Nº Tema Fecha 29-Ago-2016

Programa Analítico:

Métodos Numéricos "MAT-205"

I. Aproximaciones y Errores

1. Errores de Redondeo y truncamiento
2. Cifras significativas
3. Exactitud y precisión
4. Definiciones de Error
5. Series de Maclaurin
6. Reglas de Redondeo

II. Raíces de Ecuaciones

Métodos que usan intervalos

1. Método Gráfico
2. Método de Bisección
3. Método de la regla falsa
4. Método de la regla falsa mejorada

Métodos abiertos

5. Método de la secante
6. Método de Newton-Raphson

III. Sistemas de Ecuaciones Lineales

Métodos Directos

1. Método de Eliminación de Gauss
2. Sustitución reversiva
3. Pivotación
4. Factorización LU
5. Cálculo de determinantes por Post-Multiplicación
6. Inversa de Matrices

Métodos Iterativos

7. Método de Jaccobi
8. Método de Gauss - Seidel

IV. Interpolación Polinomial

1. Polinomios interpolantes en la forma de Lagrange
2. Polinomios interpolantes en la forma de Newton (Diferencias Divididas)
3. Interpolación segmentatoria

V. Derivación e Integración Númérica

Derivación
1. Fórmulos de Derivación numérica
2. Fórmula Izquierda central y derecha
3. Derivadas numéricas de orden superior

Integración
4. Método de Newton - Cotes
5. Regla del trapecio - y regla de Simpson
6. Reglas compuestas
7. Métodos de Romberg
8. Métodos de cuadrantes Gaussianas.

Evaluación

2 examenes parciales	20 % c/u	40 %
Trabajo práctico (proyecto)		25%
Examen final		35%
		100%

Bibliografía

- Chopra Steven, Canale Raymond
  "Métodos numéricos para ingenieros"
- Gerald Curtis, wheatley Patrick
  "Análisis numéricos con aplicaciones"
- Matheus John, Fink Curtis
  "Métodos numéricos con MATLAB"

1^er^ parcial I y II 4ª semana de septiembre

2^do^ parcial III y IV 1^er^ semana de noviembre

Final 1^er^ semana de Diciembre

Exposiciones antes del final

Unidad # 1

"Aproximaciones y Errores"

Errores de Redondeo: Se deben a que el compotador solo puede representar cantidades con un número finito de dígitos.

Errores de Truncamiento: Representa la diferencia entre una formulación matemática exacta de un problema y la aproximación dada por un método numérico

Cifras significativas: Este concepto se refiere a la confiabilidad de un valor númérico. El número de cifras significativas es el número de dígitos más un estimado que se pueda usar con confianza.

Las cifras significativas se cuentan de izquierda a derecha a partir del primer dígito diferente de cero.

Los ceros no siempre son cifras significativas ya que pueden usarse solo para ubicar el punto decimal. Los números;

0, 0000 1845

0, 0001845

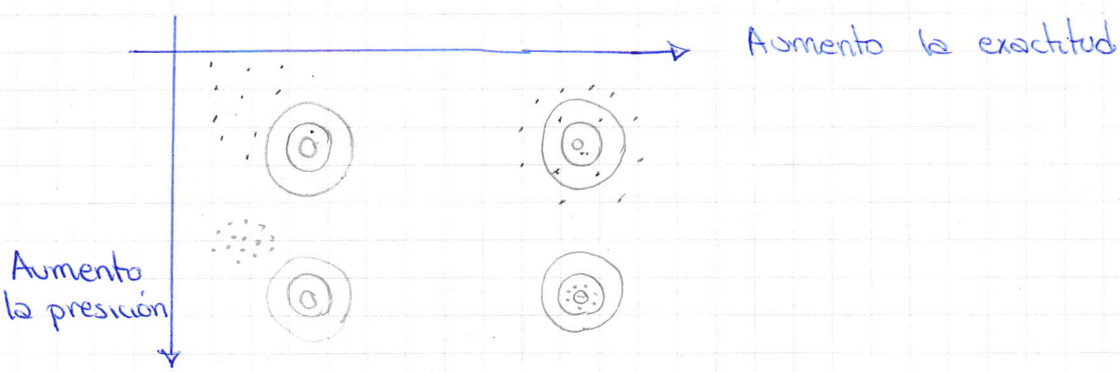
0, 001845

tienen 4 cifras significativas.

Exactitud: Se refiere a la aproximación de un número o de una medida al valor verdadero que se supone representa.

Presición: Se refiere a:

- El numero de cifras significativas que representa una cantidad o
- La extensión de las lecturas repetidas de un instrumento que mide alguna propiedad física.



Definiciones de Error:

Error verdadero: E_v Es la diferencia simple entre el valor verdadero V_v y el valor aproximado V_a:

$$\boxed{E_v = V_v - V_a}$$

Esta definición de error no toma en cuenta la magnitud de los valores que se están probando.

Error Relativo: E_r: Una manera de introducir la magnitud de las cantidades es normalizar el error respeto del valor verdadero:

$$\boxed{E_r = \frac{V_v - V_a}{V_v} * 100\% = \frac{E_v}{V_v} * 100\%}$$

Ejemplo:
Se tiene que medir la magnitud de un puente y de un remache, obteniendose 9999 cm y 9 cm respectivamente.
Si los valores verdaderos son 10000 cm y 10 cm, calcular:
a) Los errores verdaderos
b) Los errores relativos

a) Datos

$V_{vp} = 10000$ cm
$V_{ap} = 9999$ cm
$V_{vr} = 10$ cm
$V_{ar} = 9$ cm

$E_{v_p} = V_{v_p} - V_{a_p}$

$E_v = 10000 - 9999$

$E_{v_p} = 1$ cm

$E_{v_r} = V_{v_r} - V_{a_r}$

$E_v = 10 - 9$

$E_{v_r} = 1$ cm

b) Datos

$V_{vp} = 10000$ cm

$V_{vr} = 10$ cm

$E_{vp} = 1$ cm

$E_{vr} = 1$ cm

$E_r = \frac{E_v}{V_v} \times 100$

$E_{rp} = \frac{1}{100\cancel{00}} * 1\cancel{00}$

$E_{rp} = 0,01\ \%$

$E_{rr} = \frac{1}{1\cancel{0}} * 10\cancel{0}$

$E_{rr} = 10\ \%$

01- 10- 2016

En las aplicaciones reales el valor verdadero unicamente se conoceró cuando se habla de funciones matemáticas que se pueden resolver analíticamente.

En los métodos numéricos que usan esquemas iterativos para calcular resultados el error se cálculo como la diferencia entre la aproximación previa (anterior) y la actual:

$$\boxed{E_a = \frac{V_{actual} - V_{anterior}}{V_{actual}} * 100} \quad (\%)$$

El subíndice "a" representa que el error está normalizado a un valor aproximado.

El signo del error no es en general importante, debiendo en todo caso limitarse la magnitud del error menor a una tolerancia $E_\wedge$:

$$\boxed{|E_a| < E_\wedge}$$

Es también conveniente relacionar estos errores con la cantidad de cifras significativas en la aproximación a través de la sgte fórmula:

$$\boxed{E_\wedge = (0{,}5 * 10^{2-n})\,\%}$$

Si se cumple que $|E_a| < E_\wedge$ se puede tener la seguridad que el resultado (objetivo) obtenido es correcto en almenos n cifras significativas.

Series Infinitas:

Son sucesiones infinitas de términos y se utilizan para representar funciones.

- Serie de Taylor

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a) * (x-a)^n}{n!}}$$

- Serie de Maclaurin

Caso particular de la serie de taylor cuando el entorno reducido es cero:

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0) * x^n}{n!}}$$

$f^{(n)}(a)$ = Derivada n-ésima de f(x) evaluada en "a".

$f^{(n)}(0)$ = Derivada n-ésima de f(x) evaluado en "0".

$n!$ = factorial de n

Ejemplo:

Determinar la serie de Maclaurin para la función exponencial e^x.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0) \cdot x^n}{n!} = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0) \cdot x^2}{2!} + \frac{f'''(0) \cdot x^3}{3!} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$f(x) = e^x \quad ; \quad f(0) = 1$

$f'(x) = e^x \quad ; \quad f'(0) = 1$

$f''(x) = e^x \quad ; \quad f''(0) = 1$

$f'''(x) = e^x \quad ; \quad f'''(0) = 1$

$$\Rightarrow \boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots\ldots + \frac{x^n}{n!}}$$

Ejemplo:

Utilizando el resultado del ejemplo anterior calcular $e^{0,5}$, utilizando la serie de Maclaurin para e^x.
Introducir un término a la vez y calcular los errores relativo verdadero y aproximado tomar como valor verdadero

$$V_V = e^{0,5} = 1,648721271$$

tolerancia

Incluir términos de la serie hasta que: $|E_a| < E_\Delta$, que considera 3 cifras significativas en la aproximación.

Solución

con 3 c.s. $\rightarrow$ $E_\Delta = 0,5 * 10^{(2-3)} = 0,5 * 10^{-1} = 0,05\ \%$

$$\boxed{|E_a| < 0,05\ \%}$$

Nº Tema Fecha

1ra. Aprox./ $e^x \approx 1$

$e^{0,5} \approx 1$; $E_V = \dfrac{V_v - V_a}{V_v} * 100$

$E_V = \dfrac{1,648721271 - 1}{1,648721271} * 100 = 39,3\ \%$

$E_a =$ NO! ; porque necesito un valor actual y uno anterior

2da. Aprox/ $e^x \approx 1 + x$; $E_V = \dfrac{1,648721271 - 1,5}{1,648721271} * 100 = 9,02\ \%$

$e^{0,5} \approx 1 + 0,5 = 1,5$

$E_a = \dfrac{1,5 - 1}{1,5} * 100 = 33,3\ \%$

3ra. Aprox./

$e^x \approx 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$; $e^{0,5} \approx 1 + 0,5 + \dfrac{0,5^2}{2} = 1,625$

$E_V = 1,44\ \%$; $E_a = 7,69\ \%$

4ta Aprox/

$e^x \approx 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6}$

$e^{0,5} \approx 1 + 0,5 + \dfrac{0,5^2}{2} + \dfrac{0,5^3}{6} = 1,645833333$

$E_V = 0,175\%$; $E_a = 1,27\%$

N° términos	Valor Aproximado	Ev (%)	Ea (%)
1	1	39,3	—
2	1,5	9,02	33,3
3	1,625	1,44	7,69
4	1,645833333	0,175	1,27
5	1,648437500	0,0172	0,158
6	1,648697917	0,00142	0,0158 < 0,05%

Reglas de Redondeo:

1. En el redondeo se consideran las cifras significativas y el resto se descarta.
El último dígito retenido se aumenta en uno si el primer dígito que se descarta es mayor de 5. De otra manera se deja igual. Si el primer dígito descartado es 5 o es 5 seguido de ceros entonces el último dígito retenido se aumenta en uno solo si es impar.

2. En la suma y en la resta, el redondeo se lleva a cabo de forma tal que el último dígito retenido en la respuesta corresponda al último dígito más significativo de los números que están sumando o restando.
Observar que un dígito en la columna de las centésimas es más significativo que uno de la columna de las milésimas

3. En la multiplicación y en la división el redondeo es tal que la cantidad de cifras significativas del resultado es igual al número más pequeño de cifras significativas de los números en la operación.

4. Para combinaciones de operaciones aritméticas existen dos casos generales. Se pueden sumar o restar el resultado de las multiplicaciones y de las divisiones:

$$\begin{pmatrix} \text{Multiplicación} \\ \text{ó} \\ \text{División} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} \text{Multiplicación} \\ \text{o} \\ \text{División} \end{pmatrix}$$

o tambien se pueden multiplicar o dividir el resultado de las sumas y restas:

$$\begin{pmatrix} \text{Suma} \\ \text{o} \\ \text{Resta} \end{pmatrix} \begin{matrix} * \\ \% \end{matrix} \begin{pmatrix} \text{Suma} \\ \text{o} \\ \text{Resta} \end{pmatrix}$$

En ambos casos se ejecutan las operaciones entre paréntesis y el resultado es redondeado antes de proceder a otra operación.

Ejemplos.

1. Redondear a la cantidad de cifras significativas (c.s) dada:

3 cs : 5,6723 → (5,67)

4 cs : 10,406 → (10,41)

5 cs : 88,21650 → (88,216)

2 cs : 7,3500 → (7,4)

5 cs : 88,216501 → (88,217)

2. Sumas y restas

a) $2,2 - 1,768 = 0,432 \rightarrow (0,4)$

b) $4,68 * 10^{-7} + 8,3 * 10^{-4} - 228 * 10^{-6} =$

$0,00468 * 10^{-4} + 8,3 * 10^{-4} - 2,28 * 10^{-4} = 6,02468 * 10^{-4} \rightarrow (6,0 * 10^{-4})$

3. Multiplicación y división

a) $0,0642 * 4,8 = 0,30816 \rightarrow (0,31)$

b) $945 \div 0,3185 = 2967032,967 \rightarrow (2970)$

$(2,967032967 * 10^{3} = 2,97 * 10^{3})$

4. Combinaciones

a) $[15,2 * (2,8 * 10^{-4})] + (8,456 * 10^{-4} + 0,177 * 10^{-3})$

$= [4,3 * 10^{-3}] + (0,8456 * 10^{-3} + 0,177 * 10^{-3})$

$4,3 * 10^{-3} + 1,023 * 10^{-3} = 5,3 * 10^{-3}$

b) $\dfrac{(6,740 * 10^{-5} - 8,7 * 10^{-7})}{2,672 * 10^{3} + 5,8} = \dfrac{6,740 * 10^{-5} - 0,087 * 10^{-5}}{2672 + 5,8} =$

$= \dfrac{6,65 * 10^{-5}}{2678} = 2,48 * 10^{-8}$

*06-Sept-2016

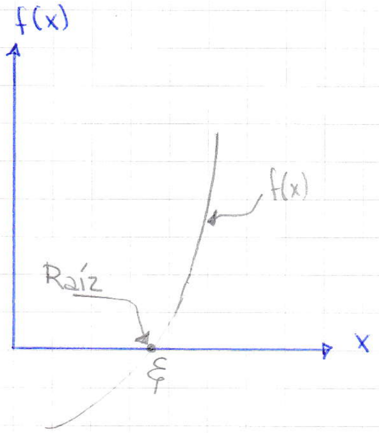
* Raices de Ecuaciones

* In

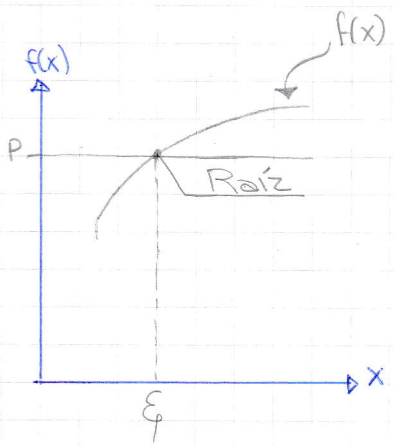
Unidad # 2

" Raices de Ecuaciones"

Introducción:



a) $f(x) = 0$



b) $f(x) = p$

Se considera raíz "ξ" de una ecuación a los valores de x que hacen que:

a) $\boxed{f(x) = 0}$ (tambien denominado cero de la ecuación) y
b) $\boxed{f(x) = p}$, valor de x que hace que $f(x)$ tenga el valor de p (donde p es una constante).

El caso más conocido de cálculo de raíces es la conocida "fórmula cuadrática":

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

que nos permite determinar las dos raíces x_1 y x_2 de un polinomio de 2do grado (parábola cuadrática):

$$\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c}$$

Para polinomios de mayor grado u otro tipo de ecuaciones tales como los trascendentes (trigonométricas, logarítmicas, exponenciales, etc). no existen fórmulas sencillas para evaluar las raíces.

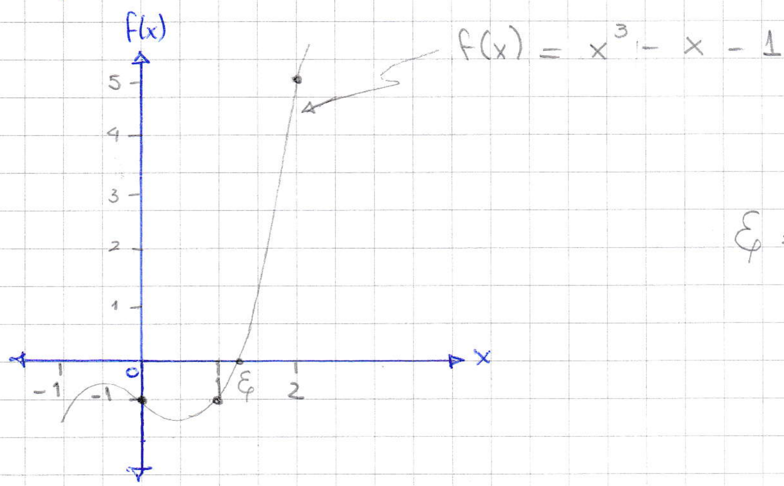
Se debe recurrir a los métodos númericos, los cuales nos permiten evaluar las raíces de cualquier tipo de ecuación

Método Gráfico.- Como una primera aproximación a la raiz ξ de l/r ecuación $f(x)$ es la representación gráfica, para ello se dan valores a x y se calculan los respectivos $f(x)$, generando una sucesión de pares ordenados $(x, f(x))$ los cuales son puntos en el plano cartesiano sea por ejemplo la ecuación:

$$f(x) = x^3 - x - 1$$

dando valores a x, se obtiene la tabla:

x	$f(x)$
0	-1
1	-1
2	5
3	23
⋮	



$\xi = x_i$

La raiz ξ está en el intervalo $(a, b) = (1, 2)$

Se pudiera hacer una primera estimación con poca precisión a la raiz $x \simeq 1{,}3$.
Este método permite a otros métodos numericos como referencia de donde se encuentra (aproximadamente) la raiz ξ y mejorar la precisión de dicha estimación.

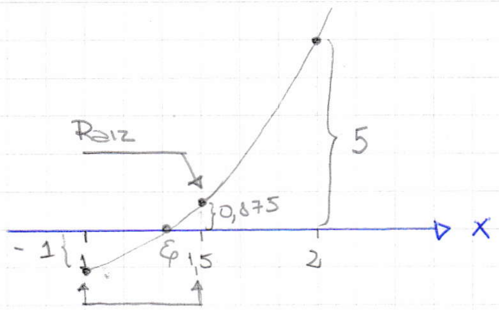
Método de Bisección Este método (de intervalo) se aproxima a la ~~a la~~ raiz ξ subdividiendolo en mitades el intervalo (a, b), es decir calculando la media de los valores de a y b.

Por ejemplo, para la ecuación $f(x) = x^3 - x - 1$ que ya se sabe que la raiz ξ está en el intervalo $(a, b) = (1, 2)$ con $f(a) = -1$ y $f(b) = 5$:

1ra aproximación.

$$x_1 = \frac{a+b}{2} = \frac{1+2}{2} = 1{,}5$$

tal que: $f(x_1) = x_1^3 - x_1 - 1 = 1{,}5^3 - 1{,}5 - 1 = 0{,}875$



El nuevo intervalo de la raiz ξ es:

$$(a, b) = (1; 1,5)$$

con $f(a) = -1$ y $f(b) = 0,875$

Teorema de Bolzano: La ecuación f(x) tiene por lo menos una raiz en el intervalo (a, b) si se verifica que el producto de f(a) y f(b) es negativo:

$$\boxed{f(a) * f(b) < 0}$$

En el caso del ejemplo: $f(x) = x^3 - x - 1$

con $a = 1$ y $b = 2$; $f(a) = -1$ y $f(b) = 5$

$\rightarrow f(a) * f(b) = (-) * (+) = (-) < 0$

hay raiz en $(a, b) = (1, 2)$

En la primera aproximación del método de Bisección se tiene dos subintervalos de la izquierda: (1; 1,5) y el de la derecha (1,5 ; 2)

En el subintervalo de la izquierda $f(1) = -1$ y $f(1,5) = 0,875$

$\rightarrow f(a) * f(b) = (-) * (+) = (-) < 0$

Entonces la raiz ξ está en este subintervalo.

