

# Selective Harmonic Elimination via Optimal Control Theory

Jesús Oroya  
Chair of Computational Mathematics

November 14, 2020



# Contents

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>5</b>
1.1	Propuesta y motivación . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Open Loop Optimal Control</b>	<b>9</b>
2.1	Formulación de control óptimo para el problema SHE . . . . .	9
2.1.1	OC SHE de dos niveles con simetría de cuarto de onda . . . . .	10
2.2	Experimentos numéricos . . . . .	12
2.2.1	OCP for SHE with symmetry of quarter-cycle . . . . .	12
2.2.2	OC for SHE with symmetry of half-cycle . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Feedback Optimal Control</b>	<b>17</b>
3.1	SHE with quarter-wave symmetry as dynamic programming problem . . . . .	17
3.1.1	Dynamic programming . . . . .	18



# Chapter 1

## Introduction

En este documento se propone una solución del problema Selective Harmonic Elimination (SHE) desde el punto de vista de la teoría del control. El problema SHE consiste en la búsqueda de una función  $\{f(\tau) \mid \tau \in [0, 2\pi]\}$  dados unos pocos coeficientes de Fourier. Además esta función  $f(\tau)$  solo podrá tomar valores en una discretización del intervalo  $[-1, 1]$ . Nos centraremos en concreto en las funciones  $f(\tau)$  con simetría de media onda, es decir funciones tal que  $f(\tau) = -f(\tau + \pi)$ , por lo que la descripción de la función  $f(\tau)$  queda determinada con sus valores en el intervalo  $\tau \in [0, \pi]$ . De esta forma, nos referiremos a una función  $\{f(\tau) \mid \tau \in [0, \pi]\}$  cuyo desarrollo en serie de Fourier se puede escribir como:

$$f(\tau) = \sum_{i \in \text{odd}} a_i \cos(i\tau) + \sum_{j \in \text{odd}} b_j \sin(j\tau) \quad (1.1)$$

Donde  $a_i$  y  $b_j$  son:

$$a_i = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\tau) \cos(i\tau) d\tau \mid \forall i \text{ odd} \quad (1.2)$$

$$b_j = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\tau) \sin(j\tau) d\tau \mid \forall j \text{ odd} \quad (1.3)$$

Entonces el problema de SHE tomando solo los puntos  $\{-1, 1\}$  como discretización del intervalo  $[-1, 1]$ , se puede formular de la siguiente manera:

**Problem 1.1 (SHE para dos niveles)** Dado dos conjuntos de números impares  $\mathcal{E}_a$  y  $\mathcal{E}_b$  con cardinalidades  $|\mathcal{E}_a| = N_a$  y  $|\mathcal{E}_b| = N_b$  respectivamente, y dado los vectores objetivo  $\mathbf{a}_T \in \mathbb{R}^{N_a}$  y  $\mathbf{b}_T \in \mathbb{R}^{N_b}$ , buscamos una función  $f(\tau) \mid \tau \in (0, \pi)$  tal que  $f(\tau)$  solo pueda tomar los valores  $\{-1, 1\}$  y cuyos coeficientes de Fourier satisfagan:  $a_i = (\mathbf{a}_T)_i \mid \forall i \in \mathcal{E}_a$  y  $b_j = (\mathbf{b}_T)_j \mid \forall j \in \mathcal{E}_b$ .

En la formulación típica de este problema se considera la búsqueda de las posiciones donde ocurren los cambios de la función, estas localizaciones son llamados ángulos de conmutación. Dado que la función  $f(\tau)$  solo puede tomar los valores  $\{-1, 1\}$  los ángulos de conmutación determinan completamente la forma de  $f(\tau)$ . Por otra parte, dado los vectores  $\mathbf{a}^T$  y  $\mathbf{b}^T$ , el número de ángulos  $M$  es *a priori* desconocida, por lo que es necesario prefixarla sin un criterio muy claro. Si denotamos ángulos de conmutación como  $\phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_M] \in \mathbb{R}^M$ , podemos

escribir los coeficientes de Fourier (1.2) y (1.3) en función de  $\phi$  como:

$$a_i(\phi) = \dots \mid \forall i \in \mathcal{E}_a \quad (1.4)$$

$$b_j(\phi) = \frac{4}{j\pi} \left[ -1 + 2 \sum_{k=1}^M (-1)^{k+1} \cos(n\phi_k) \right] \mid \forall j \in \mathcal{E}_b \quad (1.5)$$

