

Selective Harmonic Elimination via Optimal Control Theory

Jesús Oroya
Chair of Computational Mathematics

November 19, 2020

Contents

1	Introduction	5
1.1	Propuesta y motivación	6
2	Open Loop Optimal Control	9
2.1	Formulación de control óptimo para el problema SHE	9
2.1.1	OC SHE de dos niveles con simetría de cuarto de onda	10
2.2	Experimentos numéricos	12
2.2.1	OCP para SHE con simetría de media onda	12
2.2.2	OCP para SHE con simetría de cuarto de onda	13
3	Feedback Optimal Control	17
3.1	Caracterización del conjunto de controlabilidad	17
3.1.1	Condiciones de controlabilidad	17
3.1.2	Aproximación del conjunto controlable	18
3.1.3	Obtención de estrategias $f(\tau)$	18
3.2	SHE con simetría de cuarto de onda como un problema de programación dinámica	19
3.2.1	Función Valor y Feedback optimal control	19
3.2.2	Ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman	19

Chapter 1

Introduction

En este documento se propone una solución del problema Selective Harmonic Elimination (SHE) desde el punto de vista de la teoría del control. El problema SHE consiste en la búsqueda de una función $\{f(\tau) \mid \tau \in [0, 2\pi]\}$ dados unos pocos coeficientes de Fourier. Además esta función $f(\tau)$ solo podrá tomar valores en una discretización del intervalo $[-1, 1]$. Nos centraremos en concreto en las funciones $f(\tau)$ con simetría de media onda, es decir funciones tal que $f(\tau) = -f(\tau + \pi)$, por lo que la descripción de la función $f(\tau)$ queda determinada con sus valores en el intervalo $\tau \in [0, \pi]$. De esta forma, nos referiremos a una función $\{f(\tau) \mid \tau \in [0, \pi]\}$ cuyo desarrollo en serie de Fourier se puede escribir como:

$$f(\tau) = \sum_{i \in \text{odd}} a_i \cos(i\tau) + \sum_{j \in \text{odd}} b_j \sin(j\tau) \quad (1.1)$$

Donde a_i y b_j son:

$$a_i = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\tau) \cos(i\tau) d\tau \mid \forall i \text{ odd} \quad (1.2)$$

$$b_j = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\tau) \sin(j\tau) d\tau \mid \forall j \text{ odd} \quad (1.3)$$

Entonces el problema de SHE tomando solo los puntos $\{-1, 1\}$ como discretización del intervalo $[-1, 1]$, se puede formular de la siguiente manera:

Problem 1.1 (SHE para dos niveles) Dado dos conjuntos de números impares \mathcal{E}_a y \mathcal{E}_b con cardinalidades $|\mathcal{E}_a| = N_a$ y $|\mathcal{E}_b| = N_b$ respectivamente, y dado los vectores objetivo $\mathbf{a}_T \in \mathbb{R}^{N_a}$ y $\mathbf{b}_T \in \mathbb{R}^{N_b}$, buscamos una función $f(\tau) \mid \tau \in (0, \pi)$ tal que $f(\tau)$ solo pueda tomar los valores $\{-1, 1\}$ y cuyos coeficientes de Fourier satisfagan: $a_i = (\mathbf{a}_T)_i \mid \forall i \in \mathcal{E}_a$ y $b_j = (\mathbf{b}_T)_j \mid \forall j \in \mathcal{E}_b$.

En la formulación típica de este problema se considera la búsqueda de las posiciones donde ocurren los cambios de la función, estas localizaciones son llamados ángulos de conmutación. Dado que la función $f(\tau)$ solo puede tomar los valores $\{-1, 1\}$ los ángulos de conmutación determinan completamente la forma de $f(\tau)$. Por otra parte, dado los vectores \mathbf{a}^T y \mathbf{b}^T , el número de ángulos M es *a priori* desconocida, por lo que es necesario prefixarla sin un criterio muy claro. Si denotamos ángulos de conmutación como $\phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_M] \in \mathbb{R}^M$, podemos

escribir los coeficientes de Fourier (1.2) y (1.3) en función de ϕ como:

$$a_i(\phi) = \dots \mid \forall i \in \mathcal{E}_a \quad (1.4)$$

$$b_j(\phi) = \frac{4}{j\pi} \left[-1 + 2 \sum_{k=1}^M (-1)^{k+1} \cos(n\phi_k) \right] \mid \forall j \in \mathcal{E}_b \quad (1.5)$$

De esta manera, dada la expresión anterior podemos formular el problema (1.1) como el siguiente problema de minimización:

Problem 1.2 (Minimización para SHE de dos niveles) Dado dos conjuntos de números impares \mathcal{E}_a y \mathcal{E}_b con cardinalidades $|\mathcal{E}_a| = N_a$ y $|\mathcal{E}_b| = N_b$, dado los vectores $\mathbf{a}_T \in \mathbb{R}^{N_a}$ y $\mathbf{b}_T \in \mathbb{R}^{N_b}$ respectivamente, y dado el número de conmutaciones M , busquemos las localizaciones de los ángulos de conmutación $\phi \in \mathbb{R}^M$ mediante la siguiente minimización:

$$\min_{\phi \in \mathbb{R}^M} \left[\sum_{i \in \mathcal{E}_a} (a_i(\phi) - a_T^i)^2 + \sum_{j \in \mathcal{E}_b} (b_j(\phi) - b_T^j)^2 \right] \quad (1.6)$$

sujeto a:

$$0 < \phi_1 < \phi_2 < \dots < \phi_k < \dots < \phi_{M-1} < \phi_M < \pi \quad (1.7)$$

Donde las restricciones (1.7) conservan el orden de los ángulos, de manera que ϕ_k hace referencia al ángulo de conmutación k -ésimo.

