

**1) חידה (המספרים של סוסו ומשה):**

**נבחרים בחשאי שני מספרים שלמים, הגדולים מ-1.**

**סוסו** מקבל את **הסכום** שלהם, **ומשה** מקבל את **המכפלה** (היא קטנה מ-200, אבל סוסו לא יודע זאת בהכרח).

**סוסו אומר למשה: "אני יודע שאתה לא יכול לדעת מהם המספרים"**

משה עונה לו: "עכשיו אני יודע מהם המספרים, טמבל"

סוסו אומר: "אז מה? עכשיו גם אני יודע, חלאה"

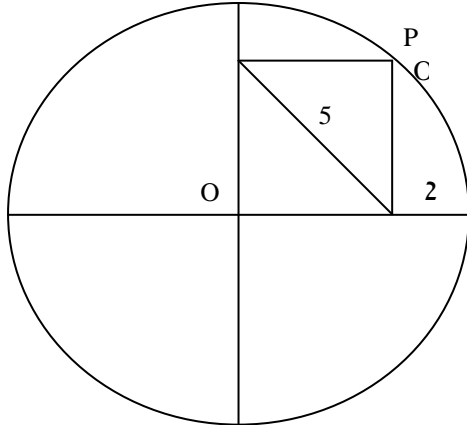
האם עכשיו **אתה** יודע מהם המספרים? (אל תקבל רושם מוטעה בגלל השמות של הגיבורים, הם דווקא מאוד חכמים).

הפתרון בהמשך, אבל תנסה לבד, לפחות להגיע לדרך.

בהצלחה...

## 2) גיאומטריה:

בהנחה שכל זווית שנראית ישרה אכן כזאת, ו- $O$  הוא מרכז המעגל, מהו רדיוס המעגל?



### 3) חידות מטבעות:

א. יש לך 12 מטבעות, כשמשקל אחת שונה (לא ידוע אם קלה או כבדה מהאחרות). עליך למצוא אותה באמצעות 3 שקילות!

ב. יש בידך 10 שקים, כשבכל שק 10 מטבעות. ב-9 מהשקים המטבעות שוקלות 1 גרם כל אחת, ואילו בשק אחד המטבעות מזויפים ושוקלים 2 גרם כל אחת. יש לך משקל (scale) דיגיטלי. איך תמצא מהו השק המזויף באמצעות שקילה אחת?

ג. (סיבוב שלי) כמו בסעיף הקודם, אבל עכשיו אתה יודע ש- $X$  מהשקים מזויפים (שבכל שק הפעם יש 1000 מטבעות), כש- $X$  בין 0 ל-10. איך תמצא מהם השקים המזויפים באמצעות שקילה אחת?

ד. הפעם משמעותית יותר קשה: אותו דבר כמו בסעיף א', רק שהפעם עליך לתכנן את שלושת השקילות מראש, ורק לאחר מכן לבצע את שלושת השקילות, ובהתאם לתוצאות למצוא את המטבע המזויף.

**4) נורות ומפסקים**

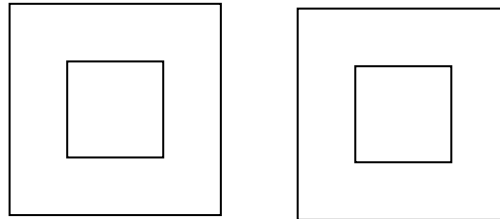
יש חדר ובו 3 נורות כבויים. מחוץ לחדר 3 מפסקים. אדם עומד מחוץ לחדר (הוא לא רואה את הנורות) ועליו לקבוע לאיזה מתג שייכת כל נורה. מותר לו להיכנס לחדר פעם אחת בלבד. כיצד יעשה זאת?

### 5) מנהרה

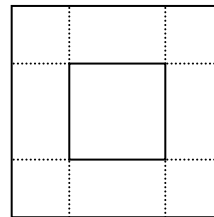
4 חברים ממצליח צריכים לעבור מנהרה חשוכה מתחת להר. לאיתי, לניר, לבאדו כץ (זה איש אחד) ולאיליה לוקח 1, 2, 9 ו-10 דקות כל אחד בהתאמה לעבור את המנהרה (בכוון אחד) (איתי רץ, ניר הולך מהר, מיכאל מדלג בגמלוניות ואיליה מתגלגל בזולה). יש לכולם נר אחד. הנר דולק 17 דקות בלבד! המנהרה צרה, ויכולים לעבור בה לכל היותר 2 אנשים בבת אחת. חייבים לעבור עם נר במנהרה. כמובן שמהירות המעבר במנהרה נקבעת לפי האדם האיטי. בואו עזרו להם ילדים, ואמרו להם: כיצד יעברו הארבעה את המנהרה? (אה.. כשאסור דברים הבאים: לחלק את מכות, ללכת עם תחת פתוח, וואה..מ לשחק בטנקים!) (מצחיק)

### 6) היטלים

כיצד נראה הגוף המלא ששניים מהיטליו נראים כך:

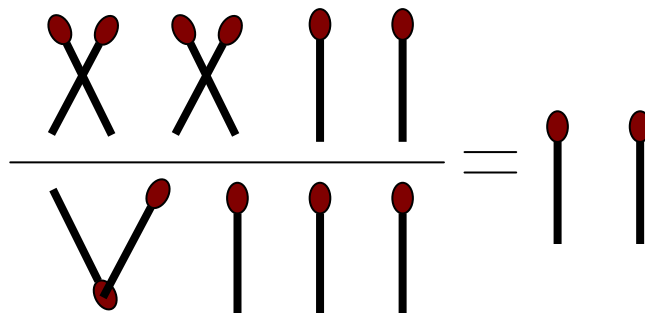


שים לב שבהיטל אין קווים פנימיים של הגוף – כלומר זוהי לא קובייה חלולה כי אז ההיטלים היו נראים כך:



### 7) גפרורים

הזז גפרור אחד כך שהמשוואה הנ"ל תהיה נכונה. סימן החילוק והשוויון אינם גפרורים ולכן לא ניתן ליצור למשל סימן של אי-שוויון ע"י הוספת גפרור.



### 8) פתילים

ברשותך 2 פתילים לא אחידים (כלומר קצב שריפתם משתנה לאורך הפתיל ולכן מחצית הפתיל לא בהכרח תישרף במשך מחצית מהזמן) שזמן שריפתם הוא שעה. כיצד תוכל למדוד 45 דקות בעזרתם?

### 9) משוואות

- א. בעזרת המספרים 2,3,4,5 שלוש מתוך ארבעת פעולות החשבון הבסיסיות (בלי לחזור על פעולה פעמיים), ומספר אינסופי של סוגריים סדר משוואה שתוצאתה 26.
- ב. אם הצלחתם, נסו כנ"ל עם 2,4,6,8 להגיע ל – 25.
- ג. ואם לא נמאס לכם – כנ"ל עם 1,5,6,7 להגיע ל – 21, אבל הפעם בלי הגבלה של חזרה על פעולות החשבון.

#### **(10) פיראטים**

5 פיראטים שדדו אוצר של 1000 מטבעות. כעת הם רוצים לחלקו. לשם כך הם הסכימו על מספר חוקים מנחים:

- הפיראטים מדורגים מ 1 עד 5 כך שפיראט מספר 1 הוא הבכיר ביותר.
  - כל פיראט זכאי להציע הצעה לחלוקת המטבעות.
  - הפיראט הנחות ביותר (5) הוא הראשון להציע הצעה.
  - את ההצעה שוקלים כל הפיראטים מלבד מציע ההצעה ומגיעים לאחת משתי החלטות:
    - לקבל את ההצעה
    - לא לקבל את ההצעה, להרוג את הפיראט, ולתת לפיראט הבא בהיררכיה להציע את הצעתו.
- תיקו בהצבעה נחשבת כקבלת ההצעה.