De esta manera, dada la expresión anterior podemos formular el problema (1.1) como el siguiente problema de minimización:

**Problem 1.2 (Minimización para SHE de dos niveles)** Dado dos conjuntos de números impares  $\mathcal{E}_a$  y  $\mathcal{E}_b$  con cardinalidades  $|\mathcal{E}_a| = N_a$  y  $|\mathcal{E}_b| = N_b$ , dado los vectores  $\mathbf{a}_T \in \mathbb{R}^{N_a}$  y  $\mathbf{b}_T \in \mathbb{R}^{N_b}$  respectivamente, y dado el número de conmutaciones  $M$ , busquemos las localizaciones de los ángulos de conmutación  $\phi \in \mathbb{R}^M$  mediante la siguiente minimización:

$$\min_{\phi \in \mathbb{R}^M} \left[ \sum_{i \in \mathcal{E}_a} (a_i(\phi) - a_T^i)^2 + \sum_{j \in \mathcal{E}_b} (b_j(\phi) - b_T^j)^2 \right] \quad (1.6)$$

$$\text{sujeto a:} \quad (1.7)$$

$$0 < \phi_1 < \phi_2 < \dots < \phi_{M-1} < \phi_M < \pi \quad (1.8)$$

Donde las restricciones (1.8) conservan el orden de los ángulos, de manera que  $\phi_k$  hace referencia al ángulo de conmutación  $k$ -ésimo.

A continuación numeraremos las ventajas y desventajas de esta formulación:

### 1. Ventajas

- (a) Dado que conocemos que la forma de la función  $f(\tau)$  solo dos valores podemos reducir la representación de la variable de optimización a unos pocos ángulos de conmutación. En caso contrario,  $f(\tau)$  debería ser representado por su valor dentro del intervalo  $[0, \pi]$ .
- (b) Es un problema NLP (Nonlinear Programming) cuya solución es conocida para unos vectores  $\mathbf{a}_T$  y  $\mathbf{b}_T$  fijos.

### 2. Desventajas

- (a) El número de ángulos de conmutación  $M$  no es conocido para vectores objetivos  $\mathbf{a}_T$  y  $\mathbf{b}_T$ .
- (b) No se tiene una expresión explícita del problema que pueda ser utilizado a tiempo real para cualquier valor de los targets  $\mathbf{a}_T$  y  $\mathbf{b}_T$ .
- (c) Existen discontinuidades de las soluciones con respecto a una variación continuada de los vectores de  $\mathbf{a}_T$  y  $\mathbf{b}_T$ . Sin embargo esto puede ser intrínseco del problema y no provocado por la formulación.

## 1.1 Propuesta y motivación

Inspirados en la naturaleza continua de la variable de optimización  $f(\tau)$ , proponemos en este documento la formulación desde el control óptimo. Es decir en lugar buscar los ángulos de conmutación  $\phi \in \mathbb{R}^M$ , buscaremos la función  $f(\tau) \in \{g(\tau) \in L^\infty([0, \pi]) \mid |g(\tau)| < 1\}$  que tenga los coeficientes de Fourier deseados. Si utilizamos el teorema fundamental del cálculo diferencial

podemos re-escribir la expresión de los coeficientes de Fourier (1.2) y (1.3) como la evolución de sistemas dinámicos. Es decir:

$$\alpha_i(\tau) = \frac{2}{\pi} \int_0^\tau f(\tau) \sin(i\tau) d\tau \Rightarrow \begin{cases} \dot{\alpha}_i(\tau) &= \frac{2}{\pi} f(\tau) \sin(i\tau) \\ \alpha_i(0) &= 0 \end{cases} \quad (1.9)$$

$$\beta_j(\tau) = \frac{2}{\pi} \int_0^\tau f(\tau) \cos(j\tau) d\tau \Rightarrow \begin{cases} \dot{\beta}_j(\tau) &= \frac{2}{\pi} f(\tau) \cos(j\tau) \\ \beta_j(0) &= 0 \end{cases} \quad (1.10)$$

La evolución de los sistemas dinámicos  $\alpha_i(\tau)$  y  $\beta_j(\tau)$  desde el tiempo  $\tau = 0$  hasta  $\tau = \pi$  nos da lugar a los coeficientes  $a_i$  y  $b_j$ . De esta manera, el problema general de SHE (1.1) puede resolverse como un problema de control de un sistema dinámico donde  $\alpha_i(\tau) \mid \forall i \in \mathcal{E}_a$  y  $\beta_j(\tau) \mid \forall j \in \mathcal{E}_b$  son los estados del sistema y  $f(\tau)$  la variable de control, y cuyo objetivo será llevar los estados desde el origen de coordenadas hasta los vectores objetivos  $\mathbf{a}_T$  y  $\mathbf{b}_T$  en tiempo  $\tau = \pi$

