системах, обладающих только некоторыми фиксированными состояниями, между которыми возможны скачкообразные переходы в некоторые, заранее неизвестные моменты времени. Рассмотрим пример процесса с дискретными состояниями. В офисе фирмы имеются два телефона. Возможны следующие состояния у этой системы обслуживания: S0 — телефоны свободны; S1 — один из телефонов занят; S2 — оба телефона заняты. Процесс, протекающий в этой системе, состоит в том, что система случайным образом переходит скачком из одного дискретного состояния в другое. Процессы с непрерывными состояниями отличаются непрерывным плавным переходом из одного состояния в другое. Эти процессы более характерны для технических устройств, нежели для экономических объектов, где обычно лишь приближенно можно говорить о непрерывности процесса (например, о непрерывном расходовании запаса товара), тогда как фактически всегда процесс имеет дискретный характер.

Поэтому далее мы будем рассматривать только процессы с дискретными состояниями. ***Марковские случайные процессы с дискретными состояниями в свою очередь подразделяются на процессы с дискретным временем и процессы с непрерывным временем.*** В первом случае переходы из одного состояния в другое происходят только в определенные, заранее фиксированные моменты времени, тогда как в промежутки между этими моментами система сохраняет свое состояние. Во втором случае переход системы из состояния в состояние может происходить в любой случайный момент времени.

На практике процессы с непрерывным временем встречаются значительно чаще, поскольку переходы системы из одного состояния в другое обычно происходят не в какие-то фиксированные моменты времени, а в любые случайные моменты времени. Для описания процессов с непрерывным временем используется модель в виде так называемой марковской цепи с дискретными состояниями системы, или ***непрерывной марковской цепью.***

Графы состояний СМО

При анализе случайных процессов с дискретными состояниями и непрерывным временем удобно пользоваться вариантом схематичного изображения возможных состояний СМО (рис. 5.2) в виде графа с разметкой его возможных фиксированных состояний. Состояния СМО изображаются обычно либо прямоугольниками, либо кружками, а возможные направления переходов из одного состояния в другое ориентированы стрелками, соединяющими эти состояния. Например, размеченный граф состояний одноканальной системы случайного процесса обслуживания в газетном киоске приведен на рис. рис. 1

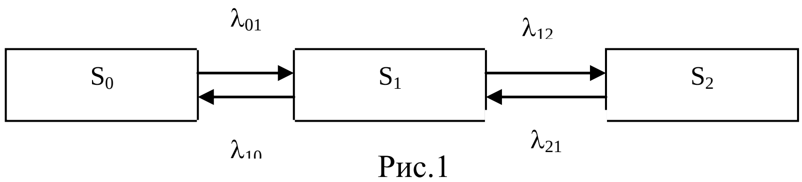


Рис.1

Система может находиться в одном из трех состояний: S0 — канал свободен, простаивает, S1 — канал занят обслуживанием, S2 — канал занят обслуживанием и одна заявка в очереди. Переход системы из состояния S0 в S1 происходит под воздействием простейшего потока заявок интенсивностью λ01, а из состояния S1 в состояние S0 систему переводит поток обслуживания с интенсивностью λ10. Граф состояний системы обслуживания с проставленными интенсивностями потоков у стрелок называется размеченным. Поскольку пребывание системы в том или ином состоянии носит вероятностный характер, то вероятность pi(t) того, что система будет находиться в состоянии Si в момент времени t, называется вероятностью i-го состояния СМО и определяется числом поступивших заявок k на обслуживание. Случайный процесс, происходящий в системе, заключается в том, что в случайные моменты времени t0, t1, t2, ..., tk, ..., tn система оказывается в том или другом заранее известном дискретном состоянии последовательно. Такая случайная последовательность событий называется марковской цепью, если для каждого шага вероятность перехода из одного состояния Si в любое другое Sj не зависит от того, когда и как система перешла в состояние Si. Описывается марковская цепь с помощью вероятности состояний, причем они образуют полную группу событий, поэтому их сумма равна единице. ***Если вероятность перехода не зависит от номера k, то марковская цепь называется однородной.*** Зная начальное состояние системы обслуживания, можно найти вероятности состояний для любого значения k — числа заявок, поступивших на обслуживание.