- בנוסף ישנם מספר אקסיומות הנוגעות לפיראטים שלנו:
- כל פיראט רוצה קודם כל לחיות, ואח"כ להרוויח כמה שיותר.
  - הפיראטים הם צמאי דם, ואם לא יפסידו שום דבר מהחלטה להרוג מישהו – יעדיפו להורגו.
  - הפיראטים הם חכמים בצורה אינסופית. הם מסוגלים לחשב בדיוק מה עדיף להם וכן מה חושבים חבריהם (מתוך ידיעה שחבריהם חכמים גם הם בצורה אינסופית).

מה יציע פיראט מס' 5?

#### **(11) רכבת**

רכבת עוברת במנהרה ומס' אנשים מתלככים בפיח (לפחות אדם אחד). ברכבת אין מראות והאנשים לא מדברים זה עם זה, לכן אף אחד לא יכול לדעת באופן ישיר שהוא מלוכלך. אדם שגילה שהוא מלוכלך יורד מייד בתחנה הקרובה, וכולם יודעים שכך גם ינהגו האנשים האחרים ברכבת.

ידוע שבתחנה הרביעית ירדו אנשים. כמה אנשים התלכלכו?

#### **(12) פתקים ירוקים**

לשלושה אנשים הדביקו על המצח פתק ירוק ואמרו להם שהודבק עליהם פתק ירוק או אדום. נאמר להם לנהוג באופן הבא:

אם הם רואים לפחות אדם אחד עם פתק ירוק עליהם להרים יד.

אם הם הבינו שמודבק עליהם פתק ירוק עליהם להוריד את היד.

כולם גילו שיש עליהם פתק ירוק. כיצד?

#### **(13) שולחן ומטבעות**

על ארבע פינות שולחן שיכול להסתובב מונחים 4 מטבעות המכוסים בכוסות אטומות. במרכז השולחן נמצאת נורה הנדלקת כאשר כל המטבעות מונחות על אותו צד (עץ/פלי). המטרה היא לסדר את כל המטבעות על אותו צד. הדבר נעשה באופן הבא:

- אתה נכנס לחדר
- בוחר 2 מטבעות
- חושף אותם
- הופך את המטבעות לפי רצונך
- מכסה אותם

- יוצא מהחדר
- מישוהו אחר נכנס לחדר ומסובב באקראי את השולחן

מהו מספר הכניסות המינימלי לחדר בו תוכל לסדר את המטבעות כפי שנדרש בכל מצב?

#### 14) הברווז בבריכה

במרכז בריכה עגולה שט ברווז במהירות  $v$ .  
מחוץ לבריכה נמצא שועל שמחכה לטרוף את הברווז ויכול לרוץ במהירות  $4v$ .  
השועל לא יכול לשחות.  
הברווז יוכל לעוף ברגע שייצא מהמים ולברוח.  
השועל תמיד ינסה להתקרב לברווז ככל שיוכל.

כיצד יברח הברווז?

#### 15) זריקת ביצים

ברשותך 2 ביצים קשות (באותה קשיות) שנשברות כאשר מפילים אותם מגובה גבוה כלשהו אך לא ידוע.  
אתה צריך לגלות מאיזו קומה תישבר ביצה כזו כאשר תיזרק מבניין בן 100 קומות אם בכלל (יכול להיות שגם מקומה 100 היא לא תישבר).  
עליך לגלות זאת במינימום זריקות.  
אסור להגיע למצב ששברת את שתי הביצים לפני שגילית בדיוק מאיזו קומה הם נשברים.  
מאיזו קומה תתחיל את הזריקות ומהו מס' הזריקות המקסימלי בו תגלה את קשיות הביצים?

#### 16) לחיצות ידיים

5 זוגות נשואים הולכים למסיבה. הם מתחילים ללחוץ ידיים זה לזה (אך לא לבן/בת זוגם ולא לעצמו) עד שלפתע אחד מהם קורא לכולם לעצור.  
בשלב זה שכולם עצרו ידוע שחוץ מהכרוז אדם אחד לחץ ידיים ל 8 אנשים, אחד ל 7, ..., ואחד לא הספיק ללחוץ ידיים כלל.

מצא לכמה אנשים לחץ הכרוז ידיים?

#### 17) בדלי סיגריות

קבצן האוסף בדלי סיגריות ברחוב, יכול ליצור סיגרית חדשה מכל 4 בדלים. בוקר אחד הוא אסף 32 בדלים. כמה סיגריות יכול היה לעשן באותו יום?

#### 18) חידה בשפת C

להלן קטע קוד בשפת C.  
מטרת הקוד היא להדפיס 20 פעם את הסימן מינוס (-).  
מותר לשנות תו אחד בלבד כדי לגרום לקוד לעבוד.  
יש שלוש דרכים שונות לבצע את השינוי כך שהקוד יעבוד.

```
int i , n = 20 ;
for ( i = 0 ; i < n ; i -- )
    printf ("-");
```

בונוס :

נסו לשנות את הקוד המקורי כך שהסימן מינוס יודפס 21 פעמים.

#### 19) משקולות

מהו מס' המשקולות המינימלי שצריך על מנת לשקול במאזניים פריטים במשקל של עד 40 גרם?

#### 20) מיון

מהו האלגוריתם היעיל ביותר למיון רשימת מספרים על פי ספרת העשרות שלהם?

#### 21) 2 מספרים

מצאו 2 מספרים אשר סכומם מכפלתם ומנתם שווים.

## **(22) כדור הארץ**

לוקחים חבל ארוך וכורכים אותו סביב קו המשווה של כדור הארץ. כעת מוסיפים לחבל מטר אחד נוסף וכורכים אותו מחדש במרחק שווה מהאדמה. האם יוכל חתול שגובהו 15 ס"מ לעבור ברווח?

## **(23) האורגיה**

2 זוגות (דודי, מירב, יובל ואריאלה) מעוניינים לקיים אורגיה. הבעיה שלרשותם עומדים 2 קונדומים בלבד, וכל אחד מהם עשוי להיות נגוע במחלה זו או אחרת. כיצד יוכלו לקיים יחסים מלאים ובטוחים בכל קומבינציה הטרסקסואלית אפשרית (כלומר כל גבר ישכב עם כל אשה ולהפך)?

## **(24) תרופות**

חולה כמעט-סופני קיבל תרופות שיצילו את חייו: 6 כדורים, 3 מכל סוג, מהם הוא אמור לקחת 2 בכל יום: אחד מכל סוג. אך מכיוון שהחולה היה מגושם מעט, כאשר הוא חזר הביתה הוא מעד, ונפלו לו 2 כדורים מהסוג הראשון וכדור אחד מהסוג השני לרצפה והתערבבו. לצערו הרב הכדורים זהים לחלוטין מכל בחינה חיצונית, ואין כל דרך להבדיל בינם. כיצד יוכל בכל זאת למלא בדייקנות אחר המרשם (שכן כל חריגה עלולה לעלות לו בחייו)?

