

Problemas de Grupos

Rafael Arquero Gimeno

12 de noviembre de 2014

Índice

Índice de figuras

Índice de cuadros

1. Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo K . Determina si los siguientes conjuntos con las operaciones indicadas son grupos o no:

- (a) $(\mathbb{N}, +)$
- (b) $(\mathbb{Q}, +)$
- (c) (\mathbb{Q}, \cdot)
- (d) $(S^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}, \cdot)$
- (e) $(P_n := \{p(x) \in \mathbb{R}[x] : \deg(p(x)) \leq n\}, +)$
- (f) (P_n, \cdot)
- (g) $(\text{End}(E), \circ)$
- (h) $(\text{Aut}(E), \circ)$

2. Sean G un conjunto y

$$\star : G \times G \rightarrow G$$
$$(x, y) \mapsto xy$$

una operación binaria asociativa que cumple:

1. $\exists e \in G \forall x \in G \quad ex = x$
2. $\forall x \in G \exists x' \in G \mid x'x = e$

Demuestra que (G, \star) es grupo, el elemento neutro es e y el simétrico de x es x' .

3. (a)
(b)
4. Considera

$$GL(n, \mathbb{Z}) := \{M \in M_{n \times n}(\mathbb{Z}) : \det(M) \in \mathbb{Z}^*\},$$
$$SL(n, \mathbb{Z}) := \{M \in GL(n, \mathbb{Z}) : \det(M) = 1\},$$
$$O(n, \mathbb{Z}) := \{M \in GL(n, \mathbb{Z}) : M^T M = Id\},$$
$$SO(n, \mathbb{Z}) := \{M \in O(n, \mathbb{Z}) : \det(M) = 1\},$$

el grupo lineal, el grupo especial lineal, el grupo ortogonal y el grupo especial ortogonal respectivamente.

- (a) Demuestra que $GL(n, \mathbb{Z})$ es un grupo con la multiplicación de matrices.
 - (b) Demuestra que $SL(n, \mathbb{Z})$ y $O(n, \mathbb{Z})$ son subgrupos del grupo $GL(n, \mathbb{Z})$.
 - (c) Demuestra que $SO(n, \mathbb{Z})$ es un subgrupo de $O(n, \mathbb{Z})$.
5. Sea K un cuerpo:
- (a) Demuestra $SO(2, K)$ es abeliano.
 - (b) Demuestra $\neg(SO(3, K)$ es abeliano).
6. Demuestra $\forall n \geq 2, H := \{M \in GL(n, \mathbb{Z}) : M = M^T\}$ no es subgrupo de $GL(n, \mathbb{Z})$.
7. Considera $K := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ y $G := GL(2, K)$. Escribe los elementos de G y la tabla del producto de G ¿ G es abeliano?
8. Sea G un grupo. Demuestra $\forall x \in G : ord(x) = 2 \implies G$ es abeliano.
9. Sea G un grupo tal que $|G| = n$ y $G = \langle a \rangle$:
- (a) Determina $\forall k \in \mathbb{Z} \quad |\langle a^k \rangle|$
 - (b) Demuestra $G = \langle a^k \rangle \iff mcd(k, n) = 1$
10. Sea G un grupo ciclico con orden n :
- (a) Demuestra que todo subgrupo de G es ciclico.
 - (b) Demuestra $\forall d|n \exists! H \subset G : |H| = d$.
11. Sea $\mu_n := \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$. Demuestra que μ_n con el producto de \mathbb{C} es un grupo ciclico.
12. Sean p, q numeros primos distintos y $r, s \in \mathbb{N}^*$:
- (a) Determina $\#\{x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \langle x \rangle\}$.
 - (b) Determina $\#\{x \in \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z} : \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z} = \langle x \rangle\}$.
 - (c) Determina $\#\{x \in \mathbb{Z}/p^r q^s\mathbb{Z} : \mathbb{Z}/p^r q^s\mathbb{Z} = \langle x \rangle\}$.
13. Sean $\sigma, \tau \in S_9$ las permutaciones siguientes:

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 9 & 1 & 8 & 7 & 6 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\tau = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 1 & 3 & 5 & 8 & 2 & 9 & 6 & 4 \end{bmatrix} \quad (2)$$

- (a) Calcula $\sigma\tau$ y $\tau\sigma$.
- (b) Descompon σ y τ como producto de ciclos disjuntos, como producto de transposiciones y calcula $\varepsilon(\sigma)$.
- (c) Calcula σ^{2012} .

