Clase 4: Funciones Lipschitz

Definición. Dada una aplicación $\boldsymbol{f} : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, diremos que $\boldsymbol{f}$ es *(globalmente) Lipschitz en* el conjunto U cuando existe una constante $L > 0$ tal que

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})| \leq L|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|, \qquad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in U.$$

Cuando necesitemos ser más precisos, diremos que $\boldsymbol{f}$ es una *aplicación L-Lipschitz*.

Recordamos que todas las normas que podemos considerar sobre un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita son equivalentes, luego no importa qué normas concretas aparecen en la definición anterior. Es decir, si cambiamos las normas de los espacios de salida y llegada, entonces $\boldsymbol{f}$ continua siendo Lipschitz, aunque probablemente con una *constante de Lipschitz* diferente. Por tanto, de aquí en adelante, $|\cdot|$ indica una norma arbitraria de $\mathbb{R}^n$. Reservaremos el símbolo $\|\cdot\|$ para denotar normas más complicadas, como por ejemplo normas en espacios de funciones o normas matriciales asociadas a normas vectoriales.

Observación. Los espacios métricos son el marco natural para la definición de las funciones Lipschitz, pero hemos preferido simplificar la exposición.

Observación. Cualquier aplicación L-Lipschitz con $L < 1$ es, por definición, L-contractiva.

Observación. Vamos a interpretar geométricamente las aplicaciones L-Lipschitz cuando $n = m = 1$. Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es L-Lipschitz cuando su gráfica cumple

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\right\} \subset \bigcap_{x_0 \in \mathbb{R}} C(x_0; L)$$

donde $C(x_0; L) := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y - f(x_0)| \leq L|x - x_0|\right\}$ es un cono de vértice $(x_0, f(x_0))$.

Ejemplo 1. La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, es (globalmente) 1-Lipschitz en toda la recta real. Para probarlo basta observar que $|f(x) - f(y)| = \big||x| - |y|\big| \leq 1 \cdot |x - y|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$. ▲

Ejemplo 2. La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, no es Lipschitz en toda la recta real. Lo probamos por reducción al absurdo. Supongamos que es L-Lipschitz en $\mathbb{R}$ para alguna constante $L > 0$. Entonces,

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Como la función f es derivable en $\mathbb{R}$, sabemos que

$$\lim_{y \to x} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} = |f'(x)|, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Combinando la desigualdad de la condición L-Lipschitz con la identidad anterior, obtenemos que

$$L \geq |f'(x)|, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lo cual es imposible, pues la derivada no está acotada: $\lim_{|x| \to \infty} |f'(x)| = 2 \lim_{|x| \to \infty} |x| = +\infty$. ▲

Ejemplo 3. La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$, no es Lipschitz en el intervalo $(0, 1)$. De nuevo, por reducción al absurdo. Supongamos que es L-Lipschitz en $(0, 1)$ para alguna constante $L > 0$. Entonces, f es derivable en $(0, 1)$ y repitiendo los argumentos del ejemplo anterior deducimos que

$$L \geq |f'(x)|, \qquad \forall x \in (0, 1).$$

Lo cual es imposible, pues la derivada "explota" en el origen: $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = +\infty$. ▲

Definición. Diremos que una aplicación $\boldsymbol{f} : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es *localmente Lipschitz en* el abierto U cuando dado un punto arbitrario $\boldsymbol{x}_0 \in U$, existe una constante $L_0 > 0$ y un entorno abierto $V_0 \subset U$ del punto $\boldsymbol{x}_0$ tales que

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})| \leq L_0|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|, \qquad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V_0.$$

Es decir, una aplicación es localmente Lipschitz en un abierto U cuando podemos definir una constante de Lipschitz entorno a cualquier punto $\boldsymbol{x}_0 \in U$. Ahora bién, es posible que la constante de Lipschitz "explote" (es decir, se haga infinita) si intentamos que el abierto V_0 cubra todo U.

Observación. $\boldsymbol{f}$ globalmente Lipschitz en $U \Rightarrow \boldsymbol{f}$ localmente Lipschitz en $U \Rightarrow \boldsymbol{f}$ continua en U.

