Problemas de Estructuras Algebraicas

Rafael Arquero Gimeno @_arkeros
Helena Garví Casas

16 de noviembre de 2014

Índice

Índice de figuras

Índice de cuadros

1. Grupos

1. Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo K. Determina si los siguientes conjuntos con las operaciones indicadas son grupos o no:
   (a) $(\mathbb{N}, +)$
   (b) $(\mathbb{Q}, +)$
   (c) $(\mathbb{Q}, \cdot)$
   (d) $(S^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}, \cdot)$
   (e) $(P_n := \{p(x) \in \mathbb{R}[x] : gr(p(x)) \leq n\}, +)$
   (f) $(P_n, \cdot)$
   (g) $(End(E), \circ)$
   (h) $(Aut(E), \circ)$
2. Sean G un conjunto y
$$\begin{aligned} \star : G \times G &\to G \\ (x, y) &\mapsto xy \end{aligned}$$
   una operación binaria asociativa que cumple:
   1. $\exists e \in G \forall x \in G \quad ex = x$
   2. $\forall x \in G \exists x' \in G | x'x = e$

   Demuestra que $(G, \star)$ es grupo, el elemento neutro es e y el simetrico de x es x'.
3. (a)
   (b)
4. Considera
$$\begin{aligned} GL(n, \mathbb{Z}) &:= \{M \in M_{n\times n}(\mathbb{Z}) : det(M) \in \mathbb{Z}^*\}, \\ SL(n, \mathbb{Z}) &:= \{M \in GL(n, \mathbb{Z}) : det(M) = 1\}, \\ O(n, \mathbb{Z}) &:= \{M \in GL(n, \mathbb{Z}) : M^T M = Id\}, \\ SO(n, \mathbb{Z}) &:= \{M \in O(n, \mathbb{Z}) : det(M) = 1\}, \end{aligned}$$
   el grupo lineal, el grupo especial lineal, el grupo ortogonal y el grupo especial ortogonal respectivamente.
   (a) Demuestra que $GL(n, \mathbb{Z})$ es un grupo con la multiplicación de matrices.
   (b) Demuestra que $SL(n, \mathbb{Z})$ y $O(n, \mathbb{Z})$ son subgrupos del grupo $GL(n, \mathbb{Z})$.
   (c) Demuestra que $SO(n, \mathbb{Z})$ es un subgrupo de $O(n, \mathbb{Z})$.
5. Sea K un cuerpo:
   (a) Demuestra $SO(2, K)$ es abeliano.
   (b) Demuestra $\neg(SO(3, K)$ es abeliano).
6. Demuestra $\forall n \geq 2, H := \{M \in GL(n, \mathbb{Z}) : M = M^T\}$ no es subgrupo de $GL(n, \mathbb{Z})$.

7. Considera $K := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ y $G := GL(2, K)$. Escribe los elementos de G y la tabla del producto de G ¿G es abeliano?

8. Sea G un grupo. Demuestra $\forall x \in G : ord(x) = 2 \implies G$ es abeliano.

9. Sea G un grupo tal que $|G| = n$ y $G = \langle a \rangle$:
   (a) Determina $\forall k \in \mathbb{Z} \quad |\langle a^k \rangle|$
   (b) Demuestra $G = \langle a^k \rangle \iff mcd(k, n) = 1$

10. Sea G un grupo ciclico con orden n:
    (a) Demuestra que todo subgrupo de G es ciclico.
    (b) Demuestra $\forall d | n \exists ! H \subset G : |H| = d$.

11. Sea $\mu_n := \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$. Demuestra que μ_n con el producto de $\mathbb{C}$ es un grupo ciclico.

12. Sean p, q numeros primos distintos y $r, s \in \mathbb{N}^*$:
    (a) Determina $\#\{x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \langle x \rangle\}$.
    (b) Determina $\#\{x \in \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z} : \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z} = \langle x \rangle\}$.
    (c) Determina $\#\{x \in \mathbb{Z}/p^r q^s\mathbb{Z} : \mathbb{Z}/p^r q^s\mathbb{Z} = \langle x \rangle\}$.