## **(25) מי מגדל דגים?**

ישנם 5 בתים ב-5 צבעים שונים.  
בכל בית גר אדם בעל לאום שונה.  
כל אחד מהדיירים שותה משקה שונה, מעשן סיגריות שונות ומגדל חיות מסוג שונה.  
אין שני דיירים שמחזיקים את אותה חיה, שותים אותו משקה או מעשנים את אותו סוג סיגריות.

ידועות העובדות הבאות:

1. הבריטי גר בבית האדום.
2. הדני שותה תה.
3. השוודי מגדל כלבים.
4. הבית הירוק נמצא משמאל לבית הלבן.
5. הדייר בבית הירוק שותה קפה.
6. האיש שמעשן "פול-מל" מגדל ציפורים.
7. הדייר בבית הצהוב מעשן "דנהיל".
8. הדייר בבית האמצעי שותה חלב.
9. הנורווגי גר בבית הקיצוני ביותר.
10. הדייר שמעשן "בלנד" גר ליד הדייר שמגדל חתולים.
11. הדייר שמגדל סוסים גר ליד זה שמעשן "דנהיל".
12. הדייר שמעשן "בלו-מסטר" שותה בירה.
13. הגרמני מעשן "פרינס".
14. הנורווגי גר צמוד לבית הכחול.
15. לדייר שמעשן "בלנד" יש שכן ששותה מים.

והשאלה הנשאלת: מי מחזיק דגים?

## **(26) עץ או פלי?**

אתה נמצא בחדר חשוך.  
במרכז החדר ניצב שולחן ועליו מטבעות (לא ידוע כמה, אך אתה יכול לספור אותם).  
ידוע שבדיוק מאה מטבעות נמצאים כאשר צידם העליון מראה "עץ".  
כיצד תוכל לחלק את המטבעות ל-2 ערימות (לא בהכרח שוות בגודלן) אשר מכילות בדיוק אותו מספר של "עץ" (כלפי מעלה)?  
יש לציין שמותר להפוך מטבעות, אך לא ניתן על פי מישוש לדעת אם מטבע הוא "עץ" או "פלי".

## **(27) תכנות רובוטים**

מצניחים 2 רובוטים על קו חד מימדי. המרחק בין הרובוטים לאחר שצנחו איננו ידוע ואיננו מוגבל. לאחר הצניחה כל רובוט משאיר את המצנח במקום ומבצע את התוכנה שמותקנת עליו.

עליך לכתוב תוכנה שתרוץ על כל אחד מהרובוטים (אותה תוכנה ל-2 הרובוטים) כך שיובטח שהם יפגשו (אין צורך שהם "ידעו" שהם נפגשו).

שפת המחשב אותה מבינים הרובוטים מורכבת מ-4 פקודות בלבד :

- `move_right` – תנועה ימינה של מרחק קבוע בזמן קבוע.
- `move_left` – תנועה שמאלה של מרחק קבוע בזמן קבוע (אותו מרחק וזמן).
- `goto label` – קפיצה (ללא תנאי) לשורה בקוד שמסומנת בתווית `label`.
- `if on parachute do statement_1 else do statement_2` – אם הרובוט נמצא על מצנח (לא משנה איזה מצנח) בצע את הפקודה `statement_1` אחרת בצע את הפקודה `statement_2`.

## (28) מספרים ראשוניים

מצא מה מאפיין את קבוצת המספרים אשר מתקבלים מהעלאה בריבוע של מספר ראשוני הגדול משלוש פחות אחד ( $p^2 - 1$ ). הוכח זאת.

## פתרון נות

### 1. פתרון לחידת המספרים שלמים (סוסו ומשה):

נתחיל דווקא ממשא. אם הוא היה מקבל מכפלה של מספרים ראשוניים (למשל 91), הוא בוודאי היה יודע מהם המספרים (7 ו-13). וכמובן להפך, אם הוא היה מקבל מכפלה של מספרים שאחד (או יותר) מהם לא ראשוני, אזי הוא לא היה יכול לדעת מהם המחלקים באופן יחיד (למשל  $9 \cdot 2 = 3 \cdot 6 = 18$ ).

סוסו אמר למשה שהוא לא יכול לדעת מהם המספרים. כלומר סוסו ידע שמשה לא קיבל מכפלה של מספרים ראשוניים (שאז, לפי 1. משה היה יודע). כלומר סוסו, שקיבל את הסכום של המספרים, בדק את כל זוגות המספרים שנותנים את הסכום שקיבל, וראה כי אין מבניהם אף זוג של מספרים ראשוניים.

לדוגמא, אם סוסו היה מקבל 12, אז הוא לא היה אומר את מה שהוא אמר, כי ייתכן שמשה קיבל 35 ( $5+7=12$ ,  $7 \cdot 5=35$ ) ואז משה היה יודע את המספרים (לפי 1), אבל אם סוסו קיבל 23, אז הוא היה יכול לומר שמשה לא יכול לדעת מהם המספרים, כי אין זוג מספרים ראשוניים שסכומם 23 (בדוק).

בואו נעצור שנייה ונמצא את כל המספרים שייתכן כי סוסו קיבל אותם כסכום, לפי 2. המספרים הבאים בחשבון הנם: 11, 17, 23, 27, 29, 35, 37, 41, 47, 51, 53, 57, 59, 65, 67, 71, 79, 83, 87, 89, 93, 95, 97 ו-101 (כמובן שיש עוד אינסוף כאלה, אבל מכפלת המחברים קטנה מ-200, אז נעצור כאן). כאמור, עבור מספרים אלו, אין זוג מחברים ראשוניים. (אפשר וכדאי למצוא את המספרים ע"י תוכנית מחשב, כמו פסקל למשל).

נחזור למשה. הוא קיבל מכפלה, ובידעו את מה שאנחנו יודעים (לפחות), עשה רשימה של כל זוגות הכופלים שנותנים את המכפלה שקיבל. ברשימה הזו, היה רק זוג אחד ויחיד של כופלים. שסכומם היה אחד מהמספרים בסעיף 4, שכן משה ידע בשלב זה לגלות מהם המספרים שנבחרו. לו היה יותר מזוג אחד כזה, או לא היה זוג כזה בכלל, משה לא היה יכול לדעת איזה סכום קיבל סוסו, ובהעדר ידע זה, לא יכל לדעת את המספרים.

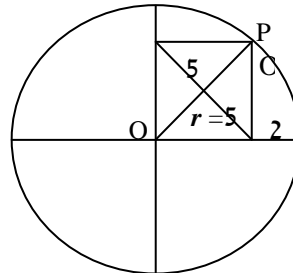
לדוגמא, אם משה קיבל 18, אז המכפלות האפשריות הן  $9 \cdot 2$  או  $3 \cdot 6$ . אבל,  $2+9=11$  ואילו  $3+6=9$ , לכן במקרה כזה משה היה יודע שהמספרים הם 2 ו-9, כי סכומם מצוי ברשימת המספרים האפשריים של סוסו (סעיף 4).

אם כן, המספרים האפשריים שמשה קיבל הנם: 18, 24, 28, 50, 52, 54, 76, 92, 96, 98, 100, 112, 124, 140, 144, 148, 152, 160, 172, 176, 188 או 192 (אפשר בעזרת תוכנית מחשב קלה, למשל).

חוזרים שוב לסוסו. משה אמר לו שהוא יודע את המספרים. אז סוסו עובר על זוגות המספרים שסכומם נותן את הסכום אותו קיבל, ומחשב את המכפלה של כל אחד מהם. אם הוא מוצא, כי רק אחת מהמכפלות הנה מכפלה אפשרית אותה משה קיבל (ראה רשימה בסעיף 7), אז הוא ידע גם את המספרים שנבחרו, ואכן לפי החידה, סוסו מצליח לגלות את המספרים.

