

PRACTICO N° 8

1: Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 11x_2 - 5x_3 &= 21 \\ 0,35x_1 + 0,302x_2 - 0,93x_3 &= 3,8 \\ 0,47x_1 - 0,105x_2 - 0,2x_3 &= 4,5 \end{aligned}$$

Resuelve por: "trabaja con D.C.S"

- Gauss
- Factorización LU
- Resuelve calculando la inversa
 $x = A^{-1}b$
- Resuelve por Gauss-Seidel

a) Gauss

Paso	A	b	Operaciones
0	3 11 -5	21	F_1
	0,35 0,302 -0,93	3,8	F_2
	0,47 -0,105 -0,2	4,5	F_3

1	3 11 -5	21	F_1
	0 -2,91 -0,933	-0,000	$F_2 \leftarrow F_2 - F_1 (0,35/3)$
	0 -2,91 0,277	1,2	$F_3 \leftarrow F_3 - F_1 (0,47/3)$

2	3 11 -5	21	F_1
0	0 -2,91 -0,933	-0,000	F_2
0	0 0 0,616	1,26	$F_3 \leftarrow F_3 - F_2 (-0,933/-2,91)$

3	3 11 -5	21	F_1
0	0 -2,91 -0,933	-0,000	F_2
0	0 0 0,616	1,26	F_3

$$\text{Para } F_1 \rightarrow x_1 = \frac{21 + 5(x_2) - 11(x_3)}{3}$$

$$F_1 \rightarrow x_1 = 10,5 //$$

$$\text{Para } F_2 \rightarrow x_2 = \frac{-0,0000 + 0,933(2,05)}{-2,91}$$

$$F_2 \rightarrow x_2 = -0,00650 //$$

$$\text{Para } F_3 \rightarrow x_3 = \frac{1,26}{0,616}$$

$$F_3 \rightarrow x_3 = 2,05 //$$

Temas:

Fecha:

Empleando los sistemas: $\begin{cases} \textcircled{1} L \cdot C = b^k \\ \textcircled{2} U \cdot X = C \end{cases}$

$$b^k = \begin{bmatrix} 21 \\ 3,8 \\ 4,5 \end{bmatrix}$$

Sistema $L \cdot C = b^k$

No se ha realizado
ninguna permutación

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0,157 & 1 & 0 \\ 0,986 & 0,986 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 3,8 \\ 4,5 \end{bmatrix}$$

Para $C_1 = 21$

Para $C_2 = 3,8 - (0,157 \cdot C_1) = -0,0430$

Para $C_3 = -0,157(C_1) - 0,986(C_2) + 4,5 = 1,26$

$$C = \begin{bmatrix} 21 \\ -0,0430 \\ 1,26 \end{bmatrix}$$

Sistema $U \cdot X = C$

$$\begin{bmatrix} 1 & 13 & -0 \\ 0 & -2,03 & -0,00895 \\ 0 & 0 & 0,616 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ -0,043 \\ 1,25 \end{bmatrix}$$

Para $X_3 = \frac{1,25}{0,616} = 2,03$

Para $X_2 = \frac{-0,0430 - (-0,00895 \cdot X_3)}{-2,03} = -0,00895$

Para $X_1 = \frac{21 + 5(X_2) + 17(X_3)}{3} = 10,4$

$$X = \begin{bmatrix} 10,4 \\ -0,00895 \\ 2,03 \end{bmatrix}$$

b) Factorización LU

$$\begin{bmatrix} 3 & 17 & -5 \\ 0,55 & 1,302 & -0,95 \\ 0,17 & -0,105 & -0,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 3,8 \\ 4,5 \end{bmatrix}$$

