

Exercícios Deep Learning

Aula 1 - Introdução a Computação Diferenciável

February 19, 2024

1 Retas

1- Esboce num gráfico as seguintes retas:

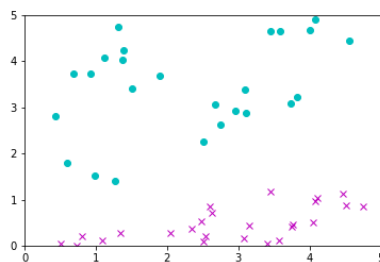
a) $2x_2 + x_1 = 0$

b) $x_2 - 2x_1 + 1 = 0$

c) $x_2 - 1 = 0$

d) $x_1 - 1 = 0$

2- Especifique uma reta que divide as duas categorias de itens no gráfico abaixo onde x_1 é o eixo abscissas e x_2 é o eixo das ordenadas.



3- Considere a reta $x_2 = 3 + 2x_1$. Obtenha a expressão analítica do conjunto de todas as retas paralelas e o conjunto de todas as retas perpendiculares à reta acima.

2 Álgebra Linear

4- Sejam $w = w_1, \dots, w_n$ e $x = x_1, \dots, x_n$ vetores coluna de dimensão $n \times 1$. Expresse $w'x$ em termos de um somatório.

5- Seja $x = (x_1, \dots, x_n)$ um vetor-coluna $n \times 1$ e A uma matriz $n \times n$. A' indica a matriz transposta de A . Verifique que as seguintes identidades matriciais estão corretas, checando se o lado direito é igual ao lado esquerdo.

a) $x'Ax = \sum_{i,j} x_i x_j A_{ij}$

b) $x'x = \sum_i x_i^2$

c) xx' é uma matriz simétrica $n \times n$ com elemento (i, j) dado por $x_i x_j$

3 Derivadas

6- Encontre a derivada $F'(x)$ de

$$F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

7- Encontre a derivada $F'(x)$ de

$$F(x) = e^{\sin x}$$

8- Função sigmóide:

$$S(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

a) Esboce o gráfico de $S(x)$.

b) Mostre que $S(-x) = 1 - S(x)$

c) Calcule a derivada em termos da própria sigmóide, isto é, mostre que $S'(x) = S(x)(1 - S(x))$. Esboce o gráfico da derivada.

d) Qual o valor máximo de $S'(x)$? Para qual valor de x ela atinge esse máximo?

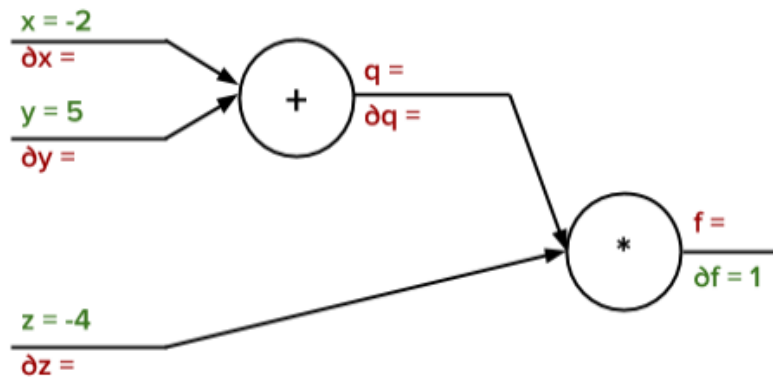
e) Considere $S(z) = \frac{1}{1+e^{-z}}$, sendo que $z = b + W_1 x$ encontre $\frac{\partial S}{\partial b}$ e $\frac{\partial S}{\partial W_1}$.

f) Considere $S(h(x)) = \frac{1}{1+e^{-h(x)}}$, calcule $\frac{\partial S}{\partial x}$ em função de $h(x)$.

9- Suponha que você tenha dados da forma $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$, onde $X_i \in \mathbb{R}$ e que seu classificador seja da forma $\hat{Y}_i = \beta X_i$. Considerando o erro quadrático, ou seja, $L(\hat{Y}, Y) = \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - Y_i)^2$, qual o valor de β que minimiza o erro?

4 Grafos Computacionais

10- Seja $f(x, y, z) = (x + y)z$. Podemos quebrar essa função nas equações $q = x + y$ e $f(x, y, z) = qz$. Utilizando essa notação, nós também podemos representar essas equações por meio de um grafo computacional:



a) Calcule de forma simbólica (sem plugar valores para as variáveis) as derivadas parciais:

1. $\frac{\partial f}{\partial q}$
2. $\frac{\partial q}{\partial x}$
3. $\frac{\partial q}{\partial y}$
4. $\frac{\partial f}{\partial z}$
5. $\frac{\partial f}{\partial x}$
6. $\frac{\partial f}{\partial y}$

b) Preencha o grafo computacional para $x = -2$, $y = 5$, $z = -4$ e $\frac{\partial L}{\partial f} = 1$