נבדוק אם כן, לאילו מספרים מסעיף 4, יש רק זוג מחברים יחיד שמכפלתו נמצאת ברשימה מסעיף 7. אכן, מסתבר כי רק 17 מקיים את התנאים הנ"ל (שהמכפלה קטנה מ-200), והמחברים הנם 13 ו-4 (ומכפלתם 52).

### 2. גיאומטריה



### 3. חידות מטבעות

א. נסמן את המטבעות באותיות a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l.

נבצע את השקילה הבאה:  $(abcd) - (efgh)$

אם  $(abcd) < (efgh)$ :

נבצע את השקילה הבאה:  $(abe) - (cdf)$

אם  $(abe) < (cdf)$  [ואז או ש-(a) או (b) קלות, או ש-(f) כבדה]:

נבצע את השקילה הבאה:  $(a) - (b)$

אם  $(a) < (b)$ :

התשובה היא ש-(a) קלה יותר משאר המטבעות.

אם  $(a) > (b)$ :

התשובה היא ש-(b) קלה יותר משאר המטבעות.

אם  $(a) = (b)$ :

התשובה היא ש-(f) כבדה יותר משאר המטבעות.

אם  $(abe) > (cdf)$  [ואז או ש-(c) או (d) קלות, או ש-(e) כבדה]:

נבצע את השקילה הבאה:  $(c) - (d)$

אם  $(c) < (d)$ :

התשובה היא ש-(c) קלה יותר משאר המטבעות.

אם  $(c) > (d)$ :

התשובה היא ש-(d) קלה יותר משאר המטבעות.

אם  $(c) = (d)$  :

התשובה היא ש –  $(e)$  כבדה יותר משאר המטבעות.

אם  $(cdf) = (abe)$  [ואז  $(g)$  או  $(h)$  כבדות] :

נבצע את השקילה הבאה :  $(g) - (h)$

אם  $(g) < (h)$  :

התשובה היא ש –  $(h)$  כבדה יותר משאר המטבעות.

אם  $(g) > (h)$  :

התשובה היא ש –  $(g)$  כבדה יותר משאר המטבעות.

אם  $(g) = (h)$  :

לא יכול להיות.

אם  $(abcd) > (efgh)$  :

נבצע את השקילה הבאה :  $(abe) - (cdf)$

אם  $(abe) < (cdf)$  [ואז או ש- $(c)$  או  $(d)$  כבדות, או ש- $(e)$  קלה] :

נבצע את השקילה הבאה :  $(c) - (d)$

אם  $(c) < (d)$  :

התשובה היא ש –  $(d)$  כבדה יותר משאר המטבעות.

אם  $(c) > (d)$  :

התשובה היא ש –  $(c)$  כבדה יותר משאר המטבעות.

אם  $(c) = (d)$  :

התשובה היא ש –  $(e)$  קלה יותר משאר המטבעות.

אם  $(abe) < (cdf)$  [ואז או ש- $(a)$  או  $(b)$  כבדות, או ש- $(f)$  קלה] :

נבצע את השקילה הבאה :  $(a) - (b)$

אם  $(a) < (b)$  :

התשובה היא ש –  $(b)$  כבדה יותר משאר המטבעות.

אם  $(a) > (b)$  :

התשובה היא ש –  $(a)$  כבדה יותר משאר המטבעות.

אם  $(a) = (b)$  :

התשובה היא ש –  $(f)$  קלה יותר משאר המטבעות.

אם  $(cdf) = (abe)$  [ואז  $(g)$  או  $(h)$  קלות] :

נבצע את השקילה הבאה :  $(g) - (h)$

אם  $(g) < (h)$  :

התשובה היא ש –  $(g)$  קלה יותר משאר המטבעות.

אם  $(g) > (h)$  :

התשובה היא ש –  $(h)$  קלה יותר משאר המטבעות.

אם  $(g) = (h)$  :

לא יכול להיות.

אם  $(abcd) = (efgh)$  :

נבצע את השקילה הבאה :  $(abc) - (ijk)$

אם  $(abc) < (ijk)$  [ואז  $(i)$  או  $(j)$  או  $(k)$  כבדות] :

נבצע את השקילה הבאה :  $(i) - (j)$

אם  $(i) < (j)$  :

התשובה היא ש –  $(j)$  כבדה יותר משאר המטבעות.

אם  $(i) > (j)$  :

התשובה היא ש –  $(i)$  כבדה יותר משאר המטבעות.

אם  $(i) = (j)$  :

התשובה היא ש –  $(k)$  כבדה יותר משאר המטבעות.

אם  $(abc) > (ijk)$  [ואז  $(i)$  או  $(j)$  או  $(k)$  קלות] :

נבצע את השקילה הבאה :  $(i) - (j)$

אם  $(i) < (j)$  :

התשובה היא ש –  $(i)$  קלה יותר משאר המטבעות.

אם  $(i) > (j)$  :

התשובה היא ש –  $(j)$  קלה יותר משאר המטבעות.

אם  $(i) = (j)$  :

התשובה היא ש –  $(k)$  קלה יותר משאר המטבעות.

אם  $(abc) = (ijk)$  [ואז  $(l)$  קלה או כבדה] :

נבצע את השקילה הבאה :  $(a) - (l)$

אם  $(a) < (l)$  :

התשובה היא ש –  $(l)$  כבדה יותר משאר המטבעות.

אם  $(a) > (l)$  :

התשובה היא ש –  $(l)$  קלה יותר משאר המטבעות.

אם  $(a) = (l)$  :

לא יכול להיות.

ב. ניקח מהשק הראשון מטבע אחת, מהשני 2 מטבעות, מהשלישי 3 וכך הלאה, ואז שוקלים. אם כל השקים היו מכילים מטבעות היינו צריכים לקבל  $55 = (1+2+3+...+10)$  גרם. מכיוון שאחד השקים מזויף נקבל משקל אחר,  $X$ . ההפרש  $X-55$  הוא מסי' השק המזויף, שכן מהשק המזויף, שנקרא לו  $n$ , לקחנו  $n$  מטבעות ההפרש בינם למטבעות רגילים הוא 1, לכן ההפרש המצטבר הוא במספר השק,  $n$ .

ג. הפעם נשתמש בשיטה הבינארית לפתרון. מהשק הראשון ניקח  $2^0 = 1$  מטבעות, מהשני  $2^1 = 2$  מטבעות, וכך הלאה עד העשירי ממנו ניקח  $2^9 = 512$  מטבעות. אם כל השקים היו מכילים מטבעות רגילים היינו צריכים לקבל  $1023 = (2^0 + 2^1 + ... + 2^9) = (2^{10} - 1)$  מטבעות. את ההפרש נתרגם לבינארית, וכל מקום בו יש לנו את הסיפורה 1, השק המתאים לו מזויף (כאשר המיקום האפס הוא שק מסי' 1, וכו').



#### 4. נורות ומפסקים

מדליקים מפסק מס' 1 למשך 5 דקות. מכבים אותו, מדליקים את מפסק מס' 2, ונכנסים לחדר. הנורה החמה מחוברת למפסק מס' 1, הנורה הדולקת למפסק מס' 2, והכבויה למפסק מס' 3.