Solución:

1. Calculamos de la forma $\sigma(\tau(i))$ y viceversa $\forall i \ 1 \leq i \leq 9$

$$\sigma\tau = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 3 & 1 & 7 & 4 & 9 & 5 & 6 & 8 \end{bmatrix} \quad \tau\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 4 & 7 & 6 & 9 & 2 & 3 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

2. Ciclos:

$$\sigma = (129573)(48)$$

$$\tau = (17945862)$$

Transposiciones:

$$\sigma = (12)(29)(95)(57)(73)(48)$$

$$\tau = (17)(79)(94)(45)(58)(86)(62)$$

Σ :

$$\Sigma(\sigma) : (-1)^6 = 1$$

$$\sigma(\tau) : (-1)^7 = -1$$

3. $\sigma = (129573)(48) = S_6 \cup S_2$. Por lo que: $S_6^6 = Id, S_2^2 = Id$.

Entonces:

$$2012 \equiv 2(mod 6) \rightarrow 335 * 6 + 2$$

$$2012 \equiv 0(mod 6) \rightarrow 1006 * 2$$

Por lo que:

$$\sigma^{2012} = S_6^2$$

14. Determina $\varepsilon(\sigma) \quad \forall \sigma \in S_3$. Determina todos los subgrupos de S_3 .

Solución:

$$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right\} \quad (3)$$

$$S_3 = \{Id, t_1, c_2, c_1, t_2, t_3\} \quad (4)$$

$$\quad (5)$$

$$\varepsilon(Id) = (-1)^0 = +1 \quad (6)$$

$$\varepsilon(t_1) = (-1)^1 = -1 \quad (7)$$

$$\varepsilon(c_2) = (-1)^2 = +1 \quad (8)$$

$$\varepsilon(c_1) = (-1)^2 = +1 \quad (9)$$

$$\varepsilon(t_2) = (-1)^1 = -1 \quad (10)$$

$$\varepsilon(t_3) = (-1)^1 = -1 \quad (11)$$

Subgrupos:

1. $\{Id\}$

2. $\{S_3\}$

3. $\{Id, t_1\}$

$$4. \{Id, t_2\}$$

$$5. \{Id, t_3\}$$

$$6. \{Id, c_1, c_2\}$$

Esto es así ya que $t_i^2 = Id \quad \forall i, 1 \leq i \leq 3$ mientras que por ejemplo $c_2^2 = c_1$.

15. Demuestra $\forall n \geq 2, |A_n| = |S_n/A_n|$.

Solución:

Toda permutación descompone en producto de transposiciones. Esta descomposición no es única, más su ε se mantiene. Es decir, son o pares o impares.

Sea la aplicación:

$$f : P \rightarrow I \quad (12)$$

$$\sigma \mapsto \tau\sigma \quad (13)$$

Que envía las permutaciones pares a las impares, solo queda ver que esta es biyectiva.

1. inyectiva:

$$f(\sigma) = f(\xi) \implies \sigma = \xi? \quad (14)$$

$$\tau\sigma = \tau\xi \implies \sigma = \xi \quad (15)$$

2. exhaustiva:

Si, pues $f(\tau\sigma) = \tau\tau\sigma = \sigma$.

Como f es biyectiva, entonces tendrá siempre la misma cantidad de permutaciones pares que impares; ergo la mitad de S_n .

16. (a) Demuestra $\forall \sigma \in S_n \quad \sigma \circ (a_1, \dots, a_r) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(a_1), \dots, \sigma(a_r))$.
 (b) Demuestra $\forall \sigma_1, \sigma_2 \in S_n \quad (ord(\sigma_1) = ord(\sigma_2) \implies \exists \sigma \in S_n | \sigma \circ \sigma_1 \circ \sigma^{-1} = \sigma_2)$.
 (c) Sean $\sigma_1, \dots, \sigma_k \in S_n$ ciclos disjuntos dos a dos y también $\tau_1, \dots, \tau_k \in S_n$ ciclos disjuntos dos a dos. Pongamos $\sigma := \sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_k$ y $\tau := \tau_1 \circ \dots \circ \tau_k$. Demuestra $\forall i \quad 1 \leq i \leq k$, si la longitud del ciclo σ_i coincide con la del ciclo $\tau_i \implies \exists \rho \in S_n \mid \rho \circ \sigma \circ \rho^{-1} = \tau$
17. Demuestra
- (a) $S_n = \langle (1, 2), (1, 3), \dots, (1, n) \rangle$.
 - (b) $S_n = \langle (1, 2), (2, 3), \dots, (n-1, n) \rangle$.
 - (c) $S_n = \langle (1, 2, \dots, n), (1, 2) \rangle$.
18. Sea $A_n := \{\sigma \in S_n : \varepsilon(\sigma) = 1\}$ el subgrupo alternado de S_n . Demuestra que A_n es subgrupo de S_n , $[S_n : A_n] = 2$ y $A_n = \langle 3 - \text{ciclos} \rangle$.