Уравнения Колмогорова. Финальные вероятности состояния СМО

Рассмотрим математическое описание марковского случайного процесса с дискретными состояниями системы S0, S1, S2 (см. рис. 1.) и непрерывным временем. Полагаем, что все переходы системы массового обслуживания из состояния Si в состояние Sj происходят под воздействием простейших потоков событий с интенсивностями λij, а обратный переход — под воздействием другого потока λji.

Введем обозначение pi как вероятность того, что в момент времени t система находится в состоянии Si.

Для любого момента времени t справедливо записать нормировочное условие — сумма вероятностей всех состояний равна 1: ∑pi(t) = p0(t) + p1(t) + p2(t) = 1.

Проведем анализ системы в момент времени t, задав малое приращение времени Δt, и найдем вероятность p1(t + Δt) того, что система в момент времени (t + Δt) будет находиться в состоянии S1, которое достигается разными вариантами:

а) система в момент t с вероятностью $p_i(t)$ находилась в состоянии S1 и за малое приращение времени Δt так и не перешла в другое соседнее состояние — ни в S0, ни в S2. Вывести систему из состояния S1 можно суммарным простейшим потоком с интенсивностью ($\lambda_{10} + \lambda_{12}$), поскольку суперпозиция простейших потоков также является простейшим потоком. На этом основании вероятность выхода из состояния S1 за малый промежуток времени Δt приближенно равна ($\lambda_{10} + \lambda_{12}$) $*\Delta t$.
Тогда вероятность невыхода из этого состояния равна $[1 - (\lambda_{10} + \lambda_{12})\Delta t]$. В соответствии с этим вероятность того, что система останется в состоянии S1 на основании теоремы умножения вероятностей, равна $p_1(t)*[1 - (\lambda_{10} + \lambda_{12})*\Delta t]$;
б) система находилась в соседнем состоянии S0 и за малое время Δt перешла в состояние S1. Переход системы происходит под воздействием потока λ_{01} с вероятностью, приближенно равной $\lambda_{01}*\Delta t$. Вероятность того, что система будет находиться в состоянии S1, в этом варианте равна $p_0(t)*\lambda_{01}\ \Delta t$;
в) система находилась в состоянии S2 и за время Δt перешла в состояние S1 под воздействием потока интенсивностью λ_{21} с вероятностью, приближенно равной $\lambda_{21}*\Delta t$. Вероятность того, что система будет находиться в состоянии S1, равна $p_2(t)*\lambda 218\Delta t$.
Применяя теорему сложения вероятностей для этих вариантов, получим выражение
$p_1(t + \Delta t) = p_1(t)*[1 - (\lambda_{10} + \lambda_{12})\Delta t] + p_0(t)*\lambda_{01}*\Delta t + p_2(t)*\lambda_{21}*\Delta t$, которое можно записать иначе

$$\frac{p_1(t+\Delta t) - p_1(t)}{\Delta t} = p_0(t)\lambda_{01} + p_2(t)\lambda_{21} - p_1(t)(\lambda_{10} + \lambda_{12}).$$

Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, приближенные равенства перейдут в точные, и тогда получим производную первого порядка = $p_0\lambda_{01} + p_2\lambda_{21} - p_1(\lambda_{10} + \lambda_{12})$,что является дифференциальным уравнением. Проводя рассуждения аналогичным образом для всех других состояний системы, получим систему дифференциальных уравнений, которые называются уравнениями А. Н. Колмогорова. Для составления уравнений Колмогорова существуют общие правила.
Уравнения Колмогорова позволяют вычислить все вероятности состояний СМО Si в функции времени $p_i(t)$. В теории случайных процессов показано, что если число состояний системы конечно, а из каждого из них можно перейти в любое другое состояние, то существуют предельные (финальные) вероятности состояний, которые показывают на среднюю относительную величину времени пребывания системы в этом состоянии. Если предельная вероятность состояния S0 равна $p_0 = 0{,}2$, то, следовательно, в среднем 1/5 рабочего времени, система находится в состоянии S0. Например, при отсутствии заявок на обслуживание $k = 0$, $p_0 = 0{,}2$, следовательно, в среднем 2 ч в день система находится в состоянии S0 и простаивает, если продолжительность рабочего дня составляет 10 ч.
Поскольку предельные вероятности системы постоянны, то, заменив в уравнениях Колмогорова соответствующие производные нулевыми значениями, получим систему линейных алгебраических уравнений, ***описывающих стационарный режим СМО. Такую систему уравнений составляют по размеченному графу состояний СМО по следующим правилам:***
слева от знака равенства в уравнении стоит предельная вероятность p_i рассматриваемого состояния S1, умноженная на суммарную интенсивность всех потоков, выводящих (выходящие стрелки) из данного состояния Si систему, а справа от знака равенства — сумма произведений интенсивности всех потоков, входящих (входящие стрелки) в состояние Si систему, на вероятность тех состояний, из которых эти потоки исходят.
Для решения подобной системы необходимо добавить еще одно уравнение, определяющее нормировочное условие, поскольку сумма вероятностей всех состояний СМО равна 1 $p_i(t) = 1$.

