Selective Harmonic Elimination as a optimal control problem

Jesús Oroya

Chair of Computational Mathematics

20 de noviembre de 2020

Índice

Selective Harmonic Elimination

Selective Harmonic Elimination

Elementos básicos

- Se considerará la función $f(\tau) \mid \tau \in [0, \pi]$ que solo puede tomar los valores $\{-1, 1\}$.
- Consideraremos que esta función tiene simetría de media onda, es decir: $f(\tau) = -f(\tau + \pi)$.

Selective Harmonic Elimination

Elementos básicos

- De esta manera, los $f(\tau)$ se puede desarrollar en serie de Fourier como:

$$f(\tau) = \sum_{i \in impar} a_i \cos(i\tau) + \sum_{j \in impar} b_j \sin(j\tau) \tag{1}$$

Donde a_i y b_j son:

$$a_i = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\tau) \cos(i\tau) d\tau \mid \forall i \ impar \tag{2}$$

$$b_j = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\tau) \sin(j\tau) d\tau \mid \forall j \ impar \tag{3}$$

Definición del Problema SHE

Problem (SHE para dos niveles)

- *Consideramos dos conjuntos de números impares* $\mathcal{E}_a$ *y* $\mathcal{E}_b$ *con cardinalidades* $|\mathcal{E}_a| = N_a$ *y* $|\mathcal{E}_b| = N_b$ *respectivamente.*
- *Consideramos los vectores objetivo* $\boldsymbol{a}_T \in \mathbb{R}^{N_a}$ *y* $\boldsymbol{b}_T \in \mathbb{R}^{N_b}$*.*
- *Buscamos una función* $f(\tau) \in \{-1, 1\} \mid \forall \tau \in (0, \pi)$ *cuyos coeficientes de Fourier satisfagan:*

$$\begin{cases} a_i = (\boldsymbol{a}_T)_i & \forall\ i \in \mathcal{E}_a \\ b_j = (\boldsymbol{b}_T)_j & \forall\ j \in \mathcal{E}_b \end{cases} \tag{4}$$

Optimización de ángulos de conmutación

Si denotamos ángulos de conmutación como

$$\phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_M] \in \mathbb{R}^M \tag{5}$$

podemos escribir los coeficientes de Fourier (2) y (3) en función de ϕ como:

$$a_i(\phi) = + \frac{4}{i\pi} \sum_{k=1}^{M} (-1)^{k+1} \sin(i\phi) \qquad | \ \forall i \in \mathcal{E}_a \tag{6}$$

$$b_j(\phi) = - \frac{2}{j\pi} \left[1 + (-1)^M + 2 \sum_{k=1}^{M} (-1)^{k+1} \cos(j\phi_k) \right] \qquad | \ \forall j \in \mathcal{E}_b \tag{7}$$

Problem

- *Consideramos dos conjuntos de números impares* $\mathcal{E}_a$ *y* $\mathcal{E}_b$ *con cardinalidades* $|\mathcal{E}_a| = N_a$ *y* $|\mathcal{E}_b| = N_b$.
- *Consideramos los vectores* $\boldsymbol{a}_T \in \mathbb{R}^{N_a}$ *y* $\boldsymbol{b}_T \in \mathbb{R}^{N_b}$
- *Consideramos un número de conmutaciones* M
- *Buscamos los ángulos de conmutación* $\phi \in \mathbb{R}^M$ *mediante el problema de minimización:*

$$\min_{\phi \in \mathbb{R}^M} \left[\sum_{i \in \mathcal{E}_a} (a_i(\phi) - a_T^i)^2 + \sum_{j \in \mathcal{E}_b} (b_j(\phi) - b_T^j)^2 \right] \tag{8}$$

sujeto a:

$$0 < \phi_1 < \phi_2 < \cdots < \phi_k < \cdots < \phi_{M-1} < \phi_M < \pi$$

Coeficientes de Fourier como sistemas dinámicos

Coeficientes de Fourier como sistemas dinámicos

- Mediante el teorema fundamental de cálculo transformarmos la integrales en ecuaciones diferenciales, de la siguiente manera:

$$\alpha_i(\tau) = \frac{2}{\pi}\int_0^\tau f(\tau)\sin(i\tau)d\tau \Rightarrow \begin{cases} \dot{\alpha}_i(\tau) & = \frac{2}{\pi}f(\tau)\sin(i\tau) \\ \alpha_i(0) & = 0 \end{cases} \tag{9}$$

$$\beta_j(\tau) = \frac{2}{\pi}\int_0^\tau f(\tau)\cos(j\tau)d\tau \Rightarrow \begin{cases} \dot{\beta}_j(\tau) & = \frac{2}{\pi}f(\tau)\cos(j\tau) \\ \beta_j(0) & = 0 \end{cases} \tag{10}$$

Coeficientes de Fourier como sistemas dinámicos

- De esta manera, el estado $\{\alpha_i, \beta_j\}$ en el intante de tiempo $\tau = \pi$ son los coeficientes de Fourier de $f(\tau)$

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_i(\tau) & = \frac{2}{\pi} f(\tau) \sin(i\tau) \\ \alpha_i(0) & = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_i(\pi) = a_i^T \tag{11}$$

$$\begin{cases} \dot{\beta}_j(\tau) & = \frac{2}{\pi} f(\tau) \cos(j\tau) \\ \beta_j(0) & = 0 \end{cases} \Rightarrow \beta_i(\pi) = b_i^T \tag{12}$$

Entonces el problema se traduce a encontrar un control $f(t)$ que conduzca al sistema desde el origen de coordenadas hasta el punto objetivo marcado.

Coeficientes de Fourier como sistemas dinámicos

- Consideramos los conjuntos $\mathcal{E}_a = 1$ y $\mathcal{E}_b = 1$
- El sistema dinámico se escribe como:

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_1(\tau) & = \frac{2}{\pi} f(\tau) \sin(\tau) \mid \alpha(0) = 0 \\ \dot{\beta}_1(\tau) & = \frac{2}{\pi} f(\tau) \cos(\tau) \mid \beta(0) = 0 \end{cases} \tag{13}$$

- Si aplicamos $f(\tau)$ al sistema $(\alpha_1(\tau), \beta_1(\tau))$, entonces el vector de estado final

$$(\alpha_1(\pi), \beta_1(\pi)) = (a_1, b_1) \text{ de } f(\tau) \tag{14}$$

Coeficientes de Fourier como sistemas dinámicos

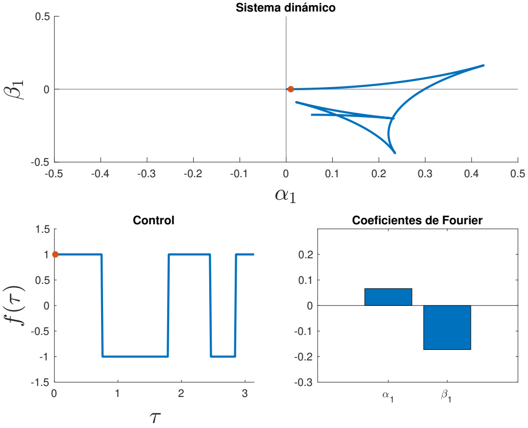


Figura: Evolución de un sistema $\{\alpha_1, \beta_1\}$ Sistema dinámico

Formulación como problema de control

Problema de Control

Problem (OCP para SHE de dos niveles)

