- Eksempel med selve:

$X \sim \text{Bin}(100, p)$

$H_0: p \leq 0{,}5$ mot $H_a: p > 0{,}5$

Forkastningsområde: $X \geq 59$, som gir signifikansnivå 5%.

Sannsynlighet for feil av type II:

$\beta(p) = P(\text{Type II-feil} \mid p) = P(X \leq 58 \mid p)$

- Eksempel 9.2 fra boka:

La X_i være tørketida på flate i, $i = 1, \ldots, 25$.
Det antas at $X_i \sim N(\mu, 9^2)$. Vi vil teste

$$H_0: \mu \geq 75 \quad \text{mot} \quad H_a: \mu < 75$$

Standardestimator for μ er $\overline{X}$. Det er naturlig å forkaste H_0 for $\overline{X} \leq c$ for en passende c.
Vi vet at $\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{9^2}{25}\right)$. Dermed:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{9/\sqrt{25}} = \frac{\overline{X} - \mu}{1{,}8} \sim N(0,1).$$

Vi har:

$$\begin{aligned}
P(\text{Type I-feil}) &= P(\text{Forkaste } H_0 \mid H_0 \text{ er sann}) \\
&= P(\overline{X} \leq c \mid \mu \geq 75) \\
&\leq P(\overline{X} \leq c \mid \mu = 75) \\
&= P\Big(\underbrace{\frac{\overline{X} - 75}{1{,}8}} \leq \frac{c - 75}{1{,}8} \,\Big|\, \mu = 75\Big) \\
&= P\Big(\underbrace{Z}_{\sim N(0,1)} \leq \frac{c - 75}{1{,}8}\Big) = \Phi\left(\frac{c - 75}{1{,}8}\right),
\end{aligned}$$

der $\Phi(\cdot)$ er den kumulative fordelingen til standard normalfordeling.

For $c = 70{,}8$ får vi $\Phi\left(\frac{c-75}{1{,}8}\right) = \Phi\left(\frac{70{,}8 - 75}{1{,}8}\right) = \Phi(-2{,}33)$
$= 0{,}01$

Da er altså signifikansnivået α 1%.

Styrkefunksjonen er gitt ved:

$$\begin{aligned}
\gamma(\mu) &= P(\text{Forkaste } H_0 \mid \mu) = P(\overline{X} \leq 70{,}8 \mid \mu) \\
&= P\Big(\underbrace{\frac{\overline{X} - \mu}{1{,}8}}_{Z} \leq \frac{70{,}8 - \mu}{1{,}8} \,\Big|\, \mu\Big) \\
&= P\left(Z \leq \frac{70{,}8 - \mu}{1{,}8}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{70{,}8 - \mu}{1{,}8}\right)
\end{aligned}$$

Videre har vi:

$$\begin{aligned}
\beta(72) &= P(\text{Type II-feil} \mid \mu = 72) = 1 - \gamma(72) \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{70{,}8 - 72}{1{,}8}\right) = 0{,}749
\end{aligned}$$

$$\beta(70) = 1 - \gamma(70) = 1 - \Phi\left(\frac{70{,}8 - 70}{1{,}8}\right) = 0{,}33$$

$$\beta(67) = 1 - \gamma(67) = 0{,}0174.$$

Vi har: $X_1, \dots, X_n \overset{uif}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$, der σ er kjent.

Vi vil teste

$$H_0: \mu \geq \mu_0 \quad \text{mot} \quad H_a: \mu < \mu_0$$

Vi forkaster H_0 for $Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq c$, og vi vil finne c slik at signifikansnivået blir α.

Vi har:

$$P(\text{Type I-feil}) = P(\text{Forkaste } H_0 \mid H_0 \text{ er sann})$$

$$= P\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq c \,\middle|\, \mu \geq \mu_0\right)$$

$$\leq P\left(\underbrace{\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}}_{Z \sim N(0,1) \text{ når } \mu = \mu_0} \leq c \,\middle|\, \mu = \mu_0\right)$$

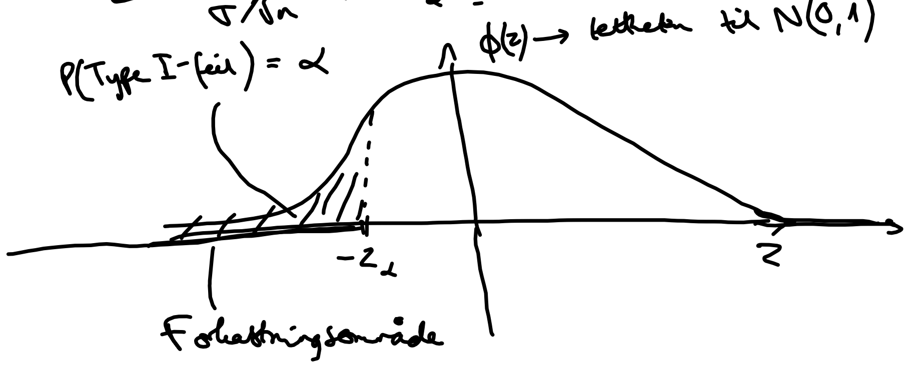
$$= P(\underbrace{Z}_{\sim N(0,1)} \leq c \mid \mu = \mu_0)$$

$$= \Phi(c)$$

For å få signifikansnivå α, løser vi

$$\Phi(c) = \alpha \longrightarrow c = \Phi^{-1}(\alpha) = -z_\alpha$$

Vi forkaster altså H_0 ved signifikansnivå α dersom $Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq -z_\alpha$.



