

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS

DEPARTAMENTO DE ARQUITECTURA DE COMPUTADORES Y AUTOMÁTICA



TRABAJO DE FIN DE GRADO

Código TFG: **DACYA-04**

Desarrollo de sistemas de control cooperativos para USVs en tareas de bioinspección

Cooperative Control Systems for USVs in Bio-surveillance tasks

Ulises Alejandro Ardizzi Rodríguez

Supervisor/es: Héctor García de Marina y Juan Francisco Jiménez Castellano

Grado en Ingeniería Electrónica de Comunicaciones

Curso académico 2020-21

Convocatoria Junio

Autorización de difusión

Apellidos, Nombre

Madrid, a XX de XX de XX

Los abajo firmantes, matriculados en el Grado de XX de la Facultad de XX, autorizan a la Universidad Complutense de Madrid (UCM) a difundir y utilizar con fines académicos, no comerciales y mencionando expresamente a su autor el presente Trabajo Fin de Grado: "Título", realizado durante el curso académico XX-XX bajo la dirección de XX y la co-dirección de XX en el Departamento de XX, y a la Biblioteca de la UCM a depositarlo en el Archivo Institucional E-Prints Complutense con el objeto de incrementar la difusión, uso e impacto del trabajo en Internet y garantizar su preservación y acceso a largo plazo.



Esta obra está bajo una
Licencia Creative Commons
Atribución-NoComercial-CompartirlGual 4.0 Internacional.

“Dedicatoria, si es necesaria.”

Edward Tufte

Agradecimientos

Agradecimientos, si son necesarios.

Índice general

Índice	I
Índice de figuras	III
Resumen	V
1. Introducción	1
1.1. Motivación	1
1.2. Estado del arte	3
1.3. Objetivos	5
1.4. Organización de la memoria	6
2. Sistema de manera global	8
2.1. Algoritmo de estimación de búsqueda de fuentes	8
2.2. Algoritmo de control de formación circular	13
2.3. Algoritmo de ascenso de gradiente	17
2.4. Operación conjunta de los tres algoritmos	18
3. Resultados experimentales	21
3.1. Variación del punto inicial	25
3.2. Variación del número de agentes N	27
3.3. Variación del radio D	29
3.4. Variación del peso ϵ	31
3.5. Evaluación con Múltiples fuentes	34
4. Conclusiones y futuras investigaciones	39

Índice de figuras

1.1. Ejemplo de USV [Referencia bibliográfica]	2
1.2. Representación de una función gaussiana	3
2.1. Disposición de los agentes en torno a la formación circular.	8
2.2. Estrategia colaborativa para la búsqueda de fuentes.	10
2.3. Estimación del gradiente en función del número de agentes	12
2.4. Estimación del gradiente en función del radio del círculo	12
2.5. Vehículos dispuestos en torno a la formación. El punto rojo representa el círculo al que quieren converger y los diferentes colores que girar en torno a dicho punto son cada uno de los vehículos.	13
2.6. Ejemplo del algoritmo de control de formación	16
2.7. Diagrama de flujo que describe la dinámica del sistema.	18
3.1. Comparativa entre el camino descrito por el gradiente y por el gradiente estimado	22
3.2. Comparativa las componentes del gradiente entre el real y el estimado	22
3.3. Diferencia entre las componentes del gradiente real y estimada	23
3.4. Curva de error descrita por la estimación del gradiente	23
3.5. Avance del sistema en diferentes posiciones de la gaussiana	25
3.6. Evaluación del gradiente estimado en diversos puntos de la gaussiana	26
3.7. Avance del sistema en función del número de agentes N	27
3.8. Evaluación del gradiente estimado en función del número de agentes N	28
3.9. Error descrito por el gradiente al variar el número de agentes N	29
3.10. Avance del sistema en función del radio D	29

3.11. Evaluación del gradiente estimado y el real en función del radio D	30
3.12. Error descrito por el gradiente al variar el radio D	31
3.13. Avance del sistema en función del radio peso ϵ	32
3.14. Error descrito por el gradiente al variar el peso ϵ	32
3.15. Evaluación del gradiente en función del peso ϵ	33
3.16. Nueva función cuadrática resultado de la suma de 3 gaussianas	34
3.17. Avance definido sobre el plano con múltiples fuentes en tres puntos diferentes	35
3.18. Comparación del valor máximo de ambas fuentes	36
3.19. Evaluación del gradiente estimado y el real según la fuente objetivo	36

[Título extendido del TFG (si procede)]

Resumen

Breve resumen de contenidos.

Palabras clave:

Separadas, por, comas.

Abstract

Key works:

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación

Un problema en la actualidad son las aguas contaminadas por sustancias de origen biológico, su importancia recae en la perdida de la biodiversidad ~~y en que implican~~, directamente implicar daños perjudiciales en la salud humana dado que las sustancias presentes en el agua pueden ser ingeridas por las especies marítimas que posteriormente son consumidas por los seres humanos.

Tomando en cuenta los avances tecnológicos de los sistemas robóticos de hoy en día, llegándose a considerar incluso como sistemas autónomos y programables capaces de realizar diversas tareas, se propone como objetivo de este proyecto el otorgar la capacidad de detectar y guiar a un conjunto de vehículos dispuestos sobre una superficie marítima hacia zonas de máxima concentración de sustancias toxicas.

Para ello, se deben tomar una serie de consideraciones:

1. Los vehículos han de tener la capacidad de reunir datos del entorno, es decir, cada uno de ellos debe estar dotado de sensores para ~~constantemente~~ tomar medidas. ~~de modo continuo~~
~~Medidas de nivel de contaminación~~
~~Deben~~
2. ~~Presentar una~~ ~~toma de~~ decisiones para convertir dichos datos en acciones.
~~Deben ejecutar las decisiones tomadas~~
3. ~~La ejecución de la decisión tomada~~ a través de su efector final.

Por ende, se requiere de la utilización de vehículos que se puedan desplazar de manera autónoma por superficies marítimas y que agrupen todas las características comentadas hasta el momento. Consecuentemente, estas condiciones la cumplen los USV (vehículo autónomo de superficie), preguntar acá como hacer referencias abajo.



Figura 1.1: Ejemplo de USV [referencia bibliográfica]

Esto no puede venir aquí. No se entiende que quiere decir la forma geométrica adoptada
Por otro lado, los agentes han de ser capaces de cumplir su rol asignado una vez dispuestos alrededor de la forma simétrica adoptada, dicha misión consiste en avanzar desde un punto cualquiera a uno de interés que puede ser descrito mediante las **curvas de nivel**, en donde el punto de máximo valor se le puede atribuir el nombre de fuente.

Esto estás contándolo al revés, la geometría aquí no importa, importa la coordinación
Otro aspecto fundamental es el cómo estos vehículos son capaces de detectar exactamente el punto de origen de máxima concentración o de coordinarse para ejercer el desplazamiento en torno a una superficie en concreta. Estos dos problemas que surgen se pueden resolver dotando a un grupo de robots la capacidad de coordinarse y colaborar para determinar dicha zona de máxima concentración para posteriormente desplazarse hacia ella, además deberá ser capaz de mantener una formación simétrica. Entre otras palabras, se requiere aplicar al caso un enjambre robótico más concretamente uno de tipo multiagente.

Cabe añadir que el punto de máxima concentración en la superficie sobre la que se desplazan los vehículos se puede definir mediante las curvas de nivel, además su variación va a estar estrictamente ligada con la distancia a la que este el centro de la formación con respecto al punto máximo, es decir, la intensidad radiada desde el punto fuente es una señal proporcional al inverso de la distancia al cuadrado definiendo una función cuadrática. Dicho esto, para modelar el mapa sobre el que se mueven los vehículos se propone una función gaussiana dado que cumple ser cóncava y cuadrática. **NO es una función cuadrática!!!**

Necesitamos una función cóncava, esto es una hipótesis. Vuelve a estar todo revuelto

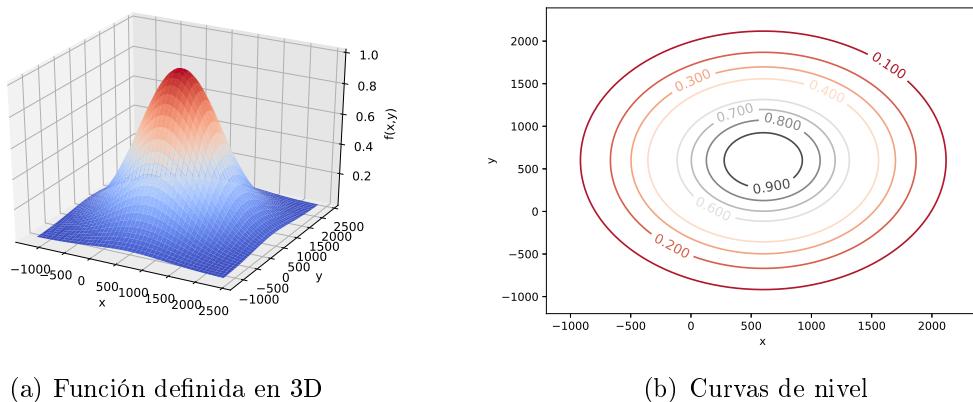


Figura 1.2: Representación de una función gaussiana

1.2. Estado del arte

La robótica de enjambre se basa en el comportamiento de los organismos sociales, en donde los individuos no han de tener un alto conocimiento para producir un comportamiento colectivo complejo, ni existir un líder que guía al resto para completar un objetivo, como en los bancos de peces, un panal de abejas o una bandada de pájaros.

Hoy en día, conforma un **área** de investigación muy activa por su versatilidad en diferentes ámbitos, tales como militar o industrial. En contraposición a tener un único robot realizando una labor compleja se tienen varios individuos simples para formar un comportamiento

colectivo con el objetivo de realizar la misma tarea traduciéndose a su vez en una reducción de costes. Las características principales con las que se pueden definir los enjambres son:

1. El número óptimo de agentes varía en función de la tarea asignada pudiendo ir desde tan pocos como una simple pareja hasta miles de unidades.
2. Presenta gran **diversidad**, es decir, en ocasiones se mezclan robots simples o complejos, sistemas tripulados o no tripulados, e incluso con dominio cruzado.
3. Para poder diferenciarlos de los sistemas multi-robots, en el que cada robot individualmente tiene una tarea asignada de antemano, los de tipo enjambre han de tener un **comportamiento colectivo** que involucre colaboración entre los propios agentes y estos con su entorno.
4. Se necesita establecer una forma de comunicación entre los agentes para permitir el intercambio de información, esta puede ser implícita o explícita
5. El hecho de que se puede definir su modo de operar no implica que se controle a cada robot individualmente, es decir, cada uno ellos han de poseer un comportamiento **autónomo y descentralizado**.

Los ejambres pueden considerarse como una particularización del paradigma de
~~Una aplicación al caso de los enjambres son~~ los sistemas multiagentes, que como bien su nombre indica, se basan en un grupo de dos o más agentes que interactúan entre sí para lograr un objetivo común ~~en un mismo entorno~~. Dicha comunicación puede darse entre vecinos sin necesidad de recurrir a una entidad central, es decir, cada uno de ellos va a poseer un comportamiento autónomo y aún así conocer la existencia del resto.

Por tal motivo, la información va a estar distribuida en cada uno de los agentes con un rol distinto, además, se añade la posibilidad de fallo en cualquiera de ellos. Esto se traduce en un sistema más eficaz, flexible yiable.

1.3. Objetivos

Al principio de este capítulo se comentaron varias tareas que deben cumplirse para enfrentar el problema de la detección y posterior desplazamiento sobre superficie marítima hacia zonas ~~afectadas por dotadas de~~ de sustancias contaminantes. Este objetivo se logra mediante la cooperación de tres algoritmos.

El primero de ellos es un **algoritmo de búsqueda de fuentes** [1] cuyo objetivo es detectar dicha zona de máxima concentración ~~como un punto de inflexión de una función definida como cóncava~~, en donde, se asume que solo se tendrá una única fuente radiando y además que los agentes van a estar dispuestos en torno a una formación circular de manera simétrica para realizar las medidas correspondientes.

