Funções Exponenciais e Logarítmicas

Unidade 1. Potenciação e Função Exponencial

Prof. Anízio Noronha Menezes Neto

Profa. Erica Boizan Batista

Prof. Valdinês Leite de Sousa Júnior

1. Potenciação e Função Exponencial.

1.1. Potenciação: revisitando o conteúdo e recompondo saberes.

Em 1965, Gordon Moore fez uma previsão que ficou conhecida como a Lei de Moore, que afirma, em determinada área, que o número de transistores de um microprocessador dobraria a cada dois anos. O avanço das tecnologias da informática tem comprovado essa afirmação. Para saber mais sobre a Lei de Moore, acesse https://tecnoblog.net/responde/o-que-diz-a-lei-de-moore/.

O conhecimento matemático, nesse caso sobretudo das Funções Exponenciais, permite compreender e projetar a evolução de dispositivos tecnológicos, e diversas outras situações, como, por exemplo, projetar o crescimento de uma população ao longo dos anos, calcular a rentabilidade de investimentos, calcular o decaimento radioativo ou meia-vida de um elemento químico.

Portanto, as aplicações práticas das funções exponenciais são inúmeras. Iniciaremos o nosso estudo das Funções Exponenciais e Logarítmicas a partir de uma revisão da Potenciação.

1.1.1. Potência de expoente natural.

Definição:

Sejam $a \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$, e $n \in \mathbb{N}$, denomina-se potência de base a e expoente n, ao número a^n, definido por:

$$\begin{cases} a^0 = 1, \\ a^n = a.a^{n-1}, \ \forall\, n \geq 1. \end{cases}$$

Assim, temos, em decorrência da definição acima que:

[1] Anízio Noronha Menezes Neto é licenciado em Matemática e professor da Educação Básica e da Rede Estadual de Educação do Estado do Ceará.
[2] Erica Boizan Batista é doutora em Matemática e professora Efetiva na Universidade Federal do Cariri.
[3] Valdinês Leite de Souza Junior é doutor em Matemática e Professor da Universidade Federal do Cariri.

$$a^1 = a \cdot a^0 = a \cdot 1 = a$$

$$a^2 = a \cdot a^1 = a \cdot a$$

$$a^3 = a \cdot a^2 = a \cdot a \cdot a$$

$$\vdots$$

$$a^p = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{p\ vezes}$$

Assim sendo, para todo $p \in \mathbb{N}$, com $p \geq 2$, temos que a^p é igual a um produto de p fatores iguais a a.

Exemplos:

a) $(-15)^0 = 1$

b) $3^1 = 3$

c) $54 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$

d) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$

Propriedades:

Se $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$, com $p \in \mathbb{N}$ e $q \in \mathbb{N}$, sendo $a \neq 0$ ou $q \neq 0$, então são válidas as propriedades a seguir:

1ª Propriedade: $\boldsymbol{a^p \cdot a^q = a^{p+q}}$.

Demonstração. Em decorrência da definição, temos que:

$$a^p \cdot a^q = \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a)}_{\boxed{\text{p fatores}}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a)}_{\boxed{\text{q fatores}}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{\boxed{\text{p + q fatores}}} = a^{p+q}$$

Exemplos:

a) $2^2 \cdot 2^5 = 2^{2+5} = 2^7 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 128$

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^{3+2} = \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{32}{243}$

2ª Propriedade: $\boldsymbol{\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}}$, com $a \neq 0$ e $p \geq q$.

Demonstração. Consideremos os seguintes casos:

1º Caso: Se $p = q$, então:

$$\frac{a^p}{a^q} = \frac{a^p}{a^p} = 1.$$

Por outro lado, aplicado a propriedade, temos:

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q} = a^{p-p} = a^0 = 1.$$

De modo que, nesse caso, verifica-se a validade da propriedade.

2º Caso: Considerando $p > q$, aplicaremos o Princípio da Indução Finita sobre q, considerando o valor de p fixo. Assim:

1. Consideremos o caso base para $q = 1$:

$$\frac{a^p}{a^q} = \frac{a^p}{a^1} = \frac{a^p}{a} = \frac{a.a^{p-1}}{a} = a^{p-1}.$$

2. Após ser verificada a validade para $q = 1$, consideremos, por hipótese de indução, a propriedade válida para algum $q = n \in \mathbb{N}$, com $n > 1$. Logo:

$$\frac{a^p}{a^n} = a^{p-n}$$

3. Verifiquemos a validade para $n + 1$.

$$\frac{a^p}{a^{n+1}} = \frac{a^p}{aa^n} = \frac{a^{p-n}}{a} = \frac{a.\,a^{p-n-1}}{a} = a^{p-n-1} = a^{p-(n+1)}$$

Portanto, verifica-se que propriedade é válida para todo $q \in \mathbb{N}$.

