Анализ устойчивости вертикального движения водного движителя при фиксировании направления тяги вдоль продольной оси корпуса

Н. А. Исмаилов

28 июля 2025 г.

Аннотация

В работе исследуется нелинейная динамика водного движителя, у которого направление тяги жёстко соосно продольной оси корпуса. Из-за конструктивных ограничений допускается регулировать лишь модуль тяги, оставляя её векторную ориентацию неизменной. Введена безразмерная математическая модель второго порядка, учитывающая подъёмную силу, квадратичное демпфирование и возможную зависимость модуля тяги от координаты, угла корпуса и их производных. Проведены линеаризация, фазовая классификация и построена функция Ляпунова. Показано, что модульное управление не обеспечивает даже предельной устойчивости; необходимы системы, изменяющие направление результирующей силы.

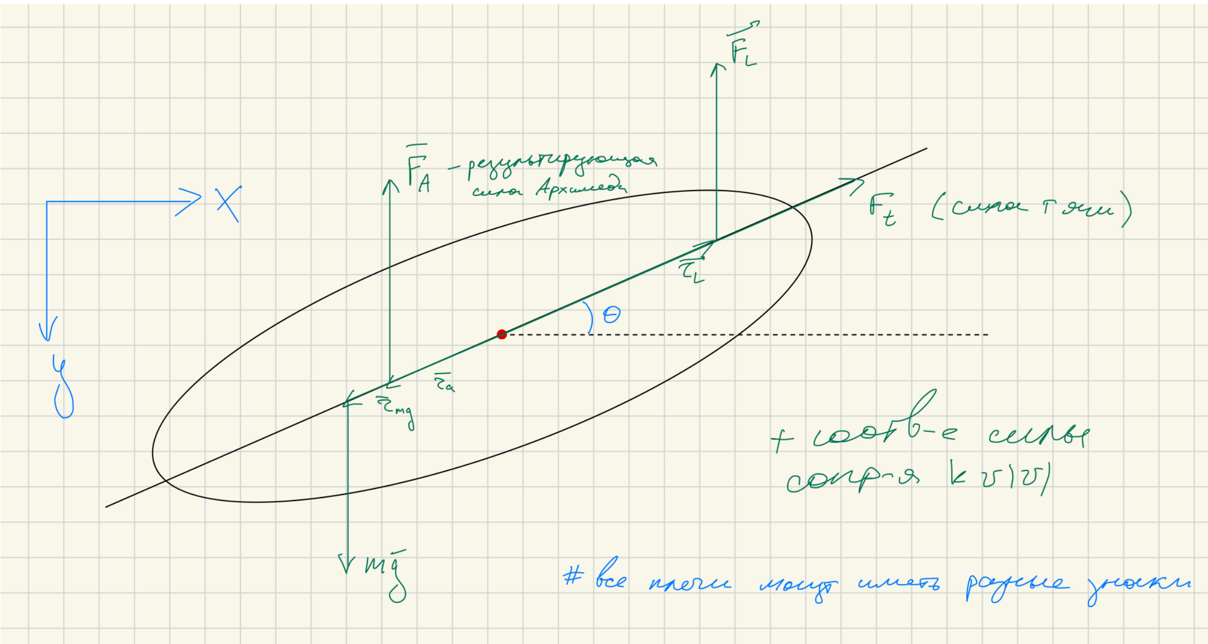
0.1 Цель исследования

Настоящая работа направлена на:

1. Построение строгой математической модели вертикального движения с минимально возможным числом управляющих параметров;
2. Выяснение, может ли зависимость *модуля* тяги, компенсировать отсутствие векторного поворота хвостового плавника;
3. Вывод инженерных критериев для оценки необходимости применения отклоняемых или вспомогательных плавников.

1 Схема водного движителя

Рассматривается осесимметричный корпус, способный перемещаться вдоль вертикальной оси Oy, горизонтальной оси Ox и совершать небольшие наклоны вокруг центра масс (угол θ измеряется от горизонтали, знак положителен при повороте носа вверх). Геометрические параметры и действующие силы показаны на рис. 1.



$[\boldsymbol{m}]$ масса аппарата, $[\boldsymbol{I}]$ момент инерции, $[\boldsymbol{\theta}]$ угол отклонения корпуса, $[\boldsymbol{F_t}]$ тяга двигателя, $[\boldsymbol{F_a}]$ статическая архимедова сила (закон Бойля–Мариотта), $[\boldsymbol{F_L}]$ аэродинамическая подъёмная сила, $[\boldsymbol{g}]$ ускорение свободного падения, $[\boldsymbol{r_a}]$ плечо архимедовой силы, $[\boldsymbol{r_{mg}}]$ плечо силы тяжести, $[\boldsymbol{r_L}]$ плечо подъемной силы, $[\boldsymbol{k_y},\ \boldsymbol{k_\theta}]$ коэффициенты квадратичного демпфирования, $[\boldsymbol{\rho}]$ плотность воздуха / жидкости, $[\boldsymbol{p_0},\ \boldsymbol{V_0}]$ давление и объём газа при $y = 0$.