13. Sean $\sigma, \tau \in S_9$ las permutaciones siguientes:

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 9 & 1 & 8 & 7 & 6 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$\tau = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 1 & 3 & 5 & 8 & 2 & 9 & 6 & 4 \end{bmatrix} \tag{2}$$

    (a) Calcula $\sigma\tau$ y $\tau\sigma$.

    (b) Descompon σ y τ como producto de ciclos disjuntos, como producto de transposiciones y calcula $\varepsilon(\sigma)$.

    (c) Calcula σ^{2012}.

Solución:

1. Calculamos de la forma $\sigma(\tau(i))$ y viceversa $\forall i \; 1 \leq i \leq 9$
   $\sigma\tau = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 3 & 1 & 7 & 4 & 9 & 5 & 6 & 8 \end{bmatrix}$ $\tau\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 4 & 7 & 6 & 9 & 2 & 3 & 5 & 8 \end{bmatrix}$

2. Ciclos:
   $\sigma = (129573)(48)$
   $\tau = (17945862)$
   Transposiciones:
   $\sigma = (12)(29)(95)(57)(73)(48)$

$\tau = (17)(79)(94)(45)(58)(86)(62)$
$\Sigma :$
$\Sigma(\sigma) : (-1)^6 = 1$
$\sigma(\tau) : (-1)^7 = -1$

3. $\sigma = (129573)(48) = S_6 \cup S_2$. Por lo que: $S_6^6 = Id, S_2^2 = Id$.
   Entonces:
   $2012 \equiv 2(mod 6) \rightarrow 335 * 6 + 2$
   $2012 \equiv 0(mod 6) \rightarrow 1006 * 2$
   Por lo que:
   $\sigma^{2012} = S_6^2$

14. Determina $\varepsilon(\sigma) \quad \forall \sigma \in S_3$. Determina todos los subgrupos de S_3.

Solución:

$$S_3 = \{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\} \tag{3}$$

$$S_3 = \{Id, t_1, c_2, c_1, t_2, t_3\} \tag{4}$$

$$\tag{5}$$

$$\varepsilon(Id) = (-1)^0 = +1 \tag{6}$$
$$\varepsilon(t_1) = (-1)^1 = -1 \tag{7}$$
$$\varepsilon(c_2) = (-1)^2 = +1 \tag{8}$$
$$\varepsilon(c_1) = (-1)^2 = +1 \tag{9}$$
$$\varepsilon(t_2) = (-1)^1 = -1 \tag{10}$$
$$\varepsilon(t_3) = (-1)^1 = -1 \tag{11}$$

Subgrupos:

1. $\{Id\}$
2. $\{S_3\}$
3. $\{Id, t_1\}$
4. $\{Id, t_2\}$
5. $\{Id, t_3\}$
6. $\{Id, c_1, c_2\}$

Esto es asi ya que $t_i^2 = Id \quad \forall i, 1 \leq i \leq 3$ mientras que por ejemplo $c_2^2 = c_1$.

15. Demuestra $\forall n \geq 2, |A_n| = |S_n/A_n|$.

Solución:
Toda permutación descompone en producto de transposiciones. Esta descomposición no es única, más su ε se mantiene. Es decir, son o pares o impares.
Sea la aplicación:

$$f : P \to I \tag{12}$$
$$\sigma \mapsto \tau\sigma \tag{13}$$

Que envia las permutaciones pares a las impares, solo queda ver que esta es biyectiva.

1. inyectiva:

$$f(\sigma) = f(\xi) \implies \sigma = \xi? \tag{14}$$
$$\tau\sigma = \tau\xi \implies \sigma = \xi \tag{15}$$

2. exhaustiva:
   Si, pues $f(\tau\sigma) = \tau\tau\sigma = \sigma$.

Como f es biyectiva, entonces tendrá siempre la misma cantidad de permutaciones pares que impares; ergo la mitad de S_n.