2da. Aproximación:

con $(a, b) = (1; 1,5)$

y $f(a) = -1$ y $f(b) = 0,875$

$$x_2 = \frac{a+b}{2} = \frac{1 + 1,5}{2} = 1,25$$

$f(x_2) = 1,25^3 - 1,25 - 1 = -0,296875$

Subintervalo de la izquierda: $(1; 1,25)$

$f(1) * f(1,25) = (-) * (-) = (+) > 0$

No hay raíz en $(1; 1,25)$

Subintervalo de la derecha: $(1,25; 1,5)$

$f(1,25) * f(1,5) = (-) * (+) = (-) < 0$

La raíz ξ está en $(a, b) = (1,25; 1,5)$

Algoritmo. Método de Bisección:

Sean datos $f(x)$ y el intervalo (a, b) tal que: $f(a) * f(b) < 0$

Para $i = 0, 1, \ldots\ldots$, hasta que se satisfaga

calcular

$$\boxed{x_{i+1} = \frac{a_i + b_i}{2}}$$

con:
$a_0 = a$
$b_0 = b$

Si $f(a_i) * f(x_{i+1}) < 0 \rightarrow \begin{cases} a_{i+1} = a_i \\ b_{i+1} = x_{i+1} \end{cases}$

caso contrario

Si $f(a_i) * f(x_{i+1}) > 0 \rightarrow \begin{cases} a_{i+1} = x_{i+1} \\ b_{i+1} = b_i \end{cases}$

Ejemplo

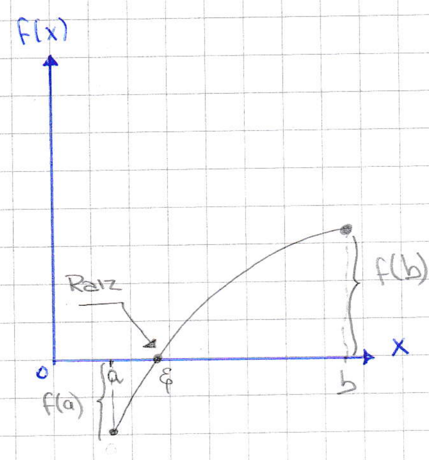
Calcular la raíz de $f(x) = x^3 - x - 1$ con $(a, b) = (1, 2)$ tal que $f(a) = -1$ y $f(b) = 5$.
Hasta $|\varepsilon_a < 0,05\,\%$

N° Tema Fecha

i	a_i	b_i	$x_i + 1$	$f(x_i+1)$	$f(a_i) * f(x_i+1)$	ε_a (%)
0	1	2	1,5	0,875	(-) < 0	—
1	1	1,5	1,25	-0,296875	(+) > 0	-20,0
2	1,25	1,5	1,375	0,224609375	(-) < 0	9,09
3	1,25	1,375	1,3125	-0,0515136719	(+) > 0	-4,76
4	1,3125	1,375	1,34375	0,08261108398	(-) < 0	2,33
5	1,3125	1,34375	1,328125	0,01457595825	(-) < 0	-1,18
6	1,3125	1,328125	1,3203125	-0,018710613	(+) > 0	-0,592
7	1,3203125	1,328125	1,32421875	-0,00212794543	(+) > 0	0,295
8	1,32421875	1,328125	1,326171875	0,0062088296	(-) < 0	0,147
9	1,32421875	1,326171875	1,325195313	0,00203665064	(-) < 0	-0,0737
10	1,32421875	1,325195313	1,324707031	$-4,65949 \times 10^{-5}$	(+) > 0	-0,0369

Sept - 08 - 16

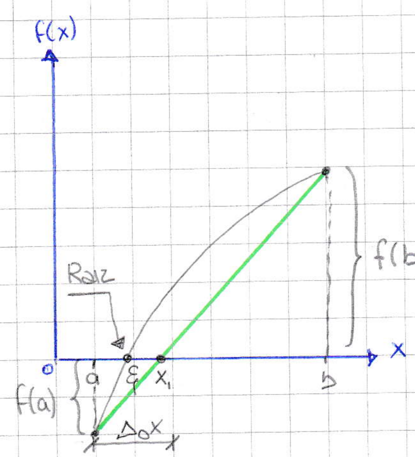
Método de la Regla Falsa: En general, la raíz ξ de $f(x)$ está más próxima al extremo del intervalo (a, b) donde el valor absoluto de $f(x)$ es menor:



Entonces, en vez de calcular el valor medio como en el método de Bisección es mejor calcular la media ponderada para las aproximaciones x_i.

Para ello se debe introducir el valor de $f(x)$ en a y b, en la ecuación de iteración.

Deducción:

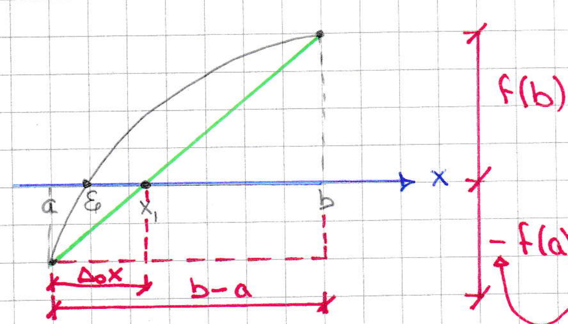


La primera aproximación se determina trazando una recta que pase por los extremos de $f(x)$ en a y b tal que:

$$\boxed{x_1 = a + \Delta_0 x} \qquad (1)$$

La de

La determinación de $\Delta_0 x$ se puede hacer por la relación de triángulos.



Signo negativo indica que $f(a)$ esta del lado contrario al de $f(b)$ respecto del eje x.

Entonces

$$\frac{\Delta_o x}{-f(a)} = \frac{(b-a)}{f(a)+(-f(a))}$$

$$\Delta_o x = \frac{-f(a)\,(b-a)}{f(b)-f(a)}$$

$$\boxed{\Delta_o x = \frac{a\,f(a) - b\,f(a)}{f(b) - f(a)}} \qquad (2)$$

haciendo (2) en (1)

$$x_1 = a + \frac{a f(a) - b(f(a))}{f(b) - f(a)}$$

$$x_1 = \frac{a\,f(b) - \cancel{a\,f(a)} + \cancel{a\,f(a)} - b\,f(a)}{f(b) - f(a)}$$

Luego:

$$\boxed{x_1 = \frac{a\,f(b) - b\,f(a)}{f(b) - f(a)}}$$

«Fórmula de la Regla Falsa»

El nuevo subintervalo de la raiz es, en este caso: $(a, b) = (a, x_1)$ de manera que x_2 sera la intersección de la recta que une los extremos de $f(a)$ y $f(x_1)$ con el eje de las x.

En general para la i- ésimo iteración se tiene que:

$$\boxed{x_{i+1} = \frac{a_i * f(b_i) - b_i * f(a_i)}{f(b_i) - f(a_i)}}$$

$(i = 0, 1, \ldots\ldots)$

Algoritmo de la Regla Falsa:

Sean dado $f(x)$ y el intervalo (a, b) tal que $\boxed{f(a) * f(b) < 0}$

Para $i = 0, 1, \ldots\ldots$, hasta donde se satisfaga

Calcular: $\boxed{x_{i+1} = \frac{a_i * f(b_i) - b_i * f(a_i)}{f(b_i) - f(a_i)}}$ con $a_0 = a$, $b_0 = b$

Si $f(a_i) * f(x_{i+1}) < 0 \longrightarrow \begin{cases} a_{i+1} = a_i \\ b_{i+1} = x_{i+1} \\ f(b_{i+1}) = f(x_{i+1}) \end{cases}$

Caso contrario

Si $f(a_i) * f(x_{i+1}) > 0 \longrightarrow \begin{cases} a_{i+1} = x_{i+1} \\ b_{i+1} = b_i \\ f(a_{i+1}) = f(x_{i+1}) \end{cases}$

Metodo de la regla falsa Mejorada:

Algoritmo:

Sean dados $f(x)$ y el intervalo (a,b) tal que $f(a) * f(b) < 0$

Hacer $F = f(a)$, $G = f(b)$ y $x_0 = a$

Para $i = 0, 1, \ldots\ldots$, hasta donde se satisfaga

Calcular $\boxed{x_{i+1} = \frac{a_i G - b_i F}{G - F}}$ con $a_0 = a$, $b_0 = b$

Si $f(a_i) * f(x_{i+1}) < 0 \longrightarrow \begin{cases} a_{i+1} = a \\ b_{i+1} = x_{i+1} \\ G = f(x_{i+1}) \end{cases}$

$\hookrightarrow f(x_i) * f(x_{i+1}) > 0 \longrightarrow F = F/2$

Caso contrario

Si $f(a_i) * f(x_{i+1}) > 0 \longrightarrow \begin{cases} a_{i+1} = x_{i+1} \\ b_{i+1} = b_i \\ F = f(x_{i+1}) \end{cases}$

$\hookrightarrow f(x_i) * f(x_{i+1}) > 0 \longrightarrow G = G/2$

Ejemplo

Calcular la raiz de $f(x) = x^3 - x - 1$ $(a,b) = (1,2)$ tal que $f(a) = -1$ y $f(b) = 5$. Utilizar los métodos: de la:

a) Regla Falsa

b) Regla Falsa Mejorada.

Hasta $|\varepsilon_a| < 0{,}05\ \%$

Solución:

a) Regla Falsa:

i	a_i	b_i	$f(a_i)$	$f(b_i)$	x_{i+1}	$f(x_{i+1})$	$f(a_i) * f(x_{i+1})$	$E_a(\%)$
0	1	2	-1	5	1,166666667	-0,578703703	+ > 0	—
1	1,166666667	2	-0,578703703	5	1,253112033	-0,285363029	+ > 0	6,90
2	1,253112033	2	-0,285363029	5	1,293437402	-0,129542092	+ > 0	3,12
3	1,293437402	2	-0,129542092	5	1,311281021	-0,056588487	+ > 0	1,36
4	1,311281021	2	-0,056588487	5	1,318988504	-0,024303747	+ > 0	0,584
5	1,318988504	2	-0,024303747	5	1,322282717	-0,01036185	+ > 0	0,249
6	1,322282717	2	-0,01036185	5	1,323684297	-0,004403944991	+ > 0	0,106
7	1,323684294	2	-0,00440394991	5	1,324279462	-0,001869258 4	+ > 0	0,0499

$$i=0: \quad x_1 = \frac{a_0 * f(b_0) - b_0 * f(a_0)}{f(b_0) - f(a_0)} = \frac{(1)(5) - (2)(-1)}{5 - (-1)} = \frac{7}{6} = 1{,}166666667$$

$$f(x_1) = -0{,}578703703 \ ; \quad f(a_0) * f(x_1) = (-) * (-) = + > 0 \rightarrow \begin{cases} a_1 = x_1 = 1{,}16666667 \\ b_1 = b_0 = 2 \\ f(a_1) = f(x_1) = -0{,}57\ldots \end{cases}$$

$$i=1: \quad x_2 = \frac{a_1 * f(b_1) - b_1 * f(a_1)}{f(b_1) - f(a_1)} = 1{,}253112033$$

$$f(x_2) = -0{,}285363029 \ ; \quad f(a_1) * f(x_2) = (-) * (-) = + > 0 \rightarrow \begin{cases} a_2 = x_2 = 1{,}253112033 \\ b_2 = b_1 = 2 \\ f(a_2) = f(x_2) = -0{,}28\ldots \end{cases}$$

b)

i	a_i	b_i	F	G	x_{i+1}	$f(x_{i+1})$	$f(a_i) * f(x_{i+1})$	$f(b_i) * f(x_{i+1})$	E_a (%)
0	1	2	-1	5	1,166666667	-0,578703703	+ >0	+ >0	—
1	1,16666667	2	-0,578703703	2,5	1,323308271	-0,0060039012	+ >0	+ >0	11,8
2	1,323308271	2	-0,0060039012	1,125	1,326542966	0,00779623624	- <0	- <0	0,244
3	1,323308271	1,326542966	-0,0060039012	0,00779623624	1,32471556	$-1,02214 \times 10^{-5}$	+ >0	- <0	-0,138
4	1,32471556	1,326542966	$-1,02214 \times 10^{-5}$	0,00779623624	1,324717953	$-1,744 \times 10^{-8}$	+ >0	+ >0	0,000181

$i=0$: $x_1 = \dfrac{a_0 G - b_0 F}{G - F} = \dfrac{(1)(5)-(2)(-1)}{5-(-1)} = \dfrac{7}{6} = 1,166666667$

$f(x_1) = x^3 - x - 1 = -0,578703703$; $f(a_0) * f(x_1) = (-) * (-) + >0 \longrightarrow \begin{cases} a_1 = x_1 = 1,166666667 \\ b_1 = b_0 = 2 \\ F = f(x_1) = -0,578703703 \end{cases}$

$\hookrightarrow f(x_0) * f(x_1) = (-) * (-) = (+) \rightarrow G = \dfrac{5}{2} = 2,5$

$i=1$: $x_2 = \dfrac{a_1 G - b_1 F}{G - F} = \dfrac{(1,166666667)(2,5) - (2)(-0,578703703)}{2,5 - (-0,578703703)} = 1,323308271$

$f(x_2) = 0,0060039012$; $f(a_1) * f(x_2) = (-) * (-) = (+) >0 \longrightarrow \begin{cases} a_2 = x_2 \\ b_2 = b_1 \\ F = f(x_2) \end{cases}$

$\hookrightarrow f(x_1) * f(x_2) = (-)(-) = (+) \longrightarrow G = \dfrac{2,5}{2} = 1,25$

Sep - 15 - 2016

Los métodos de Bisección, Regla Falsa y Regla Falsa Mejorada pertenecen al grupo de métodos denominados de "intervalos"

$$(a, b) \longrightarrow f(a) * f(b) < 0$$

condición inicial.

Los métodos que se verán a continuación "métodos abiertos" por no necesitar el intervalo (a, b) de la raíz & como condición inicial.

Estos métodos son más veloces y de algoritmos más sencillos que los métodos de intervalo pero también la desventaja es que para ciertos problemas puede ser "divergentes", es decir, no llegar a la solución

Método de la secante.- Parte de la misma ecuación de la regla falsa, necesita dos puntos (cualquiera) de partida: x_{-1} y x_0.

El algoritmo es muy sencillo y consiste en iterar la ecuación sin más.

Algoritmo. Método de la secante:

Sean dados: $f(x)$ y dos puntos iniciales x_{-1} y x_0.

Para $i = 0, 1, \ldots\ldots$, hasta donde se satisfaga

Calcular

$$\boxed{x_{i+1} = \frac{x_{i-1} * f(x_i) - x_i * f(x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}}$$

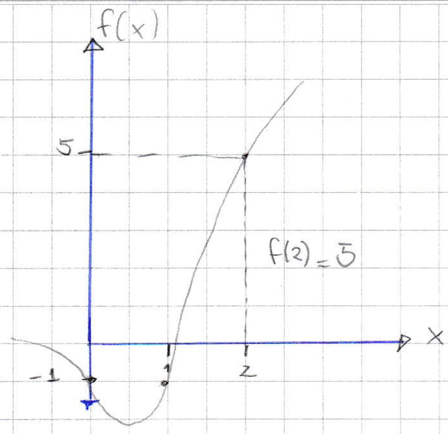
Ejemplo

Utilizar el método de la secante para calcular la raíz de

$$f(x) = x^3 - x - 1$$

con los puntos iniciales $x_{-1} = 1$ y $x_0 = 2$ tal que:

$$f(x_{-1}) = -1 \quad ; \quad f(x_0) = 5$$



Hasta que $|\varepsilon_a| < 0{,}05\%$

i=0 :

$$x_1 = \frac{x_{-1} * f(x_0) - x_0 * f(x_{-1})}{f(x_0) - f(x_{-1})} = \frac{1 * 5 - 2 * (-1)}{5 - (-1)} = 1{,}166666667$$

$f(x_1) = -0{,}578703703$

i=1 :

$$x_2 = \frac{x_0 * f(x_1) - x_1 * f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} = \frac{2 * (-0{,}578703703) - 1{,}166666667 * 5}{-0{,}578703703 - 5}$$

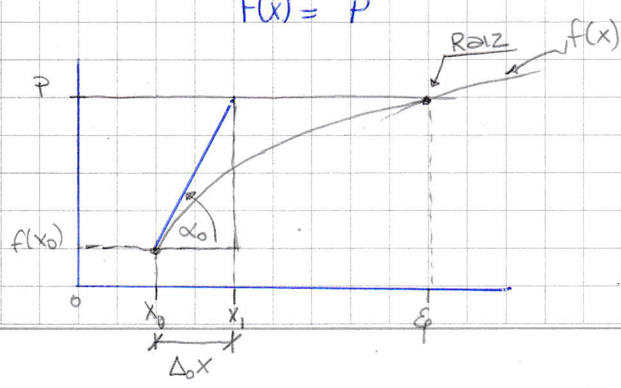
$x_2 = 1{,}253112033$; $f(x_2) = -0{,}285363029$

⋮

i	x_{i+1}	$f(x_{i+1})$	ε_a (%)
0	1,166666667	−0,578703703	—
1	1,253112033	−0,285363029	6,90
2	1,337206446	0,053880586	6,29
3	1,323850096	−0,0036981548	−1,01
4	1,324707937	−0,000004273429	0,0648
5	1,324717965	$3{,}456 * 10^{-8}$	0,000757

Método de Newton - Raphson: Por este método se aproxima a la raiz ξ de la ecuación $f(x)$ por las tangentes a la curva.
Se necesita un punto de partida x_0 y el método se ha desarrollado para el caso general:

$$f(x) = P$$



La 1ra. Aproximación se obtiene trazando una recta tangente a $f(x)$ en $x = x_0$, hasta intersectar P, tal que:

$$\boxed{x_1 = x_0 + \Delta_0 x}$$

el valor de $\Delta_0 x$ se obtiene calculando la tangente del ángulo α_0:

$$tg\,\alpha_0 = \frac{P - f(x_0)}{\Delta_0 x}$$

$$\boxed{\Delta_0 x = \frac{P - f(x_0)}{tg\,\alpha_0}}$$

Por definición de derivada, se tiene que: $tg\,\alpha_0 = f'(x_0)$

Luego: $$\boxed{x_1 = x_0 + \frac{P - f(x_0)}{f'(x_0)}}$$

Analogamente, la siguiente aproximación se obtiene trazando una tangente a la curva $f(x)$ en $x = x_1$ hasta intersectar P:

$$x_2 = x_1 + \frac{P - f(x_1)}{f'(x_1)}$$

En general, para la i-ésima iteración:

$$\boxed{x_{i+1} = x_i + \frac{P - f(x_i)}{f'(x_i)}}$$ «Fórmula de Newton - Raphson»

En el caso particular que $P = 0$, la intersección de $f(x)$ se da con el eje de los x y se transforma a un problema del tipo:

$$f(x) = 0$$

y la fórmula se transforma a:

$$\boxed{x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}}$$ «Fórmula de Newton»

, Examen 1er Parcial jueves 29 de septiembre!

Algoritmo. Método de Newton-Raphson:

Sean dados $f(x)$, P y un punto inicial x_0. Con $f(x)$ continua hasta su primer derivada.

Para $i = 0, 1, \ldots\ldots\ldots$, hasta que se satisfaga

Calcular

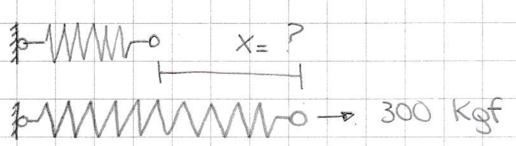
$$\boxed{x_{i+1} = x_i + \frac{P - f(x_i)}{f'(x_i)}}$$

Ejemplo:

Sea un resorte cuya relación fuerza - desplazamiento (F [Kgf] - x [cm]) esta dada por la ecuación:

$$F = 100 * x\left(1 - \frac{x^2}{100}\right)$$

Determinar el desplazamiento del resorte cuando se le aplica una fuerza de 300 [Kgf].



Solución:

$$\underbrace{100 * x\left(1 - \frac{x^2}{100}\right)}_{f(x)} = \underbrace{300}_{P}$$

$$f(x) = 100 * x\left(1 - \frac{x^2}{100}\right) = f(x) = 100 * \left(x - \frac{x^3}{100}\right)$$

$$f'(x) = 100 * \left(1 - \frac{3x^2}{100}\right)$$

Tomar para $x_0 = 0$

$f(x_0) = 0$ y $f'(x_0) = 100$

Nº Tema Fecha

$i=0$

$$x_1 = x_0 + \frac{P - f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_1 = 0 + \frac{300-0}{100} = 3$$

$f(x_1) = 273$ y $f'(x_1) = 73$

$i=1$

$$x_2 = x_1 + \frac{P - f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$$x_2 = 3 + \frac{300-273}{73} = 3,369863014$$

$f(x_2) = 298,7182154$ y $f'(x_2) = 65,93206981$

⋮

i	x_{i+1}	$f(x_{i+1})$	$f'(x_{i+1})$	; ε_a (%)
0	3	273	73	—
1	3,369863014	298,7182154	65,93206981	10,98
2	3,389304002	299,9961717	65,53785515	0,574
3	3,389362415	300	65,53666725	0,001723

Nota: Los problemas $f(x) = P$ como es caso del resorte, para resolverlos por los métodos anteriores (Bisección, Regla Falsa, Regla Falsa Mejorada y Secante) se deben llevar la ecuación a la forma $f(x)=0$, para ello pasar el valor de P al lado izquierdo de la ecuación:

$$\boxed{f(x) - P = 0}$$

MODULO MASTER

Nº Tema Fecha 27-Sept-2016

Práctico Primer Parcial

1) Utilizar las reglas de redondeo.

$$\frac{[4{,}0375 * 10^{-3}(1{,}015 * 10^{-3} - 8{,}123 * 10^{-5})]}{(4{,}873 * 10^{-5} + 6{,}232 * 10^{-7})} =$$

$$\frac{[4{,}0375 * 10^{-3}(1{,}015 * 10^{-3} - 0{,}08123 * 10^{-3})]}{4{,}873 * 10^{-5} + 0{,}06232 * 10^{-5}} =$$

$$\frac{(4{,}0375 * 10^{-3})(9{,}34 \times 10^{-4})}{4{,}93532 * 10^{-5}} =$$

$$\frac{(4{,}0375 * 10^{-3})(9{,}338 * 10^{-4})}{4{,}935 * 10^{-5}} =$$

$$\frac{(4{,}0375 * 10^{-3})(0{,}934 * 10^{-3})}{4{,}935 \times 10^{-5}} = \frac{3{,}7702175 * 10^{-6}}{4{,}935 * 10^{-5}}$$

$$\frac{3{,}770 * 10^{-6}}{4{,}935 * 10^{-5}} = \frac{0{,}377 * 10^{-5}}{4{,}935 * 10^{-5}} = 0{,}07639311041$$

$$= 0{,}0764$$

2) Determinar la serie de Maclaurin para $f(x) = \text{sen}\, x$

3) La altura $x\,[m]$ de un líquido en un tanque esférico de radio $R = 1m$ esta relacionado al volumen V por la fórmula

$$V = \frac{\pi x^2}{3}(3 - x)$$

Determinar la atura x del líquido cuando el tanque tiene un volumen de líquido: $V = 0,5\, m^3$

a) Graficamente (a, b)
b) Método de Bisección hasta $i = 3$
c) Método de la Regla Falsa Mejorado: hasta $i = 3$