Por otro lado, la necesidad del segundo algoritmo recae en la coordinación de los vehículos para adoptar una forma geométrica deseada más concretamente la formación circular previamente descrita es por ello que se va a utilizar un **algoritmo de control de formación circular** [2].

Además, el sistema en sí debe tener la capacidad de dirigirse hacia la zona de interés por ello es que se va a hacer uso del **algoritmo de ascenso** en el que básicamente aprovechas funciones definidas como en la figura 1.2 para desplazarte de forma ascendente, es decir, hacia un máximo. **Esto es lo primero pero sigue faltando la clave de todo. (algoritmo de gradiente)**

Finalmente, se estudiará la eficacia de juntar estos tres algoritmos mediante diversos situaciones entre ellas destacan: la variación del número de vehículos, las posiciones desde donde ~~comienza la búsqueda empiezas~~ el tamaño del radio de la formación o situaciones en las que se tienen varios focos radiando pero uno de ellos va a presentar la máxima concentración.

Los que realmente haces es estudiar como afectan al conjunto de algoritmos los parámetros que puedes modificar

1.4. Organización de la memoria

Cuando termine describirlo mejor y mas organizado.

En el capítulo dos se dará una idea general del problema global haciendo uso de un diagrama de bloques, además, de describir brevemente diferentes aspectos necesarios para el desarrollo del problema. En el tercero se realiza la estimación previamente descrita. En el cuarto se aporta un algoritmo de control para la coordinación de los agentes de manera simétrica a **en torno a** **lo largo de** una formación circular. Finalmente, en el quinto y ultimo capítulo se dan los diferentes resultados obtenidos mediante la acción conjunta de ambos algoritmos.

Capítulo 2

Sistema de manera global

2.1. Algoritmo de estimación de búsqueda de fuentes

Anteriormente se discutió que el objetivo del algoritmo es la búsqueda de fuentes, basándose en mediciones locales de múltiples robots situados de manera simétrica en un espacio de 2D.
Realmente nunca lo habías dicho tan claro y tan bien como ahora...

En dicho procedimiento, se consideran N robots distribuidos uniformemente a lo largo de una formación circular con un radio D y un punto central c definido en dos dimensiones, tal como se muestra en la siguiente figura:

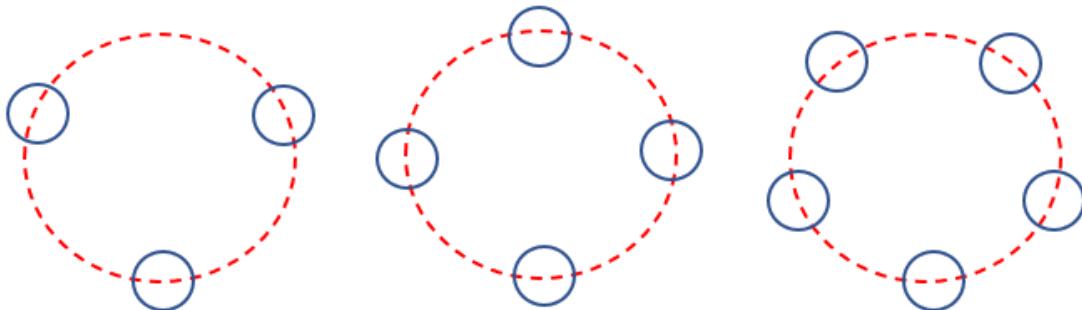


Figura 2.1: Disposición de los agentes en torno a la formación circular.

Adicionalmente, cada uno de los agentes deberá tener la capacidad de medir la intensidad de la señal mediante un sensor. En términos matemáticos, la distribución de la señal es una función espacial bidimensional que representa un campo escalar con un máximo o mínimo definido justo en la posición donde dicha fuente se localiza. Por lo tanto, se va a considerar que la señal es emitida por una única fuente de modo que su punto **de inflexión crítico** en z_* es el único máximo definido del campo escalar.

cálculo ¿qué cálculo? El cálculo que van a hacer los agentes es el del gradiente en el centro del círculo
 Para dicho cálculo, adoptan vital importancia los **algoritmos de tipo consenso** siendo estos un mecanismo que permite a máquinas coordinarse en un entorno distribuido, es decir, encuentran la solución al problema de la comunicación entre diferentes entes aislados con el objetivo de ponerse de acuerdo para realizar una tarea concreta.

NO es de vital, importancia, podría hacerse de otra forma simplemente vas a aprovechar la oportunidad que te da tener varios agentes para calcular el gradiente..
 Por lo tanto, se define una función $f(x)$ con $x \in \mathbb{R}^n$, además de ser continua y derivable para todo n . Aplicando el desarrollo en serie de Taylor para un valor de $n \geq 2$ se tiene:

¿para todo n? ¿debería ser para todo x?

$$f(x) = f(x_*) + \nabla f(x_*)^T (x - x_*) + \frac{1}{2!} \cdot (x - x_*)^T \cdot H(f(x_*)) \cdot (x - x_*) + O(x_*^3) \quad (2.1)$$

Donde:

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad H(f) = \nabla^2 f = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \cdot \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \cdot \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \cdot \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \cdot \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \cdot \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \cdot \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

Para evaluar el punto máximo de concentración lo que interesa es que $\nabla f(x_*) = 0$. No obstante, en el problema en cuestión no se dispone de información sobre dicho gradiente solo se tienen las medidas tomadas por los sensores en cada uno de los vehículos es por ello que se va a aprovechar la simetría existente para realizar una estimación del gradiente $\hat{\nabla} f(c)$ las medidas de f realizadas por los agentes en la formación circular, para estimar el gradiente en el centro del círculo

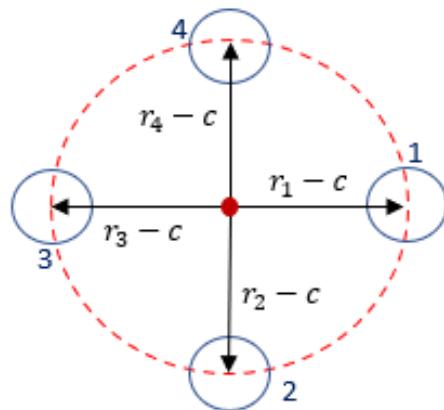


Figura 2.2: Estrategia colaborativa para la búsqueda de fuentes.
El cálculo del gradiente en el centro de la circunferencia formada por los agentes

Particularizando para una distribución uniforme a lo largo de un círculo con radio D , un en que los agentes se mueven con velocidad angular w_0 , igual para todos, ángulo de rotación $\phi_o(t) = w_0 t$ y el centro de la formación c .

$$r_i = c + D \cdot R_{\theta_i} \cdot e \quad i = 1, \dots, N$$

Debería ser un +: phi0 + (2*pi*i)/n

En donde, r_i es la posición del robot i con respecto al radio del círculo, $\phi_i = \phi_0 \frac{2\pi i}{N}$ es el ángulo de rotación, R_ϕ es la matriz de rotación definida como $\begin{bmatrix} c_\phi & -s_\phi \\ s_\phi & c_\phi \end{bmatrix}$ y $e = [1, 0]^T$.

A partir de la ecuación 2.1 pero haciendo la expansión de Taylor hasta el término primer orden sobre cada una de las medidas $f(r_i)$ en torno al punto c y redefiniendo a D como $D = \|r_i - c\|$, se obtiene:

$$f(r_i) - f(c) = \nabla f(c)^T (r_i - c) + \varphi_i(D, c) \quad \forall i, \dots, N \quad (2.2)$$

En donde, $\varphi_i(D, c)$ denota el remanente de la expansión de Taylor.

Podríamos estimar el gradiente en c si conociéramos $f(c)$. Es posible sin embargo, obtener una aproximación para el gradiente, empleando directamente las medidas de todos los agentes $f(r_i)$

Cabe destacar que la anterior ecuación no se va a utilizar directamente dado que en lugar de evaluar el valor de la función según su gradiente conocido se realiza el proceso inverso, es decir, en función de las distintas medidas tomadas por los vehículos se estimará el gradiente el cual se encuentra definido en el centro de la formación circular. Por ende, la ecuación 2.2 se multiplica por $\left(\frac{2}{ND^2}\right)(r_i - c)$ y se hace el sumatorio en torno a $i = 1, \dots, N$, obteniéndose:

$$\frac{2}{N \cdot D^2} \cdot \sum_{i=1}^N f(r_i) \cdot (r_i - c) = \underbrace{\nabla f(c) + \varphi(D, c)}_{:= \hat{\nabla}f(c)} \quad (2.3)$$

La obtención de dicha expresión, así como la prueba de su validez pueden encontrarse en [Lara,Lara] Citas Punto y aparte

En donde, $\varphi(D, c)$ es el error de la aproximación. Adicionalmente, para evaluar la dependencia de la estima con respecto al número de agentes dispuestos en la formación y a su vez del radio de esta, se define a la función gaussiana de la figura 1.2 como:

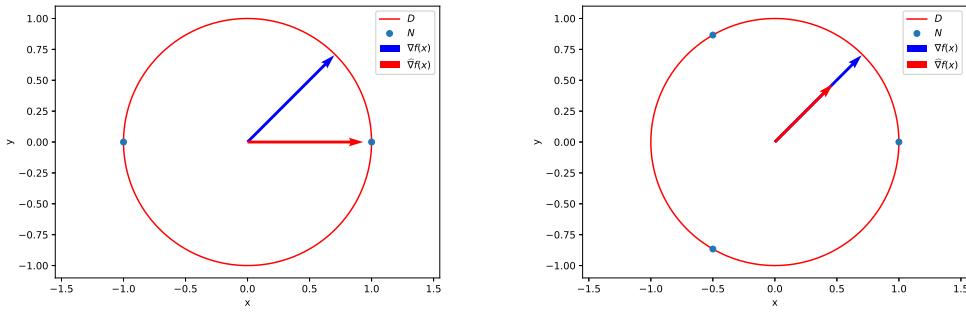
Esto es más bien un ejemplo. para comprobar que el algoritmo funciona, lo pruebas con una función gaussiana y demuestras su funcionamiento

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{con } x \in \mathbb{R}^2 \quad \text{Ver nota aparte sobre (2.4) la función de gauss que usas}$$

En donde, σ es la desviación típica aportando información sobre la variación de la concentración de las sustancias y μ la media que representa el punto de máxima radiación de la fuente. Un aspecto relevante es que si el centro de la formación se encuentra lo suficientemente cerca de la fuente el argumento de la exponencial tenderá a 0 conllevando a que en torno a dicho punto se tenga la máxima concentración de sustancias.

Posteriormente, se establece una posición arbitraria para el centro de la formación que se encuentre relativamente lejos de la fuente para poder evaluar la variación del número de agentes con un radio unitario y del radio con el mínimo de número de agentes posibles.

