Problemas de Grupos

Rafael Arquero Gimeno
Helena Garví Casas

10 de noviembre de 2014

Índice

Índice de figuras

Índice de cuadros

1. Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo K. Determina si los siguientes conjuntos con las operaciones indicadas son grupos o no:
   (a) $(\mathbb{N}, +)$
   (b) $(\mathbb{Q}, +)$
   (c) $(\mathbb{Q}, \cdot)$
   (d) $(S^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}, \cdot)$
   (e) $(P_n := \{p(x) \in \mathbb{R}[x] : gr(p(x)) \leq n\}, +)$
   (f) $(P_n, \cdot)$
   (g) $(End(E), \circ)$
   (h) $(Aut(E), \circ)$

2. Sean G un conjunto y

$$\begin{aligned} \star : G \times G &\to G \\ (x, y) &\mapsto xy \end{aligned}$$

   una operación binaria asociativa que cumple:

   1. $\exists e \in G \forall x \in G \quad ex = x$
   2. $\forall x \in G \exists x' \in G | x'x = e$

   Demuestra que $(G, \star)$ es grupo, el elemento neutro es e y el simetrico de x es x'.

3. (a)
   (b)

4. Considera

$$\begin{aligned} GL(n,\mathbb{Z}) &:= \{M \in M_{n\times n}(\mathbb{Z}) : det(M) \in \mathbb{Z}^*\}, \\ SL(n,\mathbb{Z}) &:= \{M \in GL(n,\mathbb{Z}) : det(M) = 1\}, \\ O(n,\mathbb{Z}) &:= \{M \in GL(n,\mathbb{Z}) : M^T M = Id\}, \\ SO(n,\mathbb{Z}) &:= \{M \in O(n,\mathbb{Z}) : det(M) = 1\}, \end{aligned}$$

el grupo lineal, el grupo especial lineal, el grupo ortogonal y el grupo especial ortogonal respectivamente.

   (a) Demuestra que $GL(n,\mathbb{Z})$ es un grupo con la multiplicación de matrices.
   (b) Demuestra que $SL(n,\mathbb{Z})$ y $O(n,\mathbb{Z})$ son subgrupos del grupo $GL(n,\mathbb{Z})$.
   (c) Demuestra que $SO(n,\mathbb{Z})$ es un subgrupo de $O(n,\mathbb{Z})$.

5. Sea K un cuerpo:
   (a) Demuestra $SO(2,K)$ es abeliano.
   (b) Demuestra $\neg(SO(3,K)$ es abeliano).
6. Demuestra $\forall n \geq 2, H := \{M \in GL(n,\mathbb{Z}) : M = M^T\}$ no es subgrupo de $GL(n,\mathbb{Z})$.
7. Considera $K := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ y $G := GL(2,K)$. Escribe los elementos de G y la tabla del producto de G ¿G es abeliano?
8. Sea G un grupo. Demuestra $\forall x \in G : ord(x) = 2 \implies G$ es abeliano.
9. Sea G un grupo tal que $|G| = n$ y $G = \langle a\rangle$:
   (a) Determina $\forall k \in \mathbb{Z} \quad |\langle a^k\rangle|$
   (b) Demuestra $G = \langle a^k\rangle \iff mcd(k,n) = 1$
10. Sea G un grupo ciclico con orden n:
    (a) Demuestra que todo subgrupo de G es ciclico.
    (b) Demuestra $\forall d|n\exists! H \subset G : |H| = d$.
11. Sea $\mu_n := \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$. Demuestra que μ_n con el producto de $\mathbb{C}$ es un grupo ciclico.
12. Sean p, q numeros primos distintos y $r, s \in \mathbb{N}^*$:
    (a) Determina $\#\{x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \langle x\rangle\}$.
    (b) Determina $\#\{x \in \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z} : \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z} = \langle x\rangle\}$.
    (c) Determina $\#\{x \in \mathbb{Z}/p^r q^s\mathbb{Z} : \mathbb{Z}/p^r q^s\mathbb{Z} = \langle x\rangle\}$.
13. (a)
    (b)
14. Determina $\varepsilon(\sigma) \quad \forall\sigma \in S_3$. Determina todos los subgrupos de S_3.
15. Demuestra $\forall n \geq 2, |A_n| = |S_n/A_n|$.
16. (a) Demuestra $\forall\sigma \in S_n \quad \sigma \circ (a_1,\ldots,a_r) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(a_1),\ldots,\sigma(a_r))$.
    (b) Demuestra $\forall\sigma_1,\sigma_2 \in S_n \quad (ord(\sigma_1) = ord(\sigma_2) \implies \exists\sigma \in S_n|\sigma\circ\sigma_1\circ\sigma^{-1} = \sigma_2)$.