Exemplos:

a) $\frac{5^7}{5^2} = 5^{7-2} = 5^5 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 3125$

b) $\frac{(-2)^{10}}{(-2)^8} = (-2)^{10-8} = (-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = 4$

3ª Propriedade: $(\boldsymbol{a \cdot b})^{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{a^p \cdot b^p}$, com $b \neq 0$ ou $p \neq 0$.

Demonstração. Pelo Princípio da Indução Finita, aplicado sobre p, temos que:

1. A propriedade é válida para $p = 1$, pois:

$$(a \cdot b)^1 = a \cdot b = a^1 \cdot b^1$$

2. Consideremos, por hipótese de indução, a propriedade válida para algum $p \in \mathbb{N}$, assim:

$(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$.

3. Provemos que a propriedade é válida para $p+1$. Desse modo, temos que:

$$(a \cdot b)^{p+1} = (a \cdot b)^p . (a \cdot b) = \underbrace{a^p \cdot b^p}_{\textit{pela hipótese de indução}} \cdot a \cdot b = a^{p+1} \cdot b^{p+1}.$$

Como queríamos demonstrar.

Exemplos:

a) $(3\sqrt{5})^2 = 3^2 \cdot \sqrt{5}^2 = 9 \cdot 5 = 45$

b) $[(-2) \cdot 0{,}5]^3 = (-2)^3 \cdot 0{,}5^3 = -8 \cdot 0{,}125 = -1$

4ª Propriedade: $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$, com $b \neq 0$.

Demonstração. De igual modo, aplicaremos o Princípio da Indução Finita sobre p, assim, temos que:

1. A propriedade é válida para $p = 1$, pois:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^1 = \frac{a^1}{b^1} = \frac{a}{b}$$

2. Podemos considerar, por hipótese de indução, a propriedade válida para algum $p \in \mathbb{N}$. Desse modo:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$$

3. Provaremos a validade da propriedade para $p+1$. Observe:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{p+1} = \left(\frac{a}{b}\right)^p \cdot \frac{a}{b} == \frac{a^p}{b^p} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^{p+1}}{b^{p+1}}$$

Portanto, a propriedade é válida para todo $p \in \mathbb{N}$.

Exemplos:

a) $\left(\frac{3}{7}\right)^2 = \frac{3^2}{7^2} = \frac{9}{49}$

b) $\left(\frac{-4}{5}\right)^3 = \frac{(-4)^3}{5^3} = \frac{-64}{125} = -\frac{64}{125}$

5ª Propriedade: $(a^p)^q = a^{pq}$.

Demonstração. Também pelo Princípio da Indução Finita, aplicado sobre q, consideremos:

1. Como caso base, a propriedade é válida para $q = 1$. Vejamos:

$$(a^p)^1 = a^p = a^{p \cdot 1}$$

2. Tomando, por hipótese de indução, a propriedade válida para algum $p \in \mathbb{N}$, teremos:

$$(a^p)^q = a^{pq}$$

3. Como se verifica abaixo, a propriedade é válida para $q + 1$. Observe:

$$(a^p)^{q+1} = (a^p)^q \cdot a^p = \underbrace{a^{pq} \cdot a^p = a^{pq+p}}_{1^{\text{a}} \text{ Propriedade}} = a^{p(q+1)}$$

Portanto, a propriedade é válida para todo $p \in \mathbb{N}$.

Observemos, ainda, que pela definição da potência a^p, como $a \in \mathbb{R}$, há as seguintes possibilidades: $a > 0$, $a = 0$, ou, $a < 0$.

Portanto, vamos considerar a seguir o que ocorre em cada caso:

1º Caso: $a > 0$.

Se $a > 0$, então $a^p > 0$, $\forall\, p \in \mathbb{N}$.

Ou seja, toda potência de base real positiva e expoente natural é um número real maior que zero.

2º Caso: $a = 0$.