Anta nå at vi vil teste

$$H_0: \mu \leq \mu_0 \quad \text{mot} \quad H_a: \mu > \mu_0$$

Vi forkaster H_0 når $Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \geq c$, og vi vil finne c slik at signifikansnivået blir α. Vi har:

$$P(\text{Type I-feil}) = P(Z \geq c \mid \mu \leq \mu_0)$$

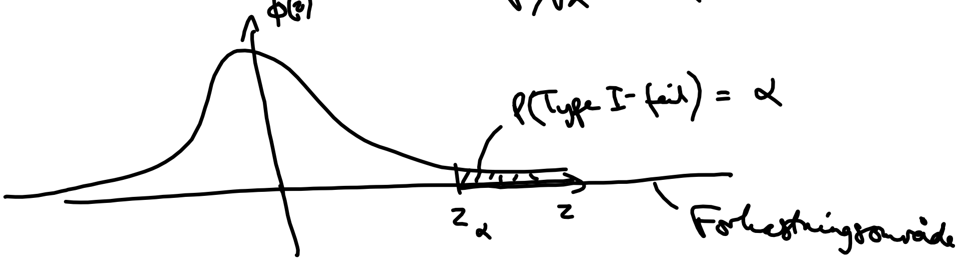
$$\leq P(\underbrace{Z}_{\sim N(0,1)} \geq c \mid \mu = \mu_0)$$

$$= 1 - P(Z < c \mid \mu = \mu_0) = 1 - \Phi(c) = \alpha$$

$$\longrightarrow \Phi(c) = 1 - \alpha$$

$$\longrightarrow c = \Phi^{-1}(1-\alpha) = z_\alpha$$

Vi forkaster H_0 ved signifikansnivå α dersom $Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \geq z_\alpha$



• Eksempel 9.6 i boka:

Vi har $X_1, \dots, X_9 \overset{uif}{\sim} N(\mu, 1{,}5^2)$, og vi vil teste

$$H_0: \mu = 130 \quad \text{mot} \quad H_a: \mu \neq 130.$$

ved signifikansnivå 0,01.

Vi har: $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{1{,}5^2}{n}\right)$.

Det er naturlig å forkaste H_0 dersom $\bar{X} \leq c_1$ eller $\bar{X} \geq c_2$ med

$$c_1 = 130 - c \cdot \frac{1{,}5}{\sqrt{n}} \quad \text{og} \quad c_2 = 130 + c \cdot \frac{1{,}5}{\sqrt{n}},$$

som er det samme som

$$\frac{\bar{X} - 130}{1{,}5/\sqrt{n}} \leq -c \quad \text{eller} \quad \frac{\bar{X} - 130}{1{,}5/\sqrt{n}} \geq c.$$

Under H_0 er $Z = \frac{\bar{X} - 130}{1{,}5/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

Vi får:

$$P(\text{Type I-feil}) = P\left(\overbrace{\frac{\bar{X}-130}{1{,}5/\sqrt{n}}}^{Z} \leq -c \cup \overbrace{\frac{\bar{X}-130}{1{,}5/\sqrt{n}}}^{Z} \geq c \,\middle|\, \mu = 130\right)$$

$$= 1 - P(-c \leq Z \leq c \mid \mu = 130)$$

$$= 1 - \left(P(Z \leq c \mid \mu = 130) - P(Z < -c \mid \mu = 130)\right)$$

$$= 1 - (\Phi(c) - \Phi(-c))$$

$$= 1 - \Phi(c) + \underbrace{\Phi(-c)}_{= 1 - \Phi(c)}$$

$$= 2(1 - \Phi(c)) = \alpha$$

$$\longrightarrow 1 - \Phi(c) = \frac{\alpha}{2}$$

$$\longrightarrow \Phi(c) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

$$\longrightarrow c = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) = z_{\alpha/2}$$

Med $\alpha = 0{,}01$, forkaster vi H_0 dersom

$$\frac{\bar{X} - 130}{1{,}5/\sqrt{n}} \leq -z_{0{,}005} = -2{,}58 \quad \text{eller} \quad \frac{\bar{X} - 130}{1{,}5/\sqrt{n}} \geq 2{,}58.$$