A continuación numeraremos las ventajas y desventajas de esta formulación:

1. Ventajas

- (a) Dado que conocemos que la forma de la función $f(\tau)$ solo dos valores podemos reducir la representación de la variable de optimización a unos pocos ángulos de conmutación. En caso contrario, $f(\tau)$ debería ser representado por su valor dentro del intervalo $[0, \pi]$.
- (b) Es un problema NLP (Nonlinear Programming) cuya solución numérica es conocida para unos vectores \mathbf{a}_T y \mathbf{b}_T fijos.

2. Desventajas

- (a) El número de ángulos de conmutación M no es conocido para vectores objetivos \mathbf{a}_T y \mathbf{b}_T .
- (b) No se tiene una expresión explícita del problema que pueda ser utilizado a tiempo real para cualquier valor de los targets \mathbf{a}_T y \mathbf{b}_T .
- (c) Existen discontinuidades de las soluciones con respecto a una variación continua de los vectores de \mathbf{a}_T y \mathbf{b}_T . Sin embargo esto puede ser intrínseco del problema y no provocado por la formulación.

1.1 Propuesta y motivación

Inspirados en la naturaleza continua de la variable de optimización $f(\tau)$, proponemos en este documento la formulación desde el control óptimo. Es decir en lugar buscar los ángulos de conmutación $\phi \in \mathbb{R}^M$, buscaremos la función $f(\tau) \in \{g(\tau) \in L^\infty([0, \pi]) \mid |g(\tau)| < 1\}$ que tenga los coeficientes de Fourier deseados. Si utilizamos el teorema fundamental del cálculo diferencial

podemos re-escribir la expresión de los coeficientes de Fourier (1.2) y (1.3) como la evolución de sistemas dinámicos. Es decir:

$$\alpha_i(\tau) = \frac{2}{\pi} \int_0^\tau f(\tau) \sin(i\tau) d\tau \Rightarrow \begin{cases} \dot{\alpha}_i(\tau) &= \frac{2}{\pi} f(\tau) \sin(i\tau) \\ \alpha_i(0) &= 0 \end{cases} \quad (1.8)$$

$$\beta_j(\tau) = \frac{2}{\pi} \int_0^\tau f(\tau) \cos(j\tau) d\tau \Rightarrow \begin{cases} \dot{\beta}_j(\tau) &= \frac{2}{\pi} f(\tau) \cos(j\tau) \\ \beta_j(0) &= 0 \end{cases} \quad (1.9)$$

La evolución de los sistemas dinámicos $\alpha_i(\tau)$ y $\beta_j(\tau)$ desde el tiempo $\tau = 0$ hasta $\tau = \pi$ nos da lugar a los coeficientes a_i y b_j . De esta manera, el problema general de SHE (1.1) puede resolverse como un problema de control de un sistema dinámico donde $\alpha_i(\tau) \mid \forall i \in \mathcal{E}_a$ y $\beta_j(\tau) \mid \forall j \in \mathcal{E}_b$ son los estados del sistema y $f(\tau)$ la variable de control, y cuyo objetivo será llevar los estados desde el origen de coordenadas hasta los vectores objetivos \mathbf{a}_T y \mathbf{b}_T en tiempo $\tau = \pi$

Este documento esta estructurado de la siguiente manera:

1. Capítulo 1. *Open-loop Optimal Control*
2. Capítulo 2. *Feedback Optimal Control*

Chapter 2

Open Loop Optimal Control

2.1 Formulación de control óptimo para el problema SHE

En esta sección presentaremos la formulación de un problema de control para el problema SHE de dos niveles. Este se puede formalizar de la siguiente manera:

Problem 2.1 (OCP para SHE de dos niveles) Dados dos conjuntos de números impares \mathcal{E}_a and \mathcal{E}_b con cardinalidades $|\mathcal{E}_a| = N_a$ y $|\mathcal{E}_b| = N_b$ respectivamente, dados los vectores objetivos $\mathbf{a}_T \in \mathbb{R}^{N_a}$ y $\mathbf{b}_T \in \mathbb{R}^{N_b}$, buscamos la función $f(\tau) \mid \tau \in (0, \pi)$ que minimiza el siguiente funcional de coste:

$$J[f(\tau)] = \left[\|\mathbf{a}_T - \boldsymbol{\alpha}(T)\|^2 + \|\mathbf{b}_T - \boldsymbol{\beta}(T)\|^2 + \epsilon \int_0^\pi \mathcal{L}(f) d\tau \right] \quad (2.1)$$

donde $\boldsymbol{\alpha}(\tau) \in \mathbb{R}^{N_a} \times [0, \pi]$, $\boldsymbol{\beta}(\tau) \in \mathbb{R}^{N_b} \times [0, \pi]$, $\|\cdot\|$ es la norma euclídea y ϵ es un parámetro pequeño que penaliza el funcional de coste con el término $\mathcal{L}(f) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