16. (a) Demuestra $\forall \sigma \in S_n \quad \sigma \circ (a_1, \ldots, a_r) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_r))$.
    (b) Demuestra $\forall \sigma_1, \sigma_2 \in S_n \quad (ord(\sigma_1) = ord(\sigma_2) \implies \exists \sigma \in S_n | \sigma \circ \sigma_1 \circ \sigma^{-1} = \sigma_2)$.
    (c) Sean $\sigma_1, \ldots, \sigma_k \in S_n$ ciclos disjuntos dos a dos y también $\tau_1, \ldots, \tau_k \in S_n$ ciclos disjuntos dos a dos. Pongamos $\sigma := \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_k$ y $\tau := \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_k$. Demuestra $\forall i \ 1 \leq i \leq k$, si la longitud del ciclo σ_i coincide con la del ciclo $\tau_i \implies \exists \rho \in S_n \mid \rho \circ \sigma \circ \rho^{-}1 = \tau$

17. Demuestra
    (a) $S_n = \langle (1, 2), (1, 3), \ldots, (1, n) \rangle$.
    (b) $S_n = \langle (1, 2), (2, 3), \ldots, (n - 1, n) \rangle$.
    (c) $S_n = \langle (1, 2, \ldots, n), (1, 2) \rangle$.

18. Sea $A_n := \{\sigma \in S_n : \varepsilon(\sigma) = 1\}$ el subgrupo alternado de S_n. Demuestra que A_n es subgrupo de S_n, $[S_n : A_n] = 2$ y $A_n = \langle 3 - ciclos \rangle$.

19. El grupo diedral $D_{2,n}$ es el grupo de los desplazamientos en el plano que dejan invariante un poligono regular de n lados. Esto es, $D_{2,n} = \langle \rho, \sigma \rangle$, donde ρ es una rotación de angulo $\frac{2\pi}{n}$ centrada en el centro de simetria del poligono y σ es una simetria axial respecto a auno de los radios del poligono.
    (a) Demuestra $\rho^n = \sigma^2 = Id \wedge \rho\sigma = \sigma\rho^{-1}$.
    (b) Escribe todos los elementos de $D_{2,n}$ ¿Cuantos son?
    (c) Define un monomorfismo $f : D_{2,n} \to S_n$.
    (d) Demuestra $\neg(D_{2,4} \simeq \mathbb{Z}/8\mathbb{Z})$.

20. (El grupo de los cuaterniones) Sea H_8 el subgrupo de $GL(2,\mathbb{C})$ generado por las matrices

$$Id := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, J := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, K := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

    (a) Demuestra que H_8 es un grupo tal que Id es el elemento neutro, $I^4 = Id$, $I^2 = J^2$ y $IJ = JI^3$.
    (b) Calcula el orden de cada elemento de H_8.
    (c) Demuestra $\langle a, b | a^4 = e, a^2 = b^2, ab = ba^3 \rangle \simeq H_8$.

21. Sea G un grupo. Demuestra $\forall H \subset G \quad [G : H] = 2 \implies H \triangleleft G$.

22. Sea G un grupo y $Z(G) := \{g \in G : gh = hg, \forall h \in G\}$ su centro. Demuestra $Z(G) \triangleleft G$.

23. Sea K un cuerpo. Demuestra $Z(GL(n,K)) = \{M \in GL(n,K) : M = \lambda Id \quad \lambda \in K^*\}$.

24. Demuestra $\forall n \geq 3 \quad Z(S_n) = \{Id\}$.

25. Sean $f : G_1 \to G_2$ un morfismo de grupos, $H_1 \subseteq G_1$ y $H_2 \subseteq G_2$ subgrupos.
    (a) Demuestra que $f(H_1)$ es subgrupo de G_2 y $f^{-1}(H_2)$ de G_1.
    (b) Demuestra $H_1 \triangleleft G_2 \implies f^{-1}(H_2) \triangleleft G_1$.
    (c) Demuestra $H_2 \triangleleft G_1 \implies f(H_1) \triangleleft f(G_1)$; pero no necesariamente $f(H_1) \triangleleft G_2$.

26. Teoremas de isomorfia de grupos.
    (a) Sean G un grupo, $H \triangleleft G$ y F un subgrupo cualquiera. Demuestra que HF es subgrupo de G, $F \cap H \triangleleft F$, $H \triangleleft HF$ y que $HF/H \simeq F/(F \cap H)$.
    (b) Sean $\varphi : G \to G'$ un epimorfismo de grupos, $H' \triangleleft G'$ y $H = \varphi^{-1}(H')$. Demuestra que $G/H \simeq G'/H'$.
    (c) Sean G un grupo y $F \subset H$ dos subgrupos normales en G. Demuestra que $H/F \triangleleft G/F$ y $(G/F)/(H/F) \simeq G/H$.