(c) Sean $\sigma_1, \dots, \sigma_k \in S_n$ ciclos disjuntos dos a dos y también $\tau_1, \dots, \tau_k \in S_n$ ciclos disjuntos dos a dos. Pongamos $\sigma := \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_k$ y $\tau := \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_k$. Demuestra $\forall$

17. Demuestra
    (a) $S_n = \langle (1,2), (1,3), \dots, (1,n) \rangle$.
    (b) $S_n = \langle (1,2), (2,3), \dots, (n-1,n) \rangle$.
    (c) $S_n = \langle (1,2,\dots,n), (1,2) \rangle$.

18. Sea $A_n := \{\sigma \in S_n : \varepsilon(\sigma) = 1\}$ el subgrupo alternado de S_n. Demuestra que A_n es subgrupo de S_n, $[S_n : A_n] = 2$ y $A_n = \langle 3 - ciclos \rangle$.

19. El grupo diedral $D_{2,n}$ es el grupo de los desplazamientos en el plano que dejan invariante un poligono regular de n lados. Esto es, $D_{2,n} = \langle \rho, \sigma \rangle$, donde ρ es una rotación de angulo $\frac{2\pi}{n}$ centrada en el centro de simetria del poligono y σ es una simetria axial respecto a auno de los radios del poligono.
    (a) Demuestra $\rho^n = \sigma^2 = Id \wedge \rho\sigma = \sigma\rho^{-1}$.
    (b) Escribe todos los elementos de $D_{2,n}$ ¿Cuantos son?
    (c) Define un monomorfismo $f : D_{2,n} \to S_n$.
    (d) Demuestra $\neg(D_{2,4} \simeq \mathbb{Z}/8\mathbb{Z})$.

20. (El grupo de los cuaterniones) Sea H_8 el subgrupo de $GL(2, \mathbb{C})$ generado por las matrices

$$Id := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, J := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, K := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

    (a) Demuestra que H_8 es un grupo tal que Id es el elemento neutro, $I^4 = Id$, $I^2 = J^2$ y $IJ = JI^3$.
    (b) Calcula el orden de cada elemento de H_8.
    (c) Demuestra $\langle a, b | a^4 = e, a^2 = b^2, ab = ba^3 \rangle \simeq H_8$.

21. Sea G un grupo. Demuestra $\forall H \subset G \quad [G : H] = 2 \implies H \lhd G$.

22. Sea G un grupo y $Z(G) := \{g \in G : gh = hg, \forall h \in G\}$ su centro. Demuestra $Z(G) \lhd G$.

23. Sea K un cuerpo. Demuestra $Z(GL(n,K)) = \{M \in GL(n,K) : M = \lambda Id \quad \lambda \in K^*\}$.

24. Demuestra $\forall n \geq 3 \quad Z(S_n) = \{Id\}$.

25. Sean $f : G_1 \to G_2$ un morfismo de grupos, $H_1 \subseteq G_1$ y $H_2 \subseteq G_2$ subgrupos.
    (a) Demuestra que $f(H_1)$ es subgrupo de G_2 y $f^{-1}(H_2)$ de G_1.
    (b) Demuestra $H_1 \lhd G_2 \implies f^{-1}(H_2) \lhd G_1$.
    (c) Demuestra $H_2 \lhd G_1 \implies f(H_1) \lhd f(G_1)$;pero no necesariamente $f(H_1) \lhd G_2$.

26. Teoremas de isomorfia de grupos.
    (a) Sean G un grupo, $H \lhd G$ y F un subgrupo cualquiera. Demuestra que HF es subgrupo de G, $F \cap H \lhd F$, $H \lhd HF$ y que $HF/H \simeq F/(F \cap H)$.
    (b) Sean $\varphi : G \to G'$ un epimorfismo de grupos, $H' \lhd G'$ y $H = \varphi^{-1}(H')$. Demuestra que $G/H \simeq G'/H'$.
    (c) Sean G un grupo y $F \subset H$ dos subgrupos normales en G. Demuestra que $H/F \lhd G/F$ y $(G/F)/(H/F) \simeq G/H$.