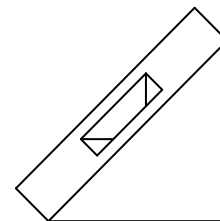
#### 5. מנהרה

ברור שבאדו כץ ואיליה חייבים לעבור ביחד, שהרי  $19 = 9 + 10$ , כמו כן, אסור שאף אחד מהם יחזור חזרה להביא את הנר, כי  $2 \cdot 9$  או  $2 \cdot 10$  גדול מ-17. לכן, צריך שאו איתי או ניר יגיעו קודם לצד השני כדי להביא לאיליה ולבאדו כץ את הנר. לכן איתי וניר הולכים כשאחד מהם נשאר בצד השני, והשני חוזר (לא משנה מי) ומביא את הנר לשמנים. השמנים חוצים את המנהרה, ואחד מהקלים מחזיר את הנר לקל השני ושניהם הולכים ביחד לעבר השני של המנהרה.

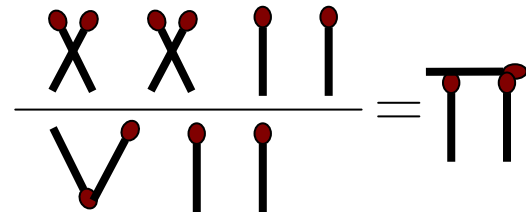
לסיכום:

ניר ואיתי הולכים	2 דקות
איתי חוזר	1 דקה
באדו כץ ואיליה הולכים	10 דקות
ניר חוזר	2 דקות
ניר ואיתי הולכים	2 דקות
סה"כ	17 דקות

#### 6. היטלים



#### 7. גפרורים



$$(XXII / VII) = \pi$$

#### 8. פתילים

שורפים פתיל אחד משני הקצוות ופתיל שני מקצה אחד. לאחר שהפתיל הראשון נשרף כולו (חצי שעה) שורפים את הפתיל השני מקצהו השני עד שהוא נשרף כולו (15 דקות). סה"כ – 45 דקות.

#### 9. משוואה

- $(5+3/2) \cdot 4 = 26$
- $(6+2/8) \cdot 4 = 25$
- $6 / (1-5/7) = 21$

#### 10. פיראטים

התשובה: פיראט נס' 5 יציע מטבע אחד לפיראט מס' 3, 2-1 מטבעות לפיראט מס' 2 או מס' 1. כל שאר המטבעות (997) לעצמו. ההסבר: הדרך לפתרון מתחילה מהסוף. נניח שכולם מתו ונשאר פיראט אחד. אז הוא ייקח הכל לעצמו. אם נשארו 2 פיראטים, אז לא משנה מה יציע השני, תמיד מס' 1 יעדיף להרוג אותו. אם נשארו 3 פיראטים, אז לא משנה מה הוא יציע, תמיד פיראט 2 יתמוך כי האלטרנטיבה מבחינתו היא להישאר עם מס' 1 ולמות. לכן מס' 3 יציע לקחת את הכל לעצמו, מס' 2 כאמור יתמוך, מס' 1 יתנגד – קיבלנו תיקו, וההצעה תתקבל. אם נשארו 4 פיראטים, אז פיראט מס' 4 יודע שמס' 3 תמיד יעדיף להרוג אותו, כי אז הוא יקבל הכל לעצמו. לכן הוא חייב להשיג את קולותיהם של מס' 1 ו-2. על מנת לעשות זאת מספיק שיציע להם הצעה טובה יותר מזו של מס' 3, כלומר – מטבע אחד לכל אחד מהם, והשאר לעצמו. מס' 2 ו-1 יעדיפו לקבל את הצעתו מאשר להרוג אותו ולא לקבל כלום ממס' 3, ולכן להצעתו של מס' 4 יהיה רוב בהצבעה. לפי אותו עיקרון, כאשר יש 5 פיראטים, מס' 5 יכול להציע למס' 3 מטבע אחד בלבד (שזה יותר ממה שהוא יקבל ממס' 4) ולמס' 1 או 2 להציע 2 מטבעות (שזה גם יותר ממה שהם יקבלו ממס' 4). בהצבעה הוא יקבל 2 קולות (ממס' 3, וממס' 2 או אחד) בעד, ושני קולות נגד, ולכן ההצעה תתקבל. מצ"ב טבלה למי שקצת התבלבל:



יותר מאותו היקף. השועל שמנסה להתקרב אל הברווז, נע על המעגל החיצוני של הבריקה, ובשביל לבצע הקפה מלאה עליו לעבור מרחק של  $2\pi r$ . המרחק שהברווז עובר בהקפה אחת קטן מרבע המרחק שעובר השועל בהקפה אחת, ומכיוון שהשועל נע רק פי 4 יותר מהר מהברווז, הברווז עובר הקפה שלמה בזמן קצר יותר. לכן הברווז ימשיך לבצע הקפות כאלה, עד אשר הוא והשועל יהיו בצדדים מנוגדים. כעת על הברווז לשחות לעבר שפת הבריקה. המרחק אותו הוא צריך לעבור הוא  $3/4r$ . השועל צריך להקיף בדיוק חצי מעגל, כלומר מרחק של  $\pi$ . כידוע  $\pi \approx 3.14$ , ולכן המרחק הזה גדול יותר מפי 4 המרחק

#### 15. זריקת ביצים

נתחיל את הזריקות מהקומה ה-14, כאשר לכל היותר נזדקק ל-14 זריקות על מנת לגלות את קשיות הביצים. האלגוריתם לזריקות הוא כלהלן: כאמור אנו מתחילים בקומה ה-14. אם הביצה נשברה, נזרוק את הביצה השנייה מהקומה הראשונה. אם גם השנייה נשברה, פתרנו (התשובה – נשברות כבר מהקומה הראשונה). אם הביצה השנייה לא נשברה, נעלה קומה, נזרוק, אם לא נשברה נעלה עוד קומה, נזרוק, וכך נמשיך עד שתישבר (וכמובן גם נדע את הקשיות של הביצים בהתאם לקומה המינימלית בה נשברה הביצה השנייה). מכיוון שמקסימום ניהלץ לעלות עד לקומה ה-13 (בקומה ה-14 אנחנו כבר יודעים שהן נשברות) אז ביחד עם הזריקה הראשונה לא נגיע ליותר מ-14 זריקות. עד כאן המקרה של שבירת הביצה הראשונה מהקומה ה-14. אם היא לא נשברה מהקומה ה-14 נעפיל מעלה עוד 13 קומות עד למרומי הקומה ה-27. אם נשברה הביצה בקומה זו נתחיל לטפס עם השניה בין הקומות 15-26 (מקסימום 12 זריקות + 2 זריקות ראשונות : סה"כ מקסימום של 14 זריקות). אם גם בקומה ה-27 לא נשברה הביצה (מאוד הגיוני!) אין ברירה אלא להמשיך להעפיל, הפעם בעוד 12 קומות עד לקומה ה-39. אם נשברה – ברור מה עושים. אם לא נשברה – עולים 11 קומות, ואח"כ 10, וכך הלאה עד שלבסוף אם באמת שום דבר שם לא נשבר (תבדקו טוב שזה באמת ביצים מה שאתם זורקים) תגיעו לבסוף לקומה ה-100. כך תכסו את כל הקומות. לסיכום, לא משנה מה קשיות הביצים, לעולם לא תזדקקו ליותר מ-14 זריקות.

#### 16. לחיצות ידיים

הכנס פתרון.