De esta forma podemos escribir el siguiente problema de control óptimo:

$$\begin{aligned} & \min_{|f(\tau)| < 1} J[f(\tau)] \\ & \text{subject to:} \\ & \forall i \in \mathcal{E}_a \quad \begin{cases} \dot{\alpha}_i(\tau) = (2/\pi) \cos(i\tau) f(\tau) & \tau \in [0, \pi] \\ \alpha_i(0) = 0 \end{cases} \\ & \forall j \in \mathcal{E}_b \quad \begin{cases} \dot{\beta}_j(\tau) = (2/\pi) \sin(j\tau) f(\tau) & \tau \in [0, \pi] \\ \beta_j(0) = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.2)$$

En el problema de SHE de dos niveles se busca una función $\{f(\tau) \mid \tau \in [0, \pi]\}$ que solo pueda tomar los valores $\{-1, 1\}$, sin embargo el problema (2.1) definido para un término de penalización $\mathcal{L}(f)$ arbitrario puede tomar valores en todo el intervalo $[-1, 1]$. En teoría de control los controles que toma solo los valores extremos del intervalo son conocidos como controles *bang-bang*, estos se pueden obtener en condiciones muy concretas, como el tiempo mínimo de control.

A continuación estudiaremos las condiciones de optimalidad del problema con el fin de encontrar condiciones en el término $\mathcal{L}(f)$ que nos de el comportamiento *bang-bang* en el control

óptimo. Entonces siguiendo el principio de mínimo de Pontryagin, escribimos el Hamiltoniano del problema:

$$H(f, \mathbf{p}^\alpha(\tau), \mathbf{p}^\beta(\tau), \tau) = \epsilon \mathcal{L}(f) + G(\mathbf{p}^\alpha(\tau), \mathbf{p}^\beta(\tau), \tau) f(\tau) \quad (2.4)$$

Donde hemos llamado $G(\mathbf{p}^\alpha, \mathbf{p}^\beta, \tau)$ a:

$$G(\mathbf{p}^\alpha, \mathbf{p}^\beta, \tau) = \frac{2}{\pi} \left[\sum_{i \in \mathcal{E}_a} p_i^\alpha \cos(i\tau) + \sum_{j \in \mathcal{E}_b} p_j^\beta \sin(j\tau) \right] \quad (2.5)$$

y además donde $\mathbf{p}^\alpha(\tau) \in \mathbb{R}^{N_a} \times [0, \pi]$ y $\mathbf{p}^\beta(\tau) \in \mathbb{R}^{N_b} \times [0, \pi]$ son los estados adjuntos correspondientes a los estados α y β respectivamente.

Utilizando la siguiente condición de optimalidad:

$$H(\tau, \mathbf{p}_*^\alpha, \mathbf{p}_*^\beta, f_*) \leq H(\tau, \mathbf{p}_*^\alpha, \mathbf{p}_*^\beta, f) \quad (2.6)$$

podemos obtener la forma del control óptimo cuando los co-estados óptimos \mathbf{p}_*^α y \mathbf{p}_*^β además de la variable temporal τ están fijas. Entonces el problema se reduce la minimización de una función $H^*(f) = H(\tau, \mathbf{p}_*^\alpha, \mathbf{p}_*^\beta, f)$ en una variable f dentro de un intervalo $[-1, 1]$. Dado que necesitamos que el control óptimo f^* sea *bang-bang*, debemos diseñar $H^*(f)$ de manera que su mínimo esté en los extremos del intervalo. En el caso de una variable (este caso) solo podemos conseguir este comportamiento si no existe ningún mínimo dentro del intervalo. Una manera de asegurar este comportamiento es tomando la función $H^*(f)$ concava, mediante la elección el término $\mathcal{L}(f)$. Eso se debe a que la concavidad de el término $\mathcal{L}(f)$ determina la concavidad del Hamiltoniano $H^*(f)$ gracias a que la derivada segunda de $H^*(f)$ es proporcional al la derivada segunda del término de penalización, es decir:

$$\frac{d^2 H^{*2}}{df^2} = \epsilon \frac{d^2 \mathcal{L}(f)}{df^2} \quad (2.7)$$

Así que siempre que elijamos un término de penalización tal que:

$$\frac{d^2 L[f]}{df^2} \leq 0 \quad (2.8)$$

obtendremos un función $H^*(f)$ cóncava dentro de un intervalo convexo dando lugar a un control óptimo f^* *bang-bang*. Podemos ver una ilustración de este comportamiento en la figura (2.1)

2.1.1 OC SHE de dos niveles con simetría de cuarto de onda

Consideraremos un caso concreto del problema presentado en la sección anterior. Este es problema de SHE con simetría de cuarto de onda, es decir consideramos que la función $f(\tau)$ cumple la siguiente expresión:

$$f(\tau + \pi/2) = f(\tau) \mid \tau \in (0, \pi/2) \quad (2.9)$$

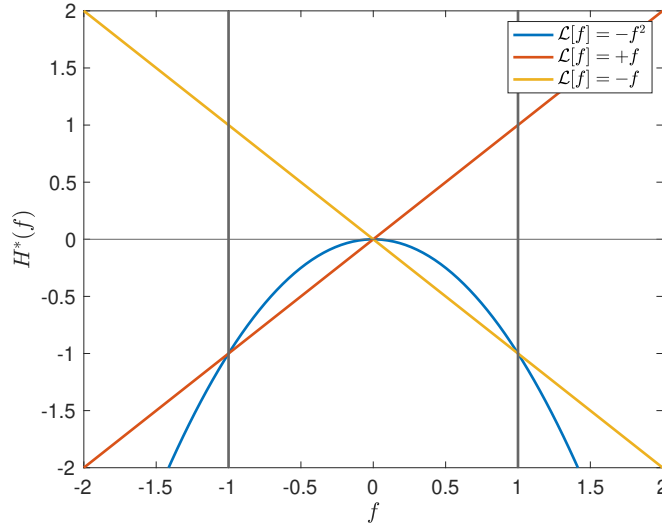


Figure 2.1: Ilustración sobre el comportamiento de la función $H^*(f)$ para distintos términos de penalización $\mathcal{L}(f)$. El problema de minimización de $H^*(f)$ con respecto a f para las distintas curvas presentadas en la figura siempre tiene mínimos en los extremos del intervalo $[-1, 1]$ de manera que el control óptimo en los tres casos, será *bang-bang*.

Esta expresión nos permite simplificar la expresión para los coeficientes de Fourier (1.2) and (1.3) de la siguiente manera:

$$a_i = 0 \quad | \quad \forall i \in \mathbb{Z} \quad (2.10)$$

$$b_j = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(\tau) \sin(j\tau) d\tau \quad | \quad \forall j \text{ odd} \quad (2.11)$$

Entonces $f(\tau) \mid \tau \in (0, \pi/2)$ puede ser escrita como:

$$f(\tau) = \sum_{j \text{ odd}}^{\infty} b_j \sin(j\tau) \quad (2.12)$$

$$b_j = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(\tau) \sin(j\tau) d\tau \quad | \quad j \text{ odd} \quad (2.13)$$

En este contexto podemos definir el problema de control de manera análoga que en la subsección anterior:

Problem 2.2 Dado un conjunto de número impares \mathcal{E}_b con cardinalidad $|\mathcal{E}_b| = N_b$ y dado un vector objetivo $\mathbf{b}_T \in \mathbb{R}^{N_b}$, buscamos la función $f(\tau) \mid \tau \in (0, \pi/2)$ tal que $f(\tau)$ minimize el siguiente funcional de coste:

$$J[f(\tau)] = \left[\|\mathbf{b}_T - \boldsymbol{\beta}(T)\|^2 + \epsilon \int_0^{\pi/2} \mathcal{L}(f(\tau)) d\tau \right] \quad (2.14)$$

donde $\boldsymbol{\beta}(\tau) \in \mathbb{R}^{N_b} \times [0, \pi/2]$, $\|\cdot\|$ es la norma euclídea y ϵ es un parámetro de penalización para el término $\mathcal{L}(f)$

Entonces el problema de control se puede escribir como:

$$\begin{aligned} & \min_{|f(\tau)| < 1} J[f(\tau)] \\ & \text{subject to:} \\ & \forall j \in \mathcal{E}_b \begin{cases} \dot{\beta}_j(\tau) = (4/\pi) \sin(j\tau) f(\tau) & \tau \in [0, \pi/2] \\ \beta_j(0) = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.15)$$

En este caso el problema de control tiene el siguiente Hamiltoniano:

$$H(f, \mathbf{p}_\beta, \tau) = \epsilon \mathcal{L}(f) + \frac{4f}{\pi} \left[\sum_{j \in \mathcal{E}_b} p_j^\beta \sin(j\tau) \right] \quad (2.16)$$

Podemos ver que el Hamiltoniano tiene la misma estructura que en la subsección anterior, por lo que de la misma forma la elección de un término de penalización $\mathcal{L}(f)$ concavo nos produce un Hamiltoniano $H^*(f)$ cóncavo y por tanto un control óptimo f^* *bang-bang*.

2.2 Experimentos numéricos

To solve the optimal control problem (2.2), we use a direct method. If we consider a partition $\mathcal{P} = \{\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_T\}$ of interval $[0, T]$, we can represent a function $\{f(\tau) \mid \tau \in [0, T]\}$ as a vector $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^T$ where component $f_t = f(\tau_t)$. Then the optimal control problem (2.2) can be written as optimization problem with variable $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^T$. This problem is a nonlinear programming, for this we use CasADi software to solve.

2.2.1 OCP para SHE con simetría de media onda

Dado una partición del intervalo $[0, \pi]$ podemos reformular el problema (2.1) como el siguiente problema en tiempo discreto:

Problem 2.3 Dados dos conjuntos de números impares \mathcal{E}_a and \mathcal{E}_b con cardinalidades $|\mathcal{E}_a| = N_a$ y $|\mathcal{E}_b| = N_b$ respectivamente, dados los vectores objetivos $\mathbf{a}_T \in \mathbb{R}^{N_a}$ y $\mathbf{b}_T \in \mathbb{R}^{N_b}$ y una partition $\mathcal{P} = \{\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_T\}$ of interval $[0, \pi]$. We search a vector $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^T$ that minimize the following function:

$$\min_{\mathbf{f} \in \mathbb{R}^T} \left[\|\mathbf{a}_T - \boldsymbol{\alpha}^T\|^2 + \|\mathbf{b}_T - \boldsymbol{\beta}^T\|^2 + \epsilon \sum_{t=0}^{T-1} \mathcal{L}(f_t) \Delta\tau_t \right] \quad (2.17)$$

subject to:

$$i \in \mathcal{E}_a \begin{cases} \alpha_i^{t+1} = \alpha_i^t + \Delta\tau_t (2/\pi) \cos(i\tau_t) f_t \\ \alpha_i^0 = 0 \end{cases}$$

$$j \in \mathcal{E}_b \begin{cases} \beta_j^{t+1} = \beta_j^t + \Delta\tau_t (2/\pi) \sin(j\tau_t) f_t \\ \beta_j^0 = 0 \end{cases}$$

$$|f_t| < 1 \mid \Delta\tau_t = \tau_{t+1} - \tau_t \mid \forall t \in \{1, \dots, T-1\}$$