27. Considera $T \subset GL(2, \mathbb{C})$ el subgrupo de matrices diagonales y $D = \langle T, TODO \rangle$.
    (a) Demuestra $T \triangleleft D$.
    (b) Describe un isomorfismo entre D/T y $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
    (c) Estudia si $D \triangleleft GL(2, \mathbb{C})$.

28. Considera el grupo diedral $D_{2,n}$.
    (a) Explicita todso los subgrupos de $D_{2,n}$ e indica cuales son normales.
    (b) Demuestra $\exists H \subset D_{2,n} : H \triangleleft D_{2,n} \wedge |H| = n \wedge H$ es ciclico.
    (c) Demuestra $D_{2,3} \simeq S_3$.

29. Calcula todos los subgrupos del grupo de cuaterniones H_8 e indica cuales son normales.

30. (a) Demuestra que A_4 es el unico subgrupo con indice 2 de S_4. Es cierto que A_n es el unico subgrupo con indice 2 de $S_n, \forall n$?
    (b) Demuestra que A_4 no tiene subgrupos con indice 2. Tiene A_n cuando $n \geq 5$?

31. Determina, salvo isomorfismo, todos los grupos de orden menor o gual que 8.

32. Sea G un grupo. Considera la aplicación

$$\begin{aligned} f : G &\to G \times G \\ x &\mapsto (x, x) \end{aligned}$$

    Demuestra (f es un monomorfismo) $\wedge (f(G) \triangleleft G \times G \iff G$ es abeliano.

33. Determina todos los subgrupos de:
    (a) $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$
    (b) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
    (c) $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$

34. Sea G un grupo finito ciclico. Calcula $Aut(G)$, el grupo de los automorfismos de G.

35. Dado un grupo G, denotamos por $Aut(G)$ el grupo de los automorfismos de G. Denotamos por $Int(G)$ el conjunto de los automorfismos internos de G, o sea, de los automorfismos φ_g definidos por $\varphi_g(h) := ghg^{-1}$, para $h \in G$ y $g \in G$ dado.
    (a) Demuestra que $Int(G)$ es un subgrupo de $Aut(G)$.
    (b) Demuestra $\forall \sigma \in Aut(G) \forall \varphi_g \in Int(G) \quad \sigma\varphi_g\sigma^{-1} = \varphi_{\sigma(g)}$.
    (c) Demuestra $Int(G) \triangleleft Aut(G)$.

36. Demuestra que G es un grupo $\Rightarrow G/Z(G) \simeq Int(G)$. En particular, si $Z(G) = \{1\}$, entonces $Int(G) \simeq G$. Determina $Int(G)$ cuando G es abeliano.

37. (a) Calcula las clases se conjugación del grupo S_3.
    (b) Calcula las clases de conjugación del grupo S_4.

38. Demuestra que las matrices $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ son elementos conjugados en el grupo $GL(2, \mathbb{R})$, pero que no lo son en $SL(2, \mathbb{R})$.

39. Calcula todas las clases de conjugación del grupo diedral $D_{2,n}$.

40. Demuestra $\forall n \in \mathbb{N} \forall d | n \quad \langle p^d \rangle \triangleleft D_{2,n} \wedge D_{2,n}/\langle p^d \rangle \simeq D_{2,d}$.

41. (a) Escribe la definición de grupo (finito) resoluble.
    (b) Demuestra que A_2, A_3 y A_4 son resolubles.
    (c) Demuestra $\forall n \geq 5 \neg (A_n$ es resoluble).

42. (a) Escribe la definición de grupo finito simple.
    (b) Demuestra $\forall n \geq 5 A_n$ es simple.

43. Considera el grupo simetrico S_4.
    (a) Calcula los 3-subgrupos de Sylow de S_4 ¿De que orden son?
    (b) Describe los elementos de S_4 con orden 2^n y recuerda que estos elementos estan contenidos en un 2-subgrupo de Sylow. Deduce que un 2-subgrupo de Sylow contiene un subgrupo ciclico de orden 4. Explicita los 2-subgrupos de Sylow de S_4.