27. Considera $T \subset GL(2,\mathbb{C})$ el subgrupo de matrices diagonales y $D = \langle T, TODO \rangle$.
    (a) Demuestra $T \triangleleft D$.
    (b) Describe un isomorfismo entre D/T y $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
    (c) Estudia si $D \triangleleft GL(2,\mathbb{C})$.

28. Considera el grupo diedral $D_{2,n}$.
    (a) Explicita todso los subgrupos de $D_{2,n}$ e indica cuales son normales.
    (b) Demuestra $\exists H \subset D_{2,n} : H \triangleleft D_{2,n} \wedge |H| = n \wedge H$ es ciclico.
    (c) Demuestra $D_{2,3} \simeq S_3$.

29. Calcula todos los subgrupos del grupo de cuaterniones H_8 e indica cuales son normales.

30. (a) Demuestra que A_4 es el unico subgrupo con indice 2 de S_4. Es cierto que A_n es el unico subgrupo con indice 2 de $S_n, \forall n$?
    (b) Demuestra que A_4 no tiene subgrupos con indice 2. Tiene A_n cuando $n \geq 5$?

31. Determina, salvo isomorfismo, todos los grupos de orden menor o gual que 8.

32. Sea G un grupo. Considera la aplicación

$$\begin{aligned} f : G &\to G \times G \\ x &\mapsto (x, x) \end{aligned}$$

Demuestra (f es un monomorfismo) $\wedge(f(G) \triangleleft G \times G \iff G$ es abeliano.

33. Determina todos los subgrupos de:
    (a) $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$
    (b) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
    (c) $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$

34. Sea G un grupo finito ciclico. Calcula $Aut(G)$, el grupo de los automorfismos de G.

35. Dado un grupo G, denotamos por $Aut(G)$ el grupo de los automorfismos de G. Denotamos por $Int(G)$ el conjunto de los automorfismos internos de G, o sea, de los automorfismos φ_g definidos por $\varphi_g(h) := ghg^{-1}$, para $h \in G$ y $g \in G$ dado.
    (a) Demuestra que $Int(G)$ es un subgrupo de $Aut(G)$.
    (b) Demuestra $\forall \sigma \in Aut(G) \forall \varphi_g \in Int(G) \quad \sigma\varphi_g\sigma^{-1} = \varphi_{\sigma(g)}$.
    (c) Demuestra $Int(G) \triangleleft Aut(G)$.

36. Demuestra que G es un grupo $\Rightarrow G/Z(G) \simeq Int(G)$. En particular, si $Z(G) = \{1\}$, entonces $Int(G) \simeq G$. Determina $Int(G)$ cuando G es abeliano.

37. (a) Calcula las clases se conjugación del grupo S_3.
    (b) Calcula las clases de conjugación del grupo S_4.

38. Demuestra que las matrices $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ son elementos conjugados en el grupo $GL(2, \mathbb{R})$, pero que no lo son en $SL(2, \mathbb{R})$.

39. Calcula todas las clases de conjugación del grupo diedral $D_{2,n}$.

40. Demuestra $\forall n \in \mathbb{N} \forall d|n \quad \langle p^d \rangle \triangleleft D_{2,n} \wedge D_{2,n}/\langle p^d \rangle \simeq D_{2,d}$.

41. (a) Escribe la definición de grupo (finito) resoluble.
    (b) Demuestra que A_2, A_3 y A_4 son resolubles.
    (c) Demuestra $\forall n \geq 5 \neg(A_n$ es resoluble).

42. (a) Escribe la definición de grupo finito simple.
    (b) Demuestra $\forall n \geq 5 A_n$ es simple.

43. Considera el grupo simetrico S_4.
    (a) Calcula los 3-subgrupos de Sylow de S_4 ¿De que orden son?
    (b) Describe los elementos de S_4 con orden 2^n y recuerda que estos elementos estan contenidos en un 2-subgrupo de Sylow. Deduce que un 2-subgrupo de Sylow contiene un subgrupo ciclico de orden 4. Explicita los 2-subgrupos de Sylow de S_4.

