Métodos Numéricos

• como gerar o polinômio:

$$p(s) = \sum_{K=0}^{N} \frac{s!}{N!(s-N)!} \Delta^{K}_{r_0}$$

$$\Delta^{K}_{r_0} = \begin{cases} r(0) & \text{se } K = 0 \\ \Delta^{K-1}_{r_1} - \Delta^{K-1}_{r_0} & \text{se } K \neq 0 \end{cases}$$

• queremos um polinômio de grau 4, logo $N = 4$:

$$\frac{s!}{0!(s-0)!} r_0 + \frac{s(s-1)!}{1!(s-1)!}(r_1 - r_0) + \frac{s(s-1)(s-2)!}{2!(s-2)!}(r_2 - 2r_1 + r_0) +$$

$$+ \frac{s(s-1)(s-2)(s-3)!}{3!(s-3)!}(r_3 - 3r_2 + 3r_1 - r_0) +$$

$$+ \frac{s(s-1)(s-2)(s-3)(s-4)!}{4!(s-4)!}(r_4 - 4r_3 + 6r_2 - 4r_1 + r_0)$$

• colocando os "r_i" em evidência:

$$r(0)\left(1 - \frac{50s}{24} + \frac{35s^2}{24} - \frac{10s^3}{24} + \frac{s^4}{24}\right) +$$

$$+ r(1)\left(\frac{96s}{24} - \frac{104s^2}{24} + \frac{36s^3}{24} - \frac{4s^4}{24}\right) +$$

$$+ r(2)\left(-\frac{72}{24} + \frac{114s^2}{24} - \frac{48s^3}{24} + \frac{6s^4}{24}\right) +$$

$$+ r(3)\left(\frac{32s}{24} - \frac{6s^3}{24} + \frac{11s^2}{24} - \frac{6s}{24}\right) +$$

$$+ r(4)\left(-\frac{6s}{24} + \frac{11s^2}{24} - \frac{6s^3}{24} + \frac{s^4}{24}\right)$$

• aplicando abordagem fechada no polinômio de grau 4:

Um polinômio de grau 4 passa por 5 pontos, na abordagem fechada os pontos x_i e x_f são obrigatórios. Portanto o polinômio de interpolação deve passar por x_i, x_f e outros 3 pontos intermediários, de modo que os cinco pontos do intervalo $[x_i, x_f]$ sejam igualmente espaçados.

Chamamos de h a distância entre os valores de x onde a função será interpolada.

logo, $h = \frac{\Delta x}{4}$

Assim: $f(x_i) = f(x(s=0)) = g(0)$; $f(x_i+h) = f(x(s=1)) = g(1)$;

$f(x_i+2h) = f(x(s=2)) = g(2)$; $f(x_i+3h) = f(x(s=3)) = g(3)$;

$f(x_i+4h) = f(x(s=4)) = g(4)$

e $x_i = x + sh$ satisfaz essas relações pois:

$x(0) = x_i + 0h = x_i$; $x(1) = x_i + 1h$;

$x(2) = x_i + 2h$; $x(3) = x_i + 3h$;

$x(4) = x_i + 4h = x_f$

• aplicando a mudança de variável:

$$\int_{x_i}^{x_f} f(x)dx \approx \int_{x_i}^{x_f} p(x)dx = \int_{s_i}^{s_f} p(x(s)) \frac{dx(s)}{ds} ds = h\int_0^4 p(x(s)) ds = \int_0^4 g(s) ds$$

portanto:

$$h\int_0^4 \Big(g(0)\left(1 - \frac{50s}{24} + \frac{35s^2}{24} - \frac{10s^3}{24} + \frac{s^4}{24}\right) + g(1)\left(\frac{96s}{24} - \frac{104s^2}{24} + \frac{36s^3}{24} - \frac{4s^4}{24}\right) +$$

$$+ g(2)\left(-\frac{72s}{24} + \frac{114s^2}{24} - \frac{48s^3}{24} + \frac{6s^4}{24}\right) + g(3)\left(\frac{32s}{24} - \frac{56s^2}{24} + \frac{28s^3}{24} - \frac{4s^4}{24}\right) +$$

$$+ g(4)\left(-\frac{6s}{24} + \frac{11s^2}{24} - \frac{6s^3}{24} + \frac{s^4}{24}\right)\Big) ds$$