2 Математическая модель

2.1 Динамические уравнения

Учитываются шесть основных факторов:

1. постоянная сила тяжести mg;
2. динамическая архимедова сила $F_a(y)$;
3. гидродинамическая подъёмная сила $F_L = \Lambda\dot{x}^2$;
4. тяга $F_t(y, \theta)$, соосная корпусу;
5. квадратичное демпфирование по координате и углу;
6. инерция поступательного и вращательного движения (в том числе момент от F_L при ненулевом плече r_L).

С учётом этих факторов система принимает вид

$$\boxed{\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_t(y,\theta)\cos\theta - k_x\dot{x}\,|\dot{x}|, \\ m\ddot{y} &= -F_a(y) + mg - \Lambda\dot{x}^2 - F_t(y,\theta)\sin\theta - k_y\dot{y}\,|\dot{y}|, \\ I\ddot{\theta} &= \cos\theta\big([r_a \times F_a] + [r_{mg} \times mg] + [r_L \times \Lambda\dot{x}^2]\big) - k_\theta\dot{\theta}\,|\dot{\theta}|. \end{aligned}} \tag{1}$$

Замечание. При линеаризации в точке равновесия $\theta = 0$, $\dot{x} = u_0$, $\dot{y} = 0$, $\dot{\theta} = 0$ все зависимости модуля тяги от u, v или ω пропадают в первом порядке: в матрице Якоби остаются только производные по θ и δy. Именно эти два канала определяют возможную (не)устойчивость вертикально–угловой подсистемы.

2.2 Модель подъёмной силы

Статическая подъёмная сила подчиняется закону Бойля–Мариотта

$$F_a(y) = \frac{\rho g p_0 V_0}{p_0 + \rho g y},$$

где ρ — плотность жидкости/воздуха, p_0 и V_0 — давление и объём при $y = 0$.

2.3 Разложение модуля тяги

Реактивная тяга используется как линейный регулятор

$$F_t(y,\theta) = F_{t0} + F_y\,(y - y_{\text{eq}}) + G\,\theta + O(\|(y,\theta)\|^2),$$

где F_{t0} — номинальная тяга, F_y и G — коэффициенты пропорционального усиления по вертикали и углу.

2.4 Безразмеризация

Для сокращения числа параметров вводится безразмерная система единиц:

$$t' = t\sqrt{\frac{c}{a}}, \qquad y' = \frac{y}{h_0}, \qquad \theta' = \theta, \qquad \text{и т. д.}$$

Ниже штрихи опущены; безразмерные константы $a, b, c, d, e, f, g, h, j, \ell$ выражаются через физические параметры и масштабы. Итоговая форма записывается как

$$\boxed{\begin{aligned} &\dot y = v, \\ &\dot v = -\frac{a}{b+cy} + d - (F_{t0} + F_y \delta y + G\theta)\,\theta - \Lambda u^2 - f v\,|v|, \\ &\dot\theta = \omega, \\ &\dot\omega = \bigl(\tfrac{ag}{b+cy} + hd\bigr) + \ell\,\Lambda u^2 - j\omega\,|\omega|, \\ &\dot u = \frac{(F_{t0} + F_y\delta y + G\theta)\cos\theta}{m}, \end{aligned}} \tag{2}$$

где $\delta y := y - y_{\mathrm{eq}}$, а $\ell := r_L/I$ — безразмерное плечо подъёмной силы. Последнее уравнение приведено для полноты: как показано выше, горизонтальная динамика не влияет на линейную устойчивость вертикально–углового равновесия.

3 Равновесное положение

Предположим, что в стационаре аппарат движется горизонтально с произвольной, *заданной* скоростью $u_0 \neq 0$. Равновесная точка тогда имеет координаты

$$\bigl(y, v, \theta, \omega, u\bigr) = \bigl(y_{\mathrm{eq}},\, 0,\, 0,\, 0,\, u_0\bigr), \qquad u_0 \in \mathbb{R}.$$

Баланс сил по вертикали

$$-F_a(y_{\mathrm{eq}}) \;+\; mg \;-\; \Lambda u_0^2 = 0. \tag{3}$$

Баланс моментов

С учётом плеча r_L динамической подъёмной силы условие $\ddot\theta = 0$ при $\theta = 0$ даёт

$$(r_a F_a + r_{mg} mg + r_L \Lambda u_0^2)\cos 0 = 0 \implies r_a F_a(y_{\mathrm{eq}}) + r_{mg} mg + r_L \Lambda u_0^2 = 0. \tag{4}$$

Номинальная тяга

Продольный баланс при $\theta_{\mathrm{eq}} = 0$:

$$F_{t0} = d, \qquad \cos 0 = 1.$$

Локальная линейность. Заметим, что при линеаризации около $(y_{\mathrm{eq}}, 0, 0, 0, u_0)$ производные $\partial F_t/\partial(u, v, \omega)$ обнуляются, и в матрице Якоби остаются *только* зависимости модуля тяги по координатам δy и θ. Все каналы, пропорциональные скоростям, исчезают в первом порядке — именно эти два «координатных» усиления определяют (не)устойчивость вертикально-угловой подсистемы.