Este documento esta estructurado de la siguiente manera:

1. Capítulo 1. *Open-loop Optimal Control*
2. Capítulo 2. *Feedback Optimal Control*





## Chapter 2

# Open Loop Optimal Control

### 2.1 Formulación de control óptimo para el problema SHE

En esta sección presentaremos la formulación de un problema de control para el problema SHE de dos niveles. Este se puede formalizar de la siguiente manera:

**Problem 2.1 (OCP para SHE de dos niveles)** Dado dos conjuntos de números impares  $\mathcal{E}_a$  and  $\mathcal{E}_b$  con cardinalidades  $|\mathcal{E}_a| = N_a$  y  $|\mathcal{E}_b| = N_b$ , dado los vectores objetivos  $\mathbf{a}_T \in \mathbb{R}^{N_a}$  y  $\mathbf{b}_T \in \mathbb{R}^{N_b}$ , buscamos la función  $f(\tau) \mid \tau \in (0, \pi)$  que minimiza el siguiente funcional de coste:

$$J[f(\tau)] = \left[ \|\mathbf{a}_T - \boldsymbol{\alpha}(T)\|^2 + \|\mathbf{b}_T - \boldsymbol{\beta}(T)\|^2 + \epsilon \int_0^\pi \mathcal{L}[f] d\tau \right] \quad (2.1)$$

donde  $\boldsymbol{\alpha}(\tau) \in \mathbb{R}^{N_a} \times [0, \pi]$ ,  $\boldsymbol{\beta}(\tau) \in \mathbb{R}^{N_b} \times [0, \pi]$ ,  $\|\cdot\|$  es la norma euclídea y  $\epsilon$  es un parámetro pequeño que penaliza el funcional de coste con el término  $\mathcal{L}[f]$ .

De esta forma podemos escribir el siguiente problema de control óptimo:

$$\begin{aligned} & \min_{|f(\tau)| < 1} J[f(\tau)] \quad (2.2) \\ & \text{subject to:} \\ & \forall i \in \mathcal{E}_a \quad \begin{cases} \dot{\alpha}_i(\tau) = (2/\pi) \cos(i\tau) f(\tau) & \tau \in [0, \pi] \\ \alpha_i(0) = 0 \end{cases} \\ & \forall j \in \mathcal{E}_b \quad \begin{cases} \dot{\beta}_j(\tau) = (2/\pi) \sin(j\tau) f(\tau) & \tau \in [0, \pi] \\ \beta_j(0) = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.3)$$

En el problema de SHE de dos niveles se busca una función  $\{f(\tau) \mid \tau \in [0, \pi]\}$  que solo pueda tomar los valores  $\{-1, 1\}$ , sin embargo el problema (2.1) definido para un término de penalización  $\mathcal{L}[f]$  arbitrario puede tomar valores en todo el intervalo  $[-1, 1]$ . En teoría de control los controles que toma solo los valores extremos del intervalo son conocidos como controles *bang-bang*.

A continuación estudiaremos las condiciones de optimalidad del problema con el fin de encontrar condiciones en el término  $\mathcal{L}[f]$  que nos de el comportamiento *bang-bang* en el control óptimo. Entonces siguiendo el principio de mínimo de Pontryagin, escribimos el Hamiltoniano del problema:

$$H(f, \mathbf{p}^\alpha(\tau), \mathbf{p}^\beta(\tau), \tau) = \epsilon \mathcal{L}[f] + G(\mathbf{p}^\alpha(\tau), \mathbf{p}^\beta(\tau), \tau) f(\tau) \quad (2.4)$$

Donde hemos llamado  $G(\mathbf{p}^\alpha, \mathbf{p}^\beta, \tau)$  a:

$$G(\mathbf{p}^\alpha, \mathbf{p}^\beta, \tau) = \frac{2}{\pi} \left[ \sum_{i \in \mathcal{E}_a} p_i^\alpha \cos(i\tau) + \sum_{j \in \mathcal{E}_b} p_j^\beta \sin(j\tau) \right] \quad (2.5)$$

y además donde  $\mathbf{p}^\alpha \in \mathbb{R}^{N_a} \times [0, \pi]$  y  $\mathbf{p}^\beta \in \mathbb{R}^{N_b} \times [0, \pi]$  son los estados adjuntos correspondientes a los estados  $\alpha$  y  $\beta$  respectivamente.