19. El grupo diedral $D_{2,n}$ es el grupo de los desplazamientos en el plano que dejan invariante un poligono regular de n lados. Esto es, $D_{2,n} = \langle \rho, \sigma \rangle$, donde ρ es una rotación de angulo $\frac{2\pi}{n}$ centrada en el centro de simetria del poligono y σ es una simetria axial respecto a auno de los radios del poligono.
- Demuestra $\rho^n = \sigma^2 = Id \wedge \rho\sigma = \sigma\rho^{-1}$.
 - Escribe todos los elementos de $D_{2,n}$ ¿Cuántos son?
 - Define un monomorfismo $f : D_{2,n} \rightarrow S_n$.
 - Demuestra $\neg(D_{2,4} \simeq \mathbb{Z}/8\mathbb{Z})$.
20. (El grupo de los cuaterniones) Sea H_8 el subgrupo de $GL(2, \mathbb{C})$ generado por las matrices
- $$Id := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, J := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, K := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$
- Demuestra que H_8 es un grupo tal que Id es el elemento neutro, $I^4 = Id$, $I^2 = J^2$ y $IJ = JI^3$.
 - Calcula el orden de cada elemento de H_8 .
 - Demuestra $\langle a, b | a^4 = e, a^2 = b^2, ab = ba^3 \rangle \simeq H_8$.
21. Sea G un grupo. Demuestra $\forall H \subset G \quad [G : H] = 2 \implies H \triangleleft G$.
22. Sea G un grupo y $Z(G) := \{g \in G : gh = hg, \forall h \in G\}$ su centro. Demuestra $Z(G) \triangleleft G$.
23. Sea K un cuerpo. Demuestra $Z(GL(n, K)) = \{M \in GL(n, K) : M = \lambda Id \quad \lambda \in K^*\}$.
24. Demuestra $\forall n \geq 3 \quad Z(S_n) = \{Id\}$.
25. Sean $f : G_1 \rightarrow G_2$ un morfismo de grupos, $H_1 \subseteq G_1$ y $H_2 \subseteq G_2$ subgrupos.
- Demuestra que $f(H_1)$ es subgrupo de G_2 y $f^{-1}(H_2)$ de G_1 .
 - Demuestra $H_1 \triangleleft G_2 \implies f^{-1}(H_2) \triangleleft G_1$.
 - Demuestra $H_2 \triangleleft G_1 \implies f(H_1) \triangleleft f(G_1)$; pero no necesariamente $f(H_1) \triangleleft G_2$.
26. Teoremas de isomorfia de grupos.
- Sean G un grupo, $H \triangleleft G$ y F un subgrupo cualquiera. Demuestra que HF es subgrupo de G , $F \cap H \triangleleft F$, $H \triangleleft HF$ y que $HF/H \simeq F/(F \cap H)$.
 - Sean $\varphi : G \rightarrow G'$ un epimorfismo de grupos, $H' \triangleleft G'$ y $H = \varphi^{-1}(H')$. Demuestra que $G/H \simeq G'/H'$.
 - Sean G un grupo y $F \subset H$ dos subgrupos normales en G . Demuestra que $H/F \triangleleft G/F$ y $(G/F)/(H/F) \simeq G/H$.
27. Considera $T \subset GL(2, \mathbb{C})$ el subgrupo de matrices diagonales y $D = \langle T, TODO \rangle$.
- Demuestra $T \triangleleft D$.
 - Describe un isomorfismo entre D/T y $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
 - Estudia si $D \triangleleft GL(2, \mathbb{C})$.
28. Considera el grupo diedral $D_{2,n}$.
- Explicita todos los subgrupos de $D_{2,n}$ e indica cuales son normales.
 - Demuestra $\exists H \subset D_{2,n} : H \triangleleft D_{2,n} \wedge |H| = n \wedge H$ es ciclico.
 - Demuestra $D_{2,3} \simeq S_3$.