4) El contenido de oxigeno de un río a una distancia x aguas abajo de una descarga de aguas servidas es dado por:

$$c = 10 - 20\left(e^{-0,2x} - e^{-0,75x}\right)$$

Determinar la distancia x donde el contenido de oxigeno descien de por primera vez a 5

a) Método Gráfico (a, b)
b) Método de la secante con $x_{-1} = a$ $x_0 = b$ hasta $|\varepsilon_a| < 0,05\%$
c) Método de Neuton Raphson con $x_0 = b$ hasta $|\varepsilon_a| < 0,05\%$

N° Tema Fecha

Soluciones

(2) $f(x) = \operatorname{sen} x \quad f(0)=0 \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(0)^n x^n}{n!} = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2}$

$f'(x) = \cos x \quad f(0) = 1$

$f''(x) = -\operatorname{sen} x \quad f(0) = 0$

$f'''(x) = -\cos x \quad f(0) = -1$

$f^{IV}(x) = \operatorname{sen} x \quad f(0) = 1$

$\vdots$

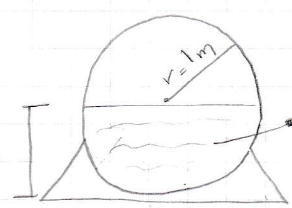
$\rightarrow \operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$

(3)

$R = 1m$

$V = 0{,}5\, m^3$

$V = \frac{\pi x^2}{3}(3-x) \quad x$



$x = ? \rightarrow V = 0{,}5$

$0{,}5 = \frac{\pi x^2}{3}(3-x)$

$a = 0{,}4$

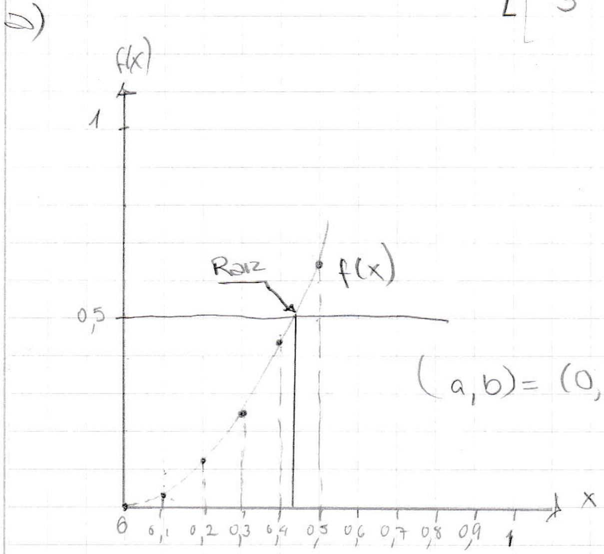
$b = 0{,}5$

$f(x) = \left[\frac{\pi x^2}{3}(3-x)\right] = 0{,}5$

$f(a) =$

$f(b) =$

a)



$(a,b) = (0{,}4 ; 0{,}5)$

x	fx
0	0
0,1	0,03
0,2	0,12
0,3	0,25
0,4	0,44
0,5	0,65

b) Método de Bisección: $f(x) - P = 0$ $\quad \frac{x\pi^2}{3}(3-x) - 0,5 = 0$

$a = 0,4 \quad f(a) = -0,0643658187$
$b = 0,5 \quad f(b) = 0,1544984695$

i	a_i	b_i	x_{i+1}	$f(x_{i+1})$	$f(a_i) * f(x_{i+1}) < 0$
0	0,4	0,5	0,45	0,0407466355	(−) < 0
1	0,4	0,45	0,425	−0,01293860146	(+) > 0
2	0,425	0,45	0,4375	0,01362790048	(−) < 0
3	0,425	0,4375	0,43125	$2,74853382 \times 10^{-4}$	(−) < 0

c)

$a = 0,4 \quad f(a) = -0,064365818$
$b = 0,5 \quad f(b) = 0,154498469$

i	a_i	b_i	F	G	x_{i+1}	$f(x_{i+1})$	$f(a_i) * f(x_{i+1})$	$f(b) * f(x_{i+1})$
0	0,4	0,5	−0,0643658187	0,1544984695	0,4294090092	−0,0036318543 54	+ > 0	+ > 0
1	0,4294090092	0,5	−0,0036318543 54	0,07724923 9	0,432578801	0,003102187697	− < 0	− < 0
2	0,4294090092	0,432578801	−0,003631854354	0,003102187697	0,43111 8565	$-4,462124 * 10^{-6}$	+ > 0	− < 0
3	0,4311 18565	0,432578801	$-4,462124 \times 10^{-6}$	0,003102187697	0,431120662	$-5,476 * 10^{-9}$	+ > 0	+ > 0

4.

$C' = 4e^{-0,2x} - 15e^{-0,75x}$

TITULO

TEMA

FECHA / /

$f(x) = x^3 - x - 1$ $\quad (a,b) = (1,2) \quad f(a) = -1 \quad f(b) = 5$

$\varepsilon_q \leq 0,05$

i	a_i	b_i	$f(a_i)$	$f(b_i)$	x_{i+1}	$f(x_{i+1})$	$f(a_i) \times f(x_{i+1})$	ε_a
0	1	2	-1	5	1,166666667	-0,5787037037	+ < 0	—
1	1,166666667	2	-0,5787037037	5	1,253112083	-0,2853630307	+ < 0	6,90
2								
3								
4								
5								

PARA RECORDAR:

TITULO

TEMA

FECHA / /

b) $x_{-1} = a = 6$ $f(a) = -0{,}8017043075 \rightarrow A$

$x_0 = b = 8$ $f(b) = 1{,}011644684 \rightarrow B$

$$x_{i+1} = \frac{a\,f(b) - b\,f(a)}{f(b) - f(a)}$$

i	x_{i+1}	$f(x_{i+1})$	ε_a (%)
0	6,884225057	0,06700000558	—
1	6,805087441	$-6{,}524643545\times10^{-3}$	$-1{,}16$
2	6,812110185	$3{,}470893288\times10^{-5}$	0,10
3	6,812073024	$1{,}77612\times10^{-8}$	$-5{,}48\times10^{-4}$
4			
5			

$$f(x) = 10 - 20\left(e^{-0{,}2x} - e^{-0{,}75x}\right)$$ $P = 5$

$$10 - 20\left(e^{-0{,}2x} - e^{-0{,}75x}\right) = 5$$

$$f'(x) = 4e^{-0{,}2x} - 15^{-0{,}75x}$$ $x_i = 8$

$$x_{i+1} = x_i + \frac{P - f(x_i)}{f'(x_i)}$$

$f(x) = 6{,}011644684$

$f'(x) = 0{,}7704047893$

x_i

i	x_{i+1}	$f(x_{i+1})$	$f'(x_{i+1})$	ε_a (%)
0	8	6,011644684	0,7704047893	—
1	6,686866051	4,882045065	0,9505879522	19,64
2	6,810952344	4,998953732	0,9336936678	1,82
3	6,812052997	4,999981322	0,933543035	0,02

PARA RECORDAR:

POWERFULL

Sistemas de Ecuaciones Lineales. (SEL)

Sea el SEL $(n \times n)$:

$$a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}\, x_n$$
$$a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}\, x_n$$
$$\vdots$$
$$a_{n1}\, x_1 + a_{n2}\, x_2 + \ldots\ldots + a_{nn}\, x_n$$

En forma matricial

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots\ldots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}_{b}$$

$$A \cdot x = b$$

$$a_{ij}\, x_j = b_i \quad \text{"Notación Inicial"}$$

muchos de los problemas del modelado de la realidad recaen en sistemas de ecuaciones lineales, cuya solución consiste en determinar las incognitas x_i.

Método de Gauss.- Este metodo utiliza la menor cantidad de pasos para llegar a la solución. Consta de 2 etapas:

- Eliminación de Gauss, consiste en llevar la matriz A a su forma triangular superior equivalente U, utilizando operaciones elementales entre filas.

- Sustitución Progresiva.- una vez que se tiene un sistema triangular superior las incognitas x_i se determinan a partir de la ultima fila x_n, hacia la primera x_1.

Eliminación de Gauss:

Para determinación del algoritmo de eliminación se trabajara sobre un sistema (3×3) para luego generalizarlo a sistemas $(n \times n)$

Sea entonces:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

Paso 1. Eliminar los coeficientes en la columna 1 de A es decir: a_{21} y a_{31}. Para ello se harán las siguientes operaciones en las filas 2 y 3.

$$f_2 \longleftarrow f_2 - f_1 * (a_{21}/a_{11})$$
$$f_3 \longleftarrow f_3 - f_1 * (a_{31}/a_{11})$$

con $(a_{11} \neq 0)$ "pivote".

Al final del 1er paso, se tiene el sistema:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$
$$0 \quad a_{22}^{(2)}x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 = b_2^{(2)}$$
$$0 \quad a_{32}^{(2)}x_2 + a_{33}x_3 = b_3^{(2)}$$

donde:

$$f_2 \begin{cases} a_{22}^{(2)} = a_{22}^{(1)} - a_{12}^{(1)} * (a_{21}^{(1)}/a_{11}^{(1)}) \\ a_{23}^{(2)} = a_{23}^{(1)} - a_{13}^{(1)} * (a_{21}^{(1)}/a_{11}^{(1)}) \\ b_2^{(2)} = b_2^{(1)} - b_1^{(1)} * (a_{21}^{(1)}/a_{11}^{(1)}) \end{cases}$$

$$a_{32}^{(2)} = a_{32}^{(1)} - a_{12}^{(1)} * (a_{31}^{(1)}/a_{11}^{(1)})$$
$$a_{33}^{(2)} = a_{33}^{(1)} - a_{13}^{(1)} * (a_{31}^{(1)}/a_{11}^{(1)})$$
$$b_3^{(2)} = b_3^{(1)} - b_1^{(1)} * (a_{31}^{(1)}/a_{11}^{(1)})$$

el superíndice (1) indica el coeficiente inicial (ej. $a_{22}^{(1)} = a_{22}$)

El coeficiente en la diagonal principal de la columna ①: $a_{11}^{(1)} \neq 0$ se denomina: elemento pivote y la fila, fila del pivote.

Paso 2. Eliminar los (el en este caso) coeficientes en las columnas ②, para ello se harán operaciones en la fila ③.

$$f_3 \longleftarrow f_3 - f_2 * \left(a_{32}^{(2)} / a_{22}^{(2)} \right)$$

Al final del paso ②, se tiene:

$$\begin{aligned}
a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 &= b_1 \\
0 \quad + a_{22}^{(2)} x_2 + a_{23}^{(2)} x_3 &= b_2^{(2)} \\
0 \quad\quad 0 \quad\quad a_{33}^{(3)} x_3 &= b_3^{(3)}
\end{aligned}$$

donde.

$$a_{33}^{(3)} = a_{33}^{(2)} - a_{23}^{(2)} * \left(a_{32}^{(2)} / a_{22}^{(2)} \right)$$

$$b_3^{(3)} = b_3^{(2)} - b_2^{(2)} * \left(a_{32}^{(2)} / a_{22}^{(2)} \right)$$

con $a_{22}^{(2)} \neq 0$, nuevo pivote.

Generalizando para sistemas $(n \times n)$:

$$a_{ij}^{(K+1)} = a_{ij}^{(K+1)} - a_{Kj}^{(K)} * \left(a_{iK}^{(K)} / a_{KK}^{(K)} \right)$$

$$b_i^{(K+1)} = b_i^{(K)} - b_K^{(K)} * \left(a_{iK}^{(K)} / a_{KK}^{(K)} \right)$$

$$K = 1, \ldots\ldots, n-1$$

$$i, j > K, \ldots\ldots, n$$

Sustitución Regresiva:

A partir de un sistema genérico (3×3) triangular superior:

$$\begin{aligned}
a_{11} x_1 + a_{22} x_2 + a_{13} x_3 &= b_1 \\
0 \quad\quad a_{22} x_2 + a_{23} x_3 &= b_2 \\
0 \quad\quad 0 \quad\quad a_{33} x_3 &= b_3
\end{aligned}$$

de la f_3 : $x_3 = \dfrac{b_3}{a_{33}}$

f_2 : $x_2 = \dfrac{b_2 - a_{23} x_3}{a_{22}}$

f_1 : $x_1 = \dfrac{b_1 - a_{12} x_3 - a_{13} x_3}{a_{11}}$

Generalizando se tiene:

$$x_i = \frac{b_i \quad \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j}{a_{ii}}$$

$i = n, n-1, \ldots\ldots, 1.$

Conseción de sumatoria:

$$\sum_{i=}^{1} a_j = \begin{cases} a_m + a_{m+1} + \ldots\ldots + a_n & \text{si } n \geq m \\ 0 & \text{si } n < m \end{cases}$$

Pivotación: Es una técnica que consiste en permutar filas con 2 objetivos:

- Evitar ceros en la columna del pivote. $(a_{KK} \neq 0)$
- Disminuir los errores de redondeo, para ello se debe elegir como pivote al mayor coeficiente (en valor absoluto) de la columna correspondiente.

Ejemplo:

Resolver por Gauss.

$$\begin{aligned} -0{,}5\,x_2 + 0{,}5\,x_3 &= 1{,}5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Nº Tema Fecha

1er paso:

$a_{11} = 0 \rightarrow$ pivotar

$f_1 \leftarrow f_2$

$f_2 \leftarrow f_1$

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$0 - 0{,}5x_2 + 0{,}5x_3 = 1{,}5$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

Eliminación de la col. 1

$f_2 \leftarrow f_2 - f_1 \ \cancel{(0/2)} \rightarrow 0$

$f_3 \leftarrow f_3 - f_1 \ (1/2)$

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$0 - 0{,}5x_2 + 0{,}5x_3 = 1{,}5$$
$$0 \quad 0{,}5x_2 + 0{,}5x_3 = 0{,}5$$

Paso 2. Eliminar la columna 2.

$f_3 \leftarrow f_3 - f_2 \ \underbrace{(0{,}5/-0{,}5)}_{-1}$

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$0 - 0{,}5x_2 + 0{,}5x_3 = 1{,}5$$
$$0 \quad 0 \quad x_3 = 2$$

Sol. $\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 2 \end{array} \right\}$

de f_3: $x_3 = 2$

f_2: $x_2 = \dfrac{1{,}5 - 0{,}5 * 2}{-0{,}5} = -1$

f_1: $x_1 = \dfrac{1 - (-1) - 2}{2} = 0$

Cálculo de determinantes de Matrices $\underset{\sim}{A}\ (n \times n)$ por Post-Multiplicación:-

En el cálculo del determinante se reutiliza el algoritmo de Eliminación de Gauss para llevar $\underset{\sim}{A}$ a su forma triangular superior. Luego el determinante de $\underset{\sim}{A}$ se calcula por la fórmula:

$$\boxed{\det \underset{\sim}{A} = (-1)^p \prod_{i=1}^{n} u_{ii}}$$

donde p: es el número de permutaciones de fila y Π es la productoria.

$$\prod_{i=1}^{n} = u_{11} * u_{12} * \ldots\ldots * u_{nn}$$

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

$$u_{11} \begin{bmatrix} u_{22} & u_{23} \\ 0 & u_{33} \end{bmatrix} = u_{11} * u_{22} * u_{33}$$

Ejemplo.

Calcular el determinante de:

$$\underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Paso	$\underset{\sim}{A}$	Operaciones.
0	$\begin{matrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}$	f_1 f_2 f_3
1	$\begin{matrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{matrix}$	f_1 $f_2 \leftarrow f_2 - f_1 * (1/2)$ $f_3 \leftarrow f_3 - f_1 * (1/2)$
2	$\begin{matrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$	f_1 f_2 $f_3 \leftarrow f_3 - f_2 * \left(\frac{1/2}{-1/2}\right)$

Luego:

$$\det \underset{\sim}{A} = (-1)^0 * (2 * (1/2) * 1) = -1$$

Inversa de Matrices: Para el cálculo de la inversa de una matriz de coeficientes $\underset{\sim}{A}\ (n \times n)$, tambien se reutilizan los algoritmos de eliminación de Gauss y Sustitución Reversiva indicado en el siguiente esquema:

$$[\underset{\sim}{A} \mid \underset{\sim}{I}] \xrightarrow[\text{Gauss}]{\text{Eliminación de}} [\underset{\sim}{U} \mid \underset{\sim}{W}]$$

Matriz ampliada con la matriz identidad

n sistema de ecuaciones conformadas por $\underset{\sim}{U}$ con cada columna de $\underset{\sim}{W}$. Las incognitas corresponden a las columnas de la inversa de $\underset{\sim}{A}$

$$U a_{i1} = W_{i1}$$

$$\underset{\sim}{A}^{-1} = [a_{i1} \; a_{i2} \; \ldots \; a_{in}] \xleftarrow[\text{ción Reversiva}]{\text{Por sustitu.}} U a_{i2} = W_{i2}$$

$$\vdots$$

$$U a_{in} = W_{in}$$

Ejemplo

Calcular la inversa de.

$$\underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Paso	$\underset{\sim}{A}$	$\underset{\sim}{I}$	Operaciones
0	$\begin{matrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$	f_1 f_2 f_3
1	$\begin{matrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{matrix}$	f_1 $f_2 \leftarrow f_2 - f_1(1/2)$ $f_3 \leftarrow f_3 - f_1(1/2)$
2	$\underbrace{\begin{matrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{\underset{\sim}{U}}$	$\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{matrix}}_{\underset{\sim}{W}}$	f_1 f_2 $f_3 \leftarrow f_3 - f_2\left(\frac{1/2}{-1/2}\right)$

1er Sistema $\underset{\sim}{U}$ con la col. 1 de $\underset{\sim}{W}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}}_{1^{er}\text{ Col. de } A^{-1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \\ -1 \end{bmatrix}}_{\text{Col 1 de } W.}$$

de f_3 : $a_{31} = -1$

f_2 : $a_{21} = \dfrac{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} * (-1)}{-\frac{1}{2}} = 0$

f_1 : $a_{11} = \dfrac{1 - 1 * 0 - 1 * (-1)}{2} = 1$

2^{do} sistema. $\underset{\sim}{U}$ con la col ② de $\underset{\sim}{W}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Col ② de A^{-1} Col ② de W

de f_3 : $a_{32} = 1$

f_2 : $a_{22} = \dfrac{1 - \frac{1}{2} * 1}{-\frac{1}{2}} = -1$

f_1 : $a_{12} = \dfrac{0 - 1 * (-1) - 1 * 1}{2} = 0$

3^{er} sistema $\underset{\sim}{U}$ con la col. ③ de $\underset{\sim}{W}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Col ③ de A^{-1} Col ③ de $\underset{\sim}{W}$

de f_3 : $a_{33} = 1$

de f_2 : $a_{23} = \dfrac{0 - \frac{1}{2} * 1}{-\frac{1}{2}} = 1$

f_1 : $a_{13} = \dfrac{0 - 1 * 1 - 1 * 1}{2} = -1$

$$\rightarrow \underset{\sim}{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} //$$

Verificación:

$$\underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{A}^{-1} = \underset{\sim}{I}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{A}^{-1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{I}}$$

Ejemplo

Dado el sistema

$$1{,}16\, x_1 + 83{,}9\, x_2 - 7{,}68\, x_3 = 1{,}29$$

$$5{,}86\, x_1 + 0{,}325\, x_2 + 27{,}8\, x_3 = 6{,}75$$

$$-45{,}3\, x_1 + 2{,}37\, x_2 + 0{,}805\, x_3 = 0{,}607$$

a) Resolver el sistema
b) Calcular el det $\underset{\sim}{A}$
c) Calcular $\underset{\sim}{A}^{-1}$.