Se $a = 0$, então $0^p = 0$, $\forall\, p \geq 1$, $p \in \mathbb{N}$.

Observe que se $p = 0$, teremos 0^0, o que é uma indeterminação. E, de modo análogo, se p for negativo.

3º Caso: $a < 0$.

Se $a < 0$, então $\begin{cases} a^{2p} > 0, \ \forall\, p \in \mathbb{N} \\ a^{2p+1} < 0, \ \forall\, p \in \mathbb{N} \end{cases}$.

Ou seja, caso a base seja um real negativo, a potência será um real positivo se o expoente for par, e será um real negativo se o expoente for ímpar.

Exemplos:

a) $(2^3)^2 = 2^{3.2} = 2^6 = 64$

b) $((-10)^2)^5 = (-10)^{10} = 10.000.000.000$

Exercício resolvido:

1. Indique a propriedade utilizada em cada situação.

a) $3^4 \cdot 3^7 = 3^{4+7} = 3^{11}$;

b) $\frac{2^{15}}{2^5} = 2^{15-5} = 2^{10}$;

c) $\left(3\sqrt[3]{5}\right)^7 = 3^7\left(\sqrt[3]{5}\right)^7$;

d) $\left(\frac{3}{4}\right)^5 = \frac{3^5}{4^5}$;

e) $(7^2)^5 = 7^{2\cdot 5} = 7^{10}$.

Resposta:

a) $3^4 \cdot 3^7 = 3^{4+7} = 3^{11}$ (1ª Propriedade);
b) $\frac{2^{15}}{2^5} = 2^{15-5} = 2^{10}$ (2ª Propriedade);
c) $\left(3\sqrt[3]{5}\right)^7 = 3^7\left(\sqrt[3]{5}\right)^7$ (3ª Propriedade);
d) $\left(\frac{3}{4}\right)^5 = \frac{3^5}{4^5}$ (4ª Propriedade);
e) $(7^2)^5 = 7^{2\cdot 5} = 7^{10}$ (5ª Propriedade).

2. Considerando $a.b \neq 0$, simplifique as expressões a seguir.

a) $(a^2 \cdot b^5)^2 \cdot (a^3 \cdot b^7)^3$

b) $[(a^3 \cdot b^4)^2]^3$

c) $\left(\frac{\boldsymbol{a^3 \cdot b^4}}{\boldsymbol{a^2 \cdot b^2}}\right)^{\mathbf{3}}$

d) $\frac{(a^2 \cdot b^5)^3 \cdot (a^{12} \cdot b^{10})}{a^{14} \cdot b^8}$

Resolução:

a) $(a^2 \cdot b^5)^2 \cdot (a^3 \cdot b^7)^3 = (a^{2\cdot 2} \cdot b^{5\cdot 2}) \cdot (a^{3\cdot 3} \cdot b^{7\cdot 3}) = a^4 \cdot b^{10} \cdot a^9 \cdot b^{21} = a^{4+9} \cdot b^{10+21} = a^{13} \cdot b^{31}$

b) $[(a^3 \cdot b^4)^2]^3 = (a^3 \cdot b^4)^{2.3} = (a^3 \cdot b^4)^6 = a^{3.6} \cdot b^{4.6} = a^{18} \cdot b^{24}$

c) $\left(\frac{a^3 b^4}{a^2 b^2}\right)^3 = (a^{3-2} \cdot b^{4-2})^3 = (a \cdot b^2)^3 = a^{1\cdot 3} \cdot b^{2\cdot 3} = a^3 \cdot b^6$

d) $\frac{(a^2 b^5)^3 \cdot (a^{12} b^{10})}{a^{14} b^8} = \frac{(a^{2.3} b^{5.3}) \cdot (a^{12} b^{10})}{a^{14} b^8} = \frac{a^6 b^{15} a^{12} b^{10}}{a^{14} b^8} = \frac{a^{6+12} b^{15+10}}{a^{14} b^8} = \frac{a^{18} b^{25}}{a^{14} b^8} = a^{18-14} b^{25-8} = a^4 b^{17}$

Observação:

Pela definição da potência a^p, como $a \in \mathbb{R}$, há as seguintes possibilidades: $a > 0$, $a = 0$, ou, $a < 0$.

Vamos considerar o que ocorre em cada caso, a seguir:

1º Caso: $a > 0$.

Se $a > 0$, então $a^p > 0$, $\forall\, p \in \mathbb{N}$.

