

Técnicas de control óptimo aplicado al problema SHE

Jesús Oroya

Chair of Computational Mathematics

November 19, 2020

Índice

- 1 Introducción
- 2 Control óptimo de lazo abierto
- 3 Control óptimo de lazo cerrado

Introducción

Selective Harmonic Elimination

- Se considerará la función $f(\tau) \mid \tau \in [0, \pi]$ que solo puede tomar los valores $\{-1, 1\}$.
- Consideraremos que esta función tiene simetría de media onda, es decir: $f(\tau) = -f(\tau + \pi)$.

Selective Harmonic Elimination

- De esta manera, los $f(\tau)$ se puede desarrollar en serie de Fourier como:

$$f(\tau) = \sum_{i \in \text{impar}} a_i \cos(i\tau) + \sum_{j \in \text{impar}} b_j \sin(j\tau) \quad (1)$$

Donde a_i y b_j son:

$$a_i = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\tau) \cos(i\tau) d\tau \mid \forall i \text{ impar} \quad (2)$$

$$b_j = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\tau) \sin(j\tau) d\tau \mid \forall j \text{ impar} \quad (3)$$

Definición del Problema SHE

Problem (SHE para dos niveles)

- Consideramos dos conjuntos de números impares \mathcal{E}_a y \mathcal{E}_b con cardinalidades $|\mathcal{E}_a| = N_a$ y $|\mathcal{E}_b| = N_b$ respectivamente.
- Consideramos los vectores objetivo $\mathbf{a}_T \in \mathbb{R}^{N_a}$ y $\mathbf{b}_T \in \mathbb{R}^{N_b}$.
- Buscamos una función $f(\tau) \in \{-1, 1\} \mid \forall \tau \in (0, \pi)$ cuyos coeficientes de Fourier satisfagan:

$$\begin{cases} a_i = (\mathbf{a}_T)_i & \forall i \in \mathcal{E}_a \\ b_j = (\mathbf{b}_T)_j & \forall j \in \mathcal{E}_b \end{cases} \quad (4)$$

Optimización de ángulos de conmutación

Si denotamos ángulos de conmutación como

$$\phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_M] \in \mathbb{R}^M \quad (5)$$

podemos escribir los coeficientes de Fourier (2) y (3) en función de ϕ como:

$$a_i(\phi) = + \frac{4}{i\pi} \sum_{k=1}^M (-1)^{k+1} \sin(i\phi) \quad | \quad \forall i \in \mathcal{E}_a \quad (6)$$

$$b_j(\phi) = - \frac{2}{j\pi} \left[1 + (-1)^M + 2 \sum_{k=1}^M (-1)^{k+1} \cos(j\phi_k) \right] \quad | \quad \forall j \in \mathcal{E}_b \quad (7)$$

Problem

- Consideramos dos conjuntos de números impares \mathcal{E}_a y \mathcal{E}_b con cardinalidades $|\mathcal{E}_a| = N_a$ y $|\mathcal{E}_b| = N_b$.
- Consideramos los vectores $\mathbf{a}_T \in \mathbb{R}^{N_a}$ y $\mathbf{b}_T \in \mathbb{R}^{N_b}$
- Consideramos un número de conmutaciones M
- Buscamos los ángulos de conmutación $\phi \in \mathbb{R}^M$
- Minimizamos

$$\min_{\phi \in \mathbb{R}^M} \left[\sum_{i \in \mathcal{E}_a} (a_i(\phi) - a_T^i)^2 + \sum_{j \in \mathcal{E}_b} (b_j(\phi) - b_T^j)^2 \right] \quad (8)$$

sujeto a:

$$0 < \phi_1 < \phi_2 < \cdots < \phi_k < \cdots < \phi_{M-1} < \phi_M < \pi$$

Control óptimo de lazo abierto

Coeficientes de Fourier como sistemas dinámicos

- Mediante el teorema fundamental de cálculo transformamos la integrales en ecuaciones diferenciales, de la siguiente manera:

$$\alpha_i(\tau) = \frac{2}{\pi} \int_0^\tau f(\tau) \sin(i\tau) d\tau \Rightarrow \begin{cases} \dot{\alpha}_i(\tau) &= \frac{2}{\pi} f(\tau) \sin(i\tau) \\ \alpha_i(0) &= 0 \end{cases} \quad (9)$$

$$\beta_j(\tau) = \frac{2}{\pi} \int_0^\tau f(\tau) \cos(j\tau) d\tau \Rightarrow \begin{cases} \dot{\beta}_j(\tau) &= \frac{2}{\pi} f(\tau) \cos(j\tau) \\ \beta_j(0) &= 0 \end{cases} \quad (10)$$

Coefficientes de Fourier como sistemas dinámicos

- De esta manera, el estado $\{\alpha_i, \beta_j\}$ en el instante de tiempo $\tau = \pi$ son los coeficientes de Fourier de $f(\tau)$

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_i(\tau) &= \frac{2}{\pi} f(\tau) \sin(i\tau) \\ \alpha_i(0) &= 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_i(\pi) = a_i^T \quad (11)$$

$$\begin{cases} \dot{\beta}_j(\tau) &= \frac{2}{\pi} f(\tau) \cos(j\tau) \\ \beta_j(0) &= 0 \end{cases} \Rightarrow \beta_j(\pi) = b_j^T \quad (12)$$

Entonces el problema se traduce a encontrar un control $f(t)$ que conduzca al sistema desde el origen de coordenadas hasta el punto objetivo marcado.

Coefficientes de Fourier como sistemas dinámicos

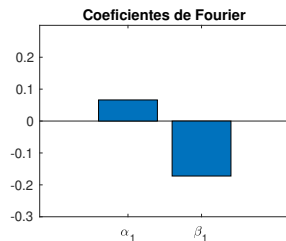
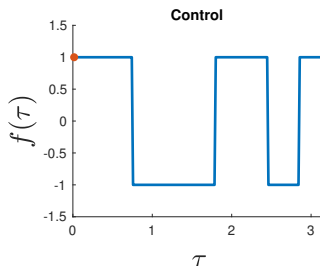
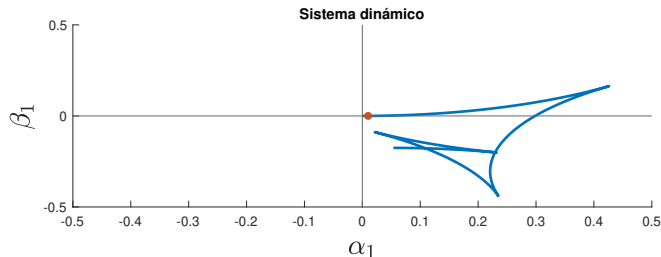
- Consideramos los conjuntos $\mathcal{E}_a = 1$ y $\mathcal{E}_b = 1$
- El sistema dinámico se escribe como:

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_1(\tau) &= \frac{2}{\pi} f(\tau) \sin(\tau) \mid \alpha(0) = 0 \\ \dot{\beta}_1(\tau) &= \frac{2}{\pi} f(\tau) \cos(\tau) \mid \beta(0) = 0 \end{cases} \quad (13)$$

- Si aplicamos $f(\tau)$ al sistema $(\alpha_1(\tau), \beta_1(\tau))$, entonces el vector de estado final

$$(\alpha_1(\pi), \beta_1(\pi)) = (a_1, b_1) \text{ de } f(\tau) \quad (14)$$

Coeficientes de Fourier como sistemas dinámicos



Caso de tres niveles

Problema de Control

Problem (OCP para SHE de dos niveles)

- Consideramos dos conjuntos de números impares \mathcal{E}_a and \mathcal{E}_b con cardinalidades $|\mathcal{E}_a| = N_a$ y $|\mathcal{E}_b| = N_b$.
- Consideramos los vectores objetivos $\mathbf{a}_T \in \mathbb{R}^{N_a}$ y $\mathbf{b}_T \in \mathbb{R}^{N_b}$.
- Buscamos la función $f(\tau) \mid \tau \in (0, \pi)$ que minimiza el siguiente funcional de coste:

$$J[f(\tau)] = \|\mathbf{a}_T - \alpha(T)\|^2 + \|\mathbf{b}_T - \beta(T)\|^2 + \epsilon \int_0^\pi \mathcal{L}(f) d\tau \quad (15)$$