Trabajar con 3 CS

Paso	$\underset{\sim}{A}$	$\underset{\sim}{b}$	$\underset{\sim}{I}$	Operaciones.
0	1,16 83,9 -7,68 5,86 0,325 27,8 -45,3 2,37 0,805	1,29 6,75 0,607	1,00 0,00 0,00 0,00 1,00 0,00 0,00 0,00 1,00	f_1 f_2 f_3
1'	-45,3 2,37 0,805 5,86 0,325 27,8 1,16 83,9 -7,68	0,607 6,75 1,29	0,00 0,00 1,00 0,00 1,00 0,00 1,00 0,00 0,00	$f_1 \leftarrow f_3$ f_2 $f_3 \leftarrow f_1$
1	-45,3 2,37 0,805 0 0,632 27,9 0 84,0 -7,66	0,607 6,83 1,31	0,00 0,00 1,00 0,00 1,00 0,129 1,00 0,00 0,0256	f_1 $f_2 \leftarrow f_2 - f_1\,(5{,}86/-45{,}3)$ $f_3 \leftarrow f_3 - f_1\,(1{,}16/-45{,}3)$
2'	-45,3 2,37 0,805 0 84,0 -7,66 0 0,632 27,9	0,607 1,31 6,83	0,00 0,00 1,00 1,00 0,00 0,0256 0,00 1,00 0,129	f_1 $f_2 \leftarrow f_3$ $f_3 \leftarrow f_2$

2	$\begin{matrix} -45,3 & 2,37 & 0,805 \\ 0 & 84,0 & -7,66 \\ 0 & 0 & 28,0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0,607 \\ 1,31 \\ 6,82 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0,00 & 0,00 & 1,00 \\ 1,00 & 0,00 & 0,0256 \\ -0,00752 & 1,00 & 0,129 \end{matrix}$	$\begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \leftarrow f_3 - f_2 (0,632/84,0) \end{matrix}$

a) de f_3: $x_3 = \dfrac{6,82}{28,0} = 0,244$

f_2: $x_2 = \dfrac{1,31 + 7,66 * (0,244)}{84,0} = 0,0378$

f_1: $x_1 = \dfrac{0,607 - 2,37(0,0378) - 0,805(0,244)}{-45,3} = -0,00709$

b)

$$\det A = (-1)^2 (-45,3 * 84,0 * 28,0) = -1,07 * 10^5$$

c) Inversa.

$$\underset{\sim}{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 6,18 \times 10^{-4} & 8,05 \times 10^{-4} & -0,0220 \\ 0,0119 & 3,26 \times 10^{-3} & 7,25 \times 10^{-4} \\ -2,69 \times 10^{-4} & 0,0357 & 4,61 \times 10^{-3} \end{bmatrix}$$

1er Sistema: $\underset{\sim}{U} a_{i1} = \underset{\sim}{w}_{i1}$

$$\begin{bmatrix} -45,3 & 2,37 & 0,805 \\ 0 & 84.0 & -7,66 \\ 0 & 0 & 28.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,00 \\ 1,00 \\ -0,00752 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow a_{11} = \dfrac{0 - 2,37(0,0119) - 0,805(-2,69 \times 10^{-4})}{-45,3} = 6,18 * 10^{-4}$

$\rightarrow a_{21} = \dfrac{1,00 + 7,66(-2,69 \times 10^{-4})}{84.0} = 0,0119$

$\rightarrow a_{31} = \dfrac{-0,00752}{28} = -2,69 \times 10^{-4}$

2do Sistema

$$\begin{bmatrix} -45,3 & 2,37 & 0,805 \\ 0 & 84,0 & -7,66 \\ 0 & 0 & 28,0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,00 \\ 0,00 \\ 1,00 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow a_{12} = \dfrac{0 - 2,37(3,26 \times 10^{-3}) - (0,805)(0,0357)}{-45,3} = 8,05 \times 10^{-4}$

$\rightarrow a_{22} = \dfrac{-7,66 * 0,0357}{84,0} = 3,26 \times 10^{-3}$

$\rightarrow a_{32} = \dfrac{1,00}{28,0} = 0,0357$

3er sistema

$$\begin{bmatrix} -45,3 & 2,37 & 0,805 \\ 0 & 84,0 & -7,66 \\ 0 & 0 & 28,0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,00 \\ 0,0256 \\ 0,129 \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow a_{13} = -6,0220 \\ \rightarrow a_{23} = 7,25 \times 10^{-4} \\ \rightarrow a_{33} = 4,61 \times 10^{-3} \end{matrix}$$

Mar-11-Oct

Factorizacion LU:

Toda matriz de coeficientes $\underset{\sim}{A}(n \times n)$ que tenga inversa, es posible descomponerla (factorizarla) en 2 submatrices.

$$\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{L}\,\underset{\sim}{U} \qquad (1)$$

donde:

$\underset{\sim}{L}$: matriz triangular inferior unitaria

$\underset{\sim}{U}$: matriz triangular superior.

Para ello, se define la matriz especial:

$$\underset{\sim}{L}^{(k)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & & & 1 & & \vdots \\ \vdots & & & -l_{k+1,k} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & -l_{k+2,k} & & \vdots \\ 0 & \cdots & & -l_{n,k} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

La matriz $\underset{\sim}{L}^{(k)}$ se diferencia de la matriz identidad solo en la k-ésima columna por debajo de la diagonal principal donde estan los negativos de los coeficientes multiplicativos:

$$l_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} \qquad (3)$$

El proceso se inicia calculando

$$\underset{\sim}{A}^{(k+1)} = L^{(k)} A^{(k)} \qquad (4)$$

$$(k = 1, \ldots\ldots, n-1)$$

de manera que cuando $k = n-1$ entonces:

$$\underset{\sim}{A}^{(n)} = \underset{\sim}{U} \qquad (5) \qquad (\text{con } \underset{\sim}{A}^{(1)} = \underset{\sim}{A})$$

$$\underset{\sim}{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots\ l_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix} \qquad (6)$$

Ejemplo.

Factorizar la matriz

$$\underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución:

$k = 1$

$$\underset{\sim}{A}^{(2)} = \underset{\sim}{L}^{(1)} \cdot \underset{\sim}{A}^{(1)}$$

$$\underset{\sim}{L}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -l_{21} & 1 & 0 \\ -l_{31} & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \qquad l_{21} = \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{1}{2}$$

$$l_{31} = \frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \underset{\sim}{A}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & +1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$k = 2$

$$\underset{\sim}{L}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -l_{32} & 1 \end{bmatrix} \qquad l_{32} = \frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} = \frac{1/2}{-1/2} = -1$$

$$\underset{\sim}{A}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \underset{\sim}{U}$$

$$\underset{\sim}{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1 & 1 \end{bmatrix} //$$

Verificación:

$$\underset{\sim}{L}\,\underset{\sim}{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Factorización de $\underset{\sim}{L}\underset{\sim}{U}$ en la solución de SEL:

Sea dado:

$$\underset{\sim}{A}\, x = \underset{\sim}{b}$$

$$(\underset{\sim}{L}\underset{\sim}{U}\, \underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{b}$$

$$L\,|\,\underset{\sim}{U}\, x = b$$

1) $\underset{\sim}{L}\ \underset{\sim}{c} = \underset{\sim}{b} \rightarrow$ se resuelve por sustitución frontal

2) $\underset{\sim}{U}\ \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{c} \rightarrow$ se resuelve por sustitución reversiva.

Luego:

Ec.) 1) $\underset{\sim}{L}\ \underset{\sim}{c} = \underset{\sim}{b}$ } (Error)

Ejemplo

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{b}}$$

del ejemplo anterior se tiene que

$$\underset{\sim}{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad \underset{\sim}{U} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Luego

Ec.

1) $\underset{\sim}{L}\ \underset{\sim}{c} = \underset{\sim}{b}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sust. fort.
- de f_1: $c_1 = 1$
- de f_2: $c_2 = 2 - \frac{1}{2} * 1 = \frac{3}{2}$
- de f_3: $c_3 = 1 - \frac{1}{2} * 1 + 1 * \frac{3}{2} = 2$

La 2da Ec. $\underset{\sim}{U}\,\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{c}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3/2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Susti. reversivo
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{de } f_3 : \; x_3 = 2 \\ f_2 : \; x_2 = \dfrac{3/2 - 1/2 * 2}{-1/2} = -1 \\ f_3 = x_1 = \dfrac{1 - 1*(-1) - 1*2}{2} = 0 \end{array} \right.$$

Sol. $\underset{\sim}{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Paso	A		Operaciones
0	$\begin{matrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}$		f_1 f_2 f_3
1	$\begin{matrix} 2 & 1 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{matrix}$		f_1 $f_2 \leftarrow f_2 - f_1\,(1/2)$ $f_3 \leftarrow f_3 - f_1\,(1/2)$
2	$\begin{matrix} 2 & 1 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1 & 1 \end{matrix}$		f_1 f_2 $f_3 \leftarrow f_3 - f_2\,\underbrace{(+1/2 / -1/2)}_{-1}$

$\underset{\sim}{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$; $\underset{\sim}{U} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Resolviendo las ecs 1) y 2) (realizadas en el ej. anterior) se obtiene la solución:

$$\underset{\sim}{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Factorización $\underset{\sim}{L}\underset{\sim}{U}$ → Método de Crout
→ Método de Doolittle

Si $\underset{\sim}{A}$ es simétrica → Met Choleski

La pivotación tambien es valida en la factorización $\underset{\sim}{LU}$ teniendo el cuidado de realizar las mismas permutaciones para los coeficientes multiplicativos (matriz $\underset{\sim}{L}$) y para el vector $\underset{\sim}{b}$.

Ejemplo.

Resolver por Factorización $\underset{\sim}{LU}$:

$$2,38\, x_1 + 7,21\, x_2 + 15,5\, x_3 = 1,36$$
$$-40,3\, x_1 + 2,86\, x_2 + 6,45\, x_3 = 0,845$$
$$17,3\, x_1 + 12,4\, x_2 + 1,73\, x_3 = 2,29.$$

Paso	A	Operaciones
0	$\begin{matrix} 2,38 & 7,21 & 15,5 \\ -40,3 & 2,86 & 6,45 \\ 17,3 & 12,4 & 1,73 \end{matrix}$	f_1 f_2 f_3
1'	$\begin{matrix} -40,3 & 2,86 & 6,45 \\ 2,38 & 7,21 & 15,5 \\ 17,3 & 12,4 & 1,73 \end{matrix}$	$f_1 \leftarrow f_2$ $f_2 \leftarrow f_1$ f_3
1	$\begin{matrix} -40,3 & 2,86 & 6,45 \\ -0,0591 & 7,38 & 15,9 \\ -0,429 & 13,6 & 4,50 \end{matrix}$	f_1 $f_2 \leftarrow f_2 - f_1(2,38/-40,3)$ $f_3 \leftarrow f_3 - f_1(17,3/-40,3)$
2'	$\begin{matrix} -40,3 & 2,86 & 6,45 \\ -0,429 & 13,6 & 4,50 \\ -0,0591 & 7,38 & 15,9 \end{matrix}$	f_1 $f_2 \leftarrow f_3$ $f_3 \leftarrow f_2$
2	$\begin{matrix} -40,3 & 2,86 & 6,45 \\ -0,429 & 13,6 & 4,50 \\ -0,0591 & 0,543 & 13,5 \end{matrix}$	f_1 f_2 $f_3 \leftarrow f_3 - f_2(7,38/13,6$

$\underset{\sim}{L}$ $\underset{\sim}{U}$

$$\underset{\sim}{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0,429 & 1 & 0 \\ -0,0591 & 0,543 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \underset{\sim}{U} = \begin{bmatrix} -40,3 & 2,86 & 6,45 \\ 0 & 13,6 & 4,50 \\ 0 & 0 & 13,5 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{b} \xrightarrow[\text{de fila}]{\text{permutacion}} \underset{\sim}{b}^{*} = \begin{bmatrix} 0,845 \\ 2,29 \\ 1,36 \end{bmatrix}$$

Resolver la Ec:

1) $\underset{\sim}{L}\ \underset{\sim}{c} = \underset{\sim}{b}^*$; $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0,429 & 1 & 0 \\ -0,0591 & 0,543 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,845 \\ 2,29 \\ 1,36 \end{bmatrix}$

por sustitución frontal:

de la $f_1 = c_1 = 0,845$

$f_2: \ c_2 = 2,29 + 0,429 * 0,845 = 2,65$

$f_3: \ c_3 = 1,36 + 0,0591 * 0,845 - 0,543 * 2,65 = 0,0290$

2) $\underset{\sim}{U}\ \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{c}$ $\begin{bmatrix} -40,3 & 2,86 & 6,45 \\ 0 & 13,6 & 4,50 \\ 0 & 0 & 13,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,845 \\ 2,65 \\ -0,0290 \end{bmatrix}$

Por sustitución reversiva

de $f_3: \ x_3 = \dfrac{-0,0290}{13,5} = -0,00215$

$f_2: \ x_2 = \dfrac{2,65 - 4,50 * (-0,00215)}{13,6} = 0,196$

$f_1: \ x_1 = \dfrac{0,845 - 2,86 * (0,196) - 6,45(-0,00215)}{-40,3} = -0,00740$

sol.

$x = \begin{bmatrix} -0,00740 \\ 0,196 \\ -0,00215 \end{bmatrix}$

Jue-13-Oct

Solución de sistemas (SEL) por los métodos iterativos:

La solución de:

$$\underset{\sim}{A}\ \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b} \qquad (1)$$

por los métodos iterativos, precisa generar un sistema equivalente, donde el vector de incognitas $\underset{\sim}{x}$ este en ambos lados de la ecuación:

$$\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{B}\ \underset{\sim}{x} + C \qquad (2)$$

→ La solución de (2) tambien es solución de (1)

De manera que un valor inicial para x (por ej: $\underset{\sim}{x} = 0$) se reemplaza en el lado derecho de (2) y se resuelve la ecuación. El resultado obtenido $x^{(1)}$ se lo reemplaza nuevamente en el lado derecho de (2) y se vuelve a resolver la ecuación. Este proceso se repite hasta que se alcance alguna condición especificada.

Para llegar de (1) a (2), se lo hace despejando x_1 de la 1ra. ecuación de (1) x_2 de la segunda y así sucesivamente hasta llegar a x_1 de la ultima ecuación:

$$\left.\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots\cdots + a_{nn}x_n = b_n
\end{array}\right| \quad (1)$$

entonces:

de la primera ec:

$$x_1 = -\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 - \cdots\cdots - \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n + \frac{b_1}{a_{11}}$$

2^{da} ec:

$$x_2 = -\frac{a_{21}}{a_{22}}x_1 - \cdots\cdots - \frac{a_{2n}}{a_{22}}x_n + \frac{b_2}{a_{22}}$$

$$\vdots$$

$$x_n = -\frac{a_{n1}}{a_{nn}}x_1 - \frac{a_{n2}}{a_{nn}}x_2 - \cdots\cdots - \frac{a_{nn-1}}{a_{nn}}x_{n-1} + \frac{b_n}{a_{nn}}$$

En forma de Ecuaciones

En forma matricial

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} & \cdots & -\frac{a_{1,n-1}}{a_{11}} & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & -\frac{a_{23}}{a_{22}} & \cdots & \frac{a_{2,n-1}}{a_{22}} & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & & & & & \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n3}}{a_{nn}} & \cdots & \frac{a_{n,n-1}}{a_{nn}} & 0 \end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{x}} \underset{+}{+} \underbrace{\begin{bmatrix} b_1/a_{11} \\ b_2/a_{22} \\ \vdots \\ b_n/a_{nn} \end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{C}} \quad (2)$$

Algoritmo. Método Iterativo de Jacobi:

Sea dado el sistema: $\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$ (1)

a partir del cual se determina: $\underset{\sim}{x} = B\underset{\sim}{x} + C$ (2)

Donde los coeficientes b_{ij} de $\underset{\sim}{B}$ y los c_i de $\underset{\sim}{C}$, se calculan por:

$$b_{ij} = \begin{cases} -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}} & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{si } i = j \end{cases} \quad ; \quad c_i = \frac{b_i}{a_{ii}} \quad \forall i,j$$

Elegir el valor inicial de $\underset{\sim}{x}$ (por ej: $\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0}$)

Para $m = 1, 2, \ldots,$ hasta donde se satisfaga

Calcular:

$$\boxed{x_i^{(m)} = \sum_{\substack{j=i \\ j\neq i}}^{n} b_{ij}\, x_j^{(m-1)} + c_i} \quad (i = 1, \ldots, n)$$

Ejemplo: Resolver por Jacobi

$$10x_1 + x_2 + x_3 = 12$$
$$x_1 + 10x_2 + x_3 = 12$$
$$x_1 + x_2 + 10x_3 = 12$$

Solución:

de f_1: $x_1 = -0{,}1x_2 - 0{,}1x_3 + 1{,}2$

f_2: $x_2 = -0{,}1x_1 - 0{,}1x_3 + 1{,}2$

f_3: $x_3 = -0{,}1x_1 - 0{,}1x_2 + 1{,}2$

$m=1$: Elegir $\underset{\sim}{x} = 0$ $(x_1 = x_2 = x_3 = 0)$

de f_1: $x_1 = -0{,}1 * 0 - 0{,}1 * 0 + 1{,}2 = 1{,}2$

f_2: $x_2 = -0{,}1 * 0 - 0{,}1 * 0 + 1{,}2 = 1{,}2$

f_3: $x_3 = -0{,}1 * 0 - 0{,}1 * 0 + 1{,}2 = 1{,}2$

$m=2$:

de f_1: $x_1 = -0{,}1 * 1{,}2 - 0{,}1 * 1{,}2 + 1{,}2 = 0{,}96$

f_2: $x_2 = -0{,}1 * 1{,}2 - 0{,}1 * 1{,}2 + 1{,}2 = 0{,}96$

f_3 $x_3 = -0{,}1 * 1{,}2 - 0{,}1 * 1{,}2 + 1{,}2 = 0{,}96$

$m=3$

de f_1: $x_1 = -0{,}1 * 0{,}96 - 0{,}1 * 0{,}96 + 1{,}2 = 1{,}008$

f_2 $x_2 = -0{,}1 * 0{,}96 - 0{,}1 * 0{,}96 + 1{,}2 = 1{,}008$

$x_3 = -0{,}1 * 0{,}96 - 0{,}1 * 0{,}96 + 1{,}2 = 1{,}008$

En forma de tabla.

m	$x_1^{(m)}$	$x_2^{(m)}$	$x_3^{(m)}$
0	0	0	0
1	1,2	1,2	1,2
2	0,96	0,96	0,96
3	1,008	1,008	1,008
4	0,9984	0,9984	0,9984
5	1,00032	1,00032	1,00032
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
Solución Exacta	1	1	1

Método Iterativo de Gauss - Seidel:

Mejora el metodo anterior, utilizando cada variable recien calculada para el cálculo de la siguiente en el mismo paso.

Algoritmo - Método de Gauss - Seidel.

Sea dado el sistema $\underset{\sim}{A}\, \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$, a partir del cual se determina: $\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{B}\, \underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{C}$ dónde los coeficientes de b_{ij} de B y los c_i de $\underset{\sim}{C}$ se calculan por:

$$b_{ij} = \begin{cases} -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}} & si \ i \neq j \\ 0 & si \ i = j \end{cases} \quad ; \quad c_i = \frac{b_i}{a_{ii}} \quad \forall \ i, j$$

Elegir el valor inicial de $\underset{\sim}{x}$ (por ej $\underset{\sim}{x} = 0$)

Para $m = 1; 2, \ldots\ldots$, hasta donde se satisfaga

Calcular:

$$\boxed{x_i^{(m)} = \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij}\, x_j^{(m)} + \sum_{j=i+1}^{n} b_{ij}\, x_j^{(m-1)} + c_i}$$

$$(i = 1, \ldots\ldots\ldots, n)$$

<u>Convención de sumatoria:</u>

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = \begin{cases} a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n & si \ n \geq m \\ 0 & si \ n < m \end{cases}$$

Ejemplo: Resolver el ejercicio anterior, ahora por Gauss - Seidel

$$10x_1 + x_2 + x_3 = 12 \rightarrow x_1 = -0{,}1\, x_2 - 0{,}1\, x_3 + 1{,}2$$

$$x_1 + 10x_2 + x_3 = 12 \rightarrow x_2 = -0{,}1\, x_1 + 0{,}1\, x_3 + 1{,}2$$

$$x_1 + x_2 + 10x_3 = 12 \rightarrow x_3 = -0{,}1\, x_2 + 0{,}1\, x_2 + 1{,}2$$

$m=1$: Elegir $\underset{\sim}{x}=0$

$$x_1^{(1)} = (-0,1)(0) - (0,1)(0) + 1,2 = 1,2$$

$$x_2^{(1)} = (-0,1)(1,2) - (0,1)(1,2) + 1,2 = 1,08$$

$$x_3^{(1)} = (-0,1)(1,2) - (0,1)(1,08) + 1,2 = 0,972$$

$m=2$

$$x_1^{(2)} = (-0,1)(1,08) - (0,1)(0,972) + 1,2 = 0,9948$$

$$x_2^{(2)} = (-0,1)(0,9948) - (0,1)(0,972) + 1,2 = 1,00332$$

$$x_3^{(2)} = (-0,1)(0,9948) - (0,1)(1,00332) + 1,2 = 1,000188$$

$\vdots$

En forma de tabla

m	$x_1^{(m)}$	$x_2^{(m)}$	$x_3^{(m)}$
0	0	0	0
1	1,2	1,08	0,972
2	0,9948	1,00332	1,000188
3	0,9996492	1,00001628	1,000033452
4	0,999995026	0,999997152	1,000000782
5	1,000000207	0,999999901	0,99999989
6	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
7	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Es convergente a la solución $(x_1 = x_2 = x_3 = 1)$

Ejemplo. Resolver por Gauss-Seidel:

$$x_1 + x_2 + 10x_3 = 12 \rightarrow x_1 = -x_2 - 10x_3 + 12$$

$$10x_1 + x_2 + x_3 = 12 \rightarrow x_2 = -10x_1 - x_3 + 12$$

$$x_1 + 10x_2 + x_3 = 12 \rightarrow x_3 = -x_1 - 10x_2 + 12$$

solución

$m=1$. Elegir $\underset{\sim}{x}=0$

$x_1^{(1)} = -0 - 10*0 + 12 = 12$

$x_2^{(1)} = -10*12 - 0 + 12 = -108$

$x_3^{(1)} = -12 - 10*(-108) + 12 = 1080$

$m=2$:

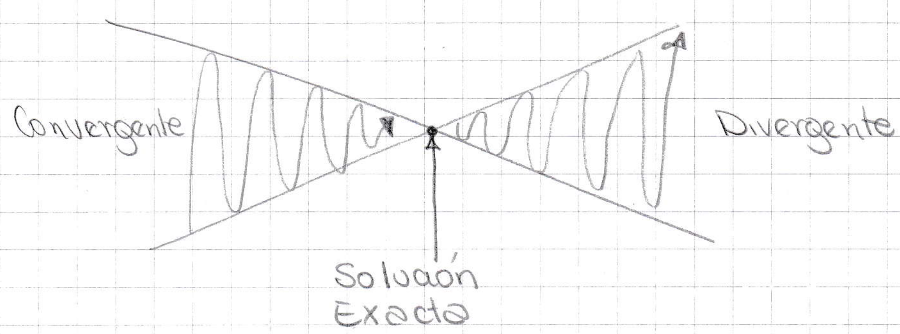
$x_1^{(2)} = -(-108) - 10(1080) + 12 = -10680$

$x_2^{(2)} = -10(-10680) - 1080 + 12 = 105732$

$x_3^{(2)} = -(-10680) - 10(105732) + 12 = -1046628$

m	$x_1^{(m)}$	$x_2^{(m)}$	$x_3^{(m)}$
0	0	0	0
1	12	-108	1080
2	-10680	105732	-1046628
3	10360560	-102558960	1015229052

ES DIVERGENTE ¡¡



Matriz Diagonalmente Dominante:

Se dice que una matriz $\underset{\sim}{A}$ $(n \times n)$ es diagonalmente dominante si los coeficientes de la diagonal principal en valor absoluto $|a_{ii}|$ son mayores a la suma de los otros coeficientes en valor absoluto de la fila correspondiente.