Ou seja, toda potência de base real positiva e expoente natural é um número real maior que zero.

2º Caso: $a = 0$.

Se $a = 0$, então $0^p = 0$, $\forall\, p \geq 1$, $p \in \mathbb{N}$.

Observe que se $p = 0$, teremos 0^0, o que é uma indefinição, bem como se $p < 0$.

3º Caso: $a < 0$.

Se $a < 0$, então $\begin{cases} a^{2p} > 0, \forall\, p \in \mathbb{N} \\ a^{2p+1} < 0, \forall\, p \in \mathbb{N} \end{cases}$.

Ou seja, caso a base seja um real negativo, a potência será um real positivo se o expoente for par, e será um real negativo se o expoente for ímpar.

1.1.2. Potência de expoente inteiro negativo.

Definição:

Dados $a \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$, e $n \in \mathbb{N}$, define-se a potência de base a e expoente inteiro negativo $-n$ como o inverso da potência a^n. Ou seja, é válida a relação:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Exemplos:

a) $5^{-1} = \frac{1}{5}$ b) $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ c) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{4}{9}} = \frac{9}{4}$

Propriedades:

Dada a definição anterior, de potência com expoente inteiro negativo, é importante observar que:

i. se $a = 0$ e $n \in \mathbb{N}$, não se define 0^{-n};

ii. ao se definir potência de expoente inteiro negativo, a 2ª Propriedade das potências com expoente natural, $\frac{a^q}{a^p} = a^{q-p}$, com $a \neq 0$, passa a ter significado para $p > q$.

Assim, se $a \in \mathbb{R}^*$ e $b \in \mathbb{R}^*$, com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}$, então são válidas as propriedades a seguir:

1ª Propriedade: $\boldsymbol{a^p \cdot a^q = a^{p+q}}$**;**

Exemplo: $3^{-1} \cdot 3^{-2} = 3^{-1+(-2)} = 3^{-3} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

2ª Propriedade: $\boldsymbol{\frac{a^q}{a^p} = a^{q-p}}$ **;**

Exemplo: $\frac{2^3}{2^{-2}} = 2^{3-(-2)} = 2^{3+2} = 2^5 = 32$

3ª Propriedade: $\boldsymbol{(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p}$;

Exemplo: $(3\sqrt{5})^{-2} = 3^{-2} \cdot (\sqrt{5})^{-2} = \frac{1}{3^2} \cdot \frac{1}{(\sqrt{5})^2} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{45}$

4ª Propriedade: $\boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}}$;

Exemplo: $\left(\frac{4}{5}\right)^{-2} = \frac{4^{-2}}{5^{-2}} = \frac{1}{4^2} : \frac{1}{5^2} = \frac{1}{16} : \frac{1}{25} = \frac{1}{16} \cdot \frac{25}{1} = \frac{25}{16}$

5ª Propriedade: $\boldsymbol{(a^p)^q = a^{p \cdot q}}$**.**

Exemplo: $(10^2)^{-2} = 10^{2(-2)} = 10^{-4} = \frac{1}{10^4} = \frac{1}{10000}$

Exercícios resolvidos:

1. Calcule o valor das expressões:

a) $\frac{(-3)^2+3^{-2}-3^{-1}}{3^3-3^{-3}+3^{-1}}$

b) $\frac{2^4-\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}}{\left(\left(\frac{2}{4}\right)^2\right)^{-1}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}}$

Resolução:

a) $\frac{(-3)^2+3^{-2}-3^{-1}}{3^3-3^{-3}+3^{-1}} = \frac{9+\frac{1}{9}-\frac{1}{3}}{27-\frac{1}{27}+\frac{1}{3}} = \frac{\frac{81-1-3}{9}}{\frac{729-1+9}{27}} = \frac{\frac{79}{9}}{\frac{737}{27}} = \frac{79}{9} \cdot \frac{27}{737} = \frac{237}{737}$

b) $\frac{2^4-\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}}{\left(\left(\frac{2}{4}\right)^2\right)^{-1}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}} = \frac{16-(-8)}{\left(\frac{2}{4}\right)^{-2}+4} = \frac{16+8}{\frac{16}{4}+4} = \frac{24}{4+4} = \frac{24}{8} = 3$