Например, для СМО, имеющей размеченный граф из трех состояний S0, S1, S2 рис. 1. система уравнений Колмогорова, составленная на основе изложенного правила, имеет следующий вид.

	Выходящие		Входящие
Для состояния S0 _	p0λ01	=	p1λ10
Для состояния S1 _	λ10 + λ12)	=	p0λ01 + p2λ21
Для состояния S2 _	p2λ21	=	p1λ12
	p0 + p1 + p2	=	1

Пример 1. **Математическая модель стационарного режима функционирования марковского процесса с непрерывным временем**

На рис.2 представлен граф состояний системы, дугам которого приписаны постоянные интенсивности перехода из состояния в состояние. В момент времени $t=0$ система находилась в состоянии S_1 . Требуется составить математическую модель для нестационарного и стационарного режима функционирования системы.

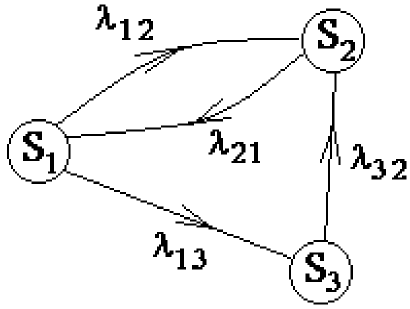


Рис.2. Граф состояний системы

Приведенное выше правило позволяет записать следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} p_1'(t) = -(\lambda_{12}+\lambda_{13})p_1(t) + \lambda_{21}p_2(t) \\ p_2'(t) = \lambda_{12}p_1(t) - \lambda_{21}p_2(t) + \lambda_{32}p_3(t). \\ p_3'(t) = \lambda_{13}p_1(t) - \lambda_{32}p_3(t) \end{cases}$$

Так как при $t=0$ система находилась в состоянии S_1, то имеют место начальные условия: $p_1(0)=1$, $p_2(0)=0$, $p_3(0)=0$. Решение системы при заданных начальных условиях (аналитическими или численными методами) позволяет найти вероятности пребывания системы $p_i(t)$ в каждом состоянии, $i=1,2,3$.

Из системы дифференциальных уравнений получается ***математическая модель стационарного режима функционирования системы:***

$$\begin{cases} -(\lambda_{12}+\lambda_{13})p_1 + \lambda_{21}p_2 = 0 \\ \lambda_{12}p_1 - \lambda_{21}p_2 + \lambda_{32}p_3 = 0 \quad . \\ \lambda_{13}p_1 - \lambda_{32}p_3 = 0 \end{cases}$$

Полученная система является неопределенной и должна решаться при дополнительном условии: $p_1+p_2+p_3=1$. Из решения системы алгебраических уравнений определяются финальные вероятности p_i, $i=1,2,3$.

Процессы размножения и гибели

Рассмотрим более подробно процесс размножения и гибели. На рис.3 изображен граф состояний этого процесса. Возможными состояниями процесса являются состояния S_0,

$S_1, \ldots, S_k, \ldots$, представляющие собой вершины графа, возможные переходы процесса из состояния в состояние – дуги графа, рядом с которыми указаны интенсивности соответствующих переходов. Пусть λ_i – интенсивность размножения в состоянии S_{i-1}, μ_i – интенсивность гибели в этом состоянии.