Es decir:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}|$$

Si en el sistema $\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$, la matriz $\underset{\sim}{A}$ es diagonalmente dominante, es "condición suficiente" para que los métodos iterativos sean convergentes.

Ejemplo.

El sistema

$$\begin{aligned}
10x_1 + x_2 + x_3 &= 12 \rightarrow 10 > 1+1 = 2 \checkmark \\
x_1 + 10x_2 + x_3 &= 12 \rightarrow 10 > 1+1 = 2 \checkmark \\
x_1 + x_2 + 10x_3 &= 12 \rightarrow 10 > 1+1 = 2 \checkmark
\end{aligned}$$

(Es diagonalmente dominante)

El sistema

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + 10x_3 &= 12 \rightarrow 1 > 1+10 = 11 \ \times \\
10x_1 + x_2 + x_3 &= 12 \rightarrow 1 > 10+1 = 11 \ \times \\
x_1 + 10x_2 + x_3 &= 12 \rightarrow 1 > 1+10 = 11 \ \times
\end{aligned}$$

(No es diagonalmente dominante)

Observación:

Antes de proceder con la solución por los metodos iterativos se deben realizar las permutaciónes de filas necesarias, para llevar $\underset{\sim}{A}$ a su forma diagonal dominante para garantizar la convergencia.

Matriz Diagonalmente Dominante:

Se dice que una matriz $\underset{\sim}{A}$ $(n \times n)$ es diagonalmente dominante si los coeficientes de la diagonal principal en valor absoluto $|a_{ii}|$ son mayores a la suma de los otros coeficientes en valor absoluto de la fila correspondiente.

Es decir:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}|$$

Si en el sistema $\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$, la matriz $\underset{\sim}{A}$ es diagonalmente dominante, es "condición suficiente" para que los métodos iterativos sean convergentes.

Ejemplo.

El sistema

$$\begin{aligned} 10x_1 + x_2 + x_3 &= 12 \rightarrow 10 > 1+1 = 2 \checkmark \\ x_1 + 10x_2 + x_3 &= 12 \rightarrow 10 > 1+1 = 2 \checkmark \\ x_1 + x_2 + 10x_3 &= 12 \rightarrow 10 > 1+1 = 2 \checkmark \end{aligned}$$

(Es diagonalmente dominante)

El sistema

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 10x_3 &= 12 \rightarrow 1 > 1+10 = 11 \quad \times \\ 10x_1 + x_2 + x_3 &= 12 \rightarrow 1 > 10+1 = 11 \quad \times \\ x_1 + 10x_2 + x_3 &= 12 \rightarrow 1 > 1+10 = 11 \quad \times \end{aligned}$$

(No es diagonalmente dominante)

Observación:

Antes de proceder con la solución por los metodos iterativos se deben realizar las permutaciónes de filas necesarias, para llevar $\underset{\sim}{A}$ a su forma diagonal dominante para garantizar la convergencia.

Mar - 18 - Oct

Ejemplo

Dado el sistema

$$
\begin{aligned}
0,135\, x_1 + 0,245\, x_2 - 0,789\, x_3 &= 2,89 \\
-30,7\, x_1 + 5,95\, x_2 + 6,57\, x_3 &= -45,0 \\
10,8\, x_1 + 18,9\, x_2 + 0,225\, x_3 &= 0,858
\end{aligned}
$$

Resolver por:

a) Gauss
b) Factorización $\underset{\sim}{LU}$
c) $\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{A}^{-1}\, b$
d) Método iterativo de Gauss- Seidel
e) Calcular el det $\underset{\sim}{A}$

Solución

Paso	A			b	I			Operaciones.
0	0,135	0,245	-0,789	2,89	1,00	0,00	0,00	f_1
	-30,7	5,95	6,57	-45,0	0,00	1,00	0,00	f_2
	10,8	18,9	0,225	0,858	0,00	0,00	1,00	f_3
1'	-30,7	5,95	6,57	-45,0	0,00	1,00	0,00	$f_1 \leftarrow f_2$
	0,135	0,245	-0,789	2,89	1,00	0,00	0,00	$f_2 \leftarrow f_1$
	10,8	18,9	0,225	0,858	0,00	0,00	1,00	f_3
1	-30,7	5,95	6,57	-45,0	0,00	1,00	0,00	f_1
	-0,00440	0,271	-0,760	2,69	1,00	0,00440	0,00	$f_2 \leftarrow f_2 - f_1\,(0,135/-30,7)$
	-0,352	21,0	2,54	-15,0	0,00	0,352	1,00	$f_3 \leftarrow f_3 - f_1\,(10,8/-30,7)$
2'	-30,7	5,95	6,57	-45,0	0,00	1,00	0,00	f_1
	-0,352	21,0	2,54	-15,0	0,00	0,352	1,00	$f_2 \leftarrow f_3$
	0,00440	0,271	-0,760	2,69	1,00	0,00440	0,00	$f_3 \leftarrow f_2$
2	-30,7	5,95	6,57	-45,0	0,00	1,00	0,00	f_1
	-0,352	21,0	2,54	-15,0	0,00	0,352	1,00	f_2
	-0,00440	0,0129	-0,793	2,88	1,00	-0,000142	-0,0129	$f_3 \leftarrow f_3 - f_2\,(0,271/21,0)$

a) Gauss:

de

f_3 : $x_3 = \dfrac{2,88}{-0,793} = -3,63$

f_2 : $x_2 = \dfrac{-15,0 - 2,54 * (-3,63)}{21,0} = -0,275$

f_1 : $x_1 = \dfrac{-45,0 - 5,95\,(-0,275) - 6,57\,(-3,63)}{-30,7} = 0,636$

Sol.

$$\underset{\sim}{x} = \begin{bmatrix} 0,636 \\ -0,275 \\ -3,63 \end{bmatrix}$$

e) determinante: $\det \underset{\sim}{A} = (-1)^2 (-30,7 * 21,0 * (-0,793)) = \underline{511}$ //

b) Factorización $\underset{\sim}{LU}$

$$L = \begin{bmatrix} 1,00 & 0,00 & 0,00 \\ -0,352 & 1,00 & 0,00 \\ -0,00440 & 0,0129 & 1,00 \end{bmatrix} ; \quad U = \begin{bmatrix} -30,7 & 5,95 & 6,57 \\ 0 & 21,0 & 2,54 \\ 0 & 0 & -0,739 \end{bmatrix}$$

de la ec. 1) $\underset{\sim}{L}\,\underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{b}^*$ → ¡es el b original + las permutaciones

$$\begin{bmatrix} 1,00 & 0,00 & 0,00 \\ -0,352 & 1,00 & 0,00 \\ -0,00440 & 0,0129 & 1,00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -45,0 \\ 0,858 \\ 2,89 \end{bmatrix}$$

→ $C_1 = -45,0$

→ $C_2 = 0,858 + 0,352(-45,0) = 15,$

→ $C_3 = 2,89 + 0,00440 * (-45,0) - 0,0129(-15,0) = 2,89$

de la 2da ec):

$$\underset{\sim}{U}\,\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{C}$$

$$\begin{bmatrix} -30,7 & 5,95 & 6,57 \\ 0 & 21,0 & 2,54 \\ 0 & 0 & -0,793 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -45,0 \\ -15,0 \\ 2,89 \end{bmatrix}$$

→ $x_1 = \dfrac{-45,0 - 5,95\,(-0,274) - 6,57 - (3,64)}{-30,7} = 0,634$

→ $x_2 = \dfrac{-15,0 - 2,54 * (-3,64)}{21,0} = -0,274 =$

→ $x_3 = \dfrac{2,89}{-0,793} = -3,64$

Sol.

$$\underset{\sim}{x} = \begin{bmatrix} 0,634 \\ -0,274 \\ -3,64 \end{bmatrix}$$

c) Inversa

1er Sistema: $\underset{\sim}{U}$ con col ① de $\underset{\sim}{W}$:

$$\begin{bmatrix} -30{,}7 & 5{,}95 & 6{,}57 \\ 0 & 21{,}0 & 2{,}54 \\ 0 & 0 & -0{,}793 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow a_{11} = -0{,}240 \\ \rightarrow a_{21} = 0{,}152 \\ \rightarrow a_{31} = -1{,}26 \end{matrix}$$

2do Sistema: $\underset{\sim}{U}$ con col. ② de $\underset{\sim}{W}$:

$$\begin{bmatrix} -30{,}7 & 5{,}95 & 6{,}57 \\ 0 & 21{,}0 & 2{,}54 \\ 0 & 0 & -0{,}793 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}352 \\ -0{,}000142 \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow a_{12} = -0{,}0293 \\ \rightarrow a_{22} = 0{,}0167 \\ \rightarrow a_{32} = 0{,}000179 \end{matrix}$$

3er Sistema: $\underset{\sim}{U}$ con col ③ de $\underset{\sim}{W}$:

$$\begin{bmatrix} -30{,}7 & 5{,}95 & 6{,}57 \\ 0 & 21{,}0 & 2{,}54 \\ 0 & 0 & -0{,}793 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -0{,}0129 \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow a_{13} = 0{,}0123 \\ \rightarrow a_{23} = 0{,}0456 \\ \rightarrow a_{33} = 0{,}0163 \end{matrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -0{,}240 & -0{,}0293 & 0{,}0123 \\ 0{,}152 & 0{,}0167 & 0{,}0456 \\ -1{,}26 & 0{,}000179 & 0{,}0163 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{A}^{-1} \cdot \underset{\sim}{b} = \begin{bmatrix} -0{,}240 & -0{,}0293 & 0{,}0123 \\ 0{,}152 & 0{,}0167 & 0{,}0456 \\ -1{,}26 & 0{,}000179 & 0{,}0163 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2{,}89 \\ -45{,}0 \\ 0{,}858 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}635 \\ -0{,}273 \\ -3{,}64 \end{bmatrix}$$

d) Gauss - Seidel: Hacer las permutaciones necesarias:

$$\begin{aligned} -30{,}7\,x_1 + 5{,}95\,x_2 + 6{,}57\,x_3 &= -45{,}0 \;; & |30{,}7| &> 5{,}95 + 6{,}57 = 12{,}52 \checkmark \\ 10{,}8\,x_1 + 18{,}9\,x_2 + 0{,}225\,x_3 &= 0{,}858 \;; & |18{,}9| &> 10{,}8 + 0{,}225 = 11{,}025 \checkmark \\ 0{,}135\,x_1 + 0{,}245\,x_2 - 0{,}789\,x_3 &= 2{,}89 \;; & |0{,}789| &> 0{,}135 + 0{,}245 = 0{,}380 \checkmark \end{aligned}$$

Se garantiza la convergencia!

$$x_1 = 0{,}194\,x_2 + 0{,}214\,x_3 + 1{,}47$$

$$x_2 = -0{,}571\,x_1 - 0{,}0119\,x_3 + 0{,}0454$$

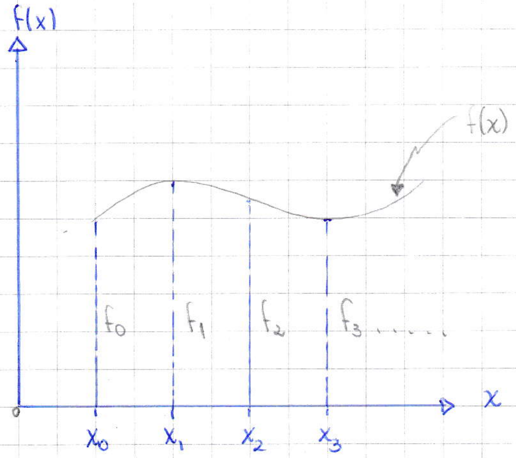
$$x_3 = 0{,}171\,x_1 + 0{,}311\,x_2 - 3{,}66$$

m	x_1^m	x_2^m	x_3^m
0	0	0	0
1	1,47	-0,794	-3,66
2	0,533	-3,93	-3,64
3	0,649	-0,282	-3,64
4	0,636	-0,274	-3,64
5	0,638	-0,276	-3,64
6	0,637	-0,275	-3,64
7	0,638	-0,276	-3,64

Jue- 20- Oct

Interpolación Polinomial:

Introducción.-



La interpolacion polinomial consiste en encontrar un único polinomio que interpole los puntos conocidos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ con la condicion que:

$$\boxed{P_n(x_i) = f(x_i)} \quad (1)$$

El mayor grado del polinomio que interpola los $n+1$ puntos conocidos $x_0, x_1, \ldots, x_n$, sera menor o igual a "n", con dos puntos:

x_0 y x_1 $\longrightarrow$ $n = 1$

con 3 puntos:

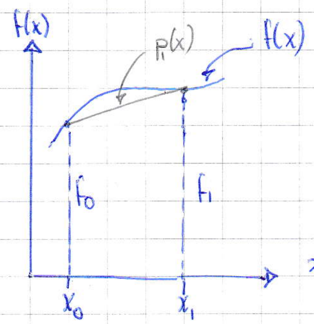
x_0, x_1 y x_2 $\longrightarrow$ $n = 2$

⋮

con $n+1$ puntos:

$x_0, x_1, \ldots, x_n$ $\longrightarrow$ grado n

Sea por ejemplo, dos puntos conocidos x_0 y x_1:



El polinomio interpola dos puntos sera de grado $n=1$ es decir una línea recta.

La ecuación general de una recta es:

$$\boxed{p_1(x) = ax + b} \quad (2)$$

donde a y b son las incógnitas que se resuelven imponiendo las condiciones:

a) $p_1(x_0) = f(x_0) = f_0$

b) $p_1(x_1) = f(x_1) = f_1$

m	x_1^m	x_2^m	x_3^m
0	0	0	0
1	1, 47	−0, 794	−3, 66
2	0, 533	−3, 93	−3, 64
3	0, 649	−0, 282	−3, 64
4	0, 636	−0, 274	−3, 64
5	0 638	−0, 276	−3, 64
6	0, 637	−0, 275	−3, 64
7	0, 638	−0, 276	−3, 64

de a): $ax_0 + b = f_0$

de b): $ax_1 + b = f_1$

haciendo b) - a): $a(x_1 - x_0) = f_1 - f_0$

$$\longrightarrow \boxed{a = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}}$$

Luego:

$$b = f_0 - ax_0 = f_0 - \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}\, x_0$$

$$b = \frac{x_1 f_0 - x_0 f_0 + x_0 f_0 - x_0 f_1}{x_1 - x_0}$$

$$\boxed{b = \frac{x_1 f_0 - x_0 f_1}{x_1 - x_0}}$$

$$\boxed{p_1(x) = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}\, x + \frac{x_1 f_0 - x_0 f_1}{x_1 - x_0}} \qquad (3)$$

Este mismo procedimiento se puede utilizar con mayor número de puntos:

N° de puntos	Grado de polinomio interpolante	N° de incógnitas	Sistema de Ecs. Lineales a resolver
2	1	2	2 x 2
3	2	3	3 x 3
4	3	4	4 x 4
⋮	⋮	⋮	⋮

Es de esperar que a medida que aumenta el grado del polinomio mayor sea el grado de dificultad para resolver el sistema de ecuaciones resultantes.

A continuación, se verán otras formas de encontrar los polinomios interpolantes sin la necesidad de resolver sistema de ecuaciones.

Polinomios Interpolantes en la Forma de Lagrange:

Reordenando los términos de la ecuación (3) para $p_1(x)$ se tiene:

$$p_1(x) = \frac{x f_1 - x f_0 + x_1 f_0 - x_0 f_1}{x_1 - x_0}$$

$$p_1(x) = \frac{(x_1 - x) f_0 + (x - x_0) f_1}{x_1 - x_0}$$

$$p_1(x) = \frac{(x_1 - x)}{(x_1 - x_0)} f_0 + \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} f_1$$

$$p_1(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} f_0 + \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} f_1$$

$$\boxed{p_1(x) = l_0 f_0 + l_1 f_1}$$

Con $l_0 = \dfrac{(x - x_1)}{(x_1 - x_0)}$

y: $l_1 = \dfrac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}$

En general, todo polinomio se puede representar como la sucesión de términos $l_K f_K$.

Por polinomios de grado $= n$

$$\boxed{p_n(x) = \sum_{K=0}^{n} l_K f_K}$$ « Polinomio Interpolante en la forma de Lagrange »

donde:

$$\boxed{l_K = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq K}}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_K - x_i)}}$$ « Función de forma de Lagrange »

Ejemplo:

Para $n=1$, son conocados x_0 y x_1:

$$p_1(x) = \sum_{k=0}^{1} l_k f_k = l_0 f_0 + l_1 f_1$$

$$l_0 = \prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{1} \frac{x - x_i}{x_0 - x_i} = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}$$

$$l_1 = \prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{1} \frac{x - x_i}{x_1 - x_i} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{p_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f_1}$$

Ejemplo:

Para $n=2$, son conocados x_0, x_1 y x_2

$$p_2(x) = \sum_{k=0}^{2} l_k f_k = l_0 f_0 + l_1 f_1 + l_2 f_2$$

$$l_0 = \prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{2} \frac{(x - x_i)}{(x_0 - x_i)} = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

$$l_1 = \prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{2} \frac{(x - x_i)}{(x_1 - x_i)} = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

$$l_2 = \prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{2} \frac{(x - x_i)}{(x_2 - x_i)} = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$p_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f_1 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f_2$$

Ejemplo.

Para $n = 3$, son conocidos x_0, x_1, x_2, x_3:

$$p_3(x) = \sum_{k=0}^{3} l_k f_k = l_0 f_0 + l_1 f_1 + l_2 f_2 + l_3 f_3$$

$$l_0 = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)}$$

$$l_1 = \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}$$

$$l_2 = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}$$

$$l_3 = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

Ejemplo:

Sea dada la tabla de valores:

	i	x_i	f_i
0,2927	0	0,1573	1,4953
0,2132	1	0,2368	1,4954
0,45	2	0,3365	1,4957
	3	0,5025	1,4977
0,2231	4	0,6731	1,5056

Determinar $f(x) = ?$ para $x = 0,45$

Utilizar polinomios interpolantes de grado:
a) $n = 1$
b) $n = 2$
c) $n = 3$.

Nota: Siempre seleccionar los puntos más cercanos al valor a interpolar.

Solución

a) $n = 1$
$$\begin{cases} x_0 = 0,3365 \; ; & f_0 = 1,4957 \\ x_1 = 0,5025 \; ; & f_1 = 1,4977 \end{cases}$$

$$p_1(x) = l_0 f_0 + l_1 f_1$$

$$l_0 = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} = \frac{0,45 - 0,5025}{0,3365 - 0,5025} = 0,3163$$

$$l_1 = \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} = \frac{0,45 - 0,3365}{0,5025 - 0,3365} = 0,6837$$

$$P_1(0,45) = 0,3163 * 1,4957 + 0,6837 * 1,4977$$

$$P_1(0,45) = 1,4971$$

$$\varepsilon_{v_1} = \frac{V_v - V_a}{V_v} * 100$$

(Solución Exacta.

$f(0,45) = 1,4967$)

$$\varepsilon_{v_1} = -0,0267\ \%$$

b) $n = 2$, puntos conocidos.

$x_0 = 0,2368$; $f_0 = 1,4954$

$x_1 = 0,3365$; $f_1 = 1,4957$

$x_2 = 0,5025$; $f_2 = 1,4977$

$$P_2(x) = l_0 f_0 + l_1 f_1 + l_2 f_2$$

$$l_0 = \frac{(x - x_1)\ (x - x_2)}{(x_0 - x_1)\ (x_0 - x_2)} = \frac{(0,45 - 0,3365)(0,45 - 0,5025)}{(0,2368 - 0,3365)(0,2368 - 0,5025} = -0,2249$$

$$l_1 = \frac{(x - x_0)\ (x - x_2)}{(x_1 - x_0)\ (x_1 - x_2)} = \frac{(0,45 - 0,2368)\ (0,45 - 0,5025)}{(0,3365 - 0,2368)\ (0,3368 - 0,5025)} = 0,6763$$

$$l_2 = \frac{(x - x_0)\ (x - x_1)}{(x_2 - x_0)\ (x_2 - x_1)} = \frac{(0,45 - 0,2368)\ (0,45 - 0,3365)}{(0,5025 - 0,2368)(0,5025 - 0,3365)} = 0,5486$$

$$P_2(0,45) = -0,2249 * 1,4954 + 0,6763 * 1,4957 + 0,5486 * 1,4977$$

$$P_2(0,45) = 1,4969 \qquad \varepsilon_{v_2} = -0,0134\ \%$$

c) Para $n = 3$ puntos conocidos

$x_0 = 0,2368$; $f_0 = 1,4954$

$x_1 = 0,3365$; $f_1 = 1,4957$

$x_2 = 0,5025$; $f_2 = 1,4977$

$x_3 = 0,6731$; $f_3 = 1,5056$

$$P_3(x) = l_0 f_0 + l_1 f_1 + l_2 f_2 + l_3 f_3$$ revisar !

$$l_0 = \frac{(0,45-0,3365)(0,45-0,5025)(0,45-0,6731)}{(0,2368-0,3365)(0,2368-0,5025)(0,2368-0,6731)} = -0,1150$$

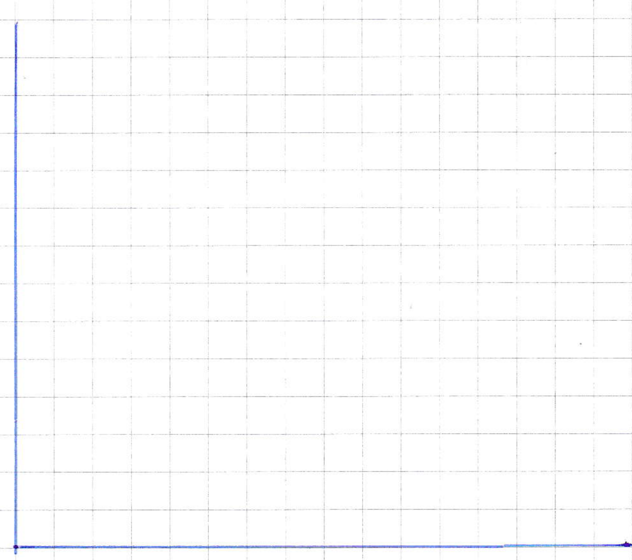
$$l_1 = \frac{(0,45-0,2368)(0,45-0,5025)(0,45-6731)}{(0,3365-0,2368)(0,3365-0,5025)(0,3365-0,6731)} = 0,4560 = 0,4483$$

$$l_2 = \frac{(0,45-0,2368)(0,45-0,3365)(0,45-0,6731)}{(0,5025-0,2368)(0,5025-0,3365)(0,5025-0,6731)} = 0,7221 = 0,7175$$

$$l_3 = \frac{(0,45-0,2368)(0,45-0,3365)(0,45-0,5025)}{(0,6731-0,2368)(0,6731-0,3365)(0,6731-0,5025)} = -0,05090 = 0,0507$$

ojo $P_3(x) = -0,1150 * 1,4954 + 0,4560 * 1,4957 + 0,7221 * 1,4977 - 0,05090 * 1,5056$

$P_3(x) = 1,4968$; $\varepsilon_{v_3} = 0,0068\ \%$



Mar-25-Oct

Polinomios Interpolantes en la Forma de Newton (Diferencias Divididas de Newton).