Lo que quieres evaluar es como es de bueno el cálculo realizado cuando lo comparas con el valor exacto del gradiente de la función de prueba y como influye en la bondad de dicho cálculo el número de agentes empleado y el radio del círculo de la formación



(a) $N = 2$

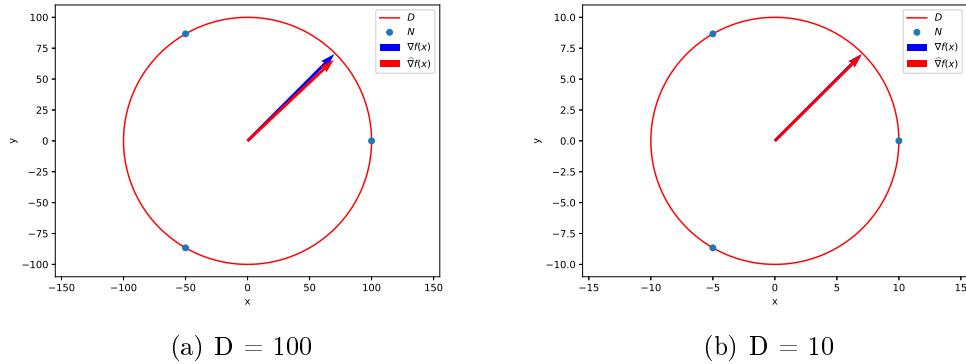
(b) $N = 3$

Figura 2.3: Estimación del gradiente en función del número de agentes
aquí, por tratarse de un ejemplo concreto sí que debes dar datos, posición de la gausiana, valor de la sigma
posición del centro de la formación

Antes de entrar al número de agentes, indica qué es lo que estas representado en la figura no es evidente
Se observa en la figura que al aumentar el número de agentes llega un punto donde el error

es prácticamente despreciable, además de que con dos vehículos es absurdo obtener una

En el paper de Lara, te dice que deben ser tres o más con su algoritmo.
En general, con otros algoritmos es posible estimar el gradiente con dos vehículos, e incluso con uno solo así que no es absurdo em general
estimación del gradiente es por ello, tal como se anticipaba en [referencia bibliográfica], que
el algoritmo funciona siempre y cuando sean 3 o más vehículos. De manera análoga, se
procede a evaluar el efecto del radio:



(a) $D = 100$

(b) $D = 10$

Figura 2.4: Estimación del gradiente en función del radio del círculo

En este caso la relación es inversa al número de agentes, es decir, entre menor sea el radio
menor será el error. No obstante, se debe de tener en cuenta las dimensiones de los vehículos
dado que si el radio es excesivamente pequeño pueden generarse colisiones entre ellos.

Finalmente, en los capítulos posteriores se hará un estudio más detallado del resto de parámetros y sus respectivos efectos sobre la búsqueda de fuentes. Más concretamente, se estudiará cuando el sistema este definido de manera global, antes se debe discutir la importancia que tiene la coordinación de los agentes en torno a la formación circular.

2.2. Algoritmo de control de formación circular

El control de la formación tiene como objetivo evaluar la cooperación y la coordinación en sistemas con múltiples agente, donde su uso recae en impulsarlos a lograr unas restricciones prescritas en sus estados conllevando a formar y mantener una forma geométrica deseada.

Dilo más sencillo: el control de formaciones tiene por objeto conseguir que un sistema formado por múltiples vehículos naveguen manteniendo una forma geométrica deseada. Una forma particular de hacerlo es mediante algoritmos de cooperación entre los agentes

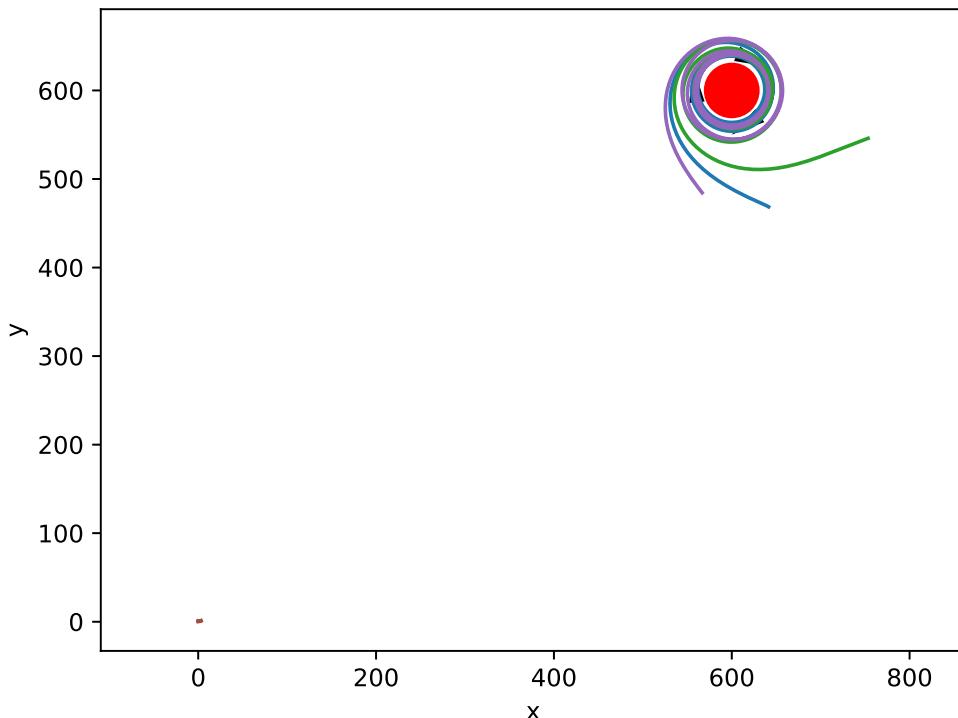


Figura 2.5: Vehículos dispuestos en torno a la formación. El punto rojo representa el círculo al que quieren converger y los diferentes colores que girar en torno a dicho punto son cada uno de los vehículos.

líneas de las trayectorias de cada uno de los vehículos

modelo dinámico

El ~~problema de control~~ que se utilizará considera vehículos tipo monociclo con velocidad constante, es decir, solo se actúa sobre la dirección del vehículo a través de giros coordinados ~~orientación~~ actuando sobre el ángulo de ~~inclinación lateral~~. Definiéndose como objetivo el describir un **algoritmo distribuido para controlar formaciones circulares** aplicados a los USVs comentados en [1.1](#). Estos tendrán velocidades constantes y se actuará sobre el radio del círculo a ser rastreado no sobre la dirección de cada uno de los agentes, es decir, altera la velocidad angular que poseen en torno a un punto central.

~~Me cuesta bastante entender quéquieres decir, 'al ser rastreado no sobre la dirección de cada uno de los agentes ... etc'~~

Es importante destacar que el algoritmo va a tener dos tareas:

- Inicialmente cada uno de los vehículos estarán en posiciones arbitrarias y deberán converger hacia la formación circular definida en torno a un punto central conocido.
~~distribuirse uniformemente~~
- Posteriormente, han de ~~disponerse de manera simétrica~~ en torno a dicha formación. Esto será posible al minimizar el error existente entre sus ángulos como más adelante se comentará.

No obstante, para ambos casos se tiene que tomar en cuenta la manera de comunicarse entre los agentes que se describe a continuación.

Inicialmente, se considera una formación con $N \geq 2$ USVs cuyas posiciones p se definen por $p_i \in \mathbb{R}^2$ con $i \in \{1, \dots, N\}$, en donde los vehículos son capaces de detectar las posiciones relativas con respecto a sus vecinos. Evaluando la relación existente entre los vecinos con ~~esta puede describirse mediante un grafo~~ ~~respecto a su disposición en el plano puedes apreciar que forman~~ un grafo $\mathbb{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ siendo $\mathcal{V} = \{1, \dots, N\}$ los distintos nodos pertenecientes al grafo y $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$. El conjunto de los vecinos del vehículo i está definido por $\mathcal{N}_i \triangleq \{j \in \mathcal{V} : (i, j) \in \mathcal{E}\}$. Dos vértices son adyacentes si $(i, j) \in \mathcal{E}$. Un camino desde el nodo i hasta el nodo j es una secuencia que comienza en i y termina en j , de manera que dos vértices consecutivos son adyacentes, y si $i = j$ el camino se le conoce como ciclo. [\[2\]](#)

que conecta

Asumiendo que el grafo \mathbb{G} esta conectado, es decir existe un camino para cada par de nodos i y j . Se definen los elementos de la matriz de incidencia $B \in \mathbb{R}^{|\mathcal{V}| \times |\mathcal{V}|}$, donde $|\chi|$ representa la cardinalidad del conjunto χ , para \mathbb{G} dado por:

$$b_{ik} \triangleq \begin{cases} +1 & \text{si } i = \mathcal{E}_k^{\text{cola}} \\ -1 & \text{si } i = \mathcal{E}_k^{\text{cabeza}} \\ 0 & \text{Cualquier otro caso} \end{cases} \quad (2.5)$$

En donde $\mathcal{E}_k^{\text{cola}}$ y $\mathcal{E}_k^{\text{cabeza}}$ representan los nodos cola y cabeza de la arista \mathcal{E}_k , es decir, $\mathcal{E}_k = (\mathcal{E}_k^{\text{cola}}, \mathcal{E}_k^{\text{cabeza}})$. Un ejemplo de esto puede observarse en la figura 2.2 en el que se tienen 4 vehículos conformando un grafo en si mismo, en donde, el 1 puede pasarle la información sí
NO forman un grafo el grafo lo defines tú sobre su posición al 4 y 2, el 2 con el 1 y 3, y así sucesivamente.así sucesivamente?

Posteriormente, se debe definir una trayectoria circular de radio $D \in \mathbb{R}^+$ puede ser descrita mediante la siguiente ecuación:

$$C_D \triangleq \{p : \varphi(p) = 0\}, \quad (2.6)$$

$\text{ro}(P)$ definida así sería el punto $(0,0)$ ¿no?

En donde, $\varphi p = p_x^2 + p_y^2$ y $p = [p_x \ p_y]^T$ que representa la posición cartesiana con respecto a un sistema de coordenadas cuyo origen esta en el centro de C_D . El plano \mathbb{R}^2 puede cubrirse con los siguientes conjuntos disjuntos $\varphi_c(p) \triangleq \varphi(p) = c \in \mathbb{R}$, donde cada conjunto de niveles Hablas de un conjunto de niveles pero no se sabe a qué niveles te refieres. Niveles de qué? se define para un valor particular c tal que el radio del circulo resultante no es negativo y, en particular, el conjunto de niveles cero corresponde únicamente a C_D [2], además C_D pertenece al espacio \mathbb{C}^2 y este es regular para cualquier posición exceptuando en el centro, es decir, $\nabla \varphi(p) \neq 0 \iff p \neq 0$ y todo el conjunto de niveles $\varphi_c(p)$ se puede parametrizar.

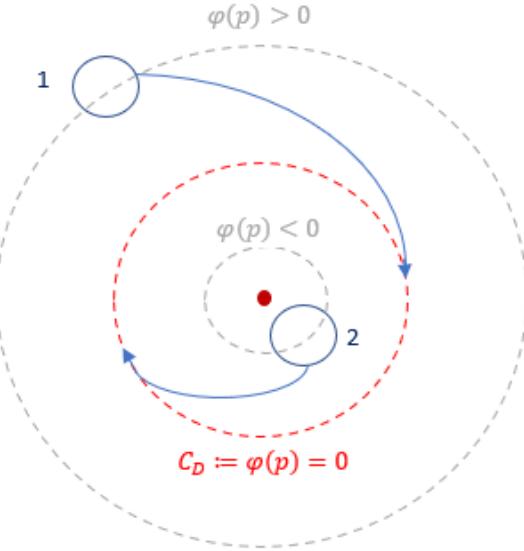


Figura 2.6: Ejemplo del algoritmo de control de formación

Por ende, si se considera que la velocidad ~~unitaria del vehículo~~ se rastrea correctamente, por lo tanto su velocidad angular en torno al centro de C_D esta definida como:

$$\dot{\theta}_i = \frac{1}{r} \quad (2.7)$$

La idea es controlar el ángulo entre vehículos $z = B^T \theta$ modificando la trayectoria descrita por cada uno y haciéndolos converger a la formación circular deseada. Cabe destacar que el valor de θ en la ecuación antes comentada equivale a $\text{atan2}(p_y, p_x) \in (-\pi, \pi]$ para cada una de las posiciones definidas en el plano. Se define:

$$C_i(D, c_i) \triangleq \{p : \varphi(p) = c_i\} \quad (2.8)$$

En donde, $c_i \in \mathbb{R}$ ~~es la~~ siendo la señal de control de formación y el subíndice $i \in \mathcal{V}$ denota cada uno de los vehículos. A partir de dicha ecuación surgen dos situaciones:

- Si c_i se hace muy pequeño, el radio D tenderá a aumentar y con ello se reduce la velocidad angular $\dot{\theta}_i$. Situación del agente 1 en la figura 2.6
- Si c_i se hace muy grande, el radio D tenderá a disminuir y con ello se aumenta la velocidad angular $\dot{\theta}_i$. Situación del agente 2 en la figura 2.6

Se define a $c_i \triangleq {}^i u_D^2 + 2D \cdot {}^i u_D$, donde ${}^i u_D \in \mathbb{R}$ es una acción de control que posee un significado físico más directo al estar directamente imponiendo el radio de la circunferencia de la siguiente forma:

$$x^2 + y^2 - r^2 = {}^i u_D^2 + 2D {}^i u_D \Leftrightarrow x^2 + y^2 - (r + {}^i u_D)^2 \quad (2.9)$$

La acción de control adquiere el siguiente significado ${}^i u_D = k_r \sum_{i=1}^N B_i \cdot e$, definiendo a B_i como cada una de las filas de la matriz de incidencia 2.5, k_r una constante $\in \mathbb{R}^+$ y e se corresponde con el error de formación descrito como $e_{\theta_k}(t) = z_k(t) - z_k^*$, donde $e_{\theta_k} \in (-\pi, \pi]$ con $k \in \{1, \dots, |\mathcal{E}|\}$. Definiendo como objetivo final del algoritmo que cuando $t \rightarrow \infty$ se tenga que $e_\theta \rightarrow 0$ y $p_i(t) \rightarrow C_D$, en otras palabras, que pasado un tiempo el error sea el mínimo posible y a su vez cada uno de los vehículos este en la formación circular.