Phase	A			Operaciones
0	3	17	-5	F_1
	0,55	1,302	-0,95	F_2
	0,17	-0,105	-0,2	F_3
1	3	17	-5	F_1
	0,183	-2,81	-0,0333	$F_2 \leftarrow F_2 - F_1 (0,55/3)$
	0,17	-2,27	0,583	$F_3 \leftarrow F_3 - F_1 (0,17/3)$
2	3	17	-5	F_1
	0,183	-2,81	-0,0333	F_2
	0,158	0,986	0,616	$F_3 \leftarrow F_3 + F_2 (-2,27/-2,81)$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0,183 & 1 & 0 \\ 0,183 & 0,495 & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 3 & 17 & -5 \\ 0 & -2,81 & -0,0333 \\ 0 & 0 & 0,616 \end{bmatrix}$$

Tema:

Fecha:

c) Resolver calculando la inversa de A: $X = A^{-1} \cdot b$

Paso	A			I			operaciones
0	3	17	-5	1	0	0	F_1
	0,53	0,302	-0,95	0	1	0	F_2
	0,93	-0,155	-0,2	0	0	1	F_3
1	3	17	-3	1	0	0	F_1
	0	-2,81	-0,0333	-0,183	1	0	F_2
	0	-2,27	0,583	-0,157	0	1	$F_3 \leftarrow F_3 - F_1 \cdot (0,183)$
2	3	17	5	1	0	0	F_1
	0	-2,81	-0,0233	-0,183	1	0	F_2
	0	0	0,616	0,0234	-0,988	1	$F_3 \leftarrow F_3 - F_2 \cdot (-0,0233)$

Por sustitución Reversa, vea
1º Sistema $x_{31} = 1$

$$\begin{bmatrix} 3 & 17 & -5 \\ 0 & -2,81 & -0,0333 \\ 0 & 0 & 0,616 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para $x_{11} = \frac{1 + 3(x_{21}) - 17(x_{31})}{3}$

$$x_{11} = 0,0300$$

Para $x_{21} = \frac{0,183 - 0,0333(x_{31})}{2,81}$

$$x_{21} = 0,0647$$

Para $x_{31} = \frac{0,0234}{0,616}$

$$x_{31} = 0,0380$$

$$\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0300 \\ 0,0647 \\ 0,0380 \end{bmatrix}$$

Tema:

Fecha:

1. sustitución Regresiva:

2.º sistema: $V_{a12} = W_{a12}$

$$\begin{bmatrix} 3 & 17 & 0 \\ 0 & -3,71 & -0,033 \\ 0 & 0 & 0,616 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,986 \end{bmatrix}$$

$$\text{Para } a_{32} = \frac{-0,986}{0,616} = -1,60$$

$$\text{Para } a_{22} = \frac{-0,033(a_{32})}{-1,60} = -0,337$$

$$\text{Para } a_{12} = \frac{0 + 5(a_{22}) - 17(a_{32})}{3} = -0,759$$

3.º sistema: $V_{a13} = W_{a13}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 17 & 5 \\ 0 & -3,71 & -0,033 \\ 0 & 0 & 0,616 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Para } a_{13} = \frac{0 + 5(a_{23}) - 17(a_{33})}{2}$$

$$a_{13} = 2,81$$

$$\text{Para } a_{23} = \frac{0 - 0,033(a_{33})}{-1,60}$$

$$a_{23} = -0,0192$$

$$\text{Para } a_{33} = \frac{1}{0,616}$$

$$a_{33} = 1,62$$

$$A' = [a_{i1} \ a_{i2} \ a_{i3}] \Rightarrow \begin{bmatrix} 0,0300 & -0,759 & 2,81 \\ 0,0647 & -0,337 & -0,0192 \\ 0,038 & -1,60 & 1,62 \end{bmatrix}$$

d) Resolver por Gauss-Jordan

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 17 & -5 \\ 0,55 & 0,302 & -0,95 \\ 0,19 & -0,105 & -0,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 4,5 \\ 4,5 \end{bmatrix}$$