Si utilizando la siguiente condición de optimalidad:

$$H(\tau, \mathbf{p}_*^\alpha, \mathbf{p}_*^\beta, f_*) \leq H(\tau, \mathbf{p}_*^\alpha, \mathbf{p}_*^\beta, f) \quad (2.6)$$

podemos obtener la forma del control óptimo cuando los co-estados óptimos  $\mathbf{p}_*^\alpha$  y  $\mathbf{p}_*^\beta$  además de la variable temporal  $\tau$  están fijas. Entonces el problema se reduce la minimización de una función  $H^*(f) = H(\tau, \mathbf{p}_*^\alpha, \mathbf{p}_*^\beta, f)$  en una variable  $f$  dentro de un intervalo  $[-1, 1]$ . Dado que necesitamos que el control óptimo  $f^*$  sea *bang-bang*, debemos diseñar  $H^*(f)$  de manera que su mínimo este en los extremos del intervalo. En el caso de una variable (este caso) solo podemos conseguir este comportamiento si no existe ningún mínimo dentro del intervalo. Una manera de asegurar este comportamiento es tomando la función  $H^*(f)$  cóncava, mediante la elección el término  $\mathcal{L}[f]$ . Eso se debe a que la concavidad de el término  $\mathcal{L}[f]$  determina la concavidad del Hamiltoniano  $H^*(f)$  gracias a que la derivada segunda de  $H^*(f)$  es proporcional al la derivada segunda del término de penalización, es decir:

$$\frac{d^2 H^{*2}}{df^2} = \epsilon \frac{d^2 \mathcal{L}[f]}{df^2} \quad (2.7)$$

Así que siempre que elijamos un término de penalización tal que:

$$\frac{d^2 L[f]}{df^2} \leq 0 \quad (2.8)$$

obtendremos un función  $H^*(f)$  cóncava dentro de un intervalo convexo dando lugar a un control óptimo  $f^*$  *bang-bang*.

### 2.1.1 OC SHE de dos niveles con simetría de cuarto de onda

Consideraremos un caso concreto del problema presentado en la sección anterior. Este es problema de selective harmonic elimination con simetría de cuarto de onda, es decir consideramos que la función  $f(\tau)$  cumple la siguiente expresión:

$$f(\tau + \pi/2) = f(\tau) \mid \tau \in (0, \pi/2) \quad (2.9)$$

Esta expresión nos permite simplificar la expresión para los coeficientes de Fourier (1.2) and (1.3) de la siguiente manera:

$$a_i = 0 \mid \forall i \in \mathbb{Z} \quad (2.10)$$

$$b_j = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(\tau) \sin(j\tau) d\tau \mid \forall j \text{ odd} \quad (2.11)$$

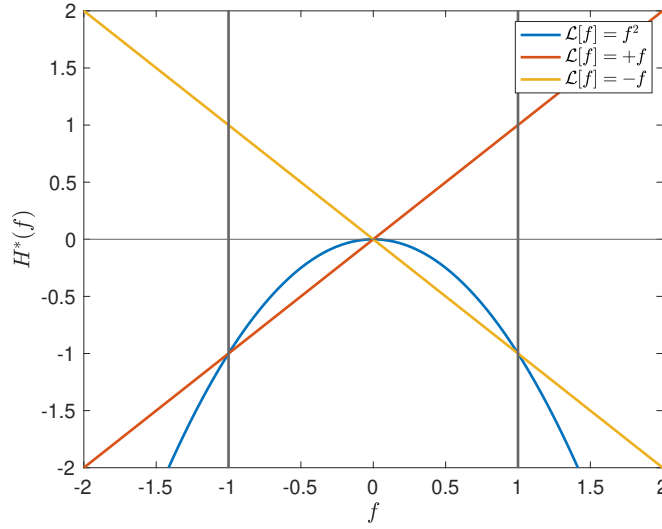


Figure 2.1: Ilustración sobre el comportamiento de la función  $H^*(f)$  para distintos términos de penalización  $\mathcal{L}[f]$