Creo que no entiendes muy bien lo que hace el algoritmo o al menos aquí no está muy bien explicado. esto no se puede presentar así, cualquier miembro del tribunal podría quejarse de que no se entiende la explicación

2.3. Algoritmo de ascenso de gradiente

Hasta el momento únicamente se ha comentado sobre la cooperación de los agentes para la disposición de una figura geométrica y simétrica requerida o un algoritmo para la localización de fuentes en el espacio. No obstante, se ha dejado de lado el avance de los agentes, es decir, ha de existir un algoritmo que desplace a todo el enjambre hacia la ubicación de la fuente haciendo uso del gradiente estimado.

Para ello, se utiliza el algoritmo de ascenso de gradiente su objetivo principal es desplazar el centro de la formación circular dado que sobre este se encuentra definido el gradiente, la ecuación que lo describe presenta la siguiente forma [3]:

$$c_{k+1} = c_k + \epsilon \nabla f(c_k) \quad c_k = [x, y] \quad \forall_{x,y} \in \mathbb{R} \quad (2.10)$$

Qué es epsilon, hay que explicar que es un peso ajustable

En donde, c_k corresponde con el centro de la formación circular. Al tratarse de un problema definido como un punto máximo de una función, el avance ha de ser estrictamente positivo, es decir, los valores han de ser cada vez mayores para desplazarte hacia dicho punto.

2.4. Operación conjunta de los tres algoritmos

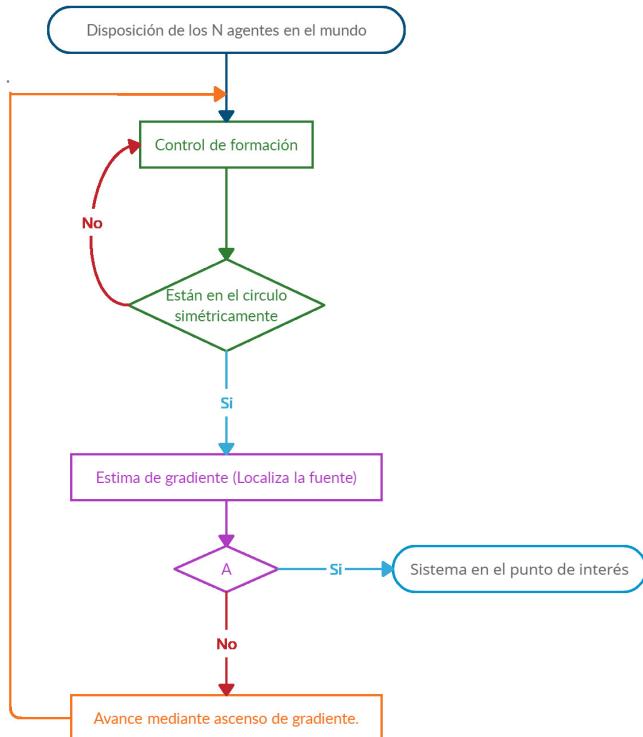


Figura 2.7: Diagrama de flujo que describe la dinámica del sistema.

En la figura 2.7 se pueden apreciar diferentes colores para diferenciar cada uno de los pasos a seguir antes de que los USVs lleguen a la zona con máximas sustancias contaminantes, desglosándolos estos serían:

1. Se disponen los N agentes en el plano, es decir, se conoce la posición de cada uno de los USV en la superficie marítima.
2. Se ejecuta el algoritmo de control de formación circular para hacer que convergan cada uno de los vehículos a la formación circular y a su vez se dispongan de manera simétrica. Un aspecto a destacar es que se tiene que poner un umbral para decidir cuando avanzar. Dicho umbral esta estrechamente relacionado con el error de la formación, es decir, si este valor es lo suficientemente pequeño el enjambre avanza; en caso contrario, se quedarán esperando a que todos los agentes se coloquen en sus sitios.
3. Al ya estar repartidos alrededor de la formación circular, se hace la estimación del ~~el valor del gradiente en el centro de la formación~~ gradiente para obtener ~~la localización de las sustancias que en el algoritmo representa una fuente de radiación definida como máximo~~. En este punto, se dan dos casos que en la figura 2.7 están referidos como A:
 - Si $\widehat{\nabla}f(c_k) \approx 0$ se está cerca de la fuente conformando una **solución satisfactoria**.
 - Si $\widehat{\nabla}f(c_k) > 0$ aun están desplazándose para llegar al objetivo.
4. En caso de darse la segunda de las situaciones antes planteadas, se ha de desplazar el centro de la formación circular mediante el algoritmo de ascenso de gradiente mediante la ecuación 2.10.
5. Antes de volver a estimar el gradiente se debe comprobar el paso 2, en caso de permanecer cada uno de los agentes en la formación y el error es lo suficientemente pequeño, se pasa directamente al paso 3.

Capítulo 3

Resultados experimentales

Al ya conocer como funciona el sistema en su totalidad se estudiarán diversos comportamientos que irán apareciendo en función de variar cada uno de sus parámetros. Para ello, el sistema completo se va a desplazar sobre un plano definido mediante una función gaussiana cuya base se sustenta en la figura 1.2 y en la ecuación 2.4.

Para los primeros 4 casos se hará uso de una función definida únicamente por una gaussiana llamando a $p = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ y a $H = \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}$, en este caso H se va definir como $H = X^T \cdot S \cdot X$, en [Mira la nota que te he dejado sobre las gausianas...](#) donde $X \in \mathbb{R}^2$ describiendo la coordenada con respecto al plano como $X = [x, y]$, además se tiene la posibilidad de desplazar el centro definido como $c = [c_x, c_y]$, finalmente $\begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} \\ S_{yx} & S_{yy} \end{bmatrix}$ es una matriz cuadrada que define su desviación. [Mira la nota sobre las gausianas...](#)

Se particulariza para la simulación del algoritmo que el centro se situé en $c = [600, 600]$, tenga una desviación uniforme en ambos ejes, es decir, $\begin{bmatrix} \frac{1000}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1000}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ y un valor de $p = 1$.

[¿qué es epsilon= 20?](#)

En primer lugar, se evalúa una situación inicial con $N = 4$, $D = 30$ y $\epsilon = 20$. Este caso se va a usar como punto comparativo con el resto que se irán planteando a lo largo del capítulo.

Se reflejará el camino [siguiente](#) por el gradiente estimado en comparación con el [veradero](#), [camino siguiendo el gradiente real](#) la evolución de cada componente del gradiente hasta llegar al punto máximo y finalmente una curva de error que posteriormente se definirá.

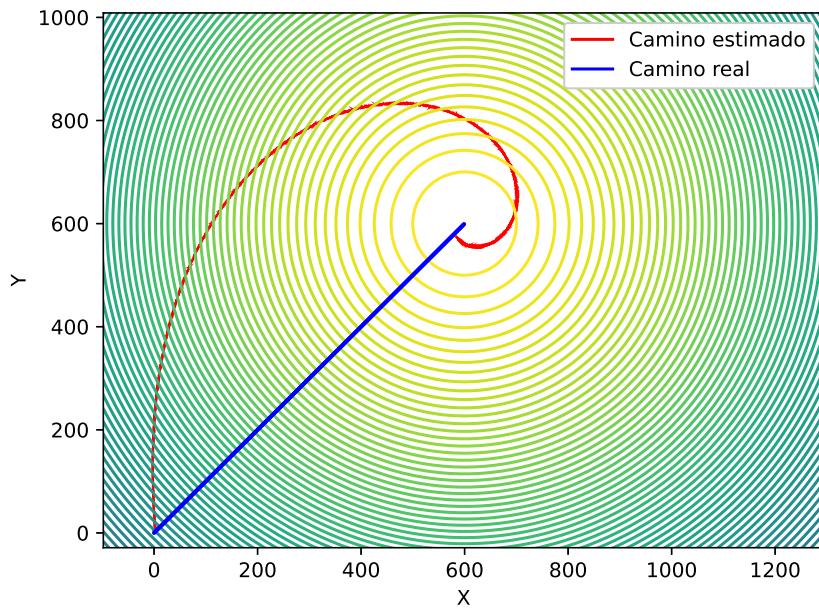


Figura 3.1: Comparativa entre el camino descrito por el gradiente y por el gradiente estimado

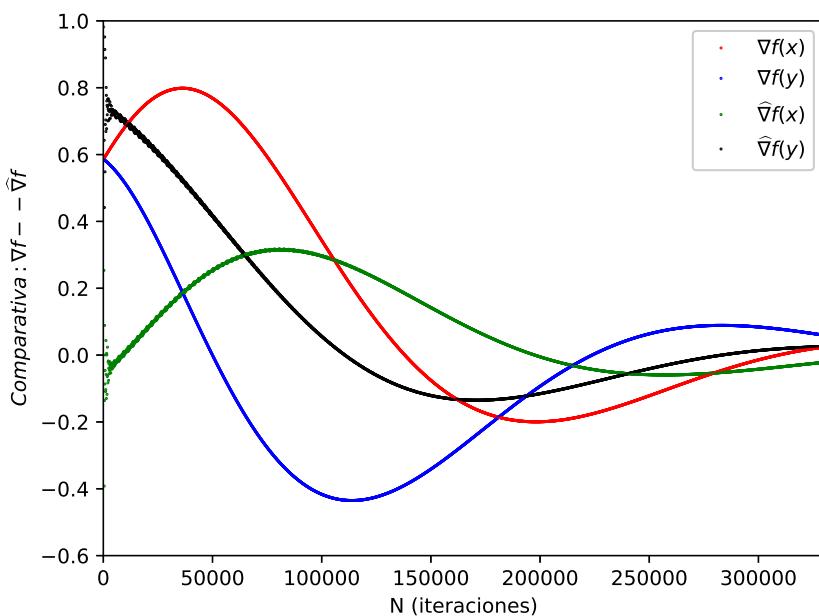


Figura 3.2: Comparativa las componentes del gradiente entre el real y el estimado
En cada punto del recorrido