Для иллюстрации рассмотрим цех рубительных машин, моделируя его работу с помощью случайного процесса размножения и гибели. Состояние S_k соответствует тому положению, когда в цехе находится k бревен, λ_i – среднее число бревен, поступающих в

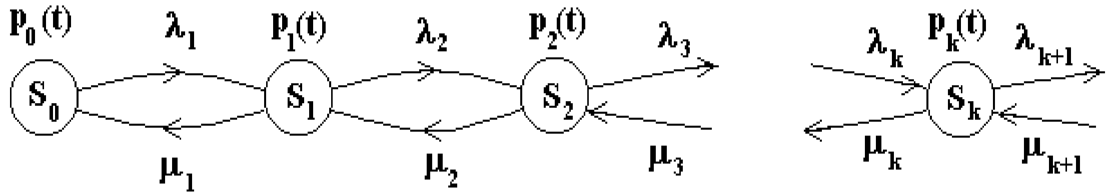


Рис.3. Граф состояний процесса размножения и гибели

цех в единицу времени при условии, что в цехе уже находится точно $i-1$ бревен, μ_i – среднее число бревен, обработанных рубительными машинами в единицу времени при условии, что в цехе находится точно i бревен. Будем предполагать, что эти интенсивности не зависят от времени. Укажем на графе также вероятности $p_k(t)$ того, что в момент t процесс находился в состоянии S_k.

В случае процесса размножения и гибели система дифференциальных уравнений принимает вид

$$\begin{cases} p_0'(t) = -\lambda_1 p_0(t) + \mu_1 p_1(t) \\ p_1'(t) = -(\lambda_2 + \mu_1) p_1(t) + \lambda_1 p_0(t) + \mu_2 p_2(t) \\ p_2'(t) = -(\lambda_3 + \mu_2) p_2(t) + \lambda_2 p_1(t) + \mu_3 p_3(t) \\ \ldots \\ p_k'(t) = -(\lambda_{k+1} + \mu_k) p_k(t) + \lambda_k p_{k-1}(t) + \mu_{k+1} p_{k+1}(t) \\ \ldots \end{cases} \qquad (1)$$

Запишем нормировочное условие

$$p_0(t) + p_1(t) + p_2(t) + \ldots + p_k(t) + \ldots = 1, \qquad (2)$$

которое следует из того, что в момент времени $t = 0$ процесс обязательно находится в каком-то состоянии, а эти события несовместные и образуют полную группу.

Решая систему дифференциальных уравнений (1) с учетом начальных условий, можно определить значения интересующих нас вероятностей.

При выполнении некоторых условий вероятности $p_k(t)$ с ростом времени t стремятся к стационарным вероятностям p_k, не зависящим от времени. На практике вычислительный интерес часто представляют именно эти стационарные вероятности p_k. Так как они не зависят от времени, то $p_k'(t) = 0$, и мы из системы дифференциальных уравнений (1) для стационарного случая получаем следующую систему алгебраических уравнений, к которой добавлено нормирующее условие:

$$\begin{cases} -\lambda_1 p_0 + \mu_1 p_1 = 0 \\ -(\lambda_2 + \mu_1)p_1 + \lambda_1 p_0 + \mu_2 p_2 = 0 \\ -(\lambda_3 + \mu_2)p_2 + \lambda_2 p_1(t) + \mu_3 p_3 = 0 \\ \dots \\ -(\lambda_{k+1} + \mu_k)p_k + \lambda_k p_{k-1} + \mu_{k+1} p_{k+1} = 0 \\ \dots \\ p_0 + p_1 + p_2 + \dots + p_k + \dots = 1 \end{cases} . \qquad (3)$$

Решая систему (3), последовательно получим: из первого уравнения $p_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1} p_0$. Подставляя полученное выражение для p_1 во второе уравнение, разрешим его относительно p_2: $p_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_2} p_1 = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\mu_1 \mu_2} p_0$.

Подставляя выражение для p_2 в третье уравнение, выразим p_3 через p_0 и т.д. Из k-го уравнения получим

$$p_k = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{k-1}} p_0 .$$

Обозначим

$$A_k = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{k-1}} , \qquad (4)$$