#### 17. בדלי סיגריות

10

#### 18. חידה בשפת C

1.

```
int i , n = 20 ;
for ( i = 0 ; -i < n ; i -- )
    printf ("-");
```

2.

```
int i , n = 20 ;
for ( i = 0 ; i < n ; n -- )
    printf ("-");
```

3.

```
int i , n = 20 ;
for ( i = 0 ; i + n ; i -- )
    printf ("-");
```

בונוס:

```
int i , n = 20 ;
for ( i = 0 ; ~i < n ; i -- )
    printf ("-");
```

#### 19. משקולות

10

#### 20. מיון

#### 21. 2 מספרים

המספרים הם -1, 0.5.

#### 22. כדור הארץ

התשובה היא כן. אם רדיוס כדור הארץ הוא  $R$ , אז ההיקף הוא  $2\pi R$  וזהו גם אורך החבל שנכרך סביבו. לאחר שהוספנו לחבל מטר אורך החבל יהיה  $(2\pi R + 1)$ . הרדיוס החדש (נקרא לו  $R'$ ) שווה להיקף החדש חלקי  $2\pi$ , כלומר  $R' = (2\pi R + 1) / (2\pi)$ . מכאן נובע ש  $R' - R = (1/2\pi) \approx 0.16$ , כלומר ההפרש בין גובה החבל לקרקע מספיק גבוה.

#### 23. האורגיה

על מנת לקיים יחסים מלאים ובטוחים דודי ילבש 2 קונדומים אחד על השני וישכב עם מירב. לאחר מכן ייקח רק את הקונדום התחתון וישכב עם אריאלה, בעוד שיובל ייקח את הקונדום העליון וישכב עם מירב. לאחר מכן ייקח יובל את שני הקונדומים, יילבש אותם בסדר ההפוך וישכב עם אריאלה.

#### 24. תרופות

דרך אחת היא ביום הראשון לקחת כדור אחד מהתבילה הראשונה, וכדור נוסף מהתבילה השנייה. ביום השני עליו לחצות את כל שאר הכדורים לשני חצאים, ולקחת בכל יום שנוטר ארבעה חצאים מכדורים שונים. דרך נוספת היא לחלק את כל הכדורים לשלושה שלישים, וכל יום לקחת 6 שלישים מכדורים שונים. דרך נוספת היא לכתוש את כל הכדורים לאבקה דקה, לערבב היטב, וכל יום לקחת שליש מהאבקה.

#### 25. מי מגדל דגים?

תשובה: הגרמני.

תשובה מפורטת מעט יותר: למעשה ישנן 2 אפשרויות לסידור תושבי השכונה.

אפשרות א':

1	2	3	4	5	בית:
גרמני	שוודי	בריטי	דני	נורווגי	לאום:
ירוק	לבן	אדום	כחול	צהוב	צבע:
קפה	בירה	חלב	תה	מים	משקה:
פרינס	בלו-מסטר	פול-מל	בלנד	דנהיל	סיגריה:
דגים	כלבים	ציפורים	סוסים	חתולים	חיה:

אפשרות ב':

1	2	3	4	5	בית:
נורווגי	דני	בריטי	גרמני	שוודי	לאום:
צהוב	כחול	אדום	ירוק	לבן	צבע:
מים	תה	חלב	קפה	בירה	משקה:
דנהיל	בלנד	פול-מל	פרינס	בלו-מסטר	סיגריה:
חתולים	סוסים	ציפורים	דגים	כלבים	חיה:

בכל אחת מ-2 האפשרויות הגרמני הוא מגדל הדגים.

## 26. עץ או פלי?

כל מה שצריך לעשות זה להפריד מערימה 100 מטבעות ולהפוך אותם.  
בין ה-100 שהפרדנו היו X מטבעות "עץ", בערימה שנותרה יש (100 - X) מטבעות "עץ" (מכיוון שסה"כ יש 100 מטבעות "עץ").  
לאחר שהפכנו את ה-100 מטבעות שהפרדנו יש בערימה המופרדת (100 - X) מטבעות "עץ", בדיוק כמו בערימה שנותרה.

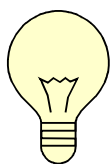
## 27. תכנות רובוטים

```
label_a:  move_right
          move_right
          move_left
          if on parachute do
              goto label_b
          else
              goto label_a
label_b:  move_right
          goto label_b
```

## 28. מספרים ראשוניים

כל המספרים בקבוצה הזו הם כפולות של 24.  
אפשר לרשום את המספרים באופן הבא:  
 $(p^2 - 1) = (p+1) * (p-1)$   
מכיוון ש-p איננו כפולה של שלוש אז או ש-(p+1) או ש-(p-1) חייב להיות כפולה של שלוש.  
מכיוון ש-p הוא אי-זוגי אז גם (p+1) וגם (p-1) הם זוגיים כאשר אחד מהם הוא גם כפולה של 4.  
מכאן קיבלנו שלמכפלה יש את המחלקים הבאים: 2,3,4 ולכן התוצאה היא כפולה של 24.

## חידות היגיון



- לפניך 1000 מנורות, לכל מנורה מתג המדליק אותה בלחיצה אחת ומכבה אותה בלחיצה השנייה. בתחילה כל המנורות כבויות. 1000 גמדים שובבים מגיעים למקום ופועלים באופן הבא:

הגמד הראשון עובר ולוחץ על כל המתגים (כלומר: מדליק את כל הנורות).  
הגמד השני לוחץ על כל מתג שני (כלומר: על המתגים שהם בעלי מספר זוגי).  
הגמד השלישי לוחץ על כל מתג שלישי, וכן הלאה.  
אילו נורות יהיו דלוקות לאחר שכל הגמדים סיימו להשתולל?

**פתרון:** כל גמד יעבור על הנורות שהמס' שלו מחל את מספר הנורה, לדוגמא את נורה מס' 8 ידליקו ויכבו גמדים 1,2,4,8 ולכן הנורה תהיה מכובה בסוף. הנורות שיהיו דלוקות הן אלו שיש להן שורש שלם: 1,4,9,16,25...

- ברשותך שני פתילים. ידוע לך שמן הרגע שהדלקת את קצהו של אחד הפתילים, הוא יבער במשך שעה אחת בדיוק. קצב הבעירה אינו אחיד (כלומר- חצי פתיל לא בהכרח יבער במשך חצי שעה). מדוד שלושת רבעי השעה בעזרת שני הפתילים.

**פתרון:** נדליק את 2 הקצוות של הפתיל הראשון ועוד קצה אחד של הפתיל השני, כאשר 2 הקצוות של הפתיל הראשון יפגשו סימן שעברה חצי שעה בדיוק, באותו זמן נדליק את קצהו השני של הפתיל השני (שגם אצלו זמן בעירה של חצי שעה עברה. לאחר רבע שעה יפגשו שני הקצוות של הפתיל השני ואז תגמר  $\frac{3}{4}$  שעה.

- אתה עומד למרגלות גורד שחקים ובו 100 קומות. ברשותך 2 כדורי בדולח. עליך למצוא את מספר הקומה הנמוכה ביותר שאם זורקים ממנה כדור בדולח, הוא נשבר. עליך לעשות זאת במספר הזריקות המינימלי האפשרי.

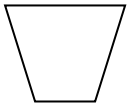
**פתרון:** השיטה היא לעשות קפיצות גדולות ואם כדור אחד נשבר אז לבצע קפיצות של 1 בין השלבים עם הכדור השני, בכדי שלא נעלה במס' הזריקות שאנו מבצעים, כל קפיצה גדולה תהיה קטנה ב- 1 מהקפיצה הקודמת. סכום מס' השלבים שמורידים בקפיצה הגדולה צריך להיות בסביבות ה-100 ← ולכן הקפיצה הראשונה תהיה של 14 שלבים. מס' הזריקות המינימלי הוא 14.