2. Considerando $ab \neq 0$, simplifique as expressões a seguir.

a) $(a^{-2}b^5)^{-2} \cdot (a^3b^{-7})^3$

b) $\frac{(a^{-2}b^5)^3 \cdot (a^{12}b^{-10})}{(a^2b^5)^{-2}}$

Resolução:

a) $(a^{-2}b^{5})^{-2}\cdot(a^{3}b^{-7})^{3} = \left(a^{-2(-2)}b^{5(-2)}\right)\cdot\left(a^{3\cdot3}b^{-7\cdot3}\right) = a^{4}b^{-10}a^{9}b^{-21} = a^{4+9}b^{-10+(-21)} = a^{13}b^{-31} = \frac{a^{13}}{b^{31}}$

b) $\frac{(a^{-2}b^{5})^{3}.(a^{12}b^{-10})}{(a^{2}b^{5})^{-2}} = \frac{(a^{-2.3}b^{5.3}).(a^{12}b^{-10})}{a^{2.(-2)}b^{5.(-2)}} = \frac{a^{-6}b^{15}a^{12}b^{-10}}{a^{-4}b^{-10}} = \frac{a^{6}b^{5}}{a^{-4}b^{-10}} = a^{6-(-4)}b^{5-(-10)} = a^{10}b^{15}$

1.1.3. Raiz enésima aritmética.

Definição:

Consideremos um número real $a \geq 0$ e um natural n, com $n \geq 1$, existe um único real positivo ou nulo b tal que $b^{n} = a$.

Chamaremos o número b de raiz enésima aritmética de a, ou simplesmente, de raiz enésima de a, *e* representaremos por:

$$b = \sqrt[n]{a}$$

Em $b = \sqrt[n]{a}$, a é chamado de radicando, n de índice, b de raiz e o símbolo $\sqrt{\ }$ de radical.

Exemplos:

a) $\sqrt[3]{1000} = 10$, pois $10^{3} = 1000$;

b) $\sqrt{25} = 5$, pois $5^{2} = 25$.

Consequências da definição

1. Decorre que $\left(\sqrt[n]{a}\right)^{n} = a$, para todo $a \geq 0$.

2. Temos, por definição, que $\sqrt[n]{a} = b$. Sendo assim, vale ressaltar que a raiz quadrada de um natural p será dada por $\sqrt{p} = q$, o que difere de $\sqrt{p} = \pm q$. Desse modo, por exemplo, temos que:

I - $\sqrt{9} = 3$ → Expressa a forma de forma correta a raiz quadrada de 9.

II - $\sqrt{9} = \pm 3$ → Não expressa a raiz quadrada de 9.

Entretanto, são verdadeiras as sentenças a seguir, nas quais o radical não interfere no sinal que antecede à raiz:

a) $-\sqrt{25} = -5$; b) $-\sqrt[3]{27} = -3$; c) $\pm\sqrt{16} = \pm 4$

3. Notemos que no cálculo da raiz quadrada de um quadrado perfeito ocorre que:

$\sqrt{a^2} = |a|$.

Verdadeiramente, $\sqrt{a^2}$ é, por definição, o número real positivo ou nulo que elevado ao quadrado resulta em a^2, e como $a^2 = |a|^2$ e $|a| \geq 0$, segue que $\sqrt{a^2} = |a|$.

Por exemplo, temos que:

I - $\sqrt{(-11)^2} = |-11| = 11$ → Expressa de forma correta a raiz quadrada de $(-11)^2$.

II - $\sqrt{(-11)^2} = -11$. → Não expressa a raiz quadrada de $(-11)^2$.

Propriedades:

Se $a \in \mathbb{R}_+$, $b \in \mathbb{R}_+$, com $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$ e $p \in \mathbb{N}^*$, então, são válidas as seguintes propriedades:

1ª Propriedade: $\boldsymbol{\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}}$**,** com $a \neq 0$ ou $\mathrm{m} \neq 0$**.**

Demonstração. Seja $\sqrt[n]{a^m} = b$**,** por definição:

$$\sqrt[n]{a^m} = b \Rightarrow a^m = b^n$$

Elevando ambos os membros da igualdade a *p*:

$$(a^m)^p = (b^n)^p$$

$$\Rightarrow a^{mp} = b^{np}$$

$$\Rightarrow a^{mp} = b^{np}$$

$$\Rightarrow \sqrt[np]{a^{mp}} = b$$

$$\Rightarrow \sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Como queríamos demonstrar.