тогда $p_k = A_k p_0$, и последнее уравнение в системе (3) можно представить в виде

$$p_0 + A_1 p_0 + A_2 p_0 + \dots + A_k p_0 + \dots = 1,$$

откуда

$$p_0 = \frac{1}{1 + A_1 + A_2 + \dots + A_k + \dots} .$$

Таким образом,

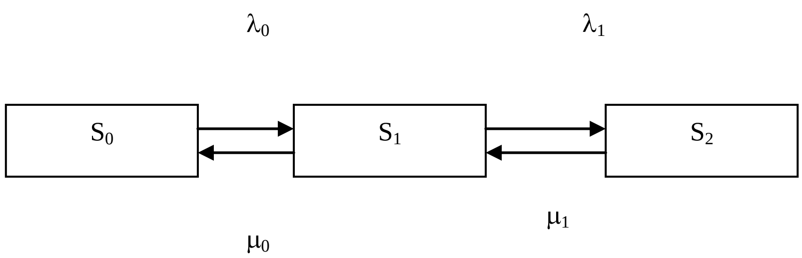
$$p_k = \frac{A_k}{1 + A_1 + A_2 + \dots + A_k + \dots} , \qquad (7)$$

где A_k определяются равенствами (4). Очевидно, для существования стационарных вероятностей p_k необходимо, чтобы ряд $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ был сходящимся.

***<u>Приме 2.</u>*.** Узел расчета магазина состоит из 2-х кассовых аппаратов. Найти долю времени простоя узла расчета, если известны интенсивности переходов $\lambda_0=1$ покупатель/мин, $\lambda_2=0,8$ покупатель/мин, $\mu_0=\mu 1=0,6$ покупатель/мин.

Система может находится в 3-х состояниях: S_0- обе кассы свободны (узел простаивает), S_1 – одна касса занята, S_2 – обе кассы заняты.

Нарисуем граф состояний и составим систему уравнений Колмогорова



$$\begin{cases} \dfrac{dp_0}{dt} = -p_0\lambda_0 + p_1\mu_0 \\ \dfrac{dp_0}{dt} = p_2\mu_1 + p_0\lambda_0 - p_1(\lambda_1 + \mu_0) \\ \dfrac{dp_2}{dt} = p_1\lambda_1 - p_2\mu_1 \\ p_0 + p_1 + p_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_0\lambda_0 = p_1\mu_0 \\ p_2\mu_1 + p_0\lambda_0 = p_1\lambda_1 + p_1\mu_0 \\ p_1\lambda_1 = p_2\mu_1 \\ p_0 + p_1 + p_2 = 1 \end{cases}$$

Найдем финальные вероятности для марковского процесса «гибели-размножения» последовательной подстановкой из одного в другое. В результате получим систему:

$$\begin{cases} 0{,}8p_1 = p_0 \\ 0{,}6p_2 = p_1 \\ p_0 + p_1 + p_2 = 1 \end{cases}$$

Решив ее, получаем следующий результат: p0=0,204, p1=0,341, p2=0,455. 20,4% времени узел простаивает, 45,5% – заняты обе кассы, 34,1% - занята одна касса.

Рассмотренный граф является частным случаем непрерывной марковской цепи — так называемой цепи «размножения-гибели». Этот граф представляет собой одну цепочку, в которой каждое из состояний связано прямой и обратной связью с соседними состояниями. Во многих случаях задачи массового обслуживания могут быть решены путем построения и анализа соответствующей цепи «рождения-гибели».2

Математическая модель нестационарного режима СМО. Решение системы дифференциальных уравнений

В случае нестационарного режима, когда вероятности состояний зависят от времени и мы не можем считать истинным выполнение условия $p_k'(t) = 0$, система дифференциальных уравнений принимает вид

$$\begin{cases} p_0'(t) = -\lambda_1 p_0(t) + \mu_1 p_1(t) \\ p_1'(t) = -(\lambda_2 + \mu_1)p_1(t) + \lambda_1 p_0(t) + \mu_2 p_2(t) \\ p_2'(t) = -(\lambda_3 + \mu_2)p_2(t) + \lambda_2 p_1(t) + \mu_3 p_3(t) \\ \ldots \\ p_k'(t) = -(\lambda_{k+1} + \mu_k)p_k(t) + \lambda_k p_{k-1}(t) + \mu_{k+1} p_{k+1}(t) \\ \ldots \end{cases}$$

Запишем нормировочное условие

$p_0(t) + p_1(t) + p_2(t) + \ldots + p_k(t) + \ldots = 1$, которое следует из того, что в момент времени $t = 0$ процесс обязательно находится в каком-то состоянии, а эти события несовместные и образуют полную группу.