Entonces  $f(\tau) \mid \tau \in (0, \pi/2)$  puede ser escrita como:

$$f(\tau) = \sum_{j \text{ odd}}^{\infty} b_j \sin(j\tau) \quad (2.12)$$

$$b_j = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(\tau) \sin(j\tau) d\tau \mid j \text{ odd} \quad (2.13)$$

En este contexto podemos definir el problema de control de manera análoga que en la subsección anterior:

**Problem 2.2** Dado un conjunto de número impares  $\mathcal{E}_b$  con cardinalidad  $|\mathcal{E}_b| = N_b$  y dado un vector objetivo  $\mathbf{b}_T \in \mathbb{R}^{N_b}$ , buscamos la función  $f(\tau) \mid \tau \in (0, \pi/2)$  tal que  $f(\tau)$  minimize el siguiente funcional de coste:

$$J[f(\tau)] = \left[ \|\mathbf{b}_T - \boldsymbol{\beta}(T)\|^2 + \epsilon \int_0^{\pi/2} \mathcal{L}[f(\tau)] d\tau \right] \quad (2.14)$$

donde  $\boldsymbol{\beta}(\tau) \in \mathbb{R}^{N_b} \times [0, \pi/2]$ ,  $\|\cdot\|$  es la norma euclídea y  $\epsilon$  es un parámetro de penalización para el término  $\mathcal{L}[f]$

Entonces el problema de control se puede escribir como:

$$\begin{aligned} & \min_{|f(\tau)| < 1} J[f(\tau)] \\ & \text{subject to:} \\ & \forall j \in \mathcal{E}_b \begin{cases} \dot{\beta}_j(\tau) = (4/\pi) \sin(j\tau) f(\tau) & \tau \in [0, \pi/2] \\ \beta_j(0) = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.15)$$

En este caso el problema de control tiene el siguiente Hamiltoniano:

$$H(f, \mathbf{p}_\beta, \tau) = \epsilon \mathcal{L}[f] + \frac{4f}{\pi} \left[ \sum_{j \in \mathcal{E}_b} p_j^\beta \sin(j\tau) \right] \quad (2.16)$$

Podemos ver que el Hamiltoniano tiene la misma estructura que en la subsección anterior, por lo que de la misma forma la elección de un término de penalización  $\mathcal{L}[f]$  concavo nos produce un Hamiltoniano  $H^*(f)$  cóncavo y por tanto un control óptimo  $f^*$  bang-bang.

## 2.2 Experimentos numéricos

### 2.2.1 OCP for SHE with symmetry of quarter-cycle

To solve the optimal control problem (2.2), we use a direct method. If we consider a partition  $\mathcal{P} = \{\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_T\}$  of interval  $[0, \pi/2]$ , we can represent a function  $\{f(\tau) \mid \tau \in [0, \pi/2]\}$  as a vector  $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^T$  where component  $f_t = f(\tau_t)$ . Then the optimal control problem (2.2) can be written as optimization problem with variable  $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^T$ . In this way we solve the next problem:

**Problem 2.3** Given a set of odd numbers  $\mathcal{E}_b$  with cardinality  $|\mathcal{E}_b| = N_b$ , given the target vector  $\mathbf{b}_T \in \mathbb{R}^{N_b}$  and partition  $\mathcal{P} = \{\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_T\}$  of interval  $[0, \pi/2]$ . We search a vector  $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^T$  that minimize the following function:

$$\min_{\mathbf{f} \in \mathbb{R}^T} \left[ \|\mathbf{b}_T - \beta^T\|^2 - \epsilon \sum_{t=0}^T f_t^2 \Delta\tau_t \right] \quad (2.17)$$

subject to:

$$\begin{aligned} j \in \mathcal{E}_b \quad & \begin{cases} \beta_j^{t+1} = \beta_j^t + \Delta\tau_t (4/\pi) \sin(j\tau_t) f_t \\ \beta_j^0 = 0 \end{cases} \\ & |f_t| < 1 \mid \forall t \in \{1, \dots, T\} \\ & \Delta\tau_t = \tau_{t+1} - \tau_t \mid \forall t \in \{2, \dots, T\} \end{aligned} \quad (2.18)$$

This problem is a nonlinear programming, for this we use CasADi software to solve.