Exemplo: $\sqrt[2]{2^3} = \sqrt[2\cdot 6]{2^{3\cdot 6}} = \sqrt[12]{2^{18}}$.

2ª Propriedade: $\boldsymbol{\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}}$**.**

Demonstração. Tomemos:

$$k = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

Elevando ambos os membros da igualdade a n, *temos*:

$$k^n = \left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^n$$

$$\Rightarrow k^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \cdot \left(\sqrt[n]{b}\right)^n$$

$$\Rightarrow k^n = ab$$

$$\Rightarrow k = \sqrt[n]{ab}$$

Assim, conclui-se a demonstração.

Exemplo: $\sqrt[3]{2 \cdot 7} = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{7}$.

3ª Propriedade: $\boldsymbol{\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, b \neq 0.}$

Demonstração. Observe que:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \sqrt[n]{ab^{-1}} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b^{-1}} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{b}} = \sqrt[n]{a} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}. \blacksquare$$

Exemplo: $\sqrt[4]{\frac{625}{10000}} = \frac{\sqrt[4]{625}}{\sqrt[4]{10000}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$.

4ª Propriedade: $\boldsymbol{\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}.}$

Demonstração. Façamos:

$$k = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$$

$$\Rightarrow k^n = \left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}\right)^n = \sqrt[m]{a}$$

$$\Rightarrow (k^n)^m = \left(\sqrt[m]{a}\right)^m$$

$$\Rightarrow k^{nm} = a$$

$$\Rightarrow k = \sqrt[nm]{a}$$

Como queríamos demonstrar.

Exemplo: $\sqrt[3]{\sqrt[5]{5}} = \sqrt[3 \cdot 5]{5} = \sqrt[15]{5}$.

5ª Propriedade: $\boldsymbol{\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}.}$

Demonstração. Para provarmos a propriedade, iremos considerar n fixo, com $m \geq 0$, e aplicaremos o Princípio da Indução Finita em m.

1. Inicialmente, verifiquemos a validade da propriedade para $m = 0$;

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^0 = 1 = \sqrt[n]{1} = \sqrt[n]{a^0}.$$

2. Após a constatação da veracidade do caso base, suponhamos, por hipótese de indução, a propriedade válida para algum $m > 0$.

3. Provemos, então, a validade da propriedade para $m + 1$. Assim, temos:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^{m+1} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m \cdot \left(\sqrt[n]{a}\right) = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a^m \cdot a} = \sqrt[n]{a^{m+1}}$$

Logo, a propriedade é válida para todo $m \geq 0$.

Consideremos agora que, se $m < 0$, façamos $-m = p > 0$, então:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \frac{1}{\left(\sqrt[n]{a}\right)^p} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^p}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^{-m}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a^m}}} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Desse modo, demonstra-se a validade da propriedade para todo $m \in \mathbb{Z}$.

Exemplo: $\left(\sqrt[5]{3}\right)^2 = \sqrt[5]{3^2}$.

Exercícios resolvidos:

1. Efetue as operações indicadas com as raízes:

a) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{25}$

b) $\sqrt[4]{80} : \sqrt[4]{5}$

c) $\sqrt[3]{\frac{2}{5}} : \sqrt[4]{\frac{1}{2}}$

d) $\left(2\sqrt{27} - \sqrt{48} + 3\sqrt{75}\right) \cdot \sqrt{3}$

Resolução:

a) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{25} = \sqrt[3]{5 \cdot 25} = \sqrt[3]{125} = 5$

b) $\sqrt[4]{80} : \sqrt[4]{5} = \sqrt[4]{\frac{80}{5}} = \sqrt[4]{16} = 2$

c) $\sqrt[3]{\frac{2}{5}} : \sqrt[4]{\frac{1}{2}} = \sqrt[3.4]{\left(\frac{2}{5}\right)^4} : \sqrt[4.3]{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \sqrt[12]{\frac{16}{625}} : \sqrt[12]{\frac{1}{8}} = \sqrt[12]{\frac{16}{625}.8} = \sqrt[12]{\frac{128}{625}}$

d) $\left(2\sqrt{27} - \sqrt{48} + 3\sqrt{75}\right) \cdot \sqrt{3} = \quad 2\sqrt{27} \cdot \sqrt{3} - \sqrt{48} \cdot \sqrt{3} + 3\sqrt{75} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{81} - \sqrt{144} + 3\sqrt{225} = 2 \cdot 9 - 12 + 3 \cdot 15 = 18 - 12 + 45 = 51$

1.1.4. Potência de expoente racional.

Definição:

Dados $a \in \mathbb{R}_+^*$, e $\frac{p}{q}$ $\in \mathrm{Q}$ $(p \in \mathbb{Z}\ e\ q \in \mathbb{N}^*)$ define-se potência de base a e expoente $\frac{p}{q}$ pela relação:

Se $a = 0$ e $\frac{p}{q} > 0$, então, consideramos $0^{\frac{p}{q}} = 0$.