Решая систему дифференциальных уравнений с учетом начальных условий, можно определить значения интересующих нас вероятностей.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений n-го порядка, которая в общем случае может быть представлена в виде

$$\begin{cases} \dfrac{dp_1(t)}{dt} = f_1(t, p_1, p_2, ..., p_n) \\ \dfrac{dp_2(t)}{dt} = f_2(t, p_1, p_2, ..., p_n) \\ ... \\ \dfrac{dp_n(t)}{dt} = f_n(t, p_1, p_2, ..., p_n) \end{cases}.$$

Неизвестными в этой системе являются функции $p_i(t)$, $i = 1,2,...,n$. В момент времени $t = 0$ значения этих функций известны:

$p_1(0) = p_{10}$, $p_2(0) = p_{20}$, …, $p_n(0) = p_{n0}$.

Они образуют начальные условия функционирования системы. Существует большое число машинных методов решения системы дифференциальных уравнений. Приведем алгоритм самого простейшего метода решения системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющего заданным начальным условиям – метода Эйлера.

Зададимся шагом h изменения аргумента t. Величину шага можно будет изменять для получения необходимой точности расчетов. Результатом решения системы будет табл.1 значений функций $p_i(t)$, $i = 1,2,...,n$ в узлах $t = 0$, $t = h$, $t = 2h$,…, $t = kh = t_{кон}$. Здесь $t_{кон}$ – момент времени, до которого ищется решение системы уравнений.

Таблица 1

Номер строки	t	$p_1(t)$	$p_2(t)$	**...**	$p_n(t)$	**Сумма вероятностей**
0	$t_0 = 0$	p_{10}	p_{20}	....	p_{n0}	$\sum_{i=1}^{n} p_{i0}$
1	$t_1 = h$	p_{11}	p_{21}	....	p_{n1}	$\sum_{i=1}^{n} p_{i1}$
2	$t_2 = 2h$	p_{12}	p_{22}	....	p_{n2}	$\sum_{i=1}^{n} p_{i2}$
...	...	...	...	...	...	…
k	$t_k = kh$	p_{1k}	p_{2k}	....	p_{nk}	$\sum_{i=1}^{n} p_{ik}$

Согласно методу Эйлера табл.1. заполняется по строкам. Значения вероятностей в 0-й строке известны из начальных условий. Значения вероятностей в 1-й стоке рассчитываются на основе известных вероятностей 0-й строки по формулам

$$\begin{cases} p_{11} = p_{10} + hf_1(t_0, p_{10}, p_{20}, ..., p_{n0}) \\ p_{21} = p_{20} + hf_2(t_0, p_{10}, p_{20}, ..., p_{n0}) \\ ... \\ p_{n1} = p_{n0} + hf_n(t_0, p_{10}, p_{20}, ..., p_{n0}) \end{cases}.$$

Значения вероятностей во 2-й стоке рассчитываются на основе известных вероятностей 1-й строки по формулам

$$\begin{cases} p_{12} = p_{11} + hf_1(t_1, p_{11}, p_{21}, ..., p_{n1}) \\ p_{22} = p_{21} + hf_2(t_1, p_{11}, p_{21}, ..., p_{n1}) \\ ... \\ p_{n2} = p_{n1} + hf_n(t_1, p_{11}, p_{21}, ..., p_{n1}) \end{cases}.$$

Этот процесс продолжается до тех пор, пока мы не дойдем до последней строки. Значения вероятностей в k-й стоке рассчитываются на основе известных вероятностей предыдущей k-1-й строки по формулам

$$\begin{cases} p_{1k} = p_{1,k-1} + hf_1\left(t_{k-1}, p_{1.k-1}, p_{2,k-1}, ..., p_{n,k-1}\right) \\ p_{2k} = p_{2,k-1} + hf_2\left(t_{k-1}, p_{1.k-1}, p_{2,k-1}, ..., p_{n,k-1}\right) \\ ... \\ p_{nk} = p_{n,k-1} + hf_n\left(t_{k-1}, p_{1.k-1}, p_{2,k-1}, ..., p_{n,k-1}\right) \end{cases}.$$

Замечание. Во многих системах дифференциальных уравнений сумма правых частей равна нулю. Тогда сумма всех вероятностей для любого момента времени будет постоянной величиной, равной известной сумме начальных вероятностей $p_0 = \sum_{i=1}^{n} p_{i0}$. В этом случае необходимо проводить контроль правильности вычислений, суммируя вероятности в каждой строке. Суммы должны быть одинаковы и равны p_0 . Это обстоятельство может служить основанием правильности выбора шага интегрирования.