44. Sea G un grupo finito. Demuestra $(|G| = 96) \implies \neg(G$ es simple).

45. Sea G un grupo. Demuestra $(|G| = 15) \implies (G$ es ciclico).

Solución: Factorizamos $15 = 3 \cdot 5$ y aplicamos el 3r y 2º Teoremas de Sylow:

$$\left.\begin{aligned} |S_3| = 3 \\ n_3 \equiv 1(mod3) \\ n_3 \mid [G : S_3] = 5 \end{aligned}\right\} \implies n_3 = 1 \iff S_3 \triangleleft G \tag{16}$$

$$\left.\begin{aligned} |S_5| = 5 \\ n_5 \equiv 1(mod5) \\ n_5 \mid [G : S_5] = 3 \end{aligned}\right\} \implies n_5 = 1 \iff S_5 \triangleleft G \tag{17}$$

Donde S_p es un p-subgrupo de Sylow de G y n_p la cantidad de estos.
S_3 y S_5 son ciclicos por ser de orden primo. Tomemos $S_3 = \langle a \rangle$ y $S_5 = \langle b \rangle$.
Observemos que todos los elementos de S_3 y S_5, exceptuando el neutro, son generadores de estos. De lo que se deduce inmediatamente que $S_3 \cap S_5 = \{e\}$.
Veamos que a y b conmutan:

$$ab = ba \iff aba^{-1}b^{-1} = e \tag{18}$$

$$\left.\begin{aligned} \underbrace{aba^{-1}}_{\in S_5 \Leftarrow S_5 \triangleleft G} b^{-1} \in S_5 \\ a \underbrace{ba^{-1}b^{-1}}_{\in S_3 \Leftarrow S_3 \triangleleft G} \in S_3 \end{aligned}\right\} \implies aba^{-1}b^{-1} \in S_3 \cap S_5 = \{e\} \tag{19}$$

$$ord(ab) = mcm(ord(a), ord(b)) = mcm(3, 5) = 15 \tag{20}$$

$$ord(ab) = |G| \implies G = \langle ab \rangle \tag{21}$$

$$\square \tag{22}$$

46. Sea G un grupo. Demuestra $(|G| = 255) \implies$ (G es ciclico).

47. Sea G un grup y p un numero primo mayor que 2. Demuestra $|G| = 2p \implies$ (G es ciclico) $\vee$ $(G \simeq D_{2,p})$.

48. Sea G un grupo, p, q numeros primos. Demuestra $|G| = pq \implies G$ es resoluble.

Solución: Supongamos $p = q$

$$|Z(G)| \equiv |G| \equiv p^2 \equiv 0(modp) \implies p \mid |Z(G)| \tag{23}$$

$$|G/Z(G)| = \begin{cases} 1 & \text{si } |Z(G)| = p^2 \\ p & \text{si } |Z(G)| = p \end{cases} \implies G/Z(G) \text{ es abeliano} \implies G/Z(G) \text{ es resoluble} \tag{24}$$

$$\left.\begin{aligned} Z(G) \triangleleft G \\ Z(G) \text{ resoluble} \\ G/Z(G) \text{ resoluble} \end{aligned}\right\} \implies G \text{ es resoluble} \tag{25}$$

Supongamos ahora que $p \neq q$. Sin perdida de generalidad, $p < q$. Sean S_q un q-subgrupo de Sylow y n_q la cantidad de estos:

$$\left.\begin{aligned} n_q &\equiv 1(modq) \\ n_q &\mid [G:S_q] = p \end{aligned}\right\} \implies n_q = 1 \iff S_q \triangleleft G \tag{26}$$

$$|S_q| = q \implies S_q \text{ es ciclico} \implies S_q \text{ es abeliano} \implies S_q \text{ es resoluble} \tag{27}$$

$$|G/S_q| = p \implies G/S_q \text{ es ciclico} \implies G/S_q \text{ es abeliano} \implies G/S_q \text{ es resoluble} \tag{28}$$