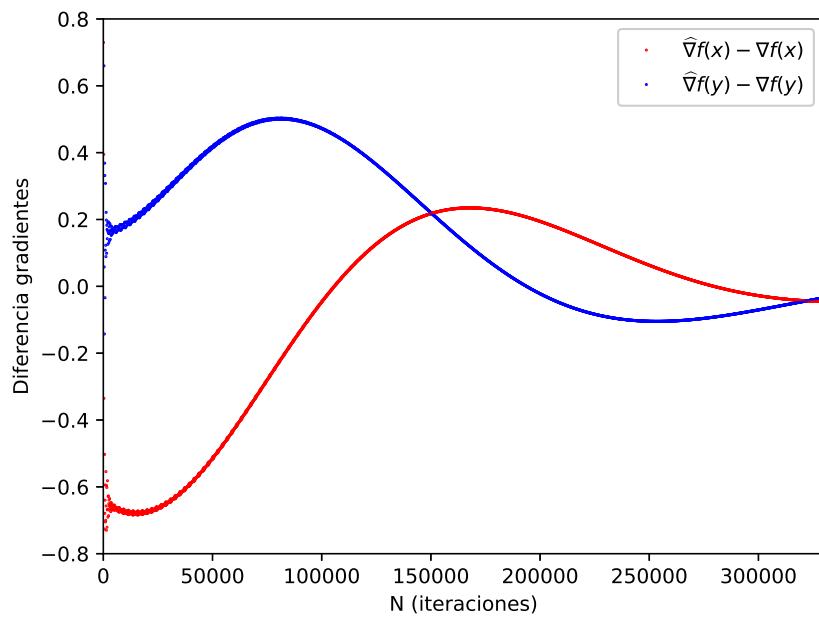


Figura 3.3: Diferencia entre las componentes del gradiente real y estimada

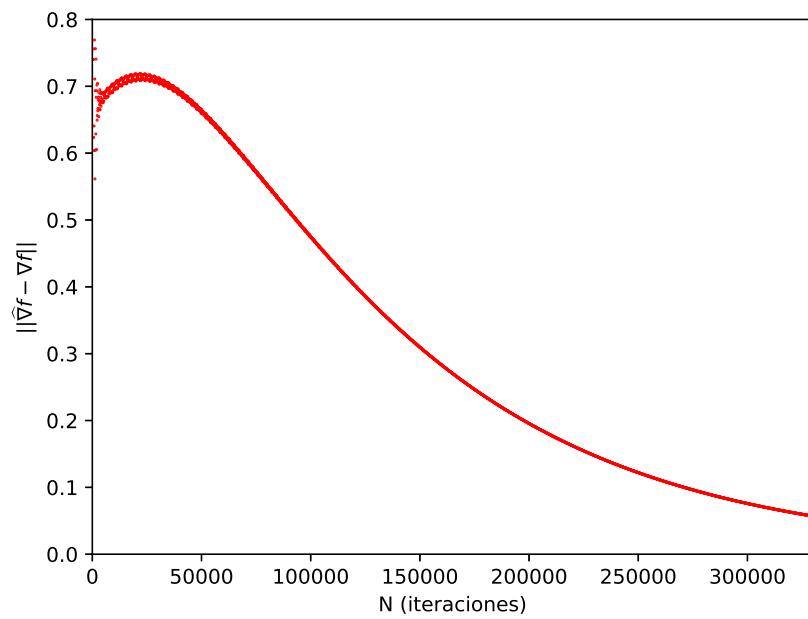


Figura 3.4: Curva de error descrita por la estimación del gradiente

Un comentario destacable es que se deben imponer dos condiciones que necesariamente se deben cumplir para que el algoritmo avance satisfactoriamente. Estas son:

- La primera es que el error de formación sea lo más próximo a 0 posible, es decir, que en la medida de lo que cabe los vehículos estarán dispuestos simétricamente en el círculo pero con un error que se adicionará al existente por la estima del gradiente. Por ello, se decide imponer que como mucho $e_\theta \leq 0,2$.
- La segunda consiste en dar una solución satisfactoria para tomar en consideración que ya se ha llegado al punto de interés. Esto se debe a la dificultad de movimiento cuando estés muy cerca del máximo al ~~aproximarse prácticamente a una recta siendo su~~
~~Ya que el gradiente es prácticamente cero, y, por tanto la formación apenas avanza~~
~~derivaba una constante.~~ Por ello, se impone que para satisfacer condición de máximo, es decir, es solución al problema cuando $f(x) \geq 0,999$.

En la figura 3.1 se aprecia como claramente el avance obtenido por el gradiente estimado difiere claramente del real pasando de una recta a definir prácticamente una espiral. Esto era un resultado bastante esperable al acumular un error equiparable al orden 2 de Taylor visto en la ecuación 2.3, ~~además se le suma el efecto del ascenso de gradiente el cual va a tener un error por cada paso que se da y por ende te irás acercando al máximo con dicha forma.~~ Por otro lado, en la figura 3.2 se observa la variación de cada componente para cada una de las iteraciones con respecto al gradiente real frente al estimado, una cosa a tener en cuenta es que al inicio se ve como tanto la componente en x como en y del gradiente real empiezan en $\cos(45)$ y $\sin(45)$ respectivamente y van variando su valor hasta llegar al punto de máxima concentración de sustancias. Este resultado interesa para poder aproximar al error como la diferencia entre ambos, es decir, ~~lo que se tiene en 3.3. El resultado mostrado en la figura 3.3~~

Recopilando toda esta información y acudiendo a la referencia [1] el error puede aproximarse como:

$$\Delta \nabla f(c) = ||\hat{\nabla}f(c) - \nabla f(c)|| \quad (3.1)$$

En todas las figuras descritas a lo largo de este capítulo en el eje se dispone de ∇f dado que se presupone que siempre va a estar en el centro, tal como se comentó en 2.1.

¿qué quieres decir con esta frase?

la ecuación 3.1

La figura 3.4 describe el error dado por 3.1. En este se ve como claramente según se va acercando el conjunto de robots al máximo el error se va disminuyendo ~~y esto se debe a a la vez que el~~ ~~que el~~ valor del gradiente tiende a 0 traduciéndose eso en la ecuación 2.10 que el avance es menor. Dicha situación se puede aprovechar para evaluar bajo qué condiciones el algoritmo funciona mejor, es decir, tal como se describió al principio del capítulo se tiene que estudiar la relación existente entre $\Delta \nabla f(c)$ y $\hat{\nabla}f(c)$ con los diferentes parámetros del sistema.

3.1. Variación del punto inicial

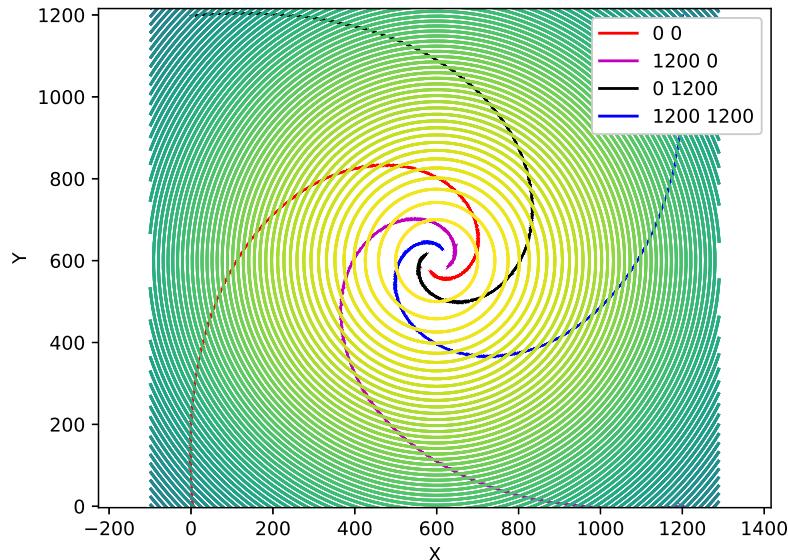


Figura 3.5: Avance del sistema ~~en diferentes posiciones de la gaussiana~~ para diferentes valores de la posición inicial de la formación

Una de las primeras situaciones planteadas es hacer uso de los mismos datos utilizados anteriormente para evaluar el efecto que tiene partir desde diferentes puntos, es decir, en lugar de empezar desde el origen elegir otro punto inicial. Consecuentemente, se escogen **vértices** los otros 3 vértices que pueden conformar una diagonal con respecto al punto máximo siendo estos $x_o = [0, 1200]$, $x_o = [1200, 0]$ y $x_o = [1200, 1200]$. El resultado esperable es que la trayectoria descrita mantenga la forma, pero evidentemente lo hará pasando por otros puntos ~~definidos en el función~~ **la**. Finalmente, se contempla en la figura 3.6 que las iteraciones se mantienen iguales para cada punto de partida, por ende la forma esperada del error terminaría siendo similar a 3.4 en todos los casos.

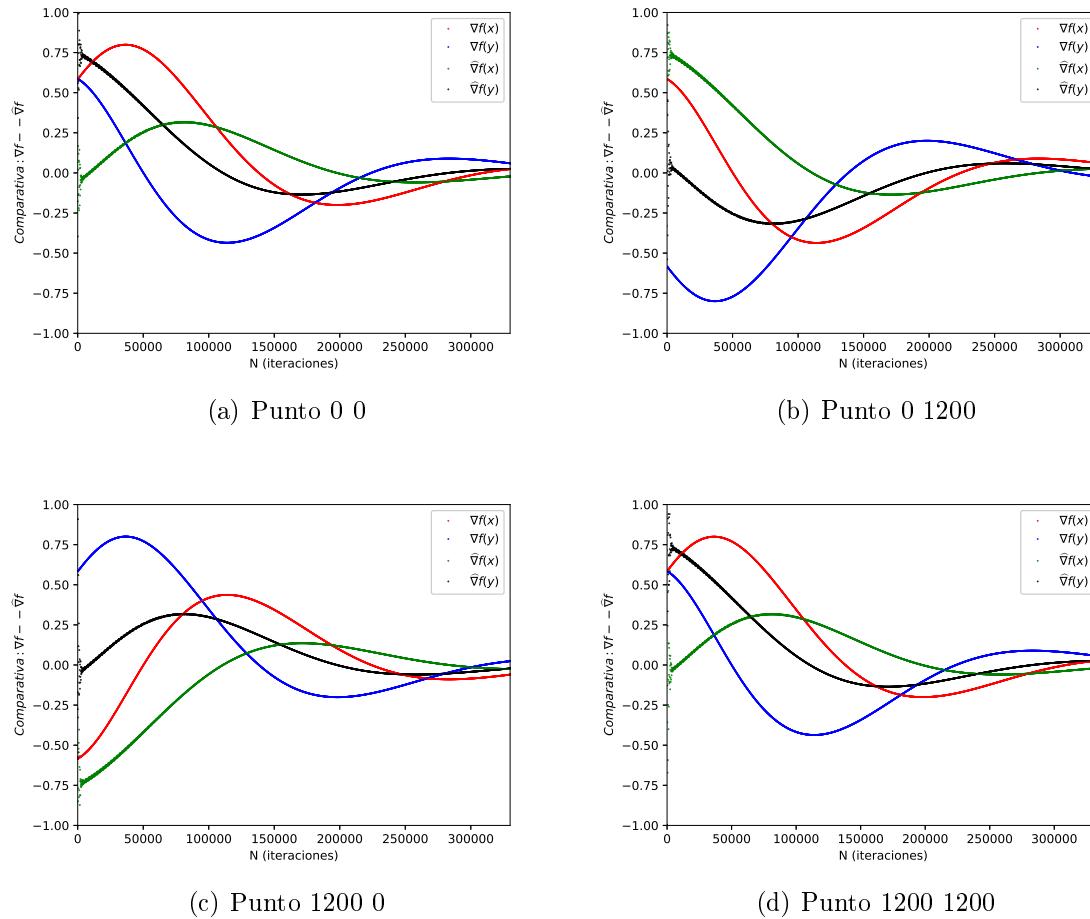


Figura 3.6: Evaluación del gradiente estimado en diversos puntos de la gaussiana

3.2. Variación del número de agentes N

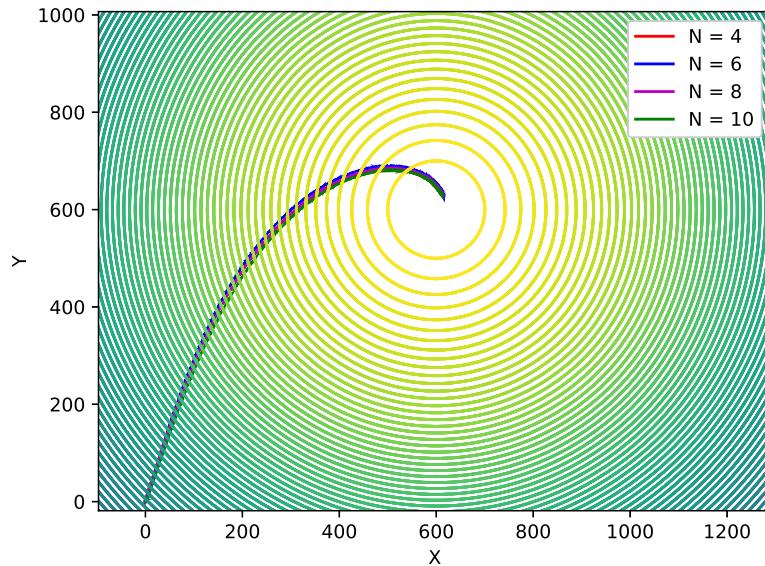


Figura 3.7: Avance del sistema en función del número de agentes N

El número de agentes va a influir de dos maneras:

- Este primer caso directamente sale de leer la ecuación 2.3 y de la gráfica 2.3, en donde No, esto no se deduce de la ecuación 2.3 directamente. Es preciso calcular la dependencia del error con D y N (citar papales de Lara) claramente se aprecia una dependencia inversamente proporcional, es decir, a medida que se aumenta el número de agentes es de esperarse que el error se reduzca y a su vez las iteraciones necesarias para llegar al máximos se reducen.
- No obstante, si se tiene en cuenta el algoritmo de control de formación esto implicaría que cada vez tu número de agentes va creciendo teniendo más nodos dentro del sistema y por ello se ha de pasar mucha más información al presentar mas nodos adyacentes. A esto se le añade el tiempo que se tendría que esperar para que los N vehículos se dispongan de manera simétrica en la formación.