De manera similar a lo que se hizo con Lagrange en la deducción de la fórmula, se parte del polinomio lineal:

$$p_1(x) = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}\, x + \frac{x_1 f_0 - x_0 f_1}{x_1 - x_0}$$

reordenando términos:

$$p_1(x) = \frac{x f_1 - x f_0 + x_1 f_0 - x_0 f_1 + x_0 f_0 - x_0 f_0}{x_1 - x_0}$$

$$p_1(x) = \frac{f_0 (x_1 - x_0) + f_1 (x - x_0) + f_0 (x_0 - x)}{x_1 - x_0}$$

$$p_1(x) = \cancel{\frac{f_0 (x_1 - x_0)}{x_1 - x_0}} + \frac{f_1 (x - x_0) + f_0 (x_0 - x)}{x_1 - x_0}$$

$$\boxed{p_1(x) = f_0 + \frac{f_1 (x - x_0) + f_0 (x_0 - x)}{x_1 - x_0}} \qquad (1)$$

Introduciendo el concepto de diferencias divididas.

grado 0 $\quad f[x_0] = f_0$

grado 1 $\quad f[x_0, x_1] = \dfrac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}$

grado 2 $\quad f[x_0, x_1, x_2] = \dfrac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$

$\vdots \qquad \vdots$

$$f[x_i, x_{i+1}, \ldots\ldots, x_{j-1}, x_j] = \frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_j] - f[x_i, \ldots, x_{j-1}]}{x_j - x_i}$$

x_i = 1er punto

x_{i+1} = 2do punto

$\vdots$

x_{j-1} = penúltimo punto

x_j = último punto

De manera que la ec (1) se la puede escribir como:

$$\boxed{p_1(x) = f_0 + f[x_0, x_1](x - x_0)}$$

Para $n = 2$.

$$p_2 x = f_0 + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

$$\vdots$$

En general, un polinomio interpolante en la forma de Newton de n-ésimo grado

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f[x_0, x_1, x_2, \ldots\ldots, x_i] * \prod_{j=0}^{i-1}(x - x_j)$$

Con la convención productoria.

$$\prod_{i=m}^{n} a_i = \begin{cases} a_m * a_{m+1} * \ldots\ldots * a_n & \text{si} \quad n \geq m \\ 1 & \text{si} \quad n < m \end{cases}$$

Ejemplo.

Determinar el polinomio interpolante en la forma de Newton de 3er grado.
Son conocidos: x_0, x_1, x_2 y x_3 (4 puntos)

$$p_3(x) = f_0 + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) +$$
$$f_0[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

donde.

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$$

$$\boxed{f[x_0, x_1, x_2] = \frac{\dfrac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} - \dfrac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}}$$

de manera similar

$$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1} = \frac{\frac{f_3 - f_2}{x_3 - x_2} - \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1}}{x_3 - x_1}$$

finitamente

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0}$$

(Ej.:) (Dado) Nota: En Newton, cada nuevo punto que se incorpore se lo debe colocar a la cola.

Ejemplo:

Dado la tabla de valores.

i	x_i	f_i
0	1,2056	1,3847
1	1,4629	1,4942
2	1,6048	1,5556
3	1,6775	1,5872
4	1,8380	1,6570

0,1871

1,65

0,1880

Calcular $f(x) = ?$ para $x = 1,65$

Utilizar polinomios de Newton y Lagrange de grado

a) $n = 1$
b) $n = 2$
c) $n = 3$

Solución Exacta

$f(1,65) = 1,5752$

Solución

a) $n = 1$ $\begin{cases} x_0 = 1,6048 \; ; & f_0 = 1,5556 \\ x_1 = 1,6775 \; ; & f_1 = 1,5872 \end{cases}$

Newton: $p_1(x) = f_0 + f[x_0, x_1](x - x_0)$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} = \frac{1,5872 - 1,5556}{1,6775 - 1,6048} = 0,4347$$

$$p_1(1,65) = 1,5556 + (0,4347)(1,65 - 1,6048)$$

$$p_1(1,65) = 1,5752 \quad ; \quad \varepsilon_1 = 0\%$$

Lagrange: $p_1(x) = l_0 f_0 + l_1 f_1$ $\begin{cases} x_0 = 1,6048 & f_0 = 1,5556 \\ x_1 = 1,6775 & f_1 = 1,5872 \end{cases}$

$$l_0 = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{1,65 - 1,6775}{1,6048 - 1,6775} = 0,3783$$

~~No~~ $$l_1 = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{1,65 - 1,6048}{1,6775 - 1,6048} = 0,6217$$

$p_1(1,65) = 0,3783 * 1,5556 + 0,6217 * 1,5872$

$p_1(1,65) = 1,5752$ $\qquad E_1 = 0\%$

b) $n = 2$

Newton : $\begin{cases} x_0 = 1,6048 \ ; & f_0 = 1,5556 \\ x_1 = 1,6775 \ ; & f_1 = 1,5872 \\ x_2 = 1,4629 \ ; & f_2 = 1,4942 \end{cases}$

$$p_2(x) = f_0 + f[x_0,x_1](x-x_0) + \underbrace{f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)}_{2^\circ \text{ grado}}$$

$$f[x_0,x_1,x_2] = \frac{f[x_1,x_2] - f[x_0,x_1]}{x_2 - x_0}$$

$$f[x_1,x_2] = \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} = \frac{1,4942 - 1,5872}{1,4629 - 1,6772} = 0,4339$$

$$f[x_0,x_1,x_2] = \frac{0,4339 - 0,4347}{1,4629 - 1,6048} = 0,0092$$

$$p_2(1,65) = 1,5752 + 0,0092\,(1,65 - 1,6048)(1,65 - 1,6775)$$

$p_2(1,65) = 1,5752$ $\qquad E_2 = 0\%$

Lagrange $\begin{cases} x_0 = 1,4629 & f_0 = 1,4942 \\ x_1 = 1,6048 & f_1 = 1,5556 \\ x_2 = 1,6775 & f_2 = 1,5872 \end{cases}$

$$p_2(x) = l_0 f_0 + l_1 f_1 + l_2 f_2$$

$$l_0 = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(1,65 - 1,6048)(1,65 - 1,6775)}{(1,4629 - 1,6048)(1,4629 - 1,6775)} = -0,0408$$

$$l_1 = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(1,65 - 1,4629)(1,65 - 1,6775)}{(1,6048 - 1,4629)(1,6048 - 1,6775)} = 0,4988$$

$$l_2 = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(1,65 - 1,4629)(1,65 - 1,6048)}{(1,6772 - 1,4629)(1,6772 - 1,6048)} = 0,5421$$

$p_2(1,65) = -0,0408 * 1,4942 + 0,4988 * 1,5556 + 0,5421 * 1,5872$

$p_2(1,65) = 1,5754$ $\qquad E_2 =$

c) $n=3$

Newton
$$\begin{cases} x_0 = 1{,}6048 & f_0 = 1{,}5556 \\ x_1 = 1{,}6775 & f_1 = 1{,}5872 \\ x_2 = 1{,}4629 & f_2 = 1{,}4942 \\ x_3 = 1{,}8380 & f_3 = 1{,}6570 \end{cases}$$

$$P_3(x) = f_0 + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) +$$
$$f[x_0\ x_1\ x_2\ x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

Jue- 27- Oct.

Ejemplo

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 K \cos^2 K}}$$

con K (radianes) en grados y x en radianes. Se requiere saber el valor de la integral para $K = 6°$

Pero en vez de integrar la función original $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 K \cos^2 K}}$ utilizar una función aproximada. (Un polinomio interpolante) para resolver la integral.

Utilizar un polinomio interpolante de 2° grado en la forma de Newton:

$$P_2(x) = f(x)$$

$$P_2(x) = f_0 + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

Para un polinomio de 2° grado se necesitan 3 puntos $\left.\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_1 = \pi/4 \\ x_2 = \pi/2 \end{array}\right\}$

i	x_i	$f(x)$
0	0	1,0055
1	$\pi/4$	1,0027
2	$\pi/2$	1,0000

$$f[x_0, x_1] = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} = \frac{1{,}0027 - 1{,}0055}{\pi/4 - 0} = -0{,}0035651$$

$$f[x_1, x_2] = \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} = \frac{1{,}0000 - 1{,}0027}{\pi/2 - \pi/4} = -0{,}0034377$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{-0{,}0034377 + 0{,}0035651}{\pi/2 - 0}$$

$$= 0{,}000081105$$

$$P_2(x) = 1{,}0055 + (-0{,}0035651 * (x - 0)) + (0{,}000081105 * (x - 0) * (x - \pi/4))$$

$$= 0{,}000081105\, x^2 - 0{,}0036288\, x + 1{,}0055$$

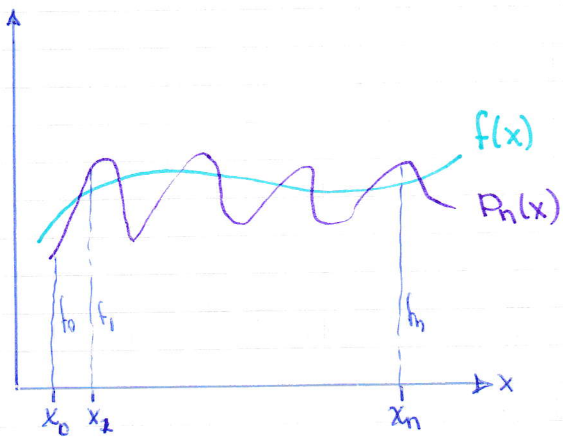
$$I = \int_0^{\pi/2} f(x)\, dx = \int_0^{\pi/2} P_2(x)\, dx = \int_0^{\pi/2} (0{,}000081105\, x^2 - 0{,}0036288\, x + 1{,}0055)\, dx$$

$$= \left(\frac{0{,}000081105\, x^3}{3} - \frac{0{,}0036288\, x^2}{2} + \frac{1{,}0055\, x}{1} \right) \Big|_0^{\pi/2}$$

$$I = 1{,}5751$$

Interpolación Segmentaria: (Spline)

Cuando se tiene una gran cantidad de puntos conocidos $x_0, x_1, \dots, x_n$ no es buena idea interpolarlos todos con un único polinomio debido a que los polinomios de alto grado pueden ser inestables entre punto y punto y la interpolación no se ofrece resultados confiables.



La alternativa es agrupar los puntos de 2 o 3 puntos, de manera que cada grupo de puntos se los interpola con polinomios simples, lineales, cuadráticos etc.

Para realizar la interpolación en el punto x_K, se ubica en cuál de los grupos de puntos se encuentra y luego se realiza la interpolación con ese grado de puntos.

Ejemplo.

Dada la tabla de valores.

	i	x_i	f_i
	0	1,31	0,93
	1	1,38	1,78
	2	1,42	2,45
0,03	3	1,47	3,95
	4	1,49	5,07
1,5			
	5	1,54	8,38
0,09	6	1,59	12,41
	7	1,65	19,65
	8	1,71	25,40
	9	1,79	32,80
	10	1,86	39,23
	⋮		

Calcular $f(x) = ?$ en $x = 1,5$

Utilizando el unico polinomio de 2° grado en:

a) Lagrange

b) Newton

Solución: (2 decimales).

i	x_i	f_i
0	1,47	3,95
1	1,49	5,07
2	1,54	8,38

a) Lagrange $P_2(x) = l_0 f_0 + l_1 f_1 + l_2 f_2$

$$l_0 = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(1{,}5-1{,}49)(1{,}5-1{,}54)}{(1{,}47-1{,}49)(1{,}47-1{,}54)} = -0{,}29$$

$$l_1 = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(1{,}5-1{,}47)(1{,}5-1{,}54)}{(1{,}49-1{,}47)(1{,}49-1{,}54)} = 1{,}20$$

$$l_2 = \frac{(x-x_1)(x-x_0)}{(x_2-x_1)(x_2-x_0)} = \frac{(1{,}5-1{,}49)(1{,}5-1{,}47)}{(1{,}54-1{,}49)(1{,}54-1{,}47)} = 0{,}09$$

$$P_2(x) = (-0{,}29 * 3{,}95) + (1{,}20 * 5{,}07) + (0{,}09 * 8{,}38) = 5{,}69 //$$

b) Newton $P_2(x) = f_0 + f[x_0 x_1] \cdot (x-x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x-x_0)(x-x_1)$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} = \frac{5{,}07 - 3{,}95}{1{,}49 - 1{,}47} = 56{,}00$$

$$f[x_1, x_2] = \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} = \frac{8{,}38 - 5{,}07}{1{,}54 - 1{,}49} = 66{,}20$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] f[x_0 x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{(66{,}20)(56{,}00)}{1{,}54 - 1{,}47} = 145{,}71$$

$$P_2(1{,}5) = 3{,}95 + (56(1{,}5-1{,}47)) + (66{,}20(1{,}5-1{,}47)(1{,}5-1{,}49)) = 5{,}67 //$$

Práctico

1) Dado el sistema

$$3,21\ x_1 + 15,9\ x_2 - 0,951\ x_3 = 25,5$$

$$15,5\ x_1 + 3,49\ x_2 - 37,8\ x_3 = -49,8$$

$$0,873\ x_1 + 0,143\ x_2 - 0,337\ x_3 = 15,4$$

a) Resolver por Gauss
b) Resolver por Factorización $\underset{\sim}{LU}$
c) Calcular $\underset{\sim}{A}^{-1}$
d) Calcular det $\underset{\sim}{A}$
e) Resolver por Gauss-Seidel

2) Dado la tabla de valores

i	x_i	f_i
0	1,3345	1,4025
1	1,4823	1,8033
2	1,5275	2,2507
3	1,5963	4,1921
4	1,6687	8,2043
5	1,7543	19,7581

0,0677
1,55
0,1187

Calcular $f(x) = ?$ para $x = 1,55$.

Utilizar polinomios interpolantes de 2do grado, en la forma de.

a) Lagrange
b) Newton

3) Dado la tabla de valores

i	x_i	f_i
0	1,0533	1,3367
1	1,1749	1,9543
2	1,2863	2,2785
3	1,3625	3,4276
4	1,4289	4,9981
5	1,5665	6,2067

0,1137
1,40
0,1665

Determinar $f(x) = ?$ para $x = 1,40$

Utilizar polinomios de 2° grado en la forma de.

a) Lagrange
b) Newton

Soluciones

Paso	$\underset{\sim}{A}$			$\underset{\sim}{b}$	$\underset{\sim}{I}$			Operaciones
0	3,21	15,9	-0,951	25,5	1,00	0,00	0,00	f_1
	15,5	3,49	-37,8	-49,8	0,00	1,00	0,00	f_2
	0,873	0,143	-0,337	15,4	0,00	0,00	1,00	f_3
1'	15,5	3,49	-37,8	-49,8	0,00	1,00	0,00	$f_1 \leftarrow f_2$
	3,21	15,9	-0,951	25,5	1,00	0,00	0,00	$f_2 \leftarrow f_1$
	0,873	0,143	-0,337	15,4	0,00	0,00	1,00	f_3
1	15,5	3,49	-37,8	-49,8	0,00	1,00	0,00	f_1
	0,207	15,2	6,88	35,8	1,00	-0,207	0,00	$f_2 \leftarrow f_2 - f_1\,(3{,}21/15{,}5)$
	0,0563	-0,0536	1,79	18,2	0,00	-0,0536	1,00	$f_3 \leftarrow f_3 - f_1\,(0{,}873/15{,}5)$
2	15,5	3,49	-37,8	-49,8	0,00	1,00	0,00	f_1
	0,207	15,2	6,88	35,8	1,00	-0,207	0,00	f_2
	0,0563	0,00353	1,81	18,3	0,00353	-0,0570	1,00	$f_3 \leftarrow f_3 - f_2\,(-0{,}0536/15{,}2)$

a) Gauss

$$x_3 = \frac{18{,}3}{1{,}81} = 10{,}1$$

$$x_2 = \frac{35{,}8 - 6{,}88 * 10{,}1}{15{,}2} = 2{,}22$$

$$x_1 = \frac{49{,}8 + 37{,}8 * 10{,}1 - 3{,}19 * 2{,}22}{15{,}5} = 21{,}9$$

b) Factorización $\underset{\sim}{L}\underset{\sim}{U}$

$$\underset{\sim}{L} = \begin{bmatrix} 1{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 \\ 0{,}207 & 1{,}00 & 0{,}00 \\ 0{,}0563 & 0{,}00353 & 1{,}00 \end{bmatrix} ; \quad \underset{\sim}{U} = \begin{bmatrix} 15{,}5 & 3{,}49 & -37{,}8 \\ 0 & 15{,}2 & 6{,}88 \\ 0 & 0 & 1{,}81 \end{bmatrix}$$

1) $\underset{\sim}{L}\,\underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{b}^*$

$$\begin{bmatrix} 1{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 \\ 0{,}207 & 1{,}00 & 0{,}00 \\ 0{,}0563 & 0{,}00353 & 1{,}00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -49{,}8 \\ 25{,}5 \\ 15{,}4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow C_1 = -49{,}8 \\ \rightarrow C_2 = 25{,}5 - 0{,}207\,(-49{,}8) = 35{,}8 \\ \rightarrow C_3 = 15{,}4 - 0{,}0563 * (-49{,}8) - 0{,}00353\,(15{,}4) = 18{,}2 \end{matrix}$$

2) $\underset{\sim}{U}\,\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{C}$

$$\begin{bmatrix} 15{,}5 & 3{,}49 & -37{,}8 \\ 0 & 15{,}2 & 6{,}88 \\ 0 & 0 & 1{,}81 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -49{,}8 \\ 35{,}8 \\ 18{,}2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow x_1 = \frac{-49{,}8 - 3{,}49\,(-2{,}22) + 37{,}8\,(10{,}1)}{15{,}5} = 21{,}9$$

$$\rightarrow x_2 = \frac{35{,}8 - 6{,}88\,(10{,}1)}{15{,}2} = -2{,}22$$

$$\rightarrow x_3 = \frac{18{,}2}{1{,}81} = 10{,}1$$

c) A^{-1} :

1er Sistema:

$$\underset{\sim}{U}\, a_{i1} = \underset{\sim}{W}_{i1} \rightarrow a_{i1} = \begin{bmatrix} -0{,}00986 \\ 0{,}0649 \\ 0{,}00195 \end{bmatrix}$$

2do Sistema:

$$\underset{\sim}{U}\, a_{i2} = \underset{\sim}{W}_{i2} \rightarrow a_{i2} = \begin{bmatrix} -0{,}0124 \\ 0{,}000639 \\ -0{,}0315 \end{bmatrix}$$

3er Sistema

$$\underset{\sim}{U}\, a_{i3} = W_{i3} \rightarrow a_{i3} = \begin{bmatrix} 1{,}40 \\ -0{,}250 \\ 0{,}552 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} -0{,}00986 & -0{,}0124 & 1{,}40 \\ 0{,}0649 & 0{,}000639 & -0{,}250 \\ 0{,}00195 & -0{,}0315 & 0{,}552 \end{bmatrix}$$

d) $\det \underset{\sim}{A} = (-1)^1 (15{,}5 * 15{,}2 * 1{,}81)$

$$\underline{\det A = -426}$$

e) Gauss- Seidel.