Resultados numéricos para el problema SHE de dos niveles

Resultados numéricos para el problema SHE de tres niveles

2.2.2 OCP para SHE con simetría de cuarto de onda

Dado una partición del intervalo $[0, \pi/2]$ podemos reformular el problema (2.2) como el siguiente problema en tiempo discreto:

Problem 2.4 Given a set of odd numbers \mathcal{E}_b with cardinality $|\mathcal{E}_b| = N_b$, given the target vector $\mathbf{b}_T \in \mathbb{R}^{N_b}$ and partition $\mathcal{P} = \{\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_T\}$ of interval $[0, \pi/2]$. We search a vector $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^T$ that minimize the following function:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{f} \in \mathbb{R}^T} & \left[\|\mathbf{b}_T - \boldsymbol{\beta}^T\|^2 + \epsilon \sum_{t=0}^{T-1} \mathcal{L}(f_t) \Delta\tau_t \right] \\ & \text{subject to:} \\ & j \in \mathcal{E}_b \quad \begin{cases} \beta_j^{t+1} = \beta_j^t + \Delta\tau_t (4/\pi) \sin(j\tau_t) f_t \\ \beta_j^0 = 0 \end{cases} \\ & |f_t| < 1 \mid \Delta\tau_t = \tau_{t+1} - \tau_t \mid \forall t \in \{1, \dots, T-1\} \end{aligned} \quad (2.18)$$

SHE para dos niveles

Para este ejemplo consideramos el siguiente conjunto de números impares: $\mathcal{E}_b = \{1, 5, 7, 11, 13\}$. Además consideramos el vector objetivo $\mathbf{b}_T = [m_a, 0, 0, 0, 0]$, donde $m_a \in [0, 1]$ es un parámetro. Compararemos la solución obtenida mediante control óptimo con soluciones obtenidas en el problema (1.2) (obtained via genetic algorithms). with three penalization terms: $\mathcal{L}(f) = -f$, $\mathcal{L}(f) = +f$ and $\mathcal{L}(f) = -f^2$ obtained by direct method with uniform partition of interval $[0, \pi/2]$ with $T = 400$ and penalization parameter $\epsilon = 10^{-5}$. To obtain the solutions of problem (1.2) we considered the number of switching angles $M = 5$.

Mostramos en la figura (2.3) los errores para tres soluciones obtenidas mediante algoritmos genéticos del problema (1.2) y tres soluciones obtenidas mediante control óptimo con los distintos términos de penalización. Esto nos asegura que el orden de magnitud de las soluciones obtenidas son del mismo orden. Además podemos ver en la figura (2.2) que el control óptimo con los términos $\mathcal{L}(f) = -f$ y $\mathcal{L}(f) = +f$ recuperar dos soluciones obtenido del problema (1.2). Mientras que el problema de control con el término $\mathcal{L}(f) = f^2$ es solución del problema pero no presenta continuidad con respecto m_a .

SHE para tres niveles

Podemos ver que en el caso en el que el control $f(\tau)$ solo pueda tomar valores entre $[0, 1]$ obtenemos señales que pueden tomar tres niveles en el intervalo $[0, 2\pi]$ gracias a la simetría de cuarto de onda. Si resolvemos el problema de control óptimo pero esta vez cambiando las restricciones $|f(\tau)| < 1$ por $\{0 < f(\tau) < 1\}$. Se ha realizado el mismo procedimiento que en el caso anterior, obteniendo soluciones para los mismo términos de penalización.