29. Calcula todos los subgrupos del grupo de cuaterniones H_8 e indica cuales son normales.
30. (a) Demuestra que A_4 es el unico subgrupo con indice 2 de S_4 . Es cierto que A_n es el unico subgrupo con indice 2 de $S_n, \forall n$?
- (b) Demuestra que A_4 no tiene subgrupos con indice 2. Tiene A_n cuando $n \geq 5$?
31. Determina, salvo isomorfismo, todos los grupos de orden menor o igual que 8.
32. Sea G un grupo. Considera la aplicación

$$\begin{aligned} f : G &\rightarrow G \times G \\ x &\mapsto (x, x) \end{aligned}$$

Demuestra $(f \text{ es un monomorfismo}) \wedge (f(G) \triangleleft G \times G \iff G \text{ es abeliano})$.

33. Determina todos los subgrupos de:
- (a) $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$
- (b) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
- (c) $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$
34. Sea G un grupo finito ciclico. Calcula $\text{Aut}(G)$, el grupo de los automorfismos de G .
35. Dado un grupo G , denotamos por $\text{Aut}(G)$ el grupo de los automorfismos de G . Denotamos por $\text{Int}(G)$ el conjunto de los automorfismos internos de G , o sea, de los automorfismos φ_g definidos por $\varphi_g(h) := ghg^{-1}$, para $h \in G$ y $g \in G$ dado.
- (a) Demuestra que $\text{Int}(G)$ es un subgrupo de $\text{Aut}(G)$.
- (b) Demuestra $\forall \sigma \in \text{Aut}(G) \forall \varphi_g \in \text{Int}(G) \quad \sigma \varphi_g \sigma^{-1} = \varphi_{\sigma(g)}$.
- (c) Demuestra $\text{Int}(G) \triangleleft \text{Aut}(G)$.
36. Demuestra que G es un grupo $\Rightarrow G/Z(G) \simeq \text{Int}(G)$. En particular, si $Z(G) = \{1\}$, entonces $\text{Int}(G) \simeq G$. Determina $\text{Int}(G)$ cuando G es abeliano.
37. (a) Calcula las clases de conjugación del grupo S_3 .
- (b) Calcula las clases de conjugación del grupo S_4 .
38. Demuestra que las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ son elementos conjugados en el grupo $GL(2, \mathbb{R})$, pero que no lo son en $SL(2, \mathbb{R})$.
39. Calcula todas las clases de conjugación del grupo diedral $D_{2,n}$.
40. Demuestra $\forall n \in \mathbb{N} \forall d|n \quad \langle p^d \rangle \triangleleft D_{2,n} \wedge D_{2,n}/\langle p^d \rangle \simeq D_{2,d}$.
41. (a) Escribe la definición de grupo (finito) resoluble.
- (b) Demuestra que A_2, A_3 y A_4 son resolubles.
- (c) Demuestra $\forall n \geq 5 \neg(A_n \text{ es resoluble})$.
42. (a) Escribe la definición de grupo finito simple.
- (b) Demuestra $\forall n \geq 5 A_n$ es simple.
43. Considera el grupo simetrico S_4 .
- (a) Calcula los 3-subgrupos de Sylow de S_4 . De que orden son?

- (b) Describe los elementos de S_4 con orden 2^n y recuerda que estos elementos estan contenidos en un 2-subgrupo de Sylow. Deduce que un 2-subgrupo de Sylow contiene un subgrupo ciclico de orden 4. Explicita los 2-subgrupos de Sylow de S_4 .
44. Sea G un grupo finito. Demuestra $(|G| = 96) \implies \neg(G \text{ es simple})$.
45. Sea G un grupo. Demuestra $(|G| = 15) \implies (G \text{ es ciclico})$.