Teorema. *Sea U un abierto convexo de $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{f} \in C^1(U;\mathbb{R}^m)$ y*

$$L := \sup_U \|\mathrm{D}\boldsymbol{f}\|,$$

donde $\|\mathrm{D}\boldsymbol{f}\|$ denota la norma matricial asociada a las normas vectoriales escogidas en el espacio de salida $U \subset \mathbb{R}^n$ y en el espacio de llegada $\mathbb{R}^m$. Entonces:

1. *$L < \infty \Rightarrow \boldsymbol{f}$ es (globalmente) L-Lipschitz en U.*
2. *$L = \infty \Rightarrow \boldsymbol{f}$ no es (globalmente) Lipschitz en U.*

Demostración. Sean $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in U$ dos puntos diferentes, pero arbitrarios. Como U es convexo, el segmento

$$[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}] := \{\boldsymbol{y} + t(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) : 0 \le t \le 1\}$$

que une los dos puntos está contenido en U. Vamos a probar la desigualdad

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})| \le \sup_{\boldsymbol{\xi} \in [\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]} \big\|\mathrm{D}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\xi})\big\| |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|.$$

Para eso, consideramos la parametrización $\boldsymbol{\xi} : [0,1] \to U \subset \mathbb{R}^n$ y la función $\boldsymbol{g} : [0,1] \to \mathbb{R}^m$ dadas por

$$\boldsymbol{\xi}(t) = \boldsymbol{y} + t(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}), \qquad \boldsymbol{g}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\xi}(t)).$$

Aplicando el Teorema Fundamental de Cálculo, obtenemos que

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{g}(1) - \boldsymbol{g}(0) = \int_0^1 \boldsymbol{g}'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{D}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\xi}(t))\boldsymbol{\xi}'(t)\,\mathrm{d}t = \left(\int_0^1 \mathrm{D}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\xi}(t))\,\mathrm{d}t\right)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}).$$

Tomando normas y acotando, queda

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})| \le \left\|\int_0^1 \mathrm{D}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\xi}(t))\,\mathrm{d}t\right\| |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| \le \left(\int_0^1 \|\mathrm{D}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\xi}(t))\|\,\mathrm{d}t\right) |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| \le \sup_{\boldsymbol{\xi} \in [\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]} \big\|\mathrm{D}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\xi})\big\| |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|.$$

Una vez tenemos la desigualdad anterior, el primer punto del teorema es directo. Concretamente, si $L := \sup_U \|\mathrm{D}\boldsymbol{f}\| < \infty$, entonces

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})| \le \sup_{\boldsymbol{\xi} \in [\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]} \big\|\mathrm{D}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\xi})\big\| |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| \le L|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|, \qquad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in U.$$

El segundo punto usa el mismo argumento que los ejemplos 2 y 3. □

Ejemplo 4. La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{5 + x^2}$, es de clase $C^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ y $L := \sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|x|}{\sqrt{5+x^2}} = 1$, luego f es (globalmente) 1-Lipschitz en $\mathbb{R}$. ▲

Observación. Si U es un abierto de $\mathbb{R}^n$, entonces: $\boldsymbol{f}$ de clase C^1 en $U \Rightarrow \boldsymbol{f}$ localmente Lipschitz en U.

Ejemplo 5. La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, es localmente Lipschitz en toda la recta real. ▲

Teorema. *Sea $\boldsymbol{f} : U \to \mathbb{R}^m$ una aplicación definida en un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$. Entonces $\boldsymbol{f}$ es localmente Lipschitz en U si y sólo si la restricción $\boldsymbol{f}|_K$ es (globalmente) Lipschitz en cualquier compacto $K \subset U$.*

Demostración. Ejercicio para el lector, pero ¡ojo!, no es tan directo como parece. En particular, si $\cup_{i=1}^r U_i$ es un recubrimiento finito de un compacto $K \subset U$ formado por conjuntos abiertos tales que $\boldsymbol{f}$ es L_i-Lipschitz en U_i y $L = \max_{1 \le i \le r} L_i$, no se puede afirmar que $\boldsymbol{f}$ es L-Lipschitz en K. □

Definición. Dada una aplicación continua $\boldsymbol{f} : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$, diremos que es *localmente Lipschitz respecto la variable $\boldsymbol{x}$ (uniformemente en la variable t) en* el abierto Ω cuando dado un punto arbitrario $(t_0, \boldsymbol{x}_0) \in \Omega$, existe una constante $L_0 > 0$ y un entorno abierto $V_0 \subset \Omega$ del punto $(t_0, \boldsymbol{x}_0)$ tales que

$$|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y})| \le L_0|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|, \qquad \forall (t, \boldsymbol{x}), (t, \boldsymbol{y}) \in V_0.$$

Observación. $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ de clase C^1 en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \Rightarrow \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ localmente Lipschitz respecto la variable $\boldsymbol{x}$ en $\Omega \Rightarrow$ Para todo compacto $K \subset \Omega$ existe una constante $L > 0$ tal que

$$|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y})| \le L|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|, \qquad \forall (t, \boldsymbol{x}), (t, \boldsymbol{y}) \in K.$$