χ^2-fordelingen

Anta at $X_1 \sim \chi^2_{\nu_1}$ og $X_2 \sim \chi^2_{\nu_2}$ er uavhengige

Da er $X_1 + X_2 \sim \chi^2_{\nu_1+\nu_2}$.

Bevis:

$$
\begin{aligned}
M_{X_1+X_2}(t) &= E\left(e^{t(X_1+X_2)}\right) = E\left(e^{tX_1+tX_2}\right) \\
&= E\left(e^{tX_1}\cdot e^{tX_2}\right) \\
&\overset{\text{uavh.}}{=} \underbrace{E\left(e^{tX_1}\right)}_{M_{X_1}(t)} \cdot \underbrace{E\left(e^{tX_2}\right)}_{M_{X_2}(t)} \\
&= M_{X_1}(t)\cdot M_{X_2}(t) \\
&= (1-2t)^{-\nu_1/2}\cdot(1-2t)^{-\nu_2/2} \\
&= (1-2t)^{-\nu_1/2-\nu_2/2} \\
&= (1-2t)^{-(\nu_1+\nu_2)/2}.
\end{aligned}
$$

Dette er momentgenererende funksjon for variabel som er $\chi^2_{\nu_1+\nu_2}$-fordelt, og det følger at $X_1+X_2 \sim \chi^2_{\nu_1+\nu_2}$.

La $Z \sim N(0,1)$ og $X = Z^2$. Da er $X \sim \chi^2_1$.

Bevis:

$$F(x) = P(X \leq x) = P(Z^2 \leq x) = P(-\sqrt{x} \leq Z \leq \sqrt{x})$$

$$= 2 \cdot P(0 \leq Z \leq \sqrt{x})$$

$$= 2(P(Z \leq \sqrt{x}) - P(Z \leq 0))$$

$$= 2(\Phi(\sqrt{x}) - \Phi(0)),$$

der $\Phi(\cdot)$ er den kumulative fordelingsfunksjonen til standard normalfordeling. Da er tettheten til X gitt ved:

$$f(x) = F'(x) = \frac{d}{dx}\left(2(\Phi(\sqrt{x}) - \Phi(0))\right)$$

$$= 2\phi(\sqrt{x}) \cdot \frac{d}{dx}\sqrt{x}$$, der $\phi(\cdot)$ er tettheten til standard normalfordeling

$$= \cancel{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\sqrt{x})^2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot x^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{1}{2^{1/2} \cdot \Gamma(1/2)} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}},$$

som er tettheten til χ^2_1-fordelingen. Altså er $X \sim \chi^2_1$.

Anta at $X_1, \dots, X_n \overset{uif}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$

Da er $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$ forventningsrett for σ^2 (vist før), og S^2 og $\bar{X}$ er uavhengige.

Bevis: S^2 er en funksjon av $X_i - \bar{X}$, $i = 1, \dots, n$ så det holder å vise at $\bar{X}$ og $X_i - \bar{X}$ er uavhengige for en hvilken som helst i.

Da $X_1, \dots, X_n$ er normalfordelt og $\bar{X}$ og $X_i - \bar{X}$ er lineærkombinasjoner av $X_1, \dots, X_n$, må $\bar{X}$ og $X_i - \bar{X}$ også være normalfordelt. Da holder det å vise at kovariansen mellom $\bar{X}$ og $X_i - \bar{X}$ er 0 for å vise at de er uavhengige:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(\bar{X}, X_i - \bar{X}) &= \mathrm{Cov}(\bar{X}, X_i) - \mathrm{Cov}(\bar{X}, \bar{X}) \\
&= \mathrm{Cov}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, X_i\right) - V(\bar{X}) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \underbrace{\mathrm{Cov}(X_j, X_i)}_{= \begin{cases} V(X_i), & j = i \\ 0, & j \neq i \end{cases}} - \frac{\sigma^2}{n} \\
&= \frac{1}{n} \underbrace{V(X_i)}_{\sigma^2} - \frac{\sigma^2}{n} \\
&= \frac{\sigma^2}{n} - \frac{\sigma^2}{n} = 0
\end{aligned}
$$

Videre er $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$.

La $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$. Vi har:

$$\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} = \frac{n}{\sigma^2}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 = \sum_{i=1}^{n}\Big(\underbrace{\frac{X_i-\mu}{\sigma}}_{Z_i}\Big)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} Z_i^2 \quad , \text{ der } Z_i \overset{uif}{\sim} N(0,1)$$

$$\sim \chi^2_n$$

Hvis $X_3 = X_1 + X_2$, $X_1 \sim \chi^2_{\nu_1}$ og $X_3 \sim \chi^2_{\nu_3}$ med $\nu_3 > \nu_1$ og X_1 og X_2 er uavhengige, så er $X_2 \sim \chi^2_{\nu_3-\nu_1}$.

Bevis:

$$M_{X_3}(t) = (1-2t)^{-\nu_3/2} = M_{X_1+X_2}(t) \overset{uavh.}{=} M_{X_1}(t)\cdot M_{X_2}(t)$$

$$= (1-2t)^{-\nu_1/2}\cdot M_{X_2}(t)$$

$$\rightarrow M_{X_2}(t) = \frac{(1-2t)^{-\nu_3/2}}{(1-2t)^{-\nu_1/2}} = (1-2t)^{-\nu_3/2+\nu_1/2}$$

$$= (1-2t)^{-(\nu_3-\nu_1)/2}$$

Vi har:

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X}+\bar{X}-\mu)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 + 2(\bar{X}-\mu)\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X}) + \sum_{i=1}^{n}(\bar{X}-\mu)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 + 2(\bar{X}-\mu)\left(\sum_{i=1}^{n}X_i - n\bar{X}\right) + n(\bar{X}-\mu)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 + 2(\bar{X}-\mu)\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n}X_i - n\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)}_{=0} + n(\bar{X}-\mu)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 + n(\bar{X}-\mu)^2$$

Vi får:

$$\underbrace{\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}}_{\chi^2_n} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2 = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 + \frac{1}{\sigma^2}\cdot n(\bar{X}-\mu)^2$$

$$= \frac{n-1}{\sigma^2}\cdot\underbrace{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}_{S^2} + n\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\right)^2$$

$$= \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} + \underbrace{\Big(\underbrace{\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}_{\sim N(0,1)}\Big)^2}_{\sim \chi^2_1}$$

Da $\bar{X}$ og S^2 er uavhengige, må da

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}.$$