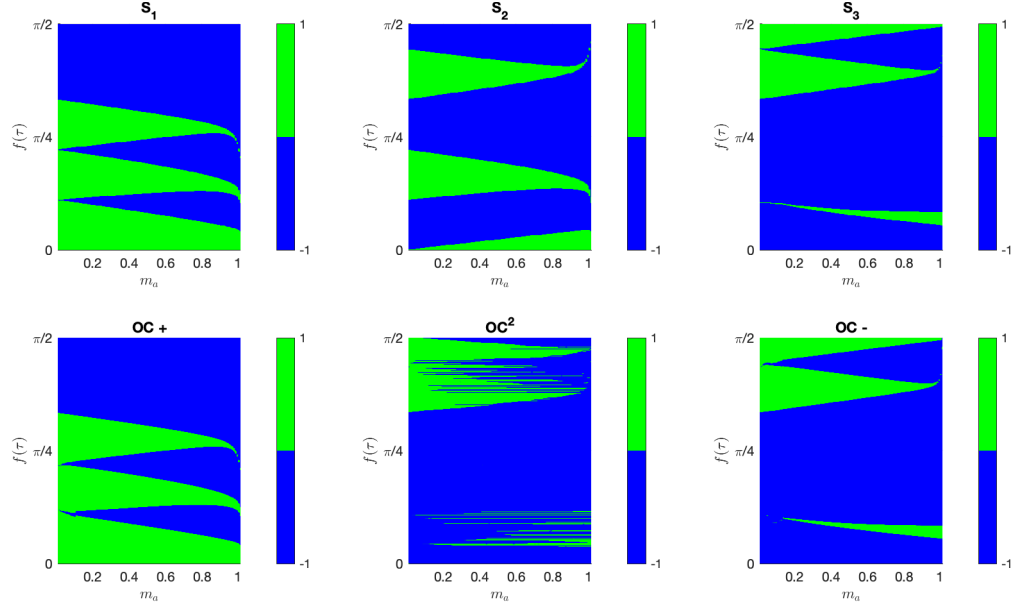


Figure 2.2: Comparison of solutions for different values of m_a . Solutions S_1, S_2, S_3 correspond to problem (1.2) where the number of switching angles is prefixed, while OC solution correspond to optimal control problem with different $\mathcal{L}(f)$.

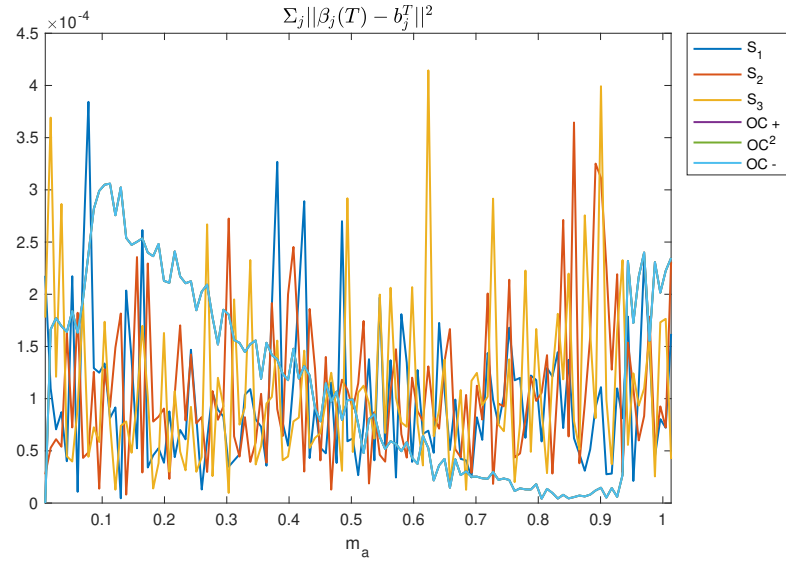


Figure 2.3: The order of magnitude of the square of euclidean distances to target is the same for all solutions of figure (2.2)

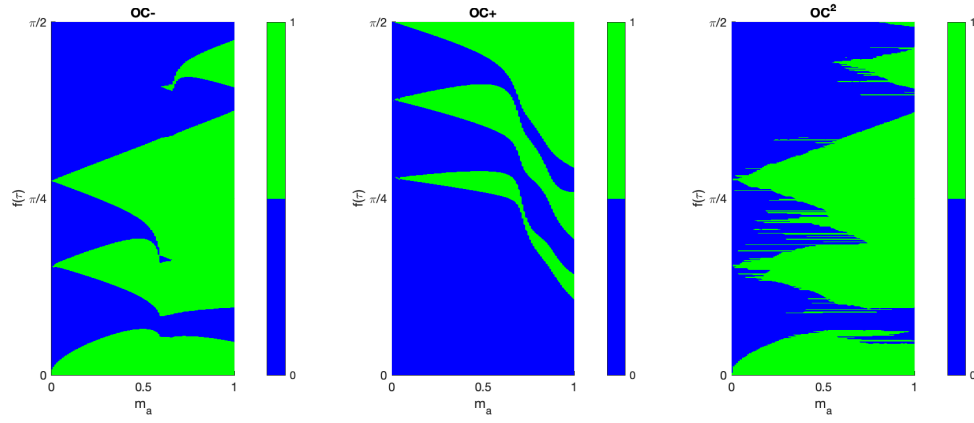


Figure 2.4: Soluciones para un control con restricciones $0 \leq f \leq 1$ para obtener soluciones de tres niveles.

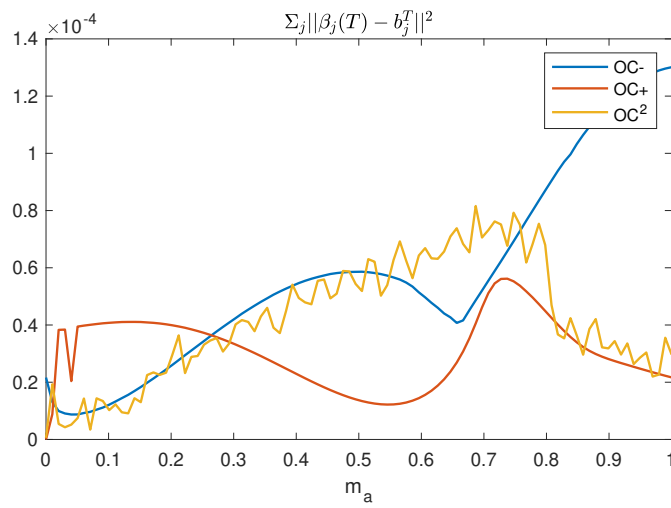


Figure 2.5: Errors of solution in three level solutions

Chapter 3

Feedback Optimal Control

3.1 Caracterización del conjunto de controlabilidad

Dado el sistema de control:

$$\forall j \in \mathcal{E}_b \begin{cases} \dot{\beta}_j(\tau) = -(4/\pi) \sin(j\tau) f(\tau) & \tau \in [0, \pi/2] \\ \beta_j(0) = b_T^j \end{cases} \quad (3.1)$$

$$|f(\tau)| \leq 1 \mid \tau \in [0, \pi/2] \quad (3.2)$$

3.1.1 Condiciones de controlabilidad

Consideramos el sistema de control proyectado en la dirección $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{N_b} / \|\mathbf{w}\| = 1$, cuyo estado llamaremos $\beta^w(\tau) = (\mathbf{w}, \beta(\tau))$

$$\begin{cases} \dot{\beta}^w(\tau) = -\frac{4}{\pi} \sum_{j \in \mathcal{E}_b} w_j \sin(j\tau) f(\tau) & \tau \in [0, \pi/2] \\ \beta^w(0) = \sum_{j \in \mathcal{E}_b} w_j b_T^j \end{cases} \quad (3.3)$$

Para esta dinámica proyectada existirá un valor máximo β_{max}^w para la condición inicial para el cual exista un control $f(\tau)$ que pueda conducir el sistema al origen en tiempo $\tau = \pi/2$.

Para hallar el valor β_{max}^w podemos pensar el cómo debe ser la estrategia de control para que el estado recorra la máxima distancia posible. La dinámica proyectada es lo más grande posible cuando la derivada toma siempre valores negativos. Dado que podemos elegir $f(\tau)$ en el intervalo $[-1, 1]$ la elegiremos de tal manera que la derivada temporal sea siempre negativa y lo más grande posible. Entonces la ecuación diferencial del punto más lejano β_{max}^p que podemos alcanzar en $\tau = \pi/2$ es:

$$\begin{cases} \dot{\beta}_{max}^w(\tau) = -\frac{4}{\pi} \left| \sum_{j \in \mathcal{E}_b} w_j \sin(j\tau) \right| & \tau \in [0, \pi/2] \\ \beta_{max}^w(\pi/2) = 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

Con condición final el origen de coordenadas. También podemos escribirlo en su versión integral:

$$\beta_{max}^w(\tau) = \frac{4}{\pi} \int_{\tau}^{\pi/2} \left| \sum_{j \in \mathcal{E}_b} w_j \sin(j\tau') \right| d\tau' \quad (3.5)$$

Condición necesaria

Entonces dados una trayectoria $\beta(\tau) \mid \tau \in [0, \pi/2]$ generada mediante una estrategia $f(\tau)$ y una dirección w , si la proyección $\beta^w(\tau) = (\beta(\tau), w)$ es siempre tal que $\beta^w(\tau) < \beta_{max}^w(\tau) \mid \forall \tau \in [0, \pi/2]$ entonces $\beta^w(\pi/2) \leq 0$. Es decir la proyección de $\beta(\tau)$ puede alcanzar el origen de coordenadas en tiempo $\tau = \pi$ e incluso ir más allá del origen.

Condición suficiente

Dada una trayectoria $\beta(\tau) \mid \tau \in [0, \pi/2]$ generada mediante una estrategia $f(\tau)$ entonces $\beta(\pi/2) = 0$ si $\forall w \in \mathbb{R}^{N_b} / \|w\| = 1$ se cumple que $(\beta(\tau), w) < \beta_{max}^w(\tau)$. Es decir, si las proyecciones del sistema en todas las direcciones w son capaces de llegar a $\beta^w(\pi/2) \leq 0$ es porque $\beta(\pi/2) = 0$

3.1.2 Aproximación del conjunto controlable

Tomamos un subconjunto finito $\mathcal{W} = \{w_k\}_{k=1}^K$ del conjunto $\{w \in \mathbb{R}^{N_b} / \|w\| = 1\}$, donde K es el número de elementos del conjunto \mathcal{W} . Buscamos una función que sea cero cuando $(\beta(\tau), w) < \beta_{max}^w(\tau) \mid \forall w \in \mathcal{W}$ para ello podemos utilizar la función theta de Heaviside $\Theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

O su versión suave

$$\Theta_{\epsilon}(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh(\epsilon x) \mid \epsilon \gg 1 \quad (3.7)$$

Entonces el conjunto controlable se puede escribir como:

$$V(\tau, \beta) = \sum_{w_k \in \mathcal{W}} \Theta(\beta(\tau) - \beta_{max}^{w_k}(\tau)) \quad (3.8)$$

Siempre que el conjunto \mathcal{W} este distribuido en todas las direcciones $V(\tau, \beta)$ será una buena aproximación del conjunto controlable.

3.1.3 Obtención de estrategias $f(\tau)$

Dado $V(\tau, \beta)$ podemos obtener distintos $f(\tau)$ simplemente tomando en cada instante el valor de $f(\tau)$ que nos mantenga en $V(\tau, \beta) = 0$, ya que por construcción $V(\tau, \beta) = 0$ es el conjunto en el que la trayectoria $\beta(\pi/2)$ puede llegar al origen.