44. Sea G un grupo finito. Demuestra $(|G| = 96) \implies \neg(G$ es simple).

45. Sea G un grupo. Demuestra $(|G| = 15) \implies (G$ es ciclico).

Solución: Factorizamos $15 = 3 \cdot 5$ y aplicamos el 3r y 2º Teoremas de Sylow:

$$\left.\begin{aligned} |S_3| &= 3 \\ n_3 &\equiv 1 (mod 3) \\ n_3 &\mid [G : S_3] = 5 \end{aligned}\right\} \implies n_3 = 1 \iff S_3 \triangleleft G \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} |S_5| &= 5 \\ n_5 &\equiv 1 (mod 5) \\ n_5 &\mid [G : S_5] = 3 \end{aligned}\right\} \implies n_5 = 1 \iff S_5 \triangleleft G \tag{2}$$

Donde S_p es un p-subgrupo de Sylow de G y n_p la cantidad de estos.
S_3 y S_5 son ciclicos por ser de orden primo. Tomemos $S_3 = \langle a \rangle$ y $S_5 = \langle b \rangle$.
Observemos que todos los elementos de S_3 y S_5, exceptuando el neutro, son generadores de estos. De lo que se deduce inmediatamente que $S_3 \cap S_5 = \{e\}$.
Veamos que a y b conmutan:

$$ab = ba \iff aba^{-1}b^{-1} = e \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned} \underbrace{aba^{-1}}_{\in S_5 \Leftarrow S_5 \triangleleft G} b^{-1} &\in S_5 \\ a \underbrace{ba^{-1}b^{-1}}_{\in S_3 \Leftarrow S_3 \triangleleft G} &\in S_3 \end{aligned}\right\} \implies aba^{-1}b^{-1} \in S_3 \cap S_5 = \{e\} \tag{4}$$

$$ord(ab) = mcm(ord(a), ord(b)) = mcm(3,5) = 15 \tag{5}$$

$$ord(ab) = |G| \implies G = \langle ab \rangle \tag{6}$$

$$\square \tag{7}$$

46. Sea G un grupo. Demuestra $(|G| = 255) \implies (G$ es ciclico).

47. Sea G un grup y p un numero primo mayor que 2. Demuestra $|G| = 2p \implies (G$ es ciclico $) \vee (G \simeq D_{2,p})$.

48. Sea G un grupo, p, q numeros primos. Demuestra $|G| = pq \implies G$ es resoluble.

Solución: Supongamos $p = q$

$$|Z(G)| \equiv |G| \equiv p^2 \equiv 0(mod p) \implies p \mid |Z(G)| \tag{8}$$

$$|G/Z(G)| = \begin{cases} 1 & \text{si } |Z(G)| = p^2 \\ p & \text{si } |Z(G)| = p \end{cases} \implies G/Z(G) \text{ es abeliano} \implies G/Z(G) \text{ es resoluble} \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned} Z(G) \lhd G \\ Z(G) \text{ resoluble} \\ G/Z(G) \text{ resoluble} \end{aligned}\right\} \implies G \text{ es resoluble} \tag{10}$$

Supongamos ahora que $p \neq q$. Sin perdida de generalidad, $p < q$. Sean S_q un q-subgrupo de Sylow y n_q la cantidad de estos:

$$\left.\begin{aligned} n_q \equiv 1(mod q) \\ n_q \mid [G : S_q] = p \end{aligned}\right\} \implies n_q = 1 \iff S_q \lhd G \tag{11}$$

$$|S_q| = q \implies S_q \text{ es ciclico} \implies S_q \text{ es abeliano} \implies S_q \text{ es resoluble} \tag{12}$$

$$|G/S_q| = p \implies G/S_q \text{ es ciclico} \implies G/S_q \text{ es abeliano} \implies G/S_q \text{ es resoluble} \tag{13}$$

$$\left.\begin{aligned} S_q \lhd G \\ S_q \text{ resoluble} \\ G/S_q \text{ resoluble} \end{aligned}\right\} \implies G \text{ es resoluble} \tag{14}$$

$$\square \tag{15}$$

49. Sea G un grupo, p, q, r numeros primos. Demuestra $|G| = pqr \implies G$ es resoluble.

50. Sean p, q dos numeros primos tal que $0 < p < q$. Considera un grupo G:
    (a) Demuestra $|G| = p^2 \implies G$ es resoluble.
    (b) Demuestra $|G| = p^2q \implies (\exists! H \lhd G : |H| = p^2) \vee (\exists! H \lhd G : |H| = q)$.
    (c) Demuestra $|G| = p^2q \implies G$ es resoluble.