### Numerical result for SHE of two levels

We considered the set of odd numbers  $\mathcal{E}_b = \{1, 5, 7, 11, 13\}$  and a target vector  $\mathbf{b}_T = [m_a, 0, 0, 0, 0]$ , where  $m_a \in [0, 1]$  is a parameter. We will compare the three solutions of problem (1.2) (obtained via genetic algorithms) with a solutions of the optimal control problem (2.2) with three penalization terms:  $\mathcal{L}[f] = -f$ ,  $\mathcal{L}[f] = +f$  and  $\mathcal{L}[f] = -f^2$  obtained by direct method with uniform partition of interval  $[0, \pi/2]$  with  $T = 400$  and penalization parameter  $\epsilon = 10^{-5}$ . To obtain the solutions of problem (1.2) we considered the number of switching angles  $M = 5$ .

Mostramos en la figura (2.3) los errores para tres soluciones obtenidas mediante algoritmos genéticos del problema (1.2) y tres soluciones obtenidas mediante control óptimo con los distintos términos de penalización. Esto nos asegura que el orden de magnitud de las soluciones obtenidas son del mismo orden. Además podemos ver en la figura (2.2) que el control óptimo con los términos  $\mathcal{L}[f] = -f$  y  $\mathcal{L}[f] = +f$  recuperar dos soluciones obtenido del problema (1.2). Mientras que el problema de control con el término  $\mathcal{L}[f] = f^2$  es solución del problema pero no presenta continuidad con respecto  $m_a$ .

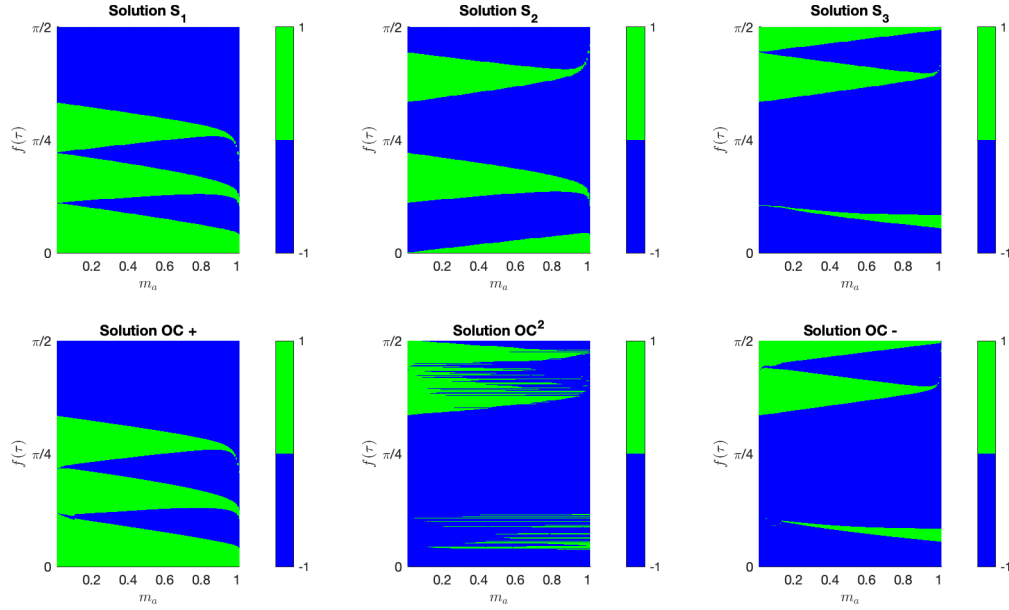


Figure 2.2: Comparison of solutions for different values of  $m_a$ . Solutions  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  correspond to problem (1.2) where the number of switching angles is prefixed, while  $OC$  solution correspond to optimal control problem.

### Numerical result for SHE of three levels

Podemos ver que en el caso en el que el control  $f(\tau)$  solo pueda tomar valores entre  $[0, 1]$  obtenemos señales que pueden tomar tres niveles en el intervalo  $[0, 2\pi]$  gracias a la simetría de cuarto de onda. Si resolvemos el problema de control óptimo pero esta vez cambiando las restricciones  $|f(\tau)| < 1$  por  $\{0 < f(\tau) < 1\}$ . Se ha realizado el mismo procedimiento que en el caso anterior, obteniendo soluciones para los mismo términos de penalización.