Reordenando filas:

$$\begin{aligned} 0{,}873\, x_1 + 0{,}143\, x_2 - 0{,}337\, x_3 &= 15{,}4 \\ 3{,}21\, x_1 + 15{,}9\, x_2 - 0{,}951\, x_3 &= 25{,}5 \\ 15{,}5\, x_1 + 3{,}49\, x_2 - 37{,}8\, x_3 &= -49{,}8 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= -0{,}164\, x_2 + 0{,}386\, x_3 + 17{,}6 \\ x_2 &= -0{,}202\, x_1 + 0{,}0598\, x_3 + 1{,}60 \\ x_3 &= 0{,}410\, x_1 + 0{,}0923\, x_2 + 1{,}32 \end{aligned}$$

m	$x_1^{(m)}$	$x_2^{(m)}$	$x_3^{(m)}$
0	0	0	0
1	17,6	-1,96	8,36
2	21,1	-2,16	9,77
3	21,7	-2,20	10,0
4	21,8	-2,21	10,1
5	21,9	-2,22	10,1
6	21,9	-2,22	10,1

2) $n = 2.$

a) $x_0 = 1,4823$ $\quad f_0 = 1,8033$

$x_1 = 1,5275$ $\quad f_1 = 2,2507$ $\quad$ Lagrange

$x_2 = 1,5963$ $\quad f_2 = 4,1921$

$$p_2(x) = l_0 f_0 + l_1 f_1 + l_2 f_2$$

$$l_0 = \frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}\frac{(x-x_2)}{(x_0-x_2)} = \frac{(1,55-1,5275)\ (1,55-1,5963)}{(1,4823-1,5275)\ (1,4823-1,5963)} = -0,2022$$

$$l_1 = \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}\frac{(x-x_2)}{(x_1-x_2)} = \frac{(1,55-1,4823)\ (1,55-1,5963)}{(1,5275-1,4823)\ (1,5275,\ 1,5963)} = 1,008$$

$$l_2 = \frac{(x-x_0)}{(x_2-x_0)}\frac{(x-x_1)}{(x_2-x_1)} = \frac{(1,55-1,4823)\ (1,55-1,5275)}{(1,5963-1,4823)\ (1,5963-1,5275)} = 0,1942$$

$$p(1,55) = (-0,2022)(1,8033) + (1,008)(2,2507) + (0,1942)(4,1921)$$

$$p(1,55) = 2,7182$$

b)

$x_0 = 1,5275$ $\quad f_0 = 2,2507$

$x_1 = 1,5963$ $\quad f_1 = 4,1921$ $\quad$ Newton

$x_2 = 1,4823$ $\quad f_2 = 1,8033$

$$p_2(x) = f_0 + f[x_0,x_1]\ (x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2]\ (x-x_0)\ (x-x_1)$$

$$f[x_0,x_1] = \frac{f_1-f_0}{x_1-x_0} = \frac{4,1921-2,2507}{1,5963-1,5275} = 28,22$$

$$f[x_0,x_1,x_2] = \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0} = \frac{20,95-28,22}{1,4823-1,5275} = 160,8$$

$$f[x_1,x_2] = \frac{f_2-f_1}{x_2-x_1} = \frac{1,8033-4,1921}{1,4823-1,5963} = 20,95$$

$$p_2(1,55) = 2,2507 + 28,22\ (1,55-1,5275) + 160,8\ (1,55-1,5275)\ (1,55-1,5963)$$

$$p_2(1,55) = 2,7181$$

3)

a) Lagrange

$$\begin{cases} & 1{,}40 \quad A \\ x_0 = 1{,}2863 \; B; & f_0 = 2{,}2785 \\ x_1 = 1{,}3625 \; C; & f_1 = 3{,}4276 \\ x_2 = 1{,}4289 \; D; & f_2 = 4{,}9981 \end{cases}$$

$$P_2(x) = l_0 f_0 + l_1 f_1 + l_2 f_2$$

$$l_0 = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(1{,}40-1{,}3625)(1{,}40-1{,}4289)}{(1{,}2863-1{,}3625)(1{,}2863-1{,}4289)} = -0{,}0997$$

$$l_1 = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(1{,}40-1{,}2863)(1{,}40-1{,}4289)}{(1{,}3625-1{,}2863)(1{,}3625-1{,}4289)} = 0{,}6494$$

$$l_2 = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(1{,}40-1{,}2863)(1{,}40-1{,}3625)}{(1{,}4289-1{,}2863)(1{,}4289-1{,}3625)} = 0{,}4503$$

$$P_2(1{,}40) = (-0{,}0997 * 2{,}2785) + (0{,}6494 * 3{,}4276) + (1{,}4289 * 4{,}9981) = \underline{4{,}2494}$$

b) Newton. $P_2(x) = f_0 + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)$

$x_0 = 1{,}3625 \quad f_0 = 3{,}4276$
$x_1 = 1{,}4289 \quad f_1 = 4{,}9981$
$x_2 = 1{,}2863 \quad f_2 = 2{,}2785$

$$f[x_0,x_1] = \frac{f_1-f_0}{x_1-x_0} = \frac{4{,}9981-3{,}4276}{1{,}4289-1{,}3625} = 23{,}65$$

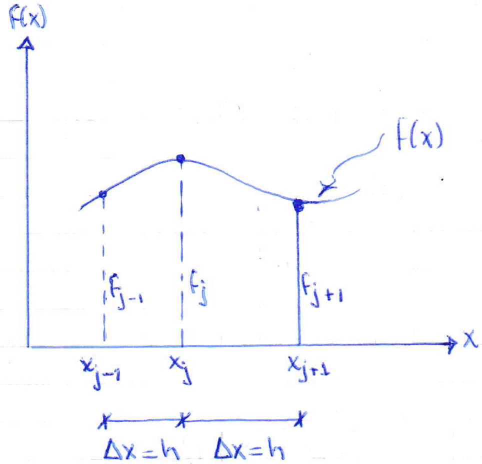
$$f[x_1,x_2] = \frac{f_2-f_1}{x_2-x_1} = 2{,}2785-4{,}99$$

Jue- 10-Nov

Derivada Númerica:

La obtencion de fórmulas sencillas para la derivación númerica, se lo puede hacer mediante la derivación de polinomios interpolantes.

Sea, por ejemplo:



Cuyo polinomio interpolante en la forma de Lagrange de 2do grado es:

$$f(x) = f_{j-1}\frac{(x-x_j)(x-x_{j+1})}{(x_{j-1}-x_j)(x_{j-1}-x_j+1)} + f_j\frac{(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})}{(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})} + f_{j+1}\frac{(x-x_{j-1})(x-x_j)}{(x_{j+1}-x_{j-1})(x_{j+1}-x_j)}$$

tal que:

$$x_j - x_{j-1} = h$$

$$x_{j+1} - x_j = h$$

$$x_{j+1} - x_{j-1} = 2h$$

Luego:

$$f(x) = \frac{f_{j-1}}{2h^2}(x-x_j)(x-x_{j+1}) + \frac{f_j}{(-h^2)}(x-x_{j-1})(x-x_{j+1}) + \frac{f_{j+1}}{2h^2}(x-x_{j-1})(x-x_j) \quad (1)$$

Derivando una vez:

$$f'(x) = \frac{f_{j-1}}{2h^2}(2x-x_j-x_{j+1}) - \frac{f_j}{h^2}(2x-x_{j-1}-x_{j+1}) + \frac{f_{j+1}}{2h^2}(2x-x_{j-1}-x_j) \quad (2)$$

La expresión (2) se puede calcular en cualquiera de los 3 puntos dados (x_{j-1}, x_j, x_{j+1}) y se obtendran 3 fórmulas diferentes para evaluar la primer derivada de $f(x)$, siendo la que mejor aproximación dá, en el punto central x_j:

$$f'(x_j) = \frac{f_{j-1}}{2h^2}(2x_j - x_j - x_{j+1}) - \frac{f_j}{h^2}(2x_j - x_{j-1} - x_{j+1})$$

$$+ \frac{f_{j+1}}{2h^2}(2x_j - x_{j-1} - x_j).$$

$$f'(x_j) = \frac{f_{j-1}}{2h^2}(x_j - x_{j+1}) - \frac{f_j}{h^2}\left[(x_j - x_{j-1}) + (x_j - x_{j+1})\right] + \frac{f_{j+1}}{2h^2}(x_j - x_{j-1})$$

$$f'(x_j) = \frac{f_{j-1}}{2h^2}(-h) - \frac{f_j}{h^2}\cancelto{0}{(h + (-h))} + \frac{f_{j+1}}{2h^2}(h)$$

$$\rightarrow \boxed{f'_j = \frac{1}{2h}(-f_{j-1} + f_{j+1})}$$

"Fórmula para la 1er derivada númerica central"

con $f'_j = f'(x_j)$; $f_{j-1} = f(x_{j-1})$; $f_j = f(x_j)$ y $f_{j+1} = f(x_{j+1})$

h es un valor dado.

Derivando nuevamente (2):

$$f''(x) = \frac{f_{j-1}}{\cancel{2}h^2}\cancel{(2)} - \frac{f_j}{h^2}(2) + \frac{f_{j+1}}{\cancel{2}h^2}\cancel{(2)} = \text{constante}$$

$$f''(x) = \frac{1}{h^2}(f_{j-1} - 2f_j + f_{j+1})$$

La fórmula así obtenida es valida para cualquiera de los puntos dados. Sin embargo solo tendra buena aproximación en el punto central:

$$\Rightarrow \boxed{f''_j = \frac{1}{h^2}(f_{j-1} - 2f_j - f_{j+1})}$$

«2da derivada numerica central»

Ejemplo: Calcular la 1ra. y 2da derivadas de:

$f(x) = \text{sen } x$ en $x = 0{,}6$ rad.

a) Analíticamente

b) Numéricamente con $h = 0{,}1$ comparar

Solución

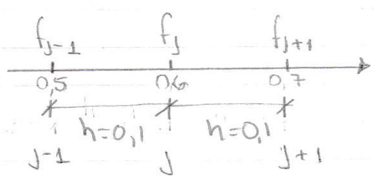
a) Analítica:

$f(x) = \text{sen } x$

$f'(x) = \cos x$; $f'(0{,}6) = \cos(0{,}6) = 0{,}8253$

$f''(x) = -\text{sen } x$; $f''(0{,}6) = -\text{sen}(0{,}6) = -0{,}5646$

b) Numérica: $(h = 0{,}1)$



	x_j	$f_j = \text{sen}(x_j)$
j-1	0,5	0,4794
j	0,6	0,5646
j+1	0,7	0,6442

1er derivada.

$$f'_j = \frac{1}{2h}\left(-f_{j-1} + f_{j+1}\right)$$

$$f'_{j=0,6} = \frac{1}{2 * 0{,}1}\left(-0{,}4794 + 0{,}6442\right)$$

$$\boxed{f'_{j=0,6} = 0{,}8240} \qquad \mathcal{E}_1 = 0{,}16\ \%$$

2da derivada.

$$f''_j = \frac{1}{h^2}\left(f_{j-1} - 2f_j + f_{j+1}\right)$$

$$f''_{j=0,6} = \frac{1}{0{,}1^2}\left(0{,}4794 - 2 * 0{,}5646 + 0{,}6442\right)$$

$$f''_{j=0,6} = -0{,}5600 \qquad \mathcal{E}_2 = 0{,}81\ \%$$

Ejemplo:

Calcular la 1er y 2da derivadas de:

$f(x) = \dfrac{1}{x}$ en $x = 0,85$

a) Analiticamente
b) Numericamente con $h = 0,05$ (trabajar con 6 decimales)

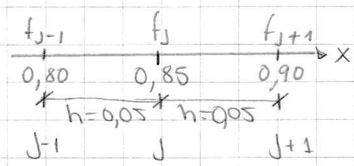
Solución
a) Analitica

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} = \frac{-1}{(0,85)^2} = -1,384083$$

$$f''(x) = \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3} = \frac{2}{(0,85)^3} = 3,256666$$

b) Numérica



	x_j	$f_j = 1/x$
J-1	0,8	1,25
J	0,85	1,176471
J+1	0,9	1,111111

1er derivada

$$f'_j = \frac{1}{2h}\left(-f_{j-1} + f_{j+1}\right)$$

$$f'_{j=0,85} = \frac{1}{2(0,05)}\left(-1,25 + 1,111111\right)$$

$$f'_{j=0,85} = -1,388890 \qquad \mathcal{E}_1 = 0,35\ \%$$

2da derivada

$$f''_{j=0,85} = \frac{1}{h^2}\left(f_{j-1} - 2f_j + f_{j+1}\right)$$

$$f''_{j=0,85} = \frac{1}{(0,05)^2}\left(1,25 - (2 * 1,176471) + 1,111111\right)$$

$$f''_{j=0,85} = 3,267600 \qquad \mathcal{E}_2 = 0,34\ \%$$

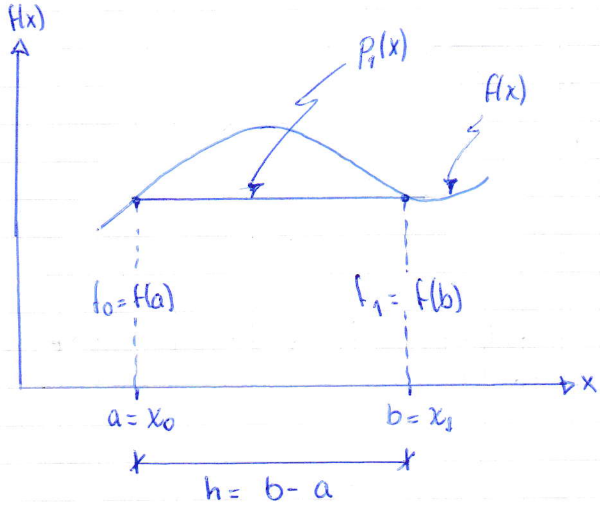
Integración Numérica.

Metodo de Gauss - Cotes:

Consiste en Determinar fórmulas sencillas para la integración numérica por medio de la ingración de polinomios interpolantes.

Regla del Trapecio:

Sea el polinomio interpolante lineal $(n=1)$:



$$p_1(x) = \frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)} f_0 + \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)} f_1 = \underline{\frac{1}{-h}(x-x_1) f_0 + \frac{1}{h}(x-x_0) f_1}$$

$$\therefore \quad I = \int_a^b f(x)\,dx = \int_{a=x_0}^{b=x_1} p_1(x)\,dx = \int_{x_0}^{x}\left[-\frac{1}{h}(x-x_1)f_0 + \frac{1}{h}(x-x_0)f_1\right]dx$$

$$I = -\frac{1}{2h}(x-x_1)^2 f_0 + \frac{1}{2h}(x-x_0)^2 f_1 \Bigg|_{x_0}^{x_1}$$

$$I = -\frac{1}{2h}\underbrace{(x_1-x_1)^2}_{0} + \frac{1}{2h}(x_1-x_0)^2 f_1 - \left[-\frac{1}{2h}(x_0-x_1)^2 f_0 + \frac{1}{2h}\underbrace{(x_0-x_0)^2}_{0} f_1\right]$$

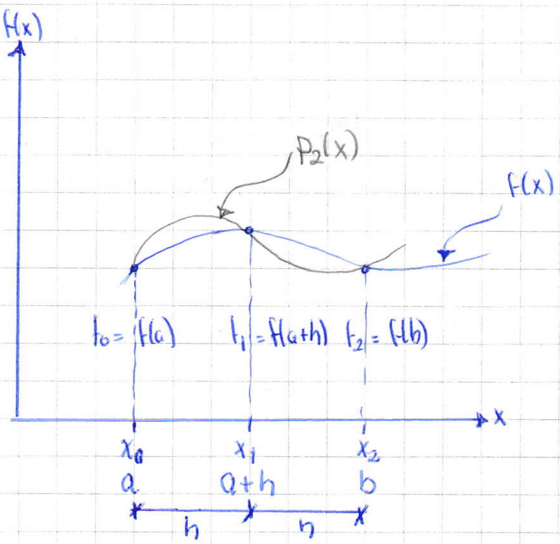
$$I = \frac{1}{2h}(h)^2 f_1 + \frac{1}{2h}(-h)^2 f_0 = \frac{1}{2}h f_1 + \frac{1}{2} h f_0$$

$$\rightarrow I = \frac{h}{2}(f_0 + f_1) = \frac{(b-a)}{2}\left(f(a) + f(b)\right)$$

"Regla del trapecio"

Regla de Simpson: Si

Si ahora se utiliza un polinomio interpolante de 2do grado. $(n=2)$



$$h = \frac{b-a}{2}$$

$$p_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f_1 + \frac{(x-x_1)(x-x_0)}{(x_2-x_1)(x_2-x_0)} f_2$$

con:
$$x_1 - x_0 = h$$
$$x_2 - x_1 = h$$
$$x_2 - x_0 = h$$

$$\rightarrow p_2(x) = \frac{f_0}{2h^2}(x-x_1)(x-x_2) + \frac{f_1}{-h^2}(x-x_0)(x-x_2) + \frac{f_2}{2h^2}(x-x_0)(x-x_1)$$

tal que:

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_{x_0=a}^{x_2=b} p_2(x)dx = \int_{x_0}^{x_2}\left[\frac{f_0}{2h^2}(x-x_1)(x-x_2) - \frac{f_1}{h^2}(x-x_0)(x-x_2) + \frac{f_2}{2h^2}(x-x_0)(x-x_1)\right]dx$$

Resolviendo la integral y realizando las simplificaciones necesarias, finalmente se obtiene:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2)$$ "Regla de Simpson"

con: $h = \frac{b-a}{2}$

$x_0 = a$; $f_0 = f(a)$
$x_1 = a+h$; $f_1 = f(a+h)$
$x_2 = b$; $f_2 = f(b)$

Por esta vía, cada vez es más difícil encontrar fórmulas sencillas.

Otra alternativa, es utilizar la propiedad de las integrales;

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0=a}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \ldots\ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n=b} f(x)\,dx$$

y cada una de las subintegrales resolverlas numericamente por las fórmulas ya determinadas.

Regla compuesta del trapecio:

Utilizando la regla del trapecio para calcular cada subintegral se tiene:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{h}{2}(f_0 + f_1) + \frac{h}{2}(f_1 + f_2) + \ldots\ldots + \frac{h}{2}(f_{n-1} + f_n)$$

$$\rightarrow \boxed{I = \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \ldots\ldots + 2f_{n-1} + f_n)}$$

donde: $h = \frac{b-a}{n}$; n es cualquier entero > 1

$$\begin{aligned} x_0 &= a & ;\quad f_0 &= f(a) \\ x_1 &= a + h & ;\quad f_1 &= f(a+h) \\ x_2 &= a + 2h & ;\quad f_2 &= f(a+2h) \\ &\vdots & &\vdots \\ x_n &= b & ;\quad f_n &= f(b) \end{aligned}$$

Cronograma:

Examen final : Martes 6 de diciembre

Exposiciones : 22 y 24 de noviembre

Examen practico: 1 de diciembre

Regla compuesta de Simpson:

Utilizando la regla de simpson para calcular numéricamente cada subintegral, se obtiene:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \int_{a=x_0}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx + \ldots\ldots + \int_{x_{n-2}}^{x_n=b} f(x)\,dx$$

$$I = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) + \frac{h}{3}(f_2 + 4f_3 + f_4) + \ldots\ldots + \frac{h}{3}(f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n)$$

$$\boxed{I = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) + \ldots\ldots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n}$$

$h = \frac{b-a}{n}$ con "n" cualquier "entero par" > 2

$x_0 = a$; $f_0 = f(a)$
$x_1 = a + h$; $f_1 = f(a+h)$
$x_2 = a + 2h$; $f_2 = f(a+2h)$
$\vdots$; $\vdots$
$x_n = b$; $f_n = f(b)$

Ejemplo: Dada la integral

$$I = \int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx$$

Resolver

a) Analíticamente

Numéricamente por:

b) Regla del trapecio

c) Regla de Simpson

d) Regla compuesta del trapecio con $n = 4$

e) Regla compuesta de Simpson con $n = 4$

Solución

a) Analíticamente

$$I = \int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx = \ln(x+1)\Big|_0^1 = \ln(2) = 0,6931$$

Solución exacta.

b) Regla del Trapecio.

$$I = \frac{h}{2}(f_0 + f_1)$$

$$h = b - a = 1 - 0 = 1$$

$$x_0 = 0 \quad ; \quad f_0 = \frac{1}{0+1} = 1$$

$$x_1 = 1 \quad ; \quad f_1 = \frac{1}{1+1} = 0,5$$

$$I = \frac{1}{2}(1 + 0,5) = 0,75$$

$$\varepsilon_1 = -8,21\ \%$$

c) Regla de Simpson.

$$I = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2)$$

$$h = \frac{b-a}{2} = \frac{1-0}{2} = 0,5$$

$$x_0 = a = 0 \quad ; \quad f_0 = \frac{1}{0+1} = 1$$

$$x_1 = a + h = 0,5 \quad ; \quad f_1 = \frac{1}{0,5+1} = 0,6667$$

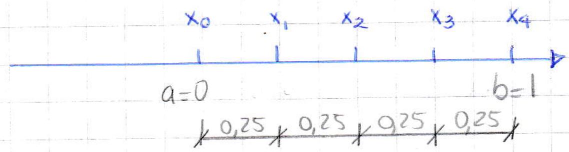
$$x_2 = b = 1 \quad ; \quad f_2 = \frac{1}{1+1} = 0,5$$

$$I = \frac{0,5}{3}(1 + 4 * 0,6667 + 0,5) = 0,6945$$

$$\varepsilon_2 = -0,20\ \%$$

Reglas compuestas : con $n=4$

i	x_i	f_i
0	0	1
1	0,25	0,8
2	0,50	0,6667
3	0,75	0,5714
4	1	0,5



d) Regla comp. del trapecio.

$$I = \frac{h}{2}\left(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4\right)$$

$$I = \frac{0,25}{2}\left(1 + 2(0,8 + 0,6667 + 0,5714) + 0,5\right) = 0,6970$$ $\varepsilon_3 = -0,56\,\%$

e) Regla comp. de Simpson.

$$I = \frac{h}{3}\left(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + f_4\right)$$

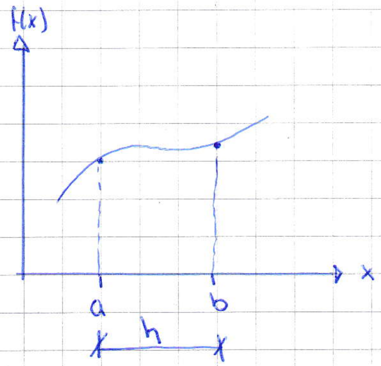
$$I = \frac{0,25}{3}\left(1 + 4(0,8 + 0,5714) + 2(0,6667) + 0,5\right) = 0,6932$$ $\varepsilon_4 = 0,014\,\%$

Nº Tema Fecha Jue- 17- Nov

Integración Númerica

Método de Romberg (Richardson)

A partir de la regla del trapecio:



$$I = \frac{h}{2}\left(f(a) + f(b)\right)$$

con $h = b - a$.

