STK1110 Høsten 2021

Hypotesetesting om forventningen til en populasjon

Tilsvarer Avsnitt 9.2

Ingrid Hobæk Haff
Matematisk institutt
Universitetet i Oslo

Normalfordelte data med kjent varians

- Anta at $X_1, \ldots, X_n \overset{uif}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$, der σ er kjent.
- Anta at vi har en test av typen

$$H_0 : \mu \geq \mu_0 \text{ mot } H_a : \mu < \mu_0$$

  for en gitt verdi av μ_0.
- Da forkaster vi H_0 dersom $Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq c$, og vi må finne c slik at signifikansnivået blir α.

Normalfordelte data med kjent varians (forts.)

- Da $Z \sim N(0,1)$ når $\mu = \mu_0$, har vi:

$$\begin{aligned}\text{P(Type I-feil)} =& \text{P(Forkaste } H_0 | H_0 \text{ er sann)} \\ =& \text{P}(Z \leq c | \mu \geq \mu_0) \\ \leq& \text{P}(Z \leq c | \mu = \mu_0) = \Phi(c).\end{aligned}$$

- For å få signifikansnivå α løser vi

$$\alpha = \Phi(c) \rightarrow c = \Phi^{-1}(\alpha) = -z_\alpha.$$

- Vi forkaster altså H_0 ved signifikansnivå α dersom $Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq -z_\alpha$.

Normalfordelte data med kjent varians (forts.)

- Anta at vi vi nå ønsker å teste

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \text{ mot } H_a : \mu > \mu_0.$$

- Da forkaster vi H_0 dersom $Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \geq c$, og vi må finne c slik at signifikansnivået blir α.
- Vi har:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\text{Type I-feil}) =& \mathrm{P}(Z \geq c | \mu \leq \mu_0) \\ \leq& \mathrm{P}(Z \geq c | \mu = \mu_0) \\ =& 1 - \mathrm{P}(Z \leq c | \mu = \mu_0) = 1 - \Phi(c). \end{aligned}$$

- For å få signifikansnivå α løser vi

$$\alpha = 1 - \Phi(c) \rightarrow c = \Phi^{-1}(1 - \alpha) = z_\alpha.$$

- Vi forkaster altså H_0 ved signifikansnivå α dersom $Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \geq z_\alpha$.

Ensidig alternativ

- Så langt har vi sett på tester av typen

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \text{ mot } H_a : \mu > \mu_0$$
$$H_0 : \mu \geq \mu_0 \text{ mot } H_a : \mu < \mu_0.$$

- Dette er tester med et **ensidig alternativ**.
- Merk at læreboka formulerer H_0 som $\mu = \mu_0$ i slike tilfeller.
- Grunnen til denne forenklingen er at sannsynligheten for type II-feil er størst for **nullverdien** $\mu = \mu_0$, og at det dermed holder å finne signifikansnivået for denne verdien av μ.

Tosidig alternativ

- Vi skal nå se på tester med et **tosidig alternativ**, altså

$$H_0 : \mu = \mu_0 \text{ mot } H_a : \mu \neq \mu_0.$$

Eksempel

Eks. 9.6 fra boka.

- Vi antar at $X_1, \ldots, X_n \overset{uif}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$ med σ kjent.
- En test for hypotesene over med signifikansnivå α forkaster da H_0 dersom $Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq -z_{\alpha/2}$ **eller** $Z \geq z_{\alpha/2}$.

Styrkefunksjon og valg av *n*

- Anta at vi nå vil teste

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \text{ mot } H_a : \mu > \mu_0.$$

med signifikansnivå α

- Styrkefunksjonen er da $\gamma(\mu) = 1 - \Phi(z_\alpha + \frac{\mu - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}})$.
- For $\mu > \mu_0$ er da sannsynligheten for type II-feil

$$\beta(\mu) = 1 - \gamma(\mu) = \Phi(z_\alpha + \frac{\mu - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}).$$

- Vi ønsker nå å bestemme *n* slik at sannsynligheten for type II-feil er høyst β hvis $\mu = \mu_1 > \mu_0$.

Styrkefunksjon og valg av n (forts.)

- Vi løser $\beta(\mu_1) = \Phi(z_\alpha + \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}) \leq \beta$ for n og får

$$n \geq \left(\sigma \frac{z_\alpha + z_\beta}{\mu_1 - \mu_0}\right)^2 .$$

- For tester av typen

$$H_0 : \mu \geq \mu_0 \text{ mot } H_a : \mu < \mu_0$$

  er styrkefunksjonen $\gamma(\mu) = \Phi(-z_\alpha + \frac{\mu_0 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}})$.

- Den n som gir sannsynlighet for type II-feil høyst lik β når $\mu = \mu_1 < \mu_0$ er da gitt ved samme formel som over.