#### 2.2.2 OC for SHE with symmetry of half-cycle

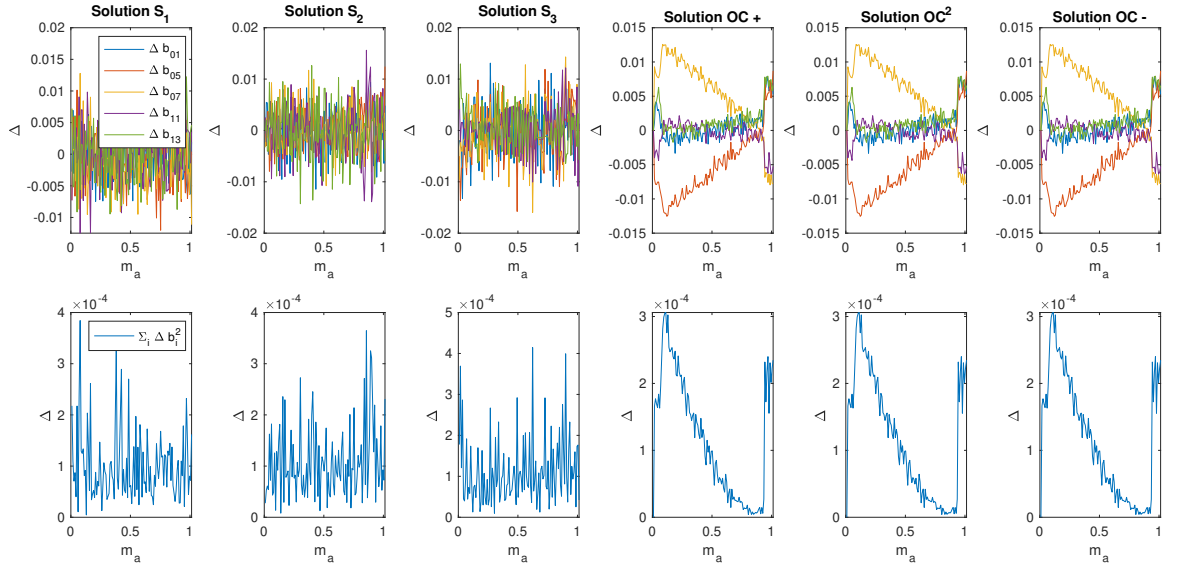


Figure 2.3: The order of magnitud of the square of euclidean distantes to target is the same for all solutions of figure (2.2)

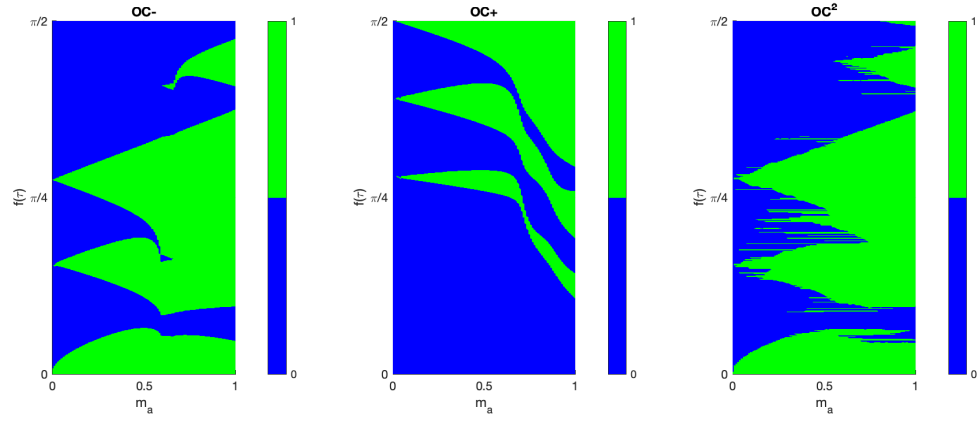


Figure 2.4: Soluciones para un control con restricciones  $0 \leq f \leq 1$  para obtener soluciones de tres niveles.