Para obtener estos resultados se impuso que $D = 50$ y $\epsilon = 20$. Se puede apreciar como la trayectoria descrita en 3.7 no cambia significativamente. Sin embargo, si tiene un impacto en el número de iteraciones 3.8 y en la reducción del error 3.9. Para este último caso, se tiene que a partir de un determinado número de agentes el sistema se vuelve invariante, es decir, existe un valor de N límite para la reducción del error.

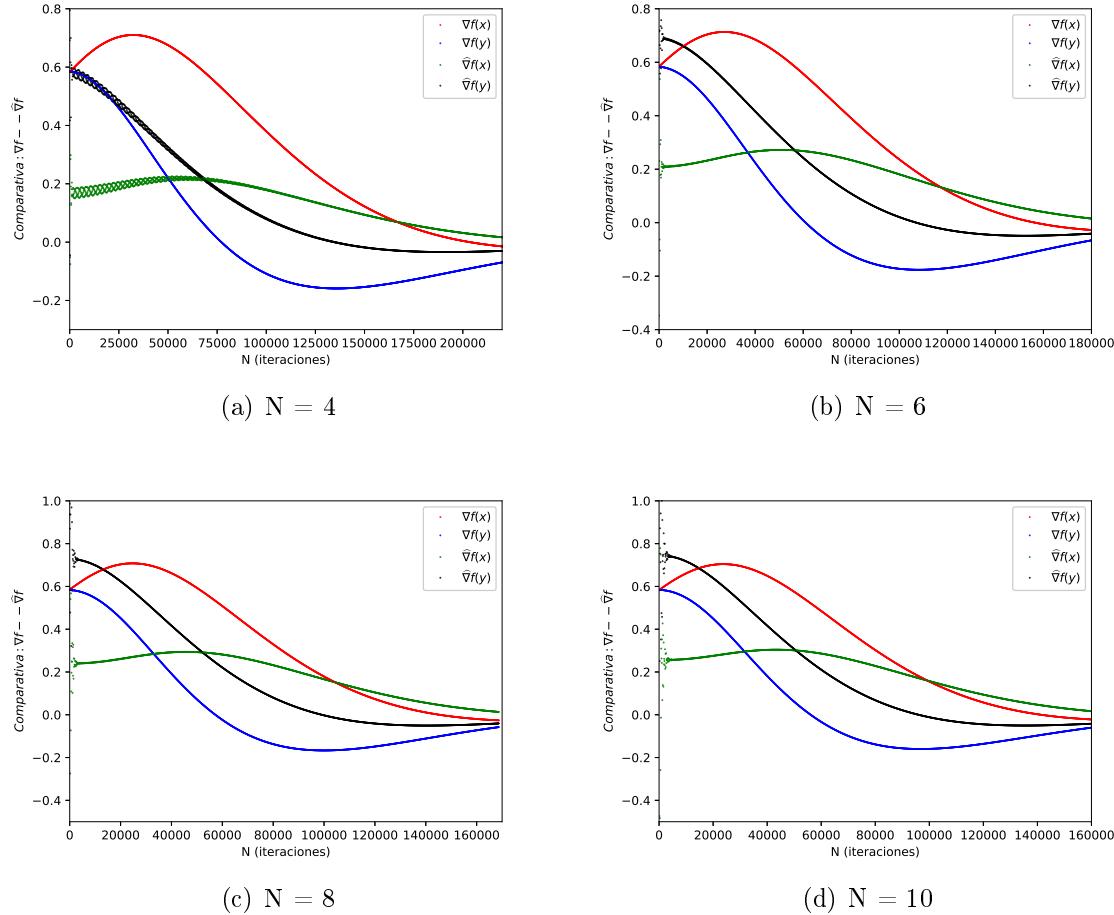


Figura 3.8: Evaluación del gradiente estimado en función del número de agentes N

Adicionalmente, se aprecia que el valor de ambas componentes del gradiente va a oscilar cuando el valor de la función no es próximo a 1 y el número de agentes es relativamente pequeño.

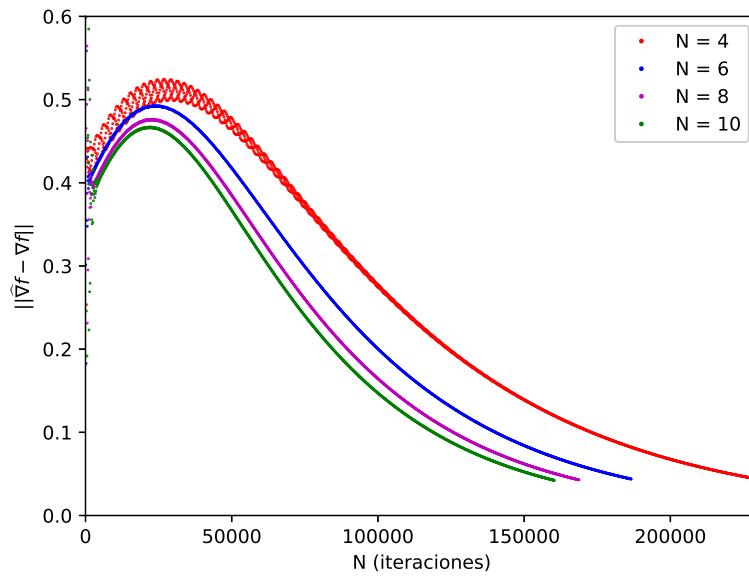


Figura 3.9: Error descrito por el gradiente al variar el número de agentes N

3.3. Variación del radio D

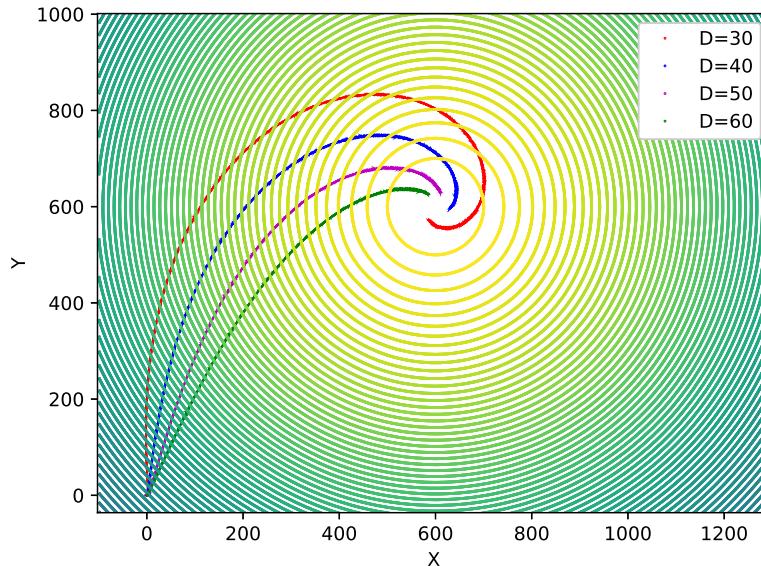


Figura 3.10: Avance del sistema en función del radio D

Imponiendo que $N = 4$ y $\epsilon=20$, se evalúa la influencia del radio D:

De nuevo, la dependencia del error con el radio no la justifica la ecuación 2.3 está descrita en los papeles de Lara.

1. Retomando 2.3 se observa que la función es inversamente proporcional al cuadrado de D. Esto implica que al aumentar el radio provoca que el gradiente estimado disminuya significativamente llevando a que la trayectoria descrita por este se parezca cada vez más a la trazada por el gradiente real. Esto se aprecia en la figura 3.11.
2. En la formación de control va a influir directamente el radio de la circunferencia dado que entre mayor sea D el error prefijado será menos restrictivo y por ende apreciarás comportamientos oscilantes en las zonas lejanas al máximo de radiación.

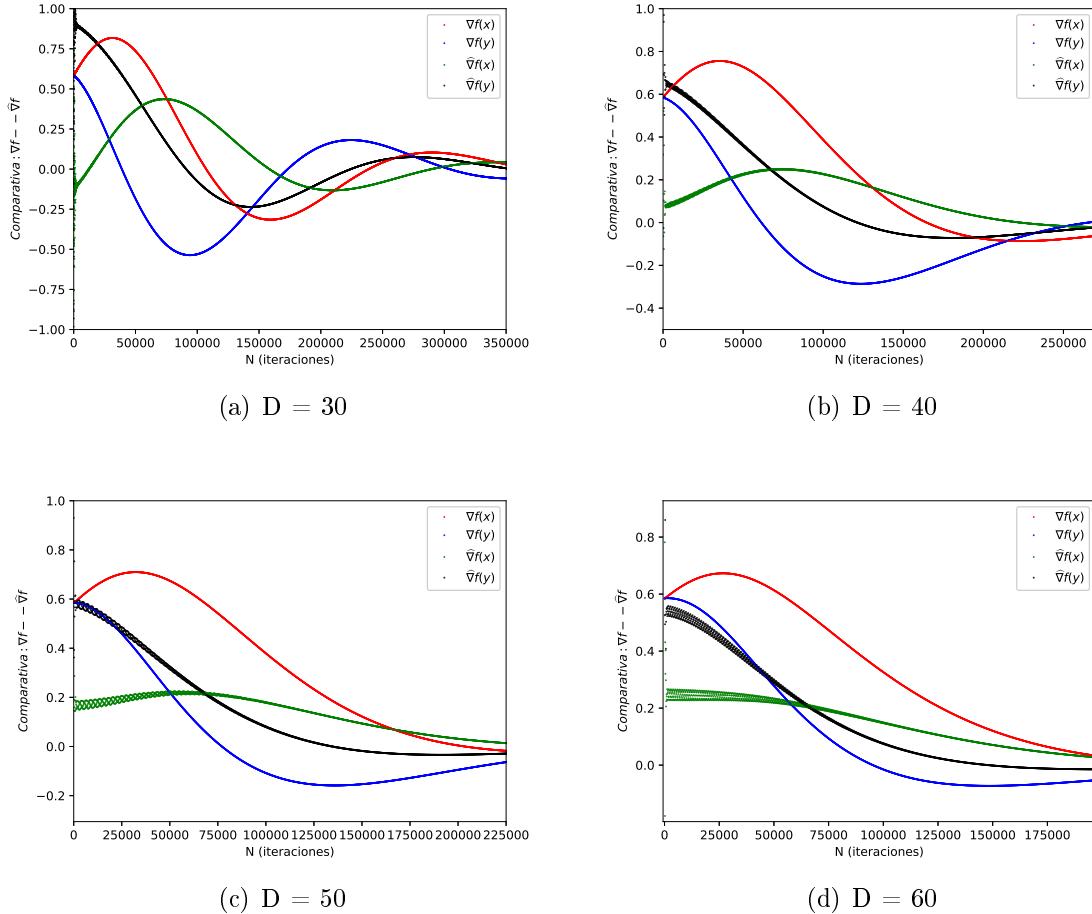


Figura 3.11: Evaluación del gradiente estimado y el real en función del radio D

Comparando directamente 3.9 y 3.12, se observa una mayor influencia del valor de D sobre el de N. Evaluando únicamente al radio D se ve como a medida que su valor decrece el error aumenta y con ello el número de iteraciones de una forma mucho mas notoria que el número de agentes.