$$\left.\begin{aligned} &S_q \triangleleft G \\ &S_q \text{ resoluble} \\ &G/S_q \text{ resoluble} \end{aligned}\right\} \implies G \text{ es resoluble} \tag{29}$$

$$\square \tag{30}$$

49. Sea G un grupo, p, q, r numeros primos. Demuestra $|G| = pqr \implies G$ es resoluble.

50. Sean p, q dos numeros primos tal que $0 < p < q$. Considera un grupo G:
    (a) Demuestra $|G| = p^2 \implies G$ es resoluble.
    (b) Demuestra $|G| = p^2q \implies (\exists! H \triangleleft G : |H| = p^2) \vee (\exists! H \triangleleft G : |H| = q)$.
    (c) Demuestra $|G| = p^2q \implies G$ es resoluble.

51. Determina los factores invariantes y los divisores elementales de los grupos abelianos definidos por los siguientes generadores y relaciones:
    (a) Generadores a, b, c, d. Relaciones $\begin{cases} 2a + 3b = 0 \\ 4a = 0 \\ 5c + 11d = 0 \end{cases}$.
    (b) Generadores a, b, c, d, e. Relaciones $\begin{cases} a - 7b + 14c - 21d = 0 \\ 5a - 7b - 2c + 10d - 15e = 0 \\ 3a - 3b - 2c + 6d - 9e = 0 \\ a - b + 2d - 3e = 0 \end{cases}$.

52. Determina los factores invariantes y los divisores elementales de los grupos abelianos definidos por los siguientes generadores y relaciones:
    (a) Generadores a, b, c, d. Relaciones $\begin{cases} 2a + 4b = 0 \\ 3b = 0 \end{cases}$.
    (b) Generadores a, b, c, d, e. Relaciones $\begin{cases} a - 7b - 21c + 14d = 0 \\ 5a - 7b - 2c + 10d - 15e = 0 \\ 3a - 3b - 2c + 6d - 9e = 0 \\ a - b + 2d - 3e = 0 \end{cases}$.

53. Sea G el grupo abeliano $\langle a, b, c | 2a = 5b, 2b = 5c, 2c = 5a \rangle$. Demuestra que G es finito y haya $|G|$. Escribe todos los divisores elementales y los factores invariantes de los grupos abelianos del mismo orden que G y no isomorfos a G.

54. Sean G_1 y G_2 los grupos abelianos dados por los generadores a, b, c y las relaciones.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 8 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{31}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 3 & 12 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{32}$$

(a) Determina los factores invariantes y los divisore elementales de G_1 y de G_2.

(b) Determina un monomorfismo $G_1 \to G_2$

55. (a) Encuentra todos los divisores elementales y los factores invariantes de todos los grupos abelianos de orden 200.

    (b) Clasifica el grupo abeliano $\mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z}/(5) \oplus \mathbb{Z}/(20)$.

56. Determina todos los grupos abelianos con $|G| = 24$ tal que $\forall x \in G \quad ord(x) \leq 12$.

57. Sea G un grupo abeliano finito, demuestra G es ciclico $\iff \forall S_p$ subgrupo de Sylow de G, S_p es ciclico.

58. Sea G un grupo abeliano finito, $\neg$(G es ciclico) $\implies \exists p | \exists H \subset G | h \simeq C_p \times C_p$.

59. Sea G un grupo abeliano finito, demuestra $\neg$(G es ciclico) $\implies \exists p$ primo $| \; \exists H \subset G \; |$ $G/H \simeq C_p \times C_p$.

60. Demuestra que un sistema de ecuaciones lineales $\forall M \in M_{m\times n}(\mathbb{Z}) \forall b \in M_{m\times 1}(\mathbb{Z}) \exists X \in M_{n\times 1}(\mathbb{Z}) \mid MX = b \iff \forall 0 < r \leq min(m, n)$, el maximo comun divisor de los r-menores de M y el maximo comun divisor de los r-menores de la matriz ampliada $(M : b)$ coinciden.

61. (a) Demuestra que el grupo $(\mathbb{Q}^+, \cdot)$ no es finitamente generado.

    (b) Escribe un conjunto de generadores.

62. (a) Demuestra que el grupo $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ no es finitamente generado.

    (b) Escribe un conjunto de generadores.