- אתה מחזיק מגילה ובה N משפטים:

רק משפט אחד מהמשפטים שבמגילה זו הוא נכון.  
 בדיוק שני משפטים מהמשפטים שבמגילה זו הם נכונים.  
 בדיוק שלושה משפטים מהמשפטים שבמגילה זו הם נכונים.  
 \*  
 \*  
 \*  
 כל המשפטים במגילה זו הם נכונים.

אילו מהמשפטים במגילה נכונים???

**פתרון:** רק המשפט הראשון נכון



- ברשותך כוס שבסיסה בעל קוטר קטן מזה של שפתה. כיצד תדע, בעזרת הכוס בלבד, אם הכוס מלאה בדיוק עד חצי נפחה?

**פתרון:** נסגור את הפתח העליון נסובב את הכוס כך שפתחה יהי מאונך לרצפה ונראה שהמים מגיעים לאמצע הכוס.

- לחברת אייר-טראנס מטוס ובו 100 מקומות מסומנים. לכל נוסע כרטיס ובו מספר המושב שלו. הדיילת מעלה את הנוסעים למטוס בזה אחר זה, לפי סדר הישיבה המסומן על גבי הכרטיסים.  
 הנוסע הראשון, ישראל ישראלי, עולה למטוס ומתיישב באחד המושבים באופן אקראי. הנוסע השני עולה למטוס ופועל באופן הבא: אם מושב מספר 2 פנוי, הוא יושב בו, אחרת הוא יושב באחד מהמושבים הפנויים באופן אקראי.  
 שאר הנוסעים פועלים באופן דומה לזה של נוסע מספר 2.  
 מה ההסתברות לכך שהנוסע המחזיק בכרטיס מספר 100 יושב במקומו?

**פתרון:** אם נחשב את ההסתברות ל- 2,3,4 אנשים נראה שהסיכוי שהאחרון יושב במקומו הוא  $\frac{1}{2}$  ← כנראה שזה המצב גם לאיש ה- 100.

- הגעת לאי בודד ובו שני שבטים, האחד של דוברי אמת מושבעים והשני של שקרנים פתולוגיים. לפניך שלושה ילדים, ואתה פונה לראשון מביניהם ושואל אותו לאיזה מן השבטים הוא שייך. למרבה הצער, אתה לא מבין את תשובתו כיוון שבדיוק אתמול הוא עשה פירסינג בלשון. היליד השני חש לעזרתך ואומר: "הוא אמר שהוא שקרן", ואילו היליד השלישי טוען: "אל תאמין לשני, הוא משקר!". לאיזה שבט משתייך היליד הראשון?

**פתרון:** היליד הראשון בטוח אמר שהוא דובר אמת – גם אם הוא שקרן וגם אם הוא דובר אמת. לכן השני שקרן והראשון דובר אמת.

- קיבלת ליום הולדתך שטיח בדוגמת פרה בצבעים שחור ולבן, וסט של עפרונות באורכים שונים. ברצונך להניח את אחד העפרונות על השטיח, כך ששני קצותיו מונחים על אותו צבע.  
א. הוכח כי ניתן לעשות זאת עם עיפרון בכל אורך הקטן ממש מאורך השטיח.  
ב. הוכח זאת למקרה בו לשטיח שלושה צבעים.

### **פתרון:**

- א. נבנה מכל עיפרון שהוא משולש שווה צלעות, כולו יכנס בשטיח כי השטיח גדול מאד יחסית לעיפרון, חייב יהיה להיות שלשתיים מקצוות המשולש אותו הצבע.  
ב. נבנה ריבוע שצלעו שווה לאחד העפרונות ונחפש עיפרון בגודל אחר שאורכו יהיה שווה לאלכסון הריבוע, אם נמצא כזה עיפרון מובטח שנמצא עיפרון ששני קצותיו באותו הצבע
  - לפניך לוח שח-מט ( $8 \times 8$  בצבעים שחור ולבן) שנוסרו ממנו שתי המשבצות השחורות בפניות המנוגדות. האם ניתן לכסות את הלוח באבני דומינו שכל אחת מהן היא בגודל שתי משבצות של הלוח (כלומר- בגודל  $1 \times 2$ )?
- פתרון:** כל אבן דומינו מכסה שני ריבועים אחד שחור ואחד לבן, כיוון שהורידו שתי משבצות מאותו הצבע לא ניתן יהיה לכסות את המשטח כולו באבני דומינו.
- טייס קרבי אמיץ ומסוקס נוחת נחיתה אונס בשטח אויב, בלב שדה מוקשים. מכשירי הניווט שלו ניזוקו בנחיתה, והוא יודע רק שהגבול נמצא במרחק קילומטר אחד בדיוק, אך אינו יודע באיזה כיוון.  
כיצד יוכל הטייס למצוא את הגבול תוך סיכון מינימלי? (מצא את המסלול הקצר ביותר שעל הטייס ללכת בו, על מנת להבטיח שימצא את הגבול)

## שאלות בתכנות

- נתון מערך ביטים באורך  $N$  שבכל אחד מתאיו 0 או 1.  
א. מצא אלגוריתם למיון המערך בסיבוכיות זמן  $O(N)$ .  
ב. מצא אלגוריתם כזה כאשר במערך הספרות 0,1,2.  
  
• תאר אלגוריתם להדפסת עץ בינארי רמה אחר רמה.
- במערך ממיון באורך  $N$  ניתן למצוא ערך בסיבוכיות זמן  $O(\log N)$ . נניח כי אברי המערך מוזזים לפי pivot שאינו ידוע מראש, לדוגמא: 12345 הופך ל- 34512, כיצד ניתן למצוא ערך במערך כזה באותו זמן ריצה?
- א. כתוב פונקציה שבהינתן מחרוזת המכילה רק את התווים: { '[', ']', '(', ')' }, בודקת האם היא מחרוזת סוגריים חוקית.  
ב. שנה את הפונקציה כך שתתאים גם למקרה בו המחרוזת מכילה גם את התו | (ערך מוחלט).
- מנה שלוש דרכים להפיכת רשימה מקושרת דו כיוונית.
- ברשותך רכיב בעל שתי כניסות:  $x, y$  ושתי יציאות:  $\max\{x, y\}, \min\{x, y\}$ .  
ע"י שימוש במספר מינימלי של רכיבים כאלו, בנה מערכת צירופית המשווה בין ארבעה מספרים. הוכח שלא ניתן לעשות זאת במספר רכיבים נמוך יותר.
- הראה דרך לחישוב ביטוי מתמטי הנתון בצורת postorder בעזרת מחסנית.  
למשל: הביטוי  $3, 2, +, 5, +, 2, *$  יחושב כ:  $((3+2)+5)*2$ .
- נתון מערך באורך  $N$  ובו מספרים שלמים (שליליים וחיוביים), כתוב פונקציה המוצאת במערך רצף של תאים עם סכום מקסימלי.
- נתונה רשימה מקושרת, בעזרת זיכרון נוסף בעלות  $O(1)$ , בדוק האם קיים ברשימה מעגל.
- יש לבנות מכונה צירופית המקבלת סדרת ביטים באורך  $M$  ומחזירה סדרת ביטים באורך  $M$ , כך שאם בסדרת הפלט האינדקס הנמוך ביותר בו הופיע 1 הוא  $i$ , בסדרת הפלט יופיע 1 במקום ה-  $i$ , ו-0 משם ואילך.  
למשל: בקבלת הקלט 0001010 המכונה תחזיר: 0001000.  
א. בנה מכונה בעלת  $M$  כניסות ו  $M$  יציאות.  
ב. בנה מכונה כזו תוך שימוש ביחידה צירופית באופן מודולרי.  
ג. בנה מכונה בעלת כניסה אחת ויציאה אחת, המקבלת קלט סדרתי ומחזירה פלט מתאים.