- *Consideramos dos conjuntos de números impares* $\mathcal{E}_a$ *and* $\mathcal{E}_b$ *con cardinalidades* $|\mathcal{E}_a| = N_a$ *y* $|\mathcal{E}_b| = N_b$.
- *Consideramos los vectores objetivos* $\boldsymbol{a}_T \in \mathbb{R}^{N_a}$ *y* $\boldsymbol{b}_T \in \mathbb{R}^{N_b}$.
- *Buscamos la función* $f(\tau) \mid \tau \in (0, \pi)$ *que minimiza el siguiente funcional de coste:*

$$J[f(\tau)] = \|\boldsymbol{a}_T - \alpha(T)\|^2 + \|\boldsymbol{b}_T - \beta(T)\|^2 + \epsilon \int_0^{\pi} \mathcal{L}(f) d\tau \quad (15)$$

Problem (OCP para SHE de dos niveles)

De esta forma podemos escribir el siguiente problema de control óptimo:

$$\min_{|f(\tau)|<1} J[f(\tau)] \tag{16}$$

suject to:

$$\forall i \in \mathcal{E}_a \quad \begin{cases} \dot{\alpha}_i(\tau) = (2/\pi)\cos(i\tau)f(\tau) & \tau \in [0,\pi] \\ \alpha_i(0) = 0 \end{cases}$$
$$\forall j \in \mathcal{E}_b \quad \begin{cases} \dot{\beta}_j(\tau) = (2/\pi)\sin(j\tau)f(\tau) & \tau \in [0,\pi] \\ \beta_j(0) = 0 \end{cases} \tag{17}$$

Condiciones de optimalidad

Es necesario construir la función Hamiltoniana:

$$H(f, \boldsymbol{p}^\alpha, \boldsymbol{p}^\beta, \tau) = \epsilon \mathcal{L}(f) + G(\boldsymbol{p}^\alpha, \boldsymbol{p}^\beta, \tau) f \tag{18}$$

Donde hemos llamado $G(\boldsymbol{p}^\alpha, \boldsymbol{p}^\beta, \tau)$ a:

$$G(\boldsymbol{p}^\alpha, \boldsymbol{p}^\beta, \tau) = \frac{2}{\pi} \left[\sum_{i \in \mathcal{E}_a} p_i^\alpha \cos(i\tau) + \sum_{j \in \mathcal{E}_b} p_j^\beta \sin(j\tau) \right] \tag{19}$$

Y donde $\boldsymbol{p}^\alpha$ y $\boldsymbol{p}^\beta$ son los co-estados del sistema.

Principio de mínimo de Pontryagin

Cuando evaluamos el Hamiltoniano en los co-estados óptimos $\boldsymbol{p}_*^\alpha$ y $\boldsymbol{p}_*^\beta$ podemos encontrar la forma del control minimizando el Hamiltoniano.

$$H(\tau, \boldsymbol{p}_*^\alpha, \boldsymbol{p}_*^\beta, f_*) \leq H(\tau, \boldsymbol{p}_*^\alpha, \boldsymbol{p}_*^\beta, f) \tag{20}$$

Entonces anilizaremos el problema

$$\min_{|f|<1} H_*(f) \tag{21}$$

Donde hemos llamado $H_*(f)$ a $H(\tau, \boldsymbol{p}_*^\alpha, \boldsymbol{p}_*^\beta, f)$

Condiciones necesarias de optimalidad

Entonces las condiciones necesarias de optimialidad para este problema se puede escribir como:

$$H_*(f) = \epsilon\mathcal{L}(f) + G(\boldsymbol{p}_*^{\alpha}, \boldsymbol{p}_*^{\beta}, \tau)f \tag{22}$$