A no es diagonalmente dominante

Transformar a diagonalmente dominante

$$\begin{bmatrix} 3 & 17 & -5 \\ 0,55 & 0,302 & -0,95 \\ 0,19 & -0,105 & -0,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 4,5 \\ 4,5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2,47x_1 & -0,105x_2 & -0,2x_3 \\ 3x_1 & 17x_2 & -5x_3 \\ 0,55x_1 & 0,302x_2 & -0,95x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 2,47 & 17 & -5 \\ 3 & 17 & -5 \\ 0,55 & 0,302 & -0,95 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 4,5 \\ 4,5 \end{bmatrix}$$

n	$x_1^{(n)}$	E_1	$x_2^{(n)}$	E_2	$x_3^{(n)}$	E_3
0	0	—	0	—	0	—
1	8,49	100%	-0,459	100%	1,40	100%
2	21,5	252,2%	-0,122	-206,30%	1,80	27,22%
3	15,5	180,2%	-0,0220	-103,20%	1,95	7,69%
4	10,5	125,4%	-0,0163	-94,63%	2,01	2,19%

$$\begin{bmatrix} 2,47x_1 & -0,105x_2 & -0,2x_3 \\ 3x_1 & 17x_2 & -5x_3 \\ 0,55x_1 & 0,302x_2 & -0,95x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,5 \\ 21 \\ 4,5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{4,5 + 0,105(x_2) + 0,2(x_3)}{2,47} \\ x_2 = \frac{21 - 3(x_1) + 5(x_3)}{17} \\ x_3 = \frac{-3,8}{0,95} + \frac{0,55(x_2)}{0,95} + \frac{0,302(x_1)}{0,95} \end{cases}$$

2) Dada la tabla de valores (intersección)

i	x_i	f_i
0	2,2	0,1342
1	2,7	0,1392
2	3,5	0,1467
3	4,1	0,1595
4	5,6	0,1731

calcular $f(x) = ?$

para $x = 3,8$

Utilizar polinomios interpolares de 2º grado en la forma "4 de numerals"

d) Lagrange

Forma $P_n(x) = \sum_{k=0}^n l_k(x) f(x_k)$; polinomio de Lagrange

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n l_k(x) f(x_k)$$

$$l_k(x) = \prod_{j=0, j \neq k}^n \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)} ; \text{ función no formada Lagrange}$$

$$\begin{aligned} x_0 = 2,2 & ; f(x_0) = 0,1342 \\ x_1 = 2,7 & ; f(x_1) = 0,1392 \\ x_2 = 3,5 & ; f(x_2) = 0,1467 \end{aligned}$$

$$P_2(x) = l_0(x) f(x_0) + l_1(x) f(x_1) + l_2(x) f(x_2)$$

$$l_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(3,8 - 2,7)(3,8 - 4,1)}{(2,2 - 2,7)(2,2 - 4,1)} = -0,0804$$

$$l_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(3,8 - 2,2)(3,8 - 4,1)}{(2,7 - 2,2)(2,7 - 4,1)} = 0,6875$$

$$l_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(3,8 - 2,2)(3,8 - 2,7)}{(4,1 - 2,2)(4,1 - 2,7)} = 0,0929$$

$$P_2(3,8) = (-0,0804)(0,1342) + (0,6875)(0,1392) + (0,0929)(0,1595)$$

$$P_2(3,8) = 0,15234$$

Tema:

Fecha:

b) Newton ($f(x) = ?$, $x = 3,8$)

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_0, x_1, \dots, x_i) \cdot \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$$

$$P_1(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1) (x - x_0)$$

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{0,1518 - 0,1967}{4,1 - 3,5} = 0,02131$$

$$P_1(3,8) = (0,1967) + (0,02131)(3,8 - 3,5) = 0,1531$$

$$P_2(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2) \cdot (x - x_0)(x - x_1)$$

$$f(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(0,1042) - (0,1518)}{2,7 - 4,1} = 0,01816$$

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{(0,01816) - (0,02131)}{2,7 - 3,5} = 0,0040$$

$$P_2(3,8) = (0,1967) + (0,0040)(3,8 - 3,5)(3,8 - 4,1) = 0,1527$$

i	x_i	P_i
0	4,1	0,1967
1	2,7	0,1042
2	3,5	0,1518
3	4,1	0,1527
4	5,6	0,1271