Exemplos:

a) $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$;

b) $3^{\frac{-3}{4}} = \sqrt[4]{3^{-3}} = \sqrt[4]{\frac{1}{3^3}} = \sqrt[4]{\frac{1}{27}}$.

Propriedades:

Se $a \in \mathbb{R}_+^*$, $b \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ e $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, então são válidas as seguintes propriedades:

1ª Propriedade: $\boldsymbol{a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}}$

Demonstração.

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} \cdot \sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq} \cdot a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}} = a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$$

Como queríamos demonstrar.

Exemplo: $10^{\frac{2}{3}} \cdot 10^{\frac{14}{6}} = 10^{\frac{2}{3}+\frac{14}{6}} = 10^{\frac{4+14}{6}} = 10^{\frac{18}{6}} = 10^3 = 1000.$

2ª Propriedade: $\boldsymbol{\frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{q}}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}}$

Deixaremos a demonstração dessa propriedade a cargo do leitor, como forma de exercício.

Exemplo: $\frac{3^{\frac{8}{9}}}{3^{\frac{4}{9}}} = 3^{\frac{8}{9}-\frac{4}{9}} = 3^{\frac{4}{9}} = \sqrt[9]{3^4}$

3ª Propriedade: $\boldsymbol{(a \cdot b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}}}$

Deixaremos a demonstração dessa propriedade a cargo do leitor, como forma de exercício.

Exemplo: $(3\sqrt{3})^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{2}{3}} \cdot \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}} = 3^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}} = 3^{\frac{3}{3}} = 3.$

4ª Propriedade: $\boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}}$

Demonstração. A partir de propriedades já demonstradas, temos que:

$$\boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}}} = \sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^m} = \sqrt[n]{\frac{a^m}{b^m}} = \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{b^m}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}$$

Como queríamos demonstrar.

Exemplo: $\left(\frac{2\sqrt{2}}{5\sqrt{5}}\right)^{\frac{4}{3}} = \frac{(2\sqrt{2})^{\frac{4}{3}}}{(5\sqrt{5})^{\frac{4}{3}}} = \frac{2^{\frac{4}{3}}.\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{4}{3}}}{5^{\frac{4}{3}}.\left(5^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{4}{3}}}.$

5ª Propriedade: $\boldsymbol{\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}}}.$

Deixaremos a demonstração dessa propriedade a cargo do leitor, como forma de exercício.

Exemplo: $\frac{2^{\frac{4}{3}}\cdot\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{4}{3}}}{5^{\frac{4}{3}}\cdot\left(5^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{4}{3}}} = \frac{2^{\frac{4}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}}}{5^{\frac{4}{3}}\cdot 5^{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}}} = \frac{2^{\frac{4}{3}}\cdot 2^{\frac{2}{3}}}{5^{\frac{4}{3}}\cdot 5^{\frac{2}{3}}} = \frac{2^{\frac{4}{3}+\frac{2}{3}}}{5^{\frac{4}{3}+\frac{2}{3}}} = \frac{2^{\frac{6}{3}}}{5^{\frac{6}{3}}} = \frac{2^2}{5^2} = \frac{4}{25}.$

1.1.5. Potência de expoente irracional.

Podemos encontrar, baseado nas potências com expoentes racionais, um único número real positivo a^r, com $a > 0$ e r pertencente ao conjunto dos números irracionais. Tomemos, por exemplo, a potência $2^{\sqrt{2}}$. Identificando os racionais aproximado por falta (R1) e por excesso (R2) de $\sqrt{2}$, podemos obter equivalentemente os valores por falta (V1) ou por excesso (V2) para a potência $2^{\sqrt{2}}$.