$$\frac{dH_*(f)}{df} = 0 \tag{23}$$

$$\frac{dH_*^2(f)}{df^2} \geq 0 \tag{24}$$

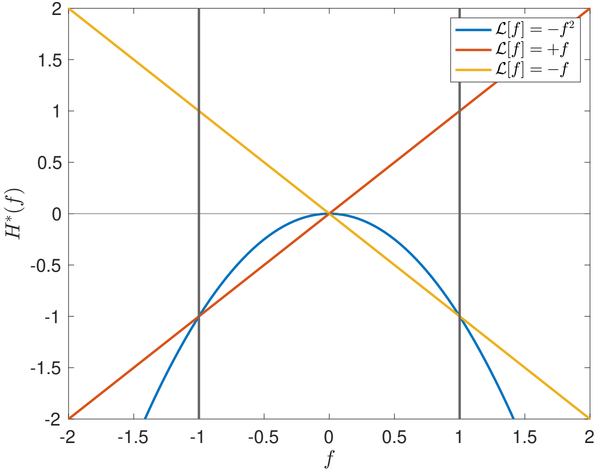
Condiciones necesarias de optimalidad

Entonces las condiciones necesarias de optimialidad para este problema se puede escribir como:

$$H_*(f) = \epsilon\mathcal{L}(f) + G(\boldsymbol{p}_*^\alpha, \boldsymbol{p}_*^\beta, \tau)f \tag{25}$$

$$\frac{dH_*(f)}{df} = \epsilon\frac{d\mathcal{L}}{df} + G(\boldsymbol{p}_*^\alpha, \boldsymbol{p}_*^\beta, \tau) = 0 \tag{26}$$

$$\frac{dH_*^2(f)}{df^2} = \epsilon\frac{d\mathcal{L}^2}{df^2} \geq 0 \tag{27}$$

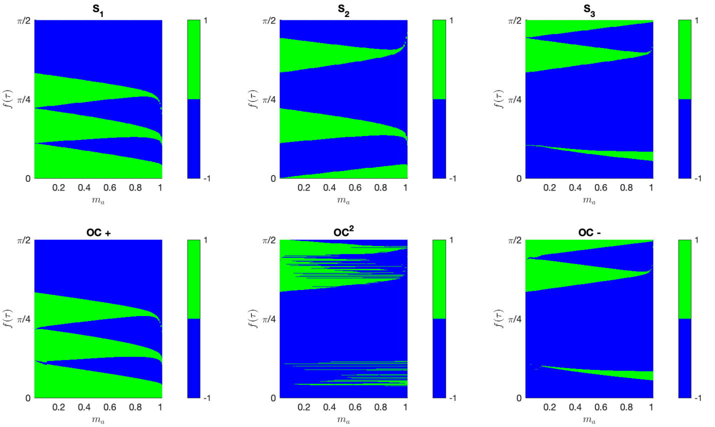

$\mathcal{L}[f] = -f^2$
$\mathcal{L}[f] = +f$
$\mathcal{L}[f] = -f$
$H^*(f)$
f
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2 -1.5 -1 -0.5 0 0.5 1 1.5 2

Experimentos numéricos

Caso para dos niveles

- Para este ejemplo consideramos el siguiente conjunto de números impares: $\mathcal{E}_a = \{\emptyset\}$ y $\mathcal{E}_b = \{1, 5, 7, 11, 13\}$.
- Además consideramos el vector objetivo $\boldsymbol{b}_T = [m_a, 0, 0, 0, 0]$, donde $m_a \in [0, 1]$ es un parámetro.
- Compararemos la solución obenida mediante control óptimo con soluciones obtenidas en el problema con número de ángulos prefijados.
- Compararemos con las siguientes penalizaciones: $\mathcal{L}(f) = -f$, $\mathcal{L}(f) = +f$ y $\mathcal{L}(f) = -f^2$

Caso para dos niveles



Caso para tres niveles

- Podemos ver que en el caso en el que el control $f(\tau)$ solo pueda tomar valores entre $[0, 1]$ obtenemos señales que pueden tomar tres niveles en el intervalo $[0, 2\pi]$ gracias a la simetría de media de onda.
- Si resolvemos el problema de control óptimo pero esta vez cambiando las restricciones $|f(\tau)| < 1$ por $\{0 < f(\tau) < 1\}$.
- Se ha realizado el mismo procedimiento que en el caso anterior.

Caso para tres niveles