Solución: Factorizamos $15 = 3 \cdot 5$ y aplicamos el 3r y 2º Teoremas de Sylow:

$$\left. \begin{array}{l} |S_3| = 3 \\ n_3 \equiv 1 \pmod{3} \\ n_3 \mid [G : S_3] = 5 \end{array} \right\} \implies n_3 = 1 \iff S_3 \triangleleft G \quad (16)$$

$$\left. \begin{array}{l} |S_5| = 5 \\ n_5 \equiv 1 \pmod{5} \\ n_5 \mid [G : S_5] = 3 \end{array} \right\} \implies n_5 = 1 \iff S_5 \triangleleft G \quad (17)$$

Donde S_p es un p -subgrupo de Sylow de G y n_p la cantidad de estos.

S_3 y S_5 son ciclicos por ser de orden primo. Tomemos $S_3 = \langle a \rangle$ y $S_5 = \langle b \rangle$.

Observemos que todos los elementos de S_3 y S_5 , exceptuando el neutro, son generadores de estos. De lo que se deduce inmediatamente que $S_3 \cap S_5 = \{e\}$.

Veamos que a y b conmutan:

$$ab = ba \iff aba^{-1}b^{-1} = e \quad (18)$$

$$\left. \begin{array}{l} \underbrace{aba^{-1}}_{\in S_5 \triangleleft S_5 \triangleleft G} b^{-1} \in S_5 \\ a \underbrace{ba^{-1}b^{-1}}_{\in S_3 \triangleleft S_3 \triangleleft G} \in S_3 \end{array} \right\} \implies aba^{-1}b^{-1} \in S_3 \cap S_5 = \{e\} \quad (19)$$

$$\text{ord}(ab) = \text{mcm}(\text{ord}(a), \text{ord}(b)) = \text{mcm}(3, 5) = 15 \quad (20)$$

$$\text{ord}(ab) = |G| \implies G = \langle ab \rangle \quad (21)$$

$$\square \quad (22)$$

46. Sea G un grupo. Demuestra $(|G| = 255) \implies (G \text{ es ciclico})$.
47. Sea G un grup y p un numero primo mayor que 2. Demuestra $|G| = 2p \implies (G \text{ es ciclico}) \vee (G \simeq D_{2,p})$.
48. Sea G un grupo, p, q numeros primos. Demuestra $|G| = pq \implies G$ es resoluble.

Solución: Supongamos $p = q$

$$|Z(G)| \equiv |G| \equiv p^2 \equiv 0 \pmod{p} \implies p \mid |Z(G)| \quad (23)$$

$$|G/Z(G)| = \begin{cases} 1 & \text{si } |Z(G)| = p^2 \\ p & \text{si } |Z(G)| = p \end{cases} \implies G/Z(G) \text{ es abeliano} \implies G/Z(G) \text{ es resoluble} \quad (24)$$

$$\left. \begin{array}{l} Z(G) \triangleleft G \\ Z(G) \text{ resoluble} \\ G/Z(G) \text{ resoluble} \end{array} \right\} \implies G \text{ es resoluble} \quad (25)$$

Supongamos ahora que $p \neq q$. Sin perdida de generalidad, $p < q$. Sean S_q un q -subgrupo de Sylow y n_q la cantidad de estos:

$$\left. \begin{array}{l} n_q \equiv 1 \pmod{q} \\ n_q \mid [G : S_q] = p \end{array} \right\} \implies n_q = 1 \iff S_q \triangleleft G \quad (26)$$

$$|S_q| = q \implies S_q \text{ es ciclico} \implies S_q \text{ es abeliano} \implies S_q \text{ es resoluble} \quad (27)$$

$$|G/S_q| = p \implies G/S_q \text{ es ciclico} \implies G/S_q \text{ es abeliano} \implies G/S_q \text{ es resoluble} \quad (28)$$

$$\left. \begin{array}{l} S_q \triangleleft G \\ S_q \text{ resoluble} \\ G/S_q \text{ resoluble} \end{array} \right\} \implies G \text{ es resoluble} \quad (29)$$

$$\square \quad (30)$$

49. Sea G un grupo, p, q, r numeros primos. Demuestra $|G| = pqr \implies G$ es resoluble.

50. Sean p, q dos numeros primos tal que $0 < p < q$. Considera un grupo G :

(a) Demuestra $|G| = p^2 \implies G$ es resoluble.

(b) Demuestra $|G| = p^2q \implies (\exists! H \triangleleft G : |H| = p^2) \vee (\exists! H \triangleleft G : |H| = q)$.

(c) Demuestra $|G| = p^2q \implies G$ es resoluble.