3.2 SHE con simetría de cuarto de onda como un problema de programación dinámica

Con el fin de encontrar la solución al problema (1.1) para distintos vectores objetivo \mathbf{b}_T consideraremos un problema de control óptimo en el cual empezando desde en el vector objetivo \mathbf{b}_T queremos llevar el sistema al origen de coordenadas. Entonces podemos plantear el siguiente problema de control óptimo:

Problem 3.1 Dado un conjunto de número impares \mathcal{E}_b con cardinalidad $|\mathcal{E}_b| = N_b$ y dado un vector objetivo $\mathbf{b}_T \in \mathbb{R}^{N_b}$, busquemos la función $f(\tau) \mid \tau \in (0, \pi/2)$ tal que $f(\tau)$ sea solución de:

$$\begin{aligned} \min_{f \in \{-1,1\}} \frac{1}{2} \|\beta(T)\|^2 \\ \text{subject to:} \\ \forall j \in \mathcal{E}_b \begin{cases} \dot{\beta}_j(\tau) = -(4/\pi) \sin(j\tau) f(\tau) & \tau \in [0, T] \\ \beta_j(0) = b_T^j \end{cases} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Donde $T = \pi/2$.

En este caso, no consideraremos ningún término de penalización de manera que la solución del problema sea compatible con todas las posibles soluciones.

3.2.1 Función Valor y Feedback optimal control

Definición 3.1 (Función Valor) La función valor $V : \mathbb{R}^{N_b} \times [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}$ se define como el valor que podemos obtener al resolver el problema (3.1) empezando en desde la condición inicial β y cuando queda tiempo igual a $\pi/2 - t$. Es decir:

$$\begin{aligned} V(\mathbf{b}, t) = \min_{f \in \{-1,1\}} \frac{1}{2} \|\beta(T)\|^2 \\ \text{subject to:} \\ \forall j \in \mathcal{E}_b \begin{cases} \dot{\beta}_j(\tau) = -(4/\pi) \sin(j\tau) f(\tau) & \tau \in [t, T] \\ \beta_j(t) = b^j \end{cases} \end{aligned} \quad (3.10)$$

3.2.2 Ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman

La función valor para un problema de control óptimo cumple la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB), esta ecuación no es más que la versión en tiempo continua del principio de programación dinámica. La ecuación de HJB para el problema de control (3.1) se puede escribir como:

$$\begin{cases} \dot{V}(\mathbf{b}, t) + \min_{f \in \{-1,1\}} H(t, f, \nabla V(\mathbf{b}, t)) = 0 & \text{en } \mathbb{R}^{N_b} \times [0, \pi/2) \\ V(\mathbf{b}, T) = \frac{1}{2} \|\mathbf{b}\|^2 & \text{en } \mathbb{R}^{N_b} \end{cases} \quad (3.11)$$

Donde H es el Hamiltoniano del problema (3.1), es decir:

$$H(t, f, \mathbf{p}^b) = -\frac{4f}{\pi} \sum_{j \in \mathcal{E}_b} \sin(jt) p_j^b \quad (3.12)$$

Dado que el Hamiltoniano $H(t, f, \mathbf{p})$ es lineal con respecto al control f podemos asegurar que el mínimo del Hamiltoniano se encuentra en los extremos $\{-1, 1\}$. Entonces la expresión (3.11) se puede considerar como el mínimo de dos posibles valores. Es decir podemos re-escribir (3.11) como el valor mínimo de dos posibles valores:

$$\min_f H(t, f, \mathbf{p}^b) \Rightarrow \min(H_-(t, \mathbf{p}^b), H_+(t, \mathbf{p}^b)) \quad (3.13)$$

Donde denotamos:

$$H_+(t, \mathbf{p}^b) = H(t, f = +1, \mathbf{p}^b) \quad (3.14)$$

$$H_-(t, \mathbf{p}^b) = H(t, f = -1, \mathbf{p}^b) \quad (3.15)$$

Por otra parte, es conocido que el mínimo de dos numeros puede expresarse con ayuda del valor absoluto, es decir el mínimo de dos números x e y se puede expresar como:

$$\min(x, y) = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|) \quad (3.16)$$

Aplicando esto a la expresión (3.13) obtenemos:

$$\min_f H(t, f, \mathbf{p}^b) = \frac{1}{2}(H_-(t, \mathbf{p}^b) + H_+(t, \mathbf{p}^b) - |H_-(t, \mathbf{p}^b) - H_+(t, \mathbf{p}^b)|) \quad (3.17)$$

Dado que $H_+(t, \mathbf{p}^b) = -H_-(t, \mathbf{p}^b)$ obtenemos:

$$\min_f H(t, f, \mathbf{p}^b) = -\frac{1}{2}(|H_-(t, \mathbf{p}^b) - H_+(t, \mathbf{p}^b)|) \quad (3.18)$$

$$\min_f H(t, f, \mathbf{p}^b) = \frac{4}{\pi} \left| \sum_{j \in \mathcal{E}_b} \sin(jt) p_j^b \right| \quad (3.19)$$

De esta manera podemos escribir la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (3.11) como:

$$\begin{cases} \dot{V}(\mathbf{b}, \tau) = \frac{4}{\pi} \left| \sum_{j \in \mathcal{E}_b} \sin(j\tau) \frac{\partial V(\mathbf{b}, \tau)}{\partial b_j} \right| & en \mathbb{R}^{N_b} \times [0, \pi/2] \\ V(\mathbf{b}, T) = \frac{1}{2} \|\mathbf{b}\|^2 & en \mathbb{R}^{N_b} \end{cases} \quad (3.20)$$

Bibliography