Problem (OCP para SHE de dos niveles)

De esta forma podemos escribir el siguiente problema de control óptimo:

$$\min_{|f(\tau)| < 1} J[f(\tau)] \quad (16)$$

subject to:

$$\begin{aligned} \forall i \in \mathcal{E}_a \quad & \begin{cases} \dot{\alpha}_i(\tau) = (2/\pi) \cos(i\tau) f(\tau) & \tau \in [0, \pi] \\ \alpha_i(0) = 0 \end{cases} \\ \forall j \in \mathcal{E}_b \quad & \begin{cases} \dot{\beta}_j(\tau) = (2/\pi) \sin(j\tau) f(\tau) & \tau \in [0, \pi] \\ \beta_j(0) = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (17)$$

Condiciones de optimalidad

Es necesario construir la función Hamiltoniana:

$$H(f, \mathbf{p}^\alpha, \mathbf{p}^\beta, \tau) = \epsilon \mathcal{L}(f) + G(\mathbf{p}^\alpha, \mathbf{p}^\beta, \tau) f \quad (18)$$

Donde hemos llamado $G(\mathbf{p}^\alpha, \mathbf{p}^\beta, \tau)$ a:

$$G(\mathbf{p}^\alpha, \mathbf{p}^\beta, \tau) = \frac{2}{\pi} \left[\sum_{i \in \mathcal{E}_a} p_i^\alpha \cos(i\tau) + \sum_{j \in \mathcal{E}_b} p_j^\beta \sin(j\tau) \right] \quad (19)$$

Y donde \mathbf{p}^α y \mathbf{p}^β son los co-estados del sistema.

Principio de mínimo de Pontryagin

Cuando evaluamos el Hamiltoniano en los co-estados óptimos \mathbf{p}_*^α y \mathbf{p}_*^β podemos encontrar la forma del control minimizando el Hamiltoniano.

$$H(\tau, \mathbf{p}_*^\alpha, \mathbf{p}_*^\beta, f_*) \leq H(\tau, \mathbf{p}_*^\alpha, \mathbf{p}_*^\beta, f) \quad (20)$$

Entonces analizaremos el problema

$$\min_{|f| < 1} H_*(f) \quad (21)$$

Donde hemos llamado $H_*(f)$ a $H(\tau, \mathbf{p}_*^\alpha, \mathbf{p}_*^\beta, f)$

Condiciones necesarias de optimalidad

Entonces las condiciones necesarias de optimalidad para este problema se puede escribir como:

$$H_*(f) = \epsilon \mathcal{L}(f) + G(\mathbf{p}_*^\alpha, \mathbf{p}_*^\beta, \tau) f \quad (22)$$

$$\frac{dH_*(f)}{df} = 0 \quad (23)$$

$$\frac{d^2H_*(f)}{df^2} \geq 0 \quad (24)$$

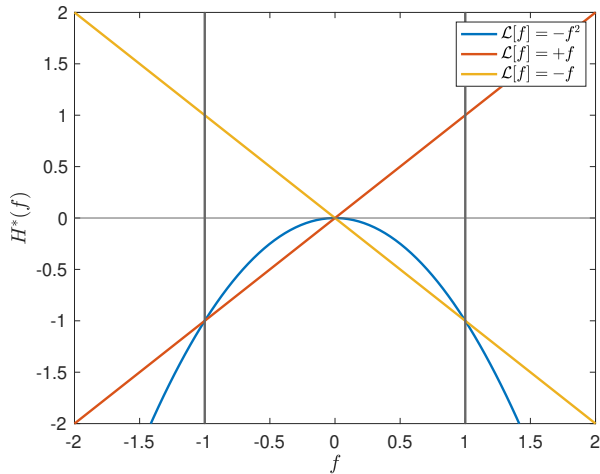
Condiciones necesarias de optimalidad

Entonces las condiciones necesarias de optimalidad para este problema se puede escribir como:

$$H_*(f) = \epsilon \mathcal{L}(f) + G(\mathbf{p}_*^\alpha, \mathbf{p}_*^\beta, \tau) f \quad (25)$$

$$\frac{dH_*(f)}{df} = \epsilon \frac{d\mathcal{L}}{df} + G(\mathbf{p}_*^\alpha, \mathbf{p}_*^\beta, \tau) = 0 \quad (26)$$

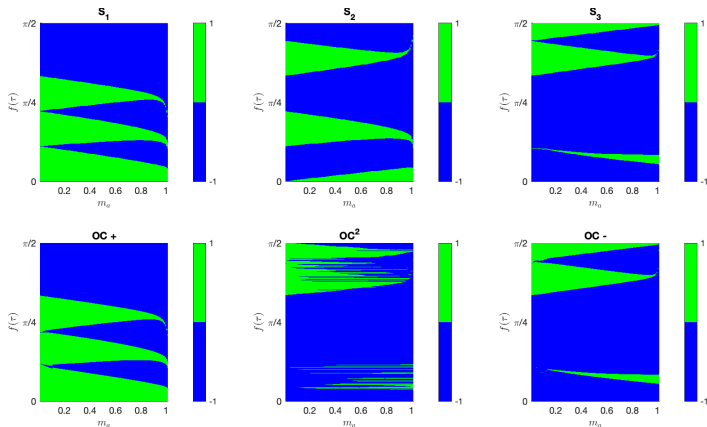
$$\frac{d^2H_*(f)}{df^2} = \epsilon \frac{d^2\mathcal{L}}{df^2} \geq 0 \quad (27)$$



Caso para dos niveles

- Para este ejemplo consideramos el siguiente conjunto de números impares: $\mathcal{E}_a = \{\emptyset\}$ y $\mathcal{E}_b = \{1, 5, 7, 11, 13\}$.
- Además consideramos el vector objetivo $\mathbf{b}_T = [m_a, 0, 0, 0, 0]$, donde $m_a \in [0, 1]$ es un parámetro.
- Compararemos la solución obtenida mediante control óptimo con soluciones obtenidas en el problema con número de ángulos prefijados.
- Compararemos con las siguientes penalizaciones: $\mathcal{L}(f) = -f$, $\mathcal{L}(f) = +f$ y $\mathcal{L}(f) = -f^2$

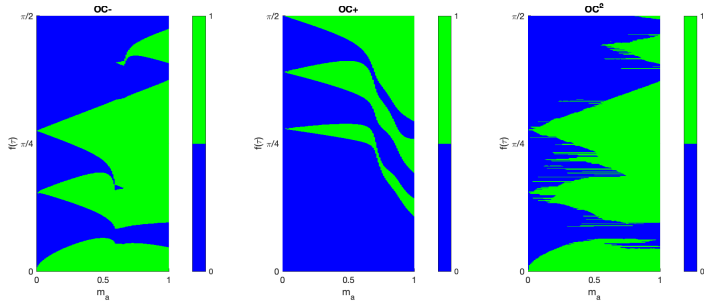
Caso para dos niveles



Caso para tres niveles

- Podemos ver que en el caso en el que el control $f(\tau)$ solo pueda tomar valores entre $[0, 1]$ obtenemos señales que pueden tomar tres niveles en el intervalo $[0, 2\pi]$ gracias a la simetría de media de onda.
- Si resolvemos el problema de control óptimo pero esta vez cambiando las restricciones $|f(\tau)| < 1$ por $\{0 < f(\tau) < 1\}$.
- Se ha realizado el mismo procedimiento que en el caso anterior.

Caso para tres niveles



Control óptimo de lazo cerrado

Definición del problema

Definition (Problema de control óptimo para SHE)

Sea