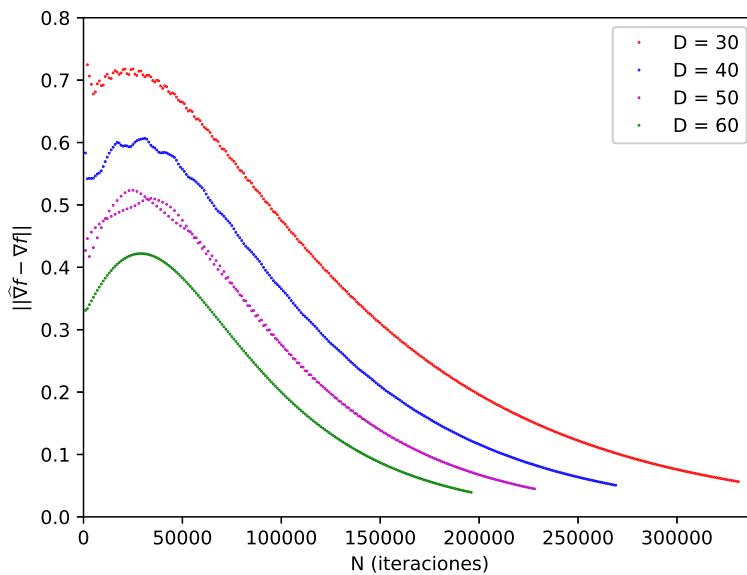


Figura 3.12: Error descrito por el gradiente al variar el radio D

3.4. Variación del peso ϵ

Este caso va a estar estrechamente relacionado con 2.10 dado que si se aumenta el valor de ϵ es de esperarse que el gradiente tome un valor más alto y uno se plantea que posiblemente **NO, el gradiente no aumenta ni disminuye con el peso, sencillamente la formación avaza más en la dirección del gradiente** llegue más rápido al punto máximo. No obstante, al aumentar el peso que multiplica al gradiente a su vez estas arrastrando al error provocando que la espiral se acentúe mucho más. Este efecto es apreciable en la 3.13

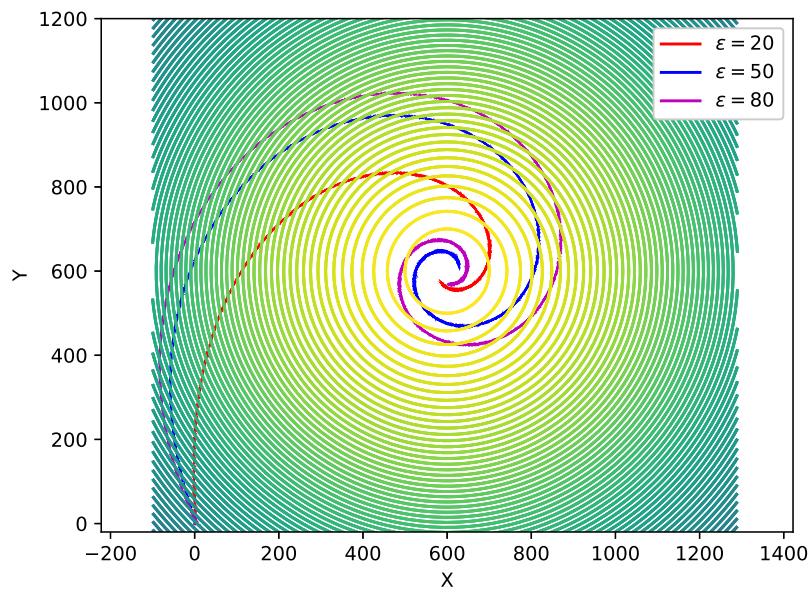


Figura 3.13: Avance del sistema en función del radio peso ϵ

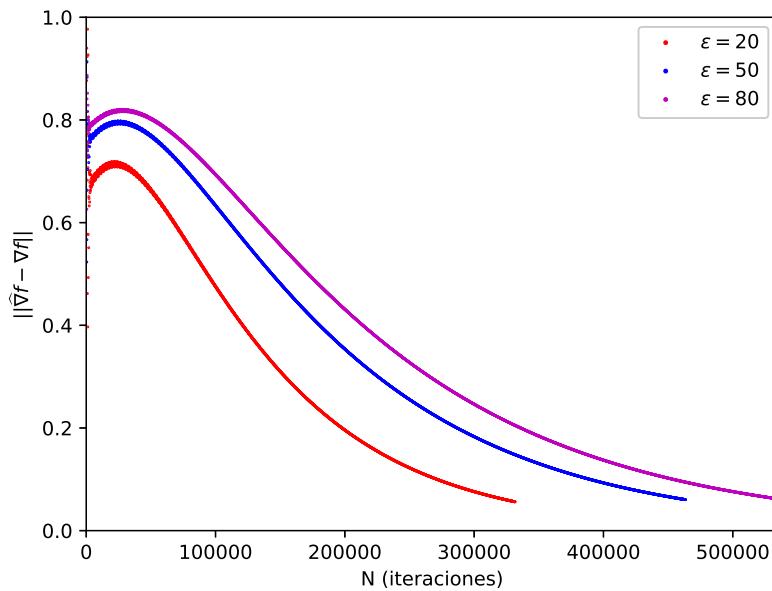


Figura 3.14: Error descrito por el gradiente al variar el peso ϵ

Se observa en la figura 3.14 que aumentar el peso ϵ es perjudicial para el algoritmo dado que un aumento significativo de este valor conllevaría a elevar en exceso tanto el número de iteraciones como $\Delta \nabla f(c)$. Este efecto era justo el contrario cuando se tenía el gradiente real, es decir, si aumentabas el valor de dicho peso se daban casos donde llegabas con menos pasos al máximo. Se destaca que para obtener estas simulaciones se hizo uso de $N = 4$ y $D = 30$

Lógicamente. Con el gradiente real no hay error en la dirección así que puedes tomar pasos muy largos, siempre que no te pases de largo el origen

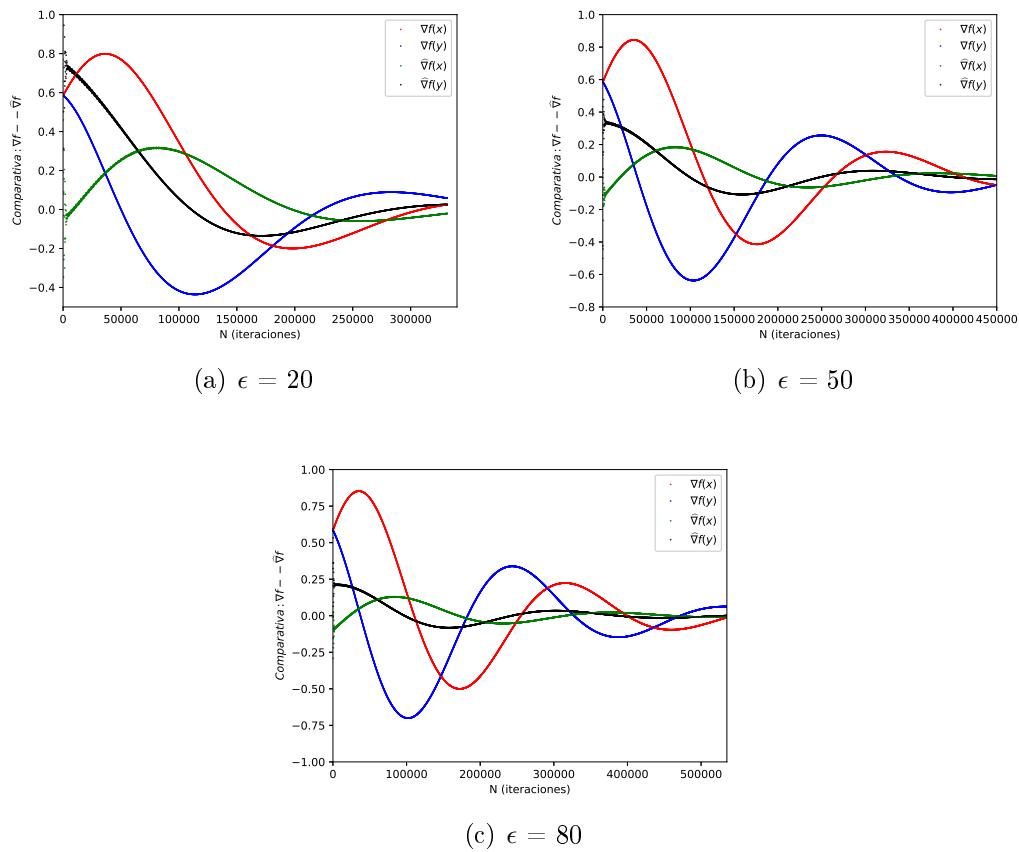


Figura 3.15: Evaluación del gradiente en función del peso ϵ

Finalmente, se procederá a evaluar un caso particular en el que se tienen múltiples fuentes emitiendo con el objetivo de demostrar las limitaciones que presenta la utilización del algoritmo de ascenso de gradiente.

3.5. Evaluación con Múltiples fuentes

En este caso se va a considerar que $N = 4$, $D = 50$ y $\epsilon=20$, además el nuevo plano sobre el que se desplaza el enjambre se describe según:

- Una función gaussiana que va presentar el máximo valor de sustancia con $p = 1$, va a estar rotada 45 es por ello que la simetría sobre el plano se tiene que retocar haciendo que sobre el eje x se tenga mucha mas desviación que sobre el eje y, esto se logra mediante la multiplicación por matrices de rotación al producto matricial anteriormente descrito $H = X^T \cdot S \cdot X$ con una desviación de $\begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} \\ S_{yx} & S_{yy} \end{bmatrix}$ donde $S_{xx} = \frac{1000}{\sqrt{2}}$, $S_{yy} = \frac{500}{\sqrt{2}}$ y $S_{xy} = S_{yx} \neq 0$ cuyo centro va a estar ubicado en el mismo sitio que en el caso anterior.
- Otras dos gaussianas que se encuentran definidas con un valor de $p = 0,9$, sin rotación con $S_{xx} = S_{yy} = \frac{300}{\sqrt{2}}$ y $S_{xy} = S_{yx} = 0$, en donde cada presenta su centro en dos sitios diferentes siendo $c_2 = [0, 1200]$ y $c_3 = [1200, 0]$.

