STK1110 Høsten 2021

Fordelinger for normalfordelte utvalg

Tilsvarer Avsnitt 6.4

Ingrid Hobæk Haff
Matematisk institutt
Universitetet i Oslo

Bakgrunn

- Formålet med dette avsnittet er å gå gjennom en del resultater som vi vil trenge i Kap. 8, 9 og 10.
- Vi antar at vi har observasjoner $x_1, \ldots, x_n$ av de stokastiske variablene $X_1, \ldots, X_n$.
- Her er $X_1, \ldots, X_n \overset{uif}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$ et tilfeldig utvalg..

χ^2-fordelingen

- χ^2-fordelingen er et spesialtilfelle av gammafordelingen.
- For gammafordelingen har vi:
  - Tetthet: $f(x;\alpha,\beta) = \begin{cases} \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}, & x > 0 \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$, der $\alpha, \beta > 0$
  - Forventning og varians: $\mathrm{E}(X) = \alpha\beta$, $\mathrm{V}(X) = \alpha\beta^2$
  - Momentgenererende funksjon: $M_X(t) = \mathrm{E}(e^{tX}) = (1-\beta t)^{-\alpha}$.
- For $\alpha = \nu/2$ og $\beta = 2$ får vi χ^2_ν-fordelingen:
  - Tetthet: $f(x;\nu) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} x^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0 \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$, der $\nu > 0$ kalles frihetsgrader
  - Forventning og varians: $\mathrm{E}(X) = \frac{\nu}{2} \cdot 2 = \nu$, $\mathrm{V}(X) = \frac{\nu}{2} \cdot 2^2 = 2\nu$
  - Momentgenererende funksjon: $M_X(t) = \mathrm{E}(e^{tX}) = (1-2t)^{-\frac{\nu}{2}}$.

Resultater knyttet til χ^2-fordelingen

- Anta at $X_1 \sim \chi^2_{\nu_1}$ og $X_2 \sim \chi^2_{\nu_2}$ er uavhengige. Da er $X_1 + X_2 \sim \chi^2_{\nu_1+\nu_2}$.
- Dette kan lett utvides til at dersom $X_1 \sim \chi^2_{\nu_1}$, $X_2 \sim \chi^2_{\nu_2}$,...,$X_n \sim \chi^2_{\nu_n}$ er uavhengige, er $X_1 + X_2 + \ldots + X_n \sim \chi^2_{\nu_1+\ldots+\nu_n}$.
- La $Z \sim N(0,1)$ og $X = Z^2$. Da er $X \sim \chi^2_1$.
- En følge av de to resultatene over er at dersom $Z_1, \ldots, Z_n \overset{uif}{\sim} N(0,1)$, så er $Z_1^2 + \ldots + Z_n^2 \sim \chi^2_n$.

Resultater for normalfordelte utvalg

- Anta at $X_1, \ldots, X_n \overset{uif}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$.
- Da er $Z_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$, $i = 1, \ldots, n$.
- Hvis μ er kjent, kan σ^2 estimeres med $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2$, som er forventningsrett for σ^2.
- Vanligvis er ikke μ kjent, men må estimeres med $\bar{X}$.
- Fra STK1100 vet vi da at $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$ er en forventningsrett estimator σ^2.
- $\bar{X}$ og S^2 uavhengige.
- $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$.

t-fordelingen

- Hvis $Z \sim N(0,1)$ og $U \sim \chi^2_\nu$ er uavhengige, er $T = \frac{Z}{\sqrt{U/\nu}} \sim t_\nu$.
- Tetthet: $f(t;\nu) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\pi\nu}\Gamma(\frac{\nu}{2})}\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}, -\infty < t < \infty$.
- Hvis $X_1, \ldots, X_n \overset{uif}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$, så er $T = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$
- Det kan vises at U/ν med $U \sim \chi^2_\nu$ konvergerer mot 1 når $\nu \to \infty$, slik at fordelingen til T konvergerer mot standard normalfordeling.
- Forventning og varians: $\mathrm{E}(T) = 0$ når $\nu > 1$, $\mathrm{V}(T) = \frac{\nu}{\nu-2}$, når $\nu > 2$.

F-fordelingen

- Hvis $U_1 \sim \chi^2_{\nu_1}$ og $U_2 \sim \chi^2_{\nu_2}$ er uavhengige, er $F = \frac{U_1/\nu_1}{U_2/\nu_2} \sim F_{\nu_1,\nu_2}$.
- Tetthet:

$$f(x;\nu_1,\nu_2) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\frac{\nu_1+\nu_2}{2})}{\Gamma(\frac{\nu_1}{2})\Gamma(\frac{\nu_2}{2})} \left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\frac{\nu_1}{2}} \frac{x^{\frac{\nu_1}{2}}}{\left(1+\frac{\nu_1}{\nu_2}x\right)^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}}}, & x > 0 \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}.$$

- Dersom $X_1, \ldots, X_m \overset{uif}{\sim} N(\mu_1, \sigma_1^2)$ og $Y_1, \ldots, Y_n \overset{uif}{\sim} N(\mu_2, \sigma_2^2)$, og $X_1, \ldots, X_m$ og $Y_1, \ldots, Y_n$ er uavhengige, er $F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F_{m-1,n-1}$.