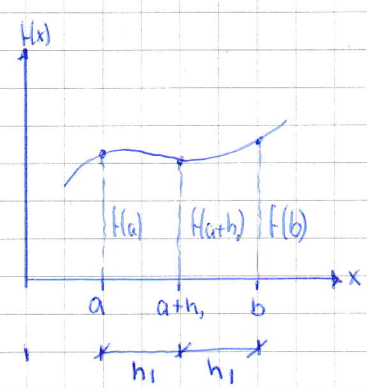
Se le asigna la siguiente denominación:

$$I_{0,0} = \frac{h_0}{2}\left(f(a) + f(b)\right) \quad \text{con } h_0 = b - a$$

que es la primera aproximación a:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

La siguiente aproximación consiste en subdividir el intervalo (a, b) en dos subintervalos iguales y luego utilizar la regla compuesta del trapecio:



$$h_1 = \frac{h_0}{2}$$

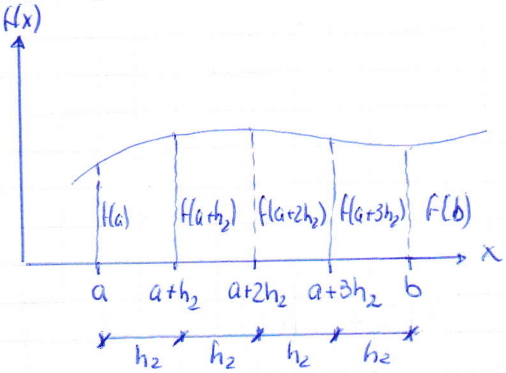
$$\rightarrow I_{1,0} = \frac{h_1}{2}\left(f(a) + 2f(a+h_1) + f(b)\right)$$

reordenando términos:

$$I_{1,0} = \frac{1}{2}\left[\overbrace{\frac{h_0}{2}\left(f(a) + f(b)\right)}^{I_{0,0}} + h_1\, f(a+h_1)\right.$$

$$\underline{I_{1,0} = \frac{1}{2} I_{0,0} + h_1\, f(a+h_1)} \;;\quad \underline{h_1 = \frac{h_0}{2}}$$

Si nuevamente se subdividen los subintervalos anteriores en mitades se obtiene:



$$h_2 = \frac{h_1}{2}$$

Aplicando la regla compuesta del trapecio:

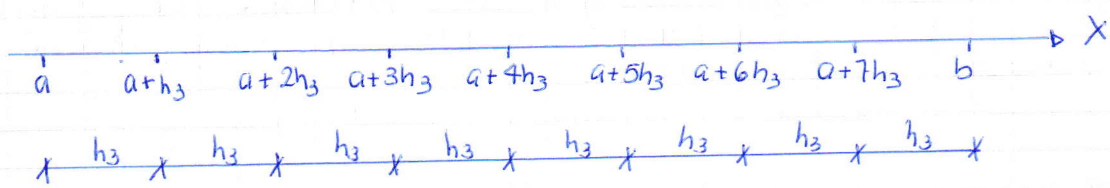
$$I_{2,0} = \frac{h_2}{2}\left(f(a) + 2f(a+h_2) + 2f(a+2h_2) + 2f(a+3h_2) + f(b)\right)$$

con $h_2 = \frac{h_1}{2}$ y $f(a+2h_2) = f(a+h_1)$

$$I_{2,0} = \frac{1}{2}\left[\frac{h_1}{2}\left(f(a) + 2f(a+h_1) + f(b)\right)\right] + h_2\left[f(a+h_2) + f(a+3h_2)\right]$$

$$\rightarrow I_{2,0} = \frac{1}{2} I_{1,0} + h_2\left[f(a+h_2) + f(a+3h_2)\right]$$

Volviendo nuevamente a subdividir los intervalos y aplicando la regla del trapecio se obtiene:



Luego:

$$I_{3,0} = \frac{h_3}{2}\left[f(a) + 2f(a+h_3) + 2f(a+2h_3) + \dots\dots + 2f(a+7h_3) + f(b)\right]$$

con $h_3 = \frac{h_2}{2}$ y $\begin{cases} f(a+2h_3) = f(a+h_2) \\ f(a+4h_3) = f(a+2h_2) \\ f(a+6h_3) = f(a+3h_2) \end{cases}$

$$I_{3,0} = \frac{1}{2}\Big[\underbrace{\frac{h_2}{2}\left(f(a) + 2f(a+h_2) + 2f(a+2h_2) + 2f(a+3h_2) + f(b)\right)}_{I_{2,0}}\Big] + h_3\left[f(a+h_3) + f(a+3h_3) + f(a+5h_3) + f(a+7h_3)\right]$$

$$\rightarrow \quad I_{3,0} = \frac{1}{2} I_{2,0} + h_3 \left[f(a+h_3) + f(a+3h_3) + f(a+5h_3) + f(a+7h_3) \right]$$

En general, para la aproximación K-ésima, se tiene:

$$I_{K,0} = \frac{1}{2} I_{K-1,0} + h_K \sum_{i=1}^{2^{K-1}} f\left[a + (2i-1)\, h_K\right] \qquad K = 1, 2, \ldots$$

Con $h_K = \dfrac{h_{K-1}}{2} = \dfrac{b-a}{2^K}$ « Fórmula de Romberg »

Fórmula de Richardson:

$$I_{Kj} = \frac{4^j \, I_{K,j-1} - I_{K-1,j-1}}{4^j - 1}$$

El método de Romberg-Richardson genera una aproximación a la solución en forma de una matriz, cuyos términos de la diagonal son las mejores aproximaciones:

$$\begin{array}{ccccc}
I_{0,0} & & & & \\
I_{1,0} & I_{1,1} & & & \\
I_{2,0} & I_{2,1} & I_{2,2} & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \\
I_{K,0} & I_{K,1} & I_{K,2} & \cdots & I_{K,K}
\end{array}$$

Ejemplo:

Utilizar el método de Romberg - Richardson hasta $K=2$ (2×2) para calcular:

$$I = \int_0^1 \frac{1}{x+1}\, dx$$

Solución Exacta: $I = 0{,}6931$

Solución:

$$f(x) = \frac{1}{x+1}$$

$I_{0,0}$:

$$I_{0,0} = \frac{h_0}{2}\left(f(a) + f(b)\right) \qquad h_0 = b - a = 1 - 0 = 1 \qquad \begin{cases} f(a) = 1 \\ f(b) = 0{,}5 \end{cases}$$

$$I_{0,0} = \frac{1}{2}(1 + 0{,}5) = 0{,}75 \qquad E_1 = -8{,}21\ \%$$

$I_{1,0}$:

$$I_{1,0} = \frac{1}{2} I_{0,0} + h_1\, f(a+h_1) \quad ; \quad h_1 = \frac{h_0}{2} = \frac{1}{2} = 0{,}5 \quad \{ f(a+h_1) = f(0{,}5) = 0{,}6667$$

$$\rightarrow I_{1,0} = \frac{1}{2}(0{,}75) + 0{,}5 * (0{,}6667) = 0{,}7084 \qquad E_2 = -2{,}21\ \%$$

$I_{2,0}$:

$$I_{2,0} = \frac{1}{2} I_{1,0} + h_2 \left[f(a+h_2) + f(a+3h_2) \right]$$

$$h_2 = \frac{h_1}{2} = \frac{0{,}5}{2} = 0{,}25 \qquad \begin{cases} f(a+h_2) = f(0{,}25) = 0{,}8 \\ f(a+3h_2) = f(0{,}75) = 0{,}5714 \end{cases}$$

$$I_{2,0} = \frac{1}{2} * 0{,}7084 + 0{,}25 * \left[0{,}8 + 0{,}5714\right] = 0{,}6970 \qquad E_3 = -0{,}56\ \%$$

$$I_{1,1} = \frac{4\, I_{1,0} - I_{0,0}}{4 - 1} = \frac{4(0{,}7084) - 0{,}75}{3}$$

$$I_{1,1} = 0{,}6945 \qquad E_4 = -0{,}20\ \%$$

$$I_{2,1} = \frac{4\, I_{2,0} - I_{1,0}}{4 - 1} = \frac{4(0{,}6970) - (0{,}7084)}{3}$$

$$I_{2,1} = 0{,}6932 \qquad E_5 = -0{,}014\ \%$$

$$I_{2,2} = \frac{4^2\, I_{2,1} - I_{1,1}}{4^2 - 1} = \frac{16(0{,}6932) - 0{,}6945}{15}$$

$$I_{2,2} = 0{,}6931 \qquad E_6 = 0\ \%$$

Solución: $f(x) = \frac{1}{x+1}$

$I_{0,0}$:

$I_{0,0} = \frac{h_0}{2}(f(a) + f(b))$ $h_0 = b - a = 1 - 0 = 1$ $\begin{cases} f(a) = 1 \\ f(b) = 0{,}5 \end{cases}$

$I_{0,0} = \frac{1}{2}(1 + 0{,}5) = 0{,}75$ $E_1 = -8{,}21\ \%$

$I_{1,0}$:

$I_{1,0} = \frac{1}{2} I_{0,0} + h_1 f(a + h_1)$; $h_1 = \frac{h_0}{2} = \frac{1}{2} = 0{,}5$ $\{ f(a+h_1) = f(0{,}5) = 0{,}6667$

$\rightarrow I_{1,0} = \frac{1}{2}(0{,}75) + 0{,}5 * (0{,}6667) = 0{,}7084$ $E_2 = -2{,}21\ \%$

$I_{2,0}$:

$I_{2,0} = \frac{1}{2} I_{1,0} + h_2 \left[f(a+h_2) + f(a+3h_2) \right]$

$h_2 = \frac{h_1}{2} = \frac{0{,}5}{2} = 0{,}25$ $\begin{cases} f(a+h_2) = f(0{,}25) = 0{,}8 \\ f(a+3h_2) = f(0{,}75) = 0{,}5714 \end{cases}$

$I_{2,0} = \frac{1}{2} * 0{,}7084 + 0{,}25 * \left[0{,}8 + 0{,}5714 \right] = 0{,}6970$ $E_3 = -0{,}56\ \%$

$I_{1,1} = \frac{4 I_{1,0} - I_{0,0}}{4 - 1} = \frac{4(0{,}7084) - 0{,}75}{3}$

$I_{1,1} = 0{,}6945$ $E_4 = -0{,}20\ \%$

$I_{2,1} = \frac{4 I_{2,0} - I_{1,0}}{4 - 1} = \frac{4(0{,}6970) - (0{,}7084)}{3}$

$I_{2,1} = 0{,}6932$ $E_5 = -0{,}014\ \%$

$I_{2,2} = \frac{4^2 I_{2,1} - I_{1,1}}{4^2 - 1} = \frac{16(0{,}6932) - 0{,}6945}{15}$

$I_{2,2} = 0{,}6931$ $E_6 = 0\ \%$

N° 2do Parcial. Tema Metodos Númericos Fecha 3-Nov-2016

Nancy Yamileth Ramírez García 2140021270 .

90

1) Resolver el sistema por factorización LU

$$3,45\,x_1 + 0,897\,x_2 - 15,2\,x_3 = 25,7$$
$$2,89\,x_1 + 3,56\,x_2 + 7,36\,x_3 = 17,9$$
$$-15,4\,x_1 + 1,25\,x_2 - 6,45\,x_3 = 20,5$$

3 c.s.!

2) Calcular la inversa de:

$$A = \begin{bmatrix} 3,45 & 1,18 \\ -6,29 & 2,60 \end{bmatrix}$$

3. c.s.!

3) Dada la tabla de valores:

i	x_i	f_i
0	1,3027	2,4047
1	1,5563	3,1256
2	2,2165	3,8964
3	2,8903	4,2563
4	3,4563	5,7561

0,9437

2,5

0,9563

Calcular $f(x) = ?$ para $x = 2,5$

Utilizar un polinomio interpolante de 2do grado en forma de Lagrange,

(4 decimales).

Soluciones

①

Paso	A			b	Operaciones
0	3,45	0,897	-15,2	25,7	f_1
	2,89	3,56	7,36	17,9	f_2
	-15,4	1,25	-6,45	20,5	f_3
1'	-15,4	1,25	-6,45	20,5	$f_1 \leftarrow f_3$
	2,89	3,56	7,36	17,9	f_2
	3,45	0,897	-15,2	25,7	$f_3 \leftarrow f_1$
1	-15,4	1,25	-6,45	20,5	f_1
	-0,188	3,79	6,15	21,7	$f_2 \leftarrow f_2 - f_1\ (2,89/-15,4)$
	-0,224	1,18	-16,6	30,3	$f_3 \leftarrow f_3 - f_1\ (3,45/-15,4)$
2	-15,4	1,25	-6,45	20,5	f_1
	-0,188	3,79	6,15	21,7	f_2
	-0,224	0,311	-18,5	23,5	$f_3 \leftarrow f_3 - f_2\ (1,18/3,79)$

① $\underset{\sim}{L}\ \underset{\sim}{c} = \underset{\sim}{b}^*$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0,188 & 1 & 0 \\ -0,224 & 0,311 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20,5 \\ 17,9 \\ 25,7 \end{bmatrix}$$

$c_1 = 20,5 / 1 = 20,5$

$c_2 = 17,9 + 0,188\,(20,5) = 21,8$

$c_3 = 25,7 + 0,224\,(20,5) - 0,311\,(21,8) = 23,5$

② $\underset{\sim}{U}\ \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{c}$

$$\begin{bmatrix} -15,4 & 1,25 & -6,45 \\ 0 & 3,79 & 6,15 \\ 0 & 0 & -18,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20,5 \\ 21,8 \\ 23,5 \end{bmatrix}$$

$x_3 = \dfrac{23,5}{-18,5} = -1,27$

$x_2 = \dfrac{21,8 - 6,15\,(-1,27)}{3,79} = 7,81$

$x_1 = \dfrac{23,5 - 1,25\,(7,81) + 6,45\,(-1,27)}{-15,4} = -0,360$ ✗

(−0,165)

Sol.

$$x = \begin{bmatrix} -1,27 \\ 7,81 \\ -0,360 \end{bmatrix}$$

(2)

Paso	A		I		Operaciones
0	3,45	1,18	1,00	0,00	f_1
	-6,29	2,60	0,00	1,00	f_2
1'	-6,29	2,60	0,00	1,00	$f_1 \leftarrow f_2$
	3,45	1,18	1,00	0,00	$f_2 \leftarrow f_1$
1	-6,29	2,60	0,00	1,00	f_1
	0	2,61	1,00	0,548	$f_2 \leftarrow f_2 - f_1\,(3,45/-6,29)$

y con la 1° columna de w

$$\begin{bmatrix} -6,29 & 2,60 \\ 0 & 2,61 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,00 \\ 1,00 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} a_{11} & 0,158 \\ a_{12} = & 0,383 \end{matrix}$$

y con la 2° columna de w

$$\begin{bmatrix} -6,29 & 2,60 \\ 0 & 2,61 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,00 \\ 0,548 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} a_{21} = -0,0722 \\ a_{22} = 0,210 \end{matrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0,158 & -0,0722 \\ 0,383 & 0,210 \end{bmatrix}$$

Nº Tema Fecha

③ $x_0 = 1{,}5563$ $\quad f_0 = 3{,}1256$
$x_1 = 2{,}2165$ $\quad f_1 = 3{,}8964$
$x_2 = 2{,}8903$ $\quad f_2 = 4{,}2563$

$$P_2(x) = l_0 f_0 + l_1 f_1 + l_2 f_2$$

$$l_0 = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(2{,}5-2{,}2165)(2{,}5-2{,}8903)}{(1{,}5563-2{,}2165)(1{,}5563-2{,}8903)} = -0{,}1256$$

$$l_1 = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(2{,}5-1{,}5563)(2{,}5-2{,}8903)}{(2{,}2165-1{,}5563)(2{,}2165-2{,}8903)} = 0{,}8280$$

$$l_2 = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(2{,}5-1{,}5563)(2{,}5-2{,}2165)}{(2{,}8903-1{,}5563)(2{,}8903-2{,}2165)} = 0{,}2976$$

$$P_2(2{,}5) = (-0{,}1256)(3{,}1256) + (0{,}8280)(3{,}8964) + (0{,}2976)(4{,}2563)$$

$$P_2(2{,}5) = 4{,}1003$$

MAT-205-S 1er Parcial "Métodos Numericos" Jue-29-sept

Nancy Yamileth Ramírez García 214021270

75

1. Utilizar Reglas de Redondeo.

$$\frac{[6,125*10^{-3}\ (1,075*10^{-3} - 5,001*10^{-5})]}{(6,8293*10^{-5} + 1,4566*10^{-7})}$$

$$= \frac{(6,125*10^{-3})(\overbrace{1,075}^{4}*10^{-3} - \overbrace{0,05001}^{4}*10^{-3})}{(\overbrace{6,8293}^{5}*10^{-5} + 0,0\overbrace{14566}^{5}*10^{-5})}$$

$$= \frac{(6,125*10^{-3})(1,02499*10^{-3})}{6,843866*10^{-5}}$$

$$= \frac{(6,125*10^{-3})(1,025*10^{-3})}{6,8439*10^{-5}}$$

$$= \frac{6,278125*10^{-6}}{6,8439*10^{-5}}$$

$$= \frac{0,6278*10^{-5}}{6,8439*10^{-5}}$$

$$= 0,0917313227 8 = 0,09173$$

2. ~~(Determinar)~~ Dada la ecuación: $f(x) = e^x (x^2+1)^{1/2}$
Determinar el valor de x tal que $f(x)$ tenga el valor de 281.

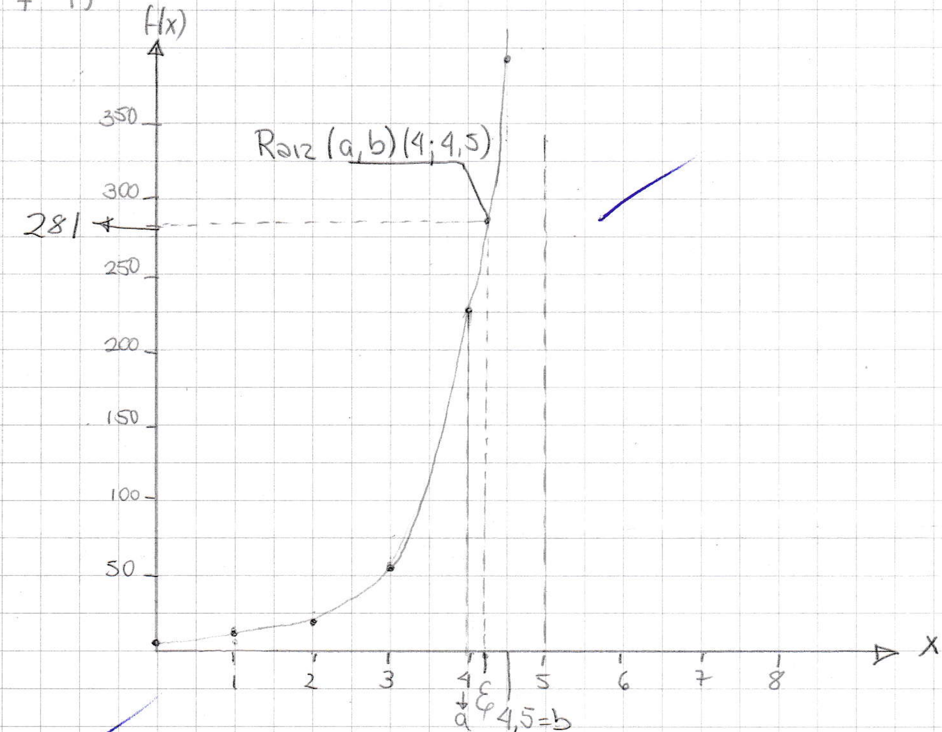
a) Utilizar el metodo Gráfico (a, b)
b) Método de la secante con $x_1 = a$ y $x_0 = b$ } Hasta $i = 3$
c) Método de Newton - Raphson con $x_0 = b$

Solución:

a) $f(x) = e^x (x^2+1)^{1/2}$

x	f(x)
0	1
1	3,84
2	16,52
3	63,52
a = 4	225,11
b = 4,5	414,95
5	756,76
5,5	1367,8

281



$f(x) - P = 0 \quad = \quad f(x) = e^x (x^2+1)^{1/2} - 281$

b) $A \to x_1 = a = 4$ $\qquad f(a) = -55,88606045 \to B$
$C \to x_0 = b = 4,5$ $\qquad f(b) = 133,958472 \to D$

$$x_{i+1} = \frac{x_0 \, f(x_{i+1}) - x_{-1} \, f(x_0)}{f(x_{i+1}) - f(x_0)}$$

para $i = 1$

$$x_{i+1} = \frac{(4,5)(-55,88606045) - (4)(133,958472)}{(-55,88606045) - (133,958472)}$$

$x_{i+1} = 4,147189018 \Rightarrow f(x_1) = -11,1470456$

para $i = 2$.

$$x_{i+1} = \frac{(4,147189018)(133,958472) - (4,5)(-11,1470456)}{(133,958472) - (-11,1470456)}$$

$x_{i+1} = 4,174292054 \Rightarrow f(x_1) = -2,020440475$