Al sumarlas se obtiene:

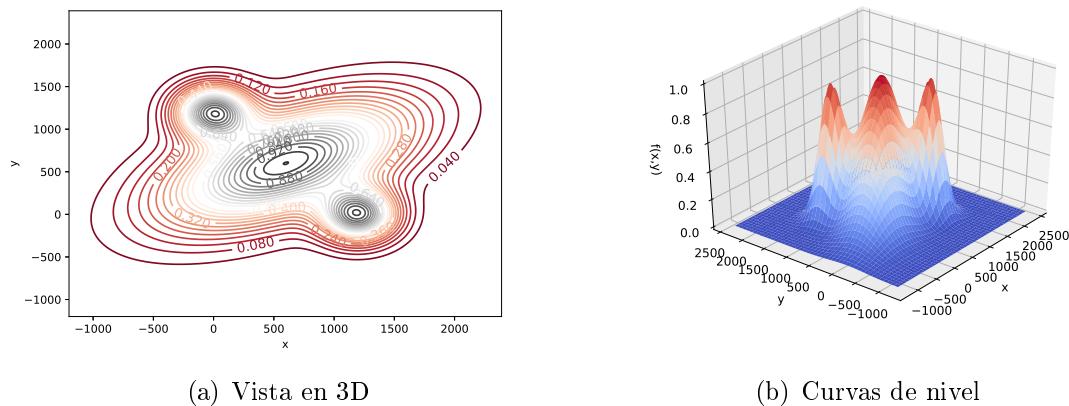


Figura 3.16: Nueva función ~~cuadrática~~ resultado de la suma de 3 gaussianas

Con esta nueva función surgen dos casos de interés:

1. El primero es que se tienen múltiples máximos, en concreto, dos locales y el global.

Por lo que puede suceder que dependiendo del número de agentes N , el radio D o el peso ϵ vaya hacia cualquiera de los tres. Sin embargo, como ya se hizo un estudio para cada uno de ellos directamente se evalúan las posiciones de partida del enjambre para observar hacia qué fuente de emisión se dirige.

2. El segundo son los puntos silla generados entre los tres máximos. Estos haciendo uso del gradiente real conformaban un problema al utilizar el algoritmo de ascenso de gradiente al hacerse $\nabla f(c) = 0$. No obstante, se verá que en este caso eso no va a suceder.

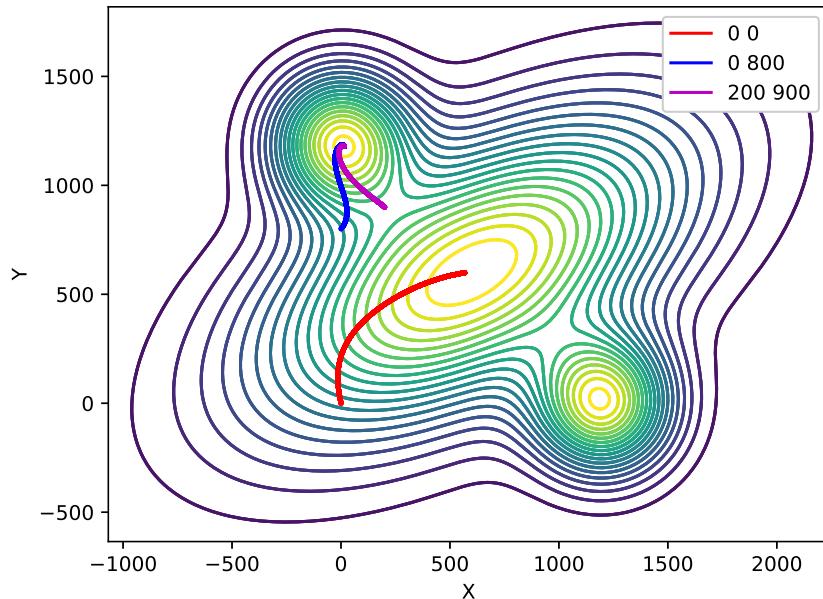


Figura 3.17: Avance definido sobre el plano con múltiples fuentes en tres puntos diferentes

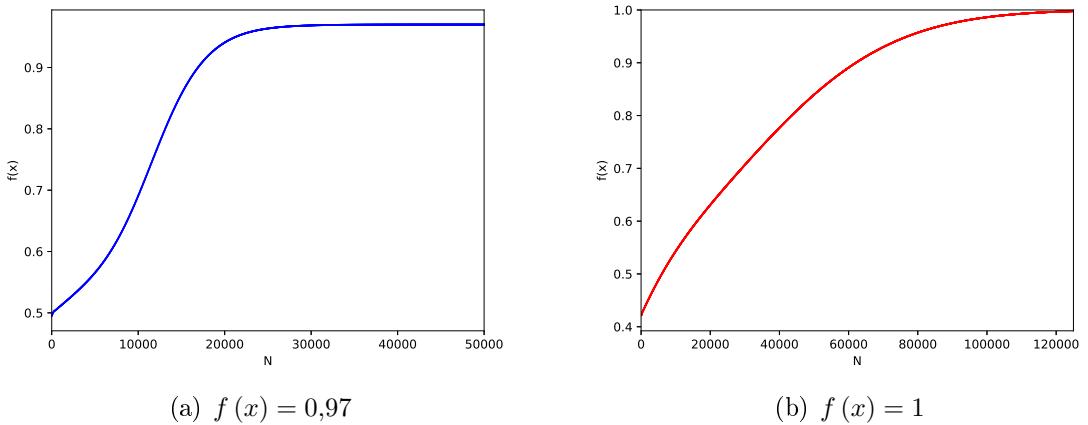


Figura 3.18: Comparación del valor máximo de ambas fuentes

Comparando los valores obtenidos para los caminos azul y rojo de 3.17 a partir de la figura 3.18, se observa como dados dos posiciones iniciales el algoritmo no es capaz de distinguir cual de los dos es el que posee mayor concentración de sustancias. Esto se debe a una limitación del propio algoritmo el cual únicamente te va a estar continuamente elevando el valor de la función hasta encontrar un máximo más no tendrá la capacidad de distinguirlos.

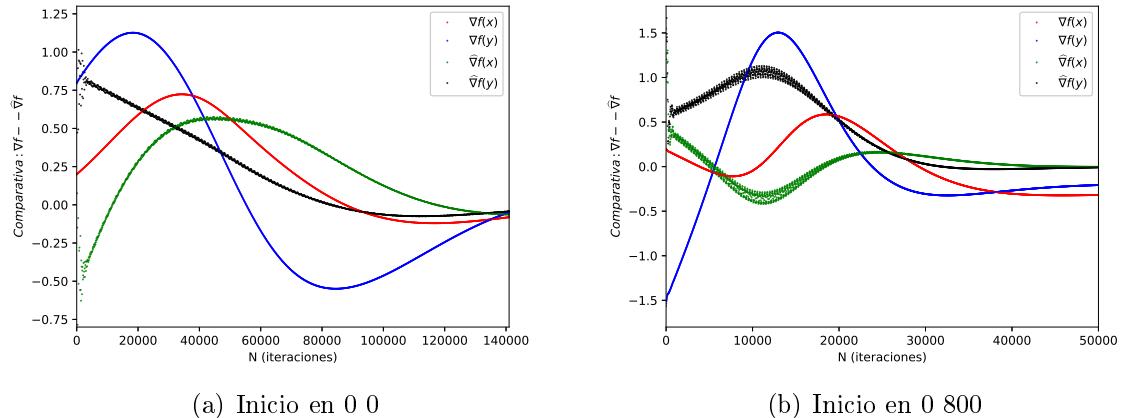


Figura 3.19: Evaluación del gradiente estimado y el real según la fuente objetivo

Una segunda cosa que surge de recorrer los máximos locales es que definidos de forma plana
~~donde, como se dijo antes, el valor del gradiente es casi nulo~~
en el centro, en ~~donde casi definen una recta que anteriormente se dijo que el valor de su~~
~~derivada era una constante~~ y por ende el avance por dicha zona va a ser prácticamente
imposible. Esto se refleja si se observan las componentes del gradiente estimado en la figura
[3.19](#) estas conforman una recta horizontal que no esta exactamente en cero pero tiende hacia
dicho valor, es decir, esta acotada. Sobre todo es muy pequeña con lo que los pasos del algoritmo del gradiente son casi nulos.
Cualquier error en la estima del gradiente, hará que la formación empiece a oscilar

Por otro lado, la trayectoria de color rosa en [3.17](#) consistía en definir una situación inicial
que se encuentre justo sobre el punto silla. En el caso de utilizar el gradiente estimado esto
no va a suponer un problema al tener el gradiente un error, en este caso dicho error va a
representar una ventaja dado que permite al algoritmo salirse de ese tipo de situaciones,
es decir, los puntos sillas pasan desapercibidos gracias a la operación conjunta de los tres
algoritmos.

Capítulo 4

Conclusiones y futuras investigaciones

Al evaluar el comportamiento del sistema completo variando sus parámetros más relevantes y en dos situaciones completamente diferentes se pueden extraer las siguientes conclusiones:

En primer lugar, la operación conjunta de los tres algoritmos satisfacen los objetivos dispuestos en 1.2 que consistía en determinar la zona de máxima concentración de sustancias en superficies marítimas. Sin embargo, dados los distintos resultados obtenidos se puede deducir que determinar el número de agentes, el radio y hasta el peso correspondiente al avance, se deben elegir con especial cuidado dado que una mala elección de cualquiera de estos tres puede conllevar a que el sistema se ralentice, no sea fiable o incluso que ni llegue al punto ~~de inflexión-~~ ~~máximo~~

Por otro lado, recopilando todos los resultados gráficos obtenidos se aprecia que el sistema en sí es mucho más sensible al radio de la formación que al número de agentes. Este último llegando a ser incluso despreciable a partir de un valor N_{max} , si retomas la referencia [3] acota al error de la siguiente forma:

Esta discusión debes tenerla en la sección en que valoras el efecto del radio

$$\|\hat{\nabla}f(c) - \nabla f(c)\| \leq DL \quad (4.1)$$

No el valor del escalar lo delimita el error de la serie de Taylor original de la función

En donde, L es un escalar delimitado por $\varphi_i(D, c) \leq L \cdot \|r - c\|^2$. Si bien es cierto que el error depende del radio de la formación D de tal forma que un aumento conlleva a tener más error al darle mayor margen sobre la desigualdad 4.1. No obstante, el algoritmo a su vez debería de estar acotado por el número de agentes que a pesar de influir en menor medida también deben de tomarse en cuenta para dicha cota.

Un aspecto de vital importancia es el propio avance del algoritmo definido por el ascenso de gradiente. En este se recogen los dos errores dados por la estima de gradiente del algoritmo de búsqueda de fuentes y el error asociado al ángulo entre vecinos adyacentes del algoritmo de control de formación, a su vez se le añade que contiene el valor del peso ϵ . Por lo que si juntas una mala definición de parámetros con los errores acumulados se pueden describir espirales incluso más pronunciadas que las referidas en 3.13.

Tanto en como en [1] como en [3] dan una forma de corregir el error dado por la mala elección del peso ϵ y las limitaciones apreciadas del algoritmos de ascenso de gradiente. Esto es hacer uso del Newton-Raphson, en el que aprovechas el hessiano de la función para desplazarte sobre su derivada. No obstante, se debe de estimar tal como se hizo con el gradiente pero para ello se ha de definir un vehículo adicional en el centro de la formación dificultando un poco la coordinación entre ellos.

Finalmente, un reto que actualmente se plantea es como dotar a un único vehículo la capacidad de dirigir al enjambre entero sin que el resto sepan absolutamente nada, es decir, solo un único agente posee información sobre el sistema. Esto traducido, por ejemplo, al algoritmo de búsqueda de fuentes sería si solo uno de los vehículos sabe donde esta el gradiente que técnicas habrían que implementar para que el resto de los agentes que conforman al sistema sepan hacia donde tienen que ir sin poseer ningún tipo de información.

Bibliografía

- [1] L. Briñón-Arranz, L. Schenato, Member, IEEE, and A. Seuret. Distributed Source Seeking via a Circular Formation of Agents Under Communication Constraints. *IEEE Trans. on Control of Network Systems*, vol. 3, no. 2, June 2014.
- [2] H. Garcia de Marina, Z. Sun, M. Bronz, and G. Hettenberger. Circular formation control of fixed-wing UAVs with constant speeds. Conference Paper - September 2017.
- [3] L. Briñón-Arranz, A. Renzaglia, and L. Schenato. Multi-Robot Symmetric Formations for Gradient and Hessian Estimation with Application to Source Seeking. *IEEE Trans. on Robotics*, IEEE, 2019, 35 (3), pp.782-789.
- [4] L. Briñón Arranz, A. Seuret, and C. Canudas de Wit. Cooperative Control Design for Time-Varying Formations of Multi-Agent Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), 2014, 59 (8), pp.2283-2288.