- בהינתן שני משתנים מסוג integer, החלף את תכנם ללא שימוש במשתנה עזר.  
א. בעזרת פעולות חיבור וחיסור.  
ב. בעזרת XOR.

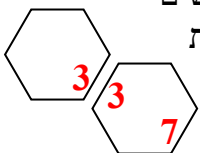
- נתונה פונקציה בשם rand המקבלת מספר חיובי שלם M ומחזירה מספר חיובי שלם בין 1 ל-M (כלומר:  $1 \leq \text{rand}(M) \leq M$ ).  
כתוב פונקציה שבהינתן מערך ממין של כל המספרים מ-1 עד N, מחזירה מערך באורך N ובו פרמוטציה כלשהי שלהם, כך שכל פרמוטציה מתקבלת בהסתברות  $1/N!$ . סיבוכיות זמן נדרשת:  $O(N)$ .

- שני מחשבים מרוחקים מחוברים ביניהם בקו תקשורת המסוגל להעביר מידע בצורת מחרוזת בלבד. עליך לכתוב שתי פונקציות שבהינתן עץ בינארי במחשב הראשון מאפשרות להפוך אותו למחרוזת (פונקציה ראשונה), ובהינתן מחרוזת במחשב השני מאפשרות להפוך אותה בחזרה לעץ (פונקציה שנייה), כך שהמידע יעבור ללא שגיאות ממחשב למחשב.



- א. בהינתן בייט (8 ביטים) של אפסים ואחדים, מצא דרך להחזיר בעלות זמן של  $O(1)$  את מספר האחדים בו (רמז: השתמש בזיכרון כאוות נפשך).  
ב. פתור את הבעיה כאשר נתונים ארבעה בייטים.

- נתונות N נקודות במישור, כתוב אלגוריתם הבודק האם הצורה המתקבלת מהנקודות הללו היא קמורה.



- במשחק נתונים 7 משושים עם מספרים על הצלעות. המטרה: להניח את המשושים זה לצד זה בצורת "פרח" (או, אם תרצה, 18-גון), כך שעל שתי צלעות סמוכות יופיע אותו מספר. כתוב תכנית המוצאת סידור חוקי של המשושים.

- נתון מבנה נתונים אבסטרקטי של שרשרת המאפשר את הפעולות הבאות:  
(List L)-Head: פונקציה המקבלת שרשרת ומחזירה את האיבר הראשון בה.  
(List L)-Tail: פונקציה המקבלת שרשרת ומחזירה את זנבה (כלומר - את השרשרת ללא האיבר הראשון).  
 $L1 @ L2$  - פעולה בינארית שבהינתן שתי שרשראות, משרשרת אותן.  
כתוב פונקציה המקבלת שרשרת והופכת אותה.

- נתונות N מילים בא"ב הלועזי באורך M כל אחת. בהינתן מילה באורך M, מצא דרך לבדוק בסיבוכיות זמן של  $O(1)$  האם קיימת פרמוטציה שלה במאגר.

- תאר מבנה נתונים ופונקציה התומכים בפעולות: מקבלים מטלות לביצוע ומשך זמן מרגע הקבלה לרגע הביצוע, מכניסים למבנה את האינפורמציה המתאימה. ברגע נתון מבצעים את כל המטלות שיש לבצע באותו רגע ומוציאים אותן מן המבנה. א. ניתן בתחילה להניח כי הזמן מרגע קבלת המטלה ועד לביצועה חסום ע"י  $K$ . ב. בשלב זה הנח כי מדי פעם מתקבלים במערכת גם אירועים לביצוע תוך פרק זמן גדול מ- $K$ , אך מספרם זניח. ג. הנח כי כמות האירועים לביצוע תוך פרק זמן גדול מ- $K$  הוא גדול.

### זמן ריצה של אלגוריתמים:

- נתון מערך בגודל  $n+1$  (המערך הוא read only) ובו המספרים השלמים 1 עד  $n$ , כלומר - אחד המספרים מופיע פעמיים. יש למצוא את המספר הנ"ל בזמן ריצה  $O(n)$  ובסיבוכיות מקום של  $O(1)$ .

**פתרון:** נסכום את המערך ונשים במשתנה  $A$ , סכום 1 עד  $n$  הוא  $n(n+1)/2$  נשים במשתנה  $B$ , המספר שמופיע פעמיים הוא  $A - B$

### מתמטיקה דיסקרטית:

- מצאו פונקציה מהטבעיים (לא כולל 0) לטבעיים (לא כולל 0), כך שכל איבר בטווח (כלומר כל תמונה) מתקבלת 0 (אלף אפס) פעמים.

**פתרון:** לדוגמא  $F(X) = X \% 10 + 1$

- נתון סולם ובו  $n$  שלבים. בכל צעד ניתן לעלות שלב אחד או שניים. מה מספר האפשרויות לעלות את  $n$  השלבים?

**פתרון:** סדרת פיבונצ'י  $F(n) = F(n-1) + F(n-2)$ ,  $F(1)=1$   $F(2)=2$

### תורת המשחקים:

- נתון משחק שני שחקנים הבא: מתחילים מ-0 ואז כל שחקן בתורו מוסיף 1, 2 או 3. הראשון שמגיע ל-21 מנצח. האם לשחקן הראשון יש אסטרטגיה מנצחת? אם כן, מהי?

**פתרון:** לשחקן הראשון יש אסטרטגיה מנצחת, הוא צריך לתפוס את הנקודות: 17,

1, 5, 9, 13.

10 שוודדים צריכים לחלק בניהם 100 מטבעות זהב. השוודדים מסודרים לפי סדר מסוים. כל שוודד בתורו מציע חלוקה של 100 המטבעות. אם היא מתקבלת (לפחות מחצית מהשוודדים החיים, כולל המציע, מקבלים את ההצעה), אז נגמר המשחק ואם לא – הורגים את השוודד, והבא בתור מציע חלוקה. סדר העדיפויות של כל שוודד הוא: להישאר בחיים, לקבל כמה שיותר מטבעות ולבסוף לראות כמה שיותר שוודדים אחרים מתים. הניחו שהם פועלים ברציונאליות לפי סדר עדיפויות זה. מה יציע השוודד הראשון?

### תורת המספרים:

1. יש מאה מתגים המסודרים בשורה. בהתחלה כולם כבויים. גמד מבצע 100 סיבובים. בסיבוב הראשון הוא מדליק כל מתג. בשני, הוא מכבה כל מתג שני. בשלישי, הוא מדליק כל מתג שלישי. וכך הלאה. אילו מתגים יהיו דלוקים לאחר 100 סיבובים?
2. נתונים 100 מספרים טבעיים, לאו דווקא שונים. הוכיחו שתמיד קיימת תת-קבוצה שלהם שסכום אבריה מתחלק ב-100 ללא שארית.