· resolvendo as integrais:

$$
\begin{aligned}
h\Big(& g(0)\int_0^4 \left(1-\frac{50s}{24}+\frac{35s^2}{24}-\frac{10s^3}{24}+\frac{s^4}{24}\right)ds \\
& + g(1)\int_0^4 \left(\frac{96s}{24}-\frac{104s^2}{24}+\frac{36s^3}{24}-\frac{4s^4}{24}\right)ds \\
& + g(2)\int_0^4 \left(-\frac{72s}{24}+\frac{114s^2}{24}-\frac{48s^3}{24}+\frac{6s^4}{24}\right)ds \\
& + g(3)\int_0^4 \left(\frac{32s}{24}-\frac{56s^2}{24}+\frac{28s^3}{24}-\frac{4s^4}{24}\right)ds \\
& + g(4)\int_0^4 \left(-\frac{6s}{24}+\frac{11s^2}{24}-\frac{6s^3}{24}+\frac{s^4}{24}\right)ds \Big)
\end{aligned}
$$

$$
= \frac{h}{45}\Big(g(0)(14) + g(1)(64) + g(2)(24) + g(3)(64) + g(4)(14) \Big)
$$

• aplicando abordagem aberta no polinômio de grau 4:

Um polinômio de interpolação de grau 4 interpola 5 pontos. Na abordagem aberta os pontos x_i e x_f são proibidos. Portanto, o polinômio deve passar por $f(x_0), f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4)$ tal que os pontos $x_i, x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_f$ sejam igualmente espaçados. Chamamos de h essa distância entre os valores de x onde a função será interpolada.

temos que $h = \frac{\Delta x}{6}$

Assim:

$$f(x_0) = f(x_i + h) = f(x(s=0)) = g(0);$$

$$f(x_1) = f(x_i + 2h) = f(x(s=1)) = g(1);$$

$$f(x_2) = f(x_i + 3h) = f(x(s=2)) = g(2);$$

$$f(x_3) = f(x_i + 4h) = f(x(s=3)) = g(3);$$

$$f(x_4) = f(x_i + 5h) = f(x(s=4)) = g(4),$$ e $x(s) = x_i + h + sh$ satisfaz

essas relações pois:

$$x(0) = x_i + h + 0h = x_0$$

$$x(1) = x_i + h + 1h = x_1$$

$$x(2) = x_i + h + 2h = x_2$$

$$x(3) = x_i + h + 3h = x_3$$

$$x(4) = x_i + h + 4h = x_4$$

Assim, aplicando a mudança de variável, temos:

$$\int_{x_i}^{x_f} f(x)dx \approx \int_{x_i}^{x_f} p(x)dx = \int_{s_i}^{s_f} p(x(s)) \frac{dx(s)}{ds} ds = h \int_{-1}^{5} g(s) ds$$

portanto:

$$h\int_{-1}^{5} \Big(g(0)\left(1 - \frac{50s}{24} + \frac{35s^2}{24} - \frac{10s^3}{24} + \frac{s^4}{24}\right) + g(1)\left(\frac{96s}{24} - \frac{104s^2}{24} + \frac{36s^3}{24} - \frac{4s^4}{24}\right) +$$

$$+ g(2)\left(-\frac{72s}{24} + \frac{114}{24}s^2 - \frac{48}{24}s^3 + \frac{6}{24}s^4\right) + g(3)\left(\frac{32s}{24} - \frac{56s^2}{24} + \frac{28s^3}{24} - \frac{4s^4}{24}\right) +$$

$$+ g(4)\left(\frac{-6s}{24} + \frac{11s^2}{24} - \frac{6s^3}{24} + \frac{s^4}{24}\right) \Big) ds$$

resolvendo as integrais:

$$h\Big(g(0)\int_{-1}^{5} \left(1 - \frac{50s}{24} + \frac{35s^2}{24} - \frac{10s^3}{24} + \frac{s^4}{24}\right) ds$$

$$+ g(1)\int_{-1}^{5} \left(\frac{96s}{24} - \frac{104s^2}{24} + \frac{36s^3}{24} - \frac{4s^4}{24}\right) ds +$$

$$+ g(2)\int_{-1}^{5} \left(-\frac{72s}{24} + \frac{114s^2}{24} - \frac{48s^3}{24} + \frac{6s^4}{24}\right) ds +$$

$$+ g(3)\int_{-1}^{5} \left(\frac{32s}{24} - \frac{56s^2}{24} + \frac{28s^3}{24} - \frac{4s^4}{24}\right) ds +$$

$$+ g(4)\int_{-1}^{5} \left(-\frac{6s}{24} + \frac{11s^2}{24} - \frac{6s^3}{24} + \frac{s^4}{24}\right) ds \Big)$$

$$= \frac{h}{10}\Big(g(0)(33) + g(1)(-42) + g(2)(78) + g(3)(-42) + g(4)(33) \Big)$$