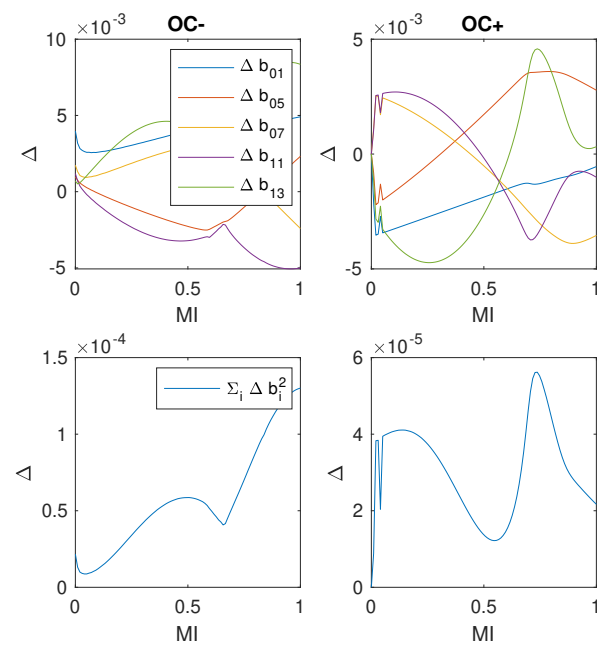


Figure 2.5: Errors of solution in three level solutions





## Chapter 3

# Feedback Optimal Control

### 3.1 SHE with quarter-wave symmetry as dynamic programming problem

Con el fin de encontrar la solución al problema para distintos targets  $\mathbf{a}_T$  y  $\mathbf{b}_T$  consideraremos el cambio de variable  $\beta'(\tau) = \beta(\tau) - \mathbf{b}_T$ . De manera que, podemos plantear un problema de control donde el estado inicial el target  $\mathbf{b}_T$  y cuyo objetivo es llevar el sistema al origen de coordenadas.

**Problem 3.1** Given  $\mathbf{b}_T \in \mathbb{R}^{n_b}$ , we define a cost functional in this way:

$$J[f(\tau)] = \frac{1}{2} \|\beta(T)\|^2 \quad (3.1)$$

So, the optimization problem can be written:

$$\min_{f \in \{-1,1\}} J[f(\tau)] \quad (3.2)$$

subject to:

$$\forall j \in \mathcal{E}_b \begin{cases} \beta_j(\tau) = -(4/\pi) \sin(j\tau) f(\tau) & \tau \in [0, \pi/2] \\ \beta_j(0) = b_T^j \end{cases} \quad (3.3)$$

En este caso, no consideraremos ningún término de penalización de manera que la solución del problema sea compatible con todas las posibles soluciones.

Tomamos una discretización  $\{\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{N_t}\}$  del intervalo  $[0, \pi/2]$ . Entonces podemos discretizar el problema anterior:

**Problem 3.2** Given  $\mathbf{b}_T \in \mathbb{R}^{n_b}$ , the optimization problem can be written:

$$\min_{f \in \mathbb{R}^{N_t}} \frac{1}{2} \|\beta^{N_t}\|^2 \quad (3.4)$$

$$\text{subject to: } \begin{cases} \beta_n^{i+1} = \beta_n^i - \Delta\tau (4/\pi) \sin(n\tau_i) f_\tau & \tau \in [0, \pi/2] \\ \beta_n^0 = b_T^n \end{cases} \quad (3.5)$$

$$\forall n \in \{1, 3, 5, \dots, N/2\}$$

### 3.1.1 Dynamic programming

Función valor

$$v_t(\mathbf{b}_T) = \min_{\mathbf{f} \in \mathbb{R}^{N_t-t}} \frac{1}{2} \|\boldsymbol{\beta}^t\|^2 \quad (3.6)$$

$$\text{subject to: } \begin{cases} \beta_n^{i+1} = \beta_n^i - \Delta\tau(4/\pi) \sin(n\tau_i) f_\tau & \tau \in [0, \pi/2] \\ \beta_n^0 = b_T^n \\ \forall n \in \{1, 3, 5, \dots, N/2\} \end{cases} \quad (3.7)$$

Entonces la función valor de estado cumple la ecuación de Bellman, que en este caso se puede escribir como:

$$v_t(\boldsymbol{\beta}^t) = \min_{f \in \{-1, 1\}} v_{t+1}(\boldsymbol{\beta}^{t+1}) \quad (3.8)$$

$$v^{N_t}(\boldsymbol{\beta}^{N_t}) = \frac{1}{2} \|\boldsymbol{\beta}^{N_t}\|^2 \quad (3.9)$$

La función  $v_t(\boldsymbol{\beta}^t)$  representa el mejor coste que se puede alcanzar desde el estado  $\boldsymbol{\beta}^t$  en  $(N_t - t)$  pasos. Es por ello que en  $t = N_t$  el mejor coste que se puede alcanzar desde el punto  $\boldsymbol{\beta}^t$  es el valor del coste final  $\frac{1}{2} \|\boldsymbol{\beta}^{N_t}\|^2$

Luego el control óptimo se puede calcular mediante la siguiente expresión

$$f^*(\tau, \boldsymbol{\beta}_t) = \min_{f \in \{-1, 1\}} v_t(\boldsymbol{\beta}_t) \quad (3.10)$$

# Bibliography