Styrkefunksjon og valg av n (forts.)

- For tester av typen

$$H_0 : \mu = \mu_0 \text{ mot } H_a : \mu \neq \mu_0$$

  er styrkefunksjonen
  $\gamma(\mu) = 1 - \Phi(z_{\alpha/2} + \frac{\mu_0 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}) + \Phi(-z_{\alpha/2} + \frac{\mu_0 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}})$.
- Nå finnes det ikke noen eksakt formel for hva n må være for at sannsynligheten for type II-feil blir høyst β for $\mu = \mu_1 \neq \mu_0$, men vi har den tilnærmede formelen

$$n \geq \left(\sigma \frac{z_{\alpha/2} + z_\beta}{\mu_1 - \mu_0} \right)^2 .$$

Store utvalg av uif data med ukjent varians

- Anta at $X_1, \ldots, X_n$ er uif med forventning μ og ukjent varians σ^2.
- Anta videre at n er så stor at

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \overset{tiln.}{\sim} N(0,1), \text{ med } S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2.$$

- For å teste hypoteser om μ kan vi da bruke akkurat samme framgangsmåter som for normalfordelte utvalg med kjent varians, bare at vi bytter ut σ med S.
- For å kunne bestemme n slik at sannsynligheten for type II-feil er under et visst nivå for en gitt verdi av μ, kan vi bruke formlene for normalfordelte utvalg med kjent varians, men trenger da et anslag for σ (fra en pilotstudie e.l.).

Eksempel

Eks. 9.8 i boka.

Små utvalg av normalfordelte data med ukjent varians

- Anta at $X_1, \ldots, X_n \overset{uif}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$, der σ er ukjent.
- Anta videre at n ikke er stor nok til å bruke resultatene for store utvalg.
- Vi bruker da at
$$\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}.$$
- Vi lar $T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$, og kan utlede forkastningsområder som tilsvarer et signifikansnivå på α på samme måte som for normalfordelte utvalg med kjent varians. Vi får da
  - For $H_0 : \mu \geq \mu_0$ mot $H_a : \mu < \mu_0$: forkast H_0 for $T \leq -t_{\alpha,n-1}$.
  - For $H_0 : \mu \leq \mu_0$ mot $H_a : \mu > \mu_0$: forkast H_0 for $T \geq t_{\alpha,n-1}$.
  - For $H_0 : \mu = \mu_0$ mot $H_a : \mu \neq \mu_0$: forkast H_0 for $T \leq -t_{\alpha/2,n-1}$ **eller** $T \geq t_{\alpha/2,n-1}$.

Små utvalg av normalfordelte data med ukjent varians (forts.)

Eksempel

Eks. 9.9 i boka.

- For å beregne styrkefunksjonen til testene over trenger en fordelingen til T når $\mu \neq \mu_0$.
- Det er en ikke-sentral t-fordeling, som vi ikke skal gå nærmere inn på.
- I stedet kan vi bruke R til å finne styrkefunksjonen, feil av type II og utvalgsstørrelse som gir sannsynlighet for feil av type II høyst lik β for en gitt μ i samsvar med H_a.

Eksempel

Eks. 9.10 i boka.

Tosidig alternativ og konfidensintervall

- La oss se på tester med tosidig alternativ, altså $H_0 : \mu = \mu_0$ mot $H_a : \mu \neq \mu_0$.
- Da er det en sammenheng mellom testing og konfidensinterval for μ.
- Vi forkaster H_0 ved signifikansnivå α dersom

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \leq -t_{\alpha/2,n-1} \text{ eller } \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \geq t_{\alpha/2,n-1}.$$

- Det er det samme som å forkaste H_0 dersom

$$\bar{X} \leq \mu_0 - t_{\alpha/2,n-1}\frac{S}{\sqrt{n}} \text{ eller } \bar{X} \geq \mu_0 + t_{\alpha/2,n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}$$

eller hvis

$$\mu_0 \leq \bar{X} - t_{\alpha/2,n-1}\frac{S}{\sqrt{n}} \text{ eller } \mu_0 \geq \bar{X} + t_{\alpha/2,n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}.$$

Tosidig alternativ og konfidensintervall (forts.)

- Et $100 \cdot (1-\alpha)\%$ konfidensintervall for μ er gitt ved
$$\left(\bar{X} - t_{\alpha/2,n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{\alpha/2,n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}\right).$$
- Det beyr at vi forkaster H_0 dersom μ_0 **ikke** ligger innafor konfidensintervallet for μ.
- Generelt gjelder at for tester av $H_0 : \theta = \theta_0$ mot $H_a : \theta \neq \theta_0$ får vi en test med signifikansnivå α hvis vi forkaster H_0 dersom θ_0 **ikke** ligger i et $100 \cdot (1-\alpha)\%$ konfidensintervall for θ.