4 Линеаризация при $u_0 \neq 0$

Разложения:

$$u = u_0 + \delta u, \qquad F_L = -\Lambda(u_0 + \delta u)^2 = -\Lambda u_0^2 - 2\Lambda u_0\, \delta u + O(\delta u^2),$$
$$F_t = F_{t0} + F_y\, \delta y + G\, \theta + H_u\, \delta u + H_v\, v + H_\omega\, \omega, \quad \sin\theta \simeq \theta,\ \cos\theta \simeq 1.$$

Для вектора малых переменных $x = (\delta y, v, \theta, \omega, \delta u)^{\mathsf{T}}$ получаем систему $\dot{x} = Jx$, где

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ A & 0 & -E & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -D & 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & \dfrac{G}{m} & 0 & -\dfrac{2k_x u_0}{m} \end{pmatrix},$$
$$A > 0, \qquad D > 0, \qquad E > 0,$$
$$\alpha = -2\Lambda u_0, \qquad \beta = -\frac{2r_L \Lambda u_0}{I}.$$

Почему «скоростные» каналы не влияют на J

Любые дополнительные зависимости модуля тяги от скоростей $(H_u \delta u,\ H_v v,\ H_\omega \omega)$ попадают в вертикальное уравнение только через произведение $F_t\theta$, а в момент — через $F_t \delta u$. В первой степени малости $\theta = 0$, поэтому $\partial F_t/\partial(\delta u, v, \omega)$ не появляются в строке $\dot{v}$. Единственный новый элемент — коэффициент β в строке $\dot{\omega}$, возникший из момента подъёмной силы $r_L \Lambda u^2$. Он размещён в столбце δu и *не* меняет коэффициенты би-квадратного блока

$$\lambda^4 - A\lambda^2 + DE = 0,$$

следовательно, не устраняет положительный корень, задающий седловую неустойчивость вертикально-угловой подсистемы.

5 Физическая оценка коэффициента A

Подстановка физических констант остаётся неизменной:

$$A = \frac{\rho^2 g^2 p_0 V_0}{\left(p_0 + \rho g\, y_{\mathrm{eq}}\right)^2} \ > \ 0 \qquad \forall\, y_{\mathrm{eq}}.$$

Даже после учёта момента $r_L \Lambda u^2$ динамической подъёмной силы главный «жёсткостной» коэффициент сохраняет знак $+$ при всех u_0; следовательно, вертикально–угловое равновесие остаётся седловым.

6 Нелинейные члены и ограничение результата

Новые линейные связи $\alpha\,\delta u$ и $\beta\,\delta u$ (через момент $r_L \Lambda u^2$) принадлежат *третьему* порядку малости по исходным координатам. По теореме Пуанкаре–Ляпунова они не изменяют тип седла, пока знак A остаётся положительным.

7 Обсуждение инженерных последствий

Полученные результаты показывают, что конструкция с *жёстко соосным* вектором тяги, каким бы ни был закон изменения её модуля (включая зависимости от u, v, ω), сохраняет седловую неустойчивость по (y, θ). Чтобы добиться хотя бы предельной устойчивости, необходимо вводить:

- отклоняемый (gimbal) вектор тяги
- активную систему балансировки массы/объёма.

(*Возможность стабилизации Я УЖЕ ДОКАЗЫВАЛ!*)

8 Заключение

Разработана безразмерная модель движения водного движителя с тягой, жёстко соосной корпусу и возможным моментом от динамической подъёмной силы. Показано, что все зависимости модуля тяги от скоростей u, v, ω исчезают в первом порядке линеаризации; матрица Якоби содержит лишь производные по δy и θ, а коэффициент A остаётся положительным. Квадратичное демпфирование повышает энергетическое рассеяние, но не меняет знак A. Нелинейные члены третьего порядка также неспособны устранить седловую неустойчивость.

Вывод: регулировка одного лишь *модуля* тяги (включая любые линейные каналы по скоростям) не обеспечивает ни предельной, ни асимптотической устойчивости. Необходимо управлять направлением результирующей силы или радикально менять распределение плавучести.