63. Sea p un numero primo ≤ 20, clasifica los grupos abelianos dados por los grupos multiplicativos $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$.

64. $\forall 2 \leq n \leq 15$, clasifica los grupos abelianos dados por los grupos multiplicativos $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$.

65. Explicita la estructura de los grupos abelianos dados por los grupos multiplicativos $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$.

2. Anillos

1. Sea A un anillo. Demuestra las siguientes propiedades:
   (a) $a \in A^* \implies$ a no es un divisor de cero.
   (b) Sea $I \subset A$ un ideal. $\exists u \in I \mid u \in A^* \implies I = A$.
   (c) $(a \in A) \wedge (u \in A^*) \implies (ua) = (a)$.
   (d) Sea A un dominio de integridad y $a, b \in A$. $(a) = (b) \iff \exists u \in A^* \mid b = au$.

Solución:
Tenemos que $a \in A$ es unidad.

$$\exists b \in A \mid ab = 0 \implies 0 = a^{-1}0 = a^{-1}(ab) = 1b = b \implies \tag{33}$$
$$b = 0 \iff a \text{ no es un divisor de cero} \tag{34}$$
$$\square \tag{35}$$

Tenemos que $I \subset A$ es un ideal.

$$\exists u \in I \mid u \in A^* \implies u^{-1}u = 1 \in I \tag{36}$$
$$a \in A \implies a = a \cdot 1 \in I \implies I = A \tag{37}$$
$$\square \tag{38}$$

Tenemos $a \in A$ y $u \in A^*$.

$$u \in A \wedge a \in (a) \implies ua \in (a) \implies (ua) \subset (a) \tag{39}$$
$$u^{-1} \in A \wedge ua \in (ua) \implies u^{-1}ua = a \in (ua) \implies (a) \subset (ua) \tag{40}$$
$$(ua) \subset (a) \wedge (a) \subset (ua) \iff (ua) = (a) \tag{41}$$
$$\square \tag{42}$$

Tenemos que A es un dominio de integridad y $a, b \in A$.
Ya hemos demostrado en 1.c $\exists u \in A^* \mid b = au \implies (a) = (b)$.
Solo queda demostrar $(a) = (b) \implies \exists u \in A^* \mid b = au$:

$$(a) = (b) \implies a \in (b) \implies \exists c \in A \mid a = bc \tag{43}$$
$$(a) = (b) \implies b \in (a) \implies \exists d \in A \mid b = ad \tag{44}$$
$$b = ad = bcd \implies b(1 - cd) = 0 \xRightarrow[\text{de integridad}]{\text{A es dominio}} \begin{cases} b = 0 \implies a = bc = 0 & u := 1 \\ \vee & \\ 1 = cd \implies d \in A^* & u := d \end{cases} \tag{45}$$
$$\square \tag{46}$$

2. Caracteriza, en función del numero entero $m > 1$, los elementos invertibles y los divisores de cero del anillo $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Deduce, $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ es un dominio de integridad $\iff$ $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ es un cuerpo $\iff$ m es un numero primo.

3. Demuestra que el ideal $(2, X)$ de $\mathbb{Z}[X]$ no es principal.

4. Sea A un anillo $a, b, d \in A$. Recuerda:

$$d \in mcd(a,b) \iff \begin{cases} d|a \\ d|b \\ \exists c \in A \mid (c|a \wedge c|b) \implies c|d \end{cases} \tag{47}$$

   (a) Demuestra $d \in mcd(a,b) \implies (a,b) \subseteq (d)$. Escribe un ejemplo en $\mathbb{Z}[X]$ donde no se cumpla la igualdad.

   (b) Demuestra ...

   (c) Sea A un dominio de ideales principales. Demuestra $d \in mcd(a,b) \iff (a,b) = (d)$. Deduce que en un dominio de ideales principales, siempre existe el $mcd(a,b)$

5. Sea A un anillo i $f, g \in A[X]$.

   (a) Demuestra g es monico $\implies \exists! q, r \in A[X] \mid f = gq + r$ y $gr(r) < gr(g)$.

   (b) Da un ejemplo de no-unicidad y otro de no-existencia en el caso de que g no sea monico.