R1	R2	V1	V2
1	2	2^1	2^2
1,4	1,5	$2^{1,4}$	$2^{1,5}$
1,41	1,42	$2^{1,41}$	$2^{1,42}$
1,414	1,415	$2^{1,414}$	$2^{1,415}$

1,4142	1,41423	$2^{1,4142}$	$2^{1,4142}$
↳ $< \sqrt{2} <$	↲	↳ $< 2^{\sqrt{2}} <$	↲

Definição:

Seja $a \in \mathbb{R}$, com $a > 0$ e r um número irracional, consideremos os conjuntos $R1 = \{m \in \mathbb{Q} \,|m < r\}$ (dos racionais que se aproximam por falta de r) e $R2 = \{n \in \mathbb{Q} \,|\, r < n\}$ (dos racionais que se aproximam por excesso de r).

Notemos que:

1. Todo elemento de $R1$ é menor qualquer elemento de $R2$.
2. Existem dois racionais m e n tais que $\mathrm{m} < r < n$ e a diferença $(n - r)$ é menor que qualquer número positivo e arbitrário.

Em função dos conjuntos $R1$ e $R2$, temos como imagem os conjuntos $V1 = \{a^m |\, m \in R1\}$ e $V2 = \{a^n |\, n \in R2\}$.

Se $a > 0$, então, temos que:

1. Todo racional $m \in V1$ é menor que qualquer racional $n \in V2$;
2. Há dois números a^m e a^n, tais que a sua diferença $(a^m - a^n)$ é menor que qualquer número positivo e arbitrário.

Assim sendo, a^m e a^n são, respectivamente, aproximações por falta e excesso de a^r, e que $V1$ e $V2$ tendem para a^r.

Se $0 < a < 1$, então, $V1$ e $V2$, de forma análoga, tendem para a^r.

1.1.6. Potência de expoente real.

Como já estão definidas todas as potências de a^b, com $a \in \mathbb{R}_+^*$ e expoente b (racional ou irracional), está definida a potências de a^b com $b \in \mathbb{Q}$.

Observamos que:

1. Toda potência de base real positiva e de expoente real, é um número real positivo;

$$a > 0 \Rightarrow a^b > 0, \ \forall\, b \in \mathbb{R}.$$

2. Para as potências de expoente real, valem as propriedades:

1ª Propriedade: $\boldsymbol{a^p \cdot a^q = a^{p+q}}$, com ($a \in \mathbb{R}_+^*$, $p \in \mathbb{R}$ e $q \in \mathbb{R}$);

2ª Propriedade: $\frac{a^q}{a^p} = \boldsymbol{a^{q-p}}$**,** com $(a \in \mathbb{R}_+^*,\ p \in \mathbb{R}$ e $q \in \mathbb{R})$;

3ª Propriedade: $(\boldsymbol{a \cdot b})^{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{a^p \cdot b^p}$, com $(a \in \mathbb{R}_+^*,\ p \in \mathbb{R}_+^*$ e $q \in \mathbb{R})$;

4ª Propriedade: $\left(\frac{a}{b}\right)^{\boldsymbol{p}} = \frac{\boldsymbol{a^p}}{\boldsymbol{b^p}}$**,** com $(a \in \mathbb{R}_+^*,\ p \in \mathbb{R}_+^*$ e $q \in \mathbb{R})$;

5ª Propriedade: $(\boldsymbol{a^p})^{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{a^{p \cdot q}}$**,** com $(a \in \mathbb{R}_+^*,\ p \in \mathbb{R}$ e $q \in \mathbb{R})$**.**

Exercícios resolvidos:

1. Determine o valor de:

a) $\left(\frac{1}{1024}\right)^{-\frac{2}{5}}$ b) $\left(3^{\frac{1}{3}}.3^{\frac{2}{5}}\right):3^{\frac{41}{15}}$

Resolução:

a) $\left(\frac{1}{1024}\right)^{-\frac{2}{5}} = \left(\frac{1}{2^{10}}\right)^{-\frac{2}{5}} = (2^{10})^{\frac{2}{5}} = 2^{10\cdot\frac{2}{5}} = 2^4 = 16$

b) $\left(3^{\frac{1}{3}}.3^{\frac{2}{5}}\right):3^{\frac{41}{15}} = 3^{\frac{1}{3}+\frac{2}{5}}:3^{\frac{41}{15}} = 3^{\frac{11}{15}}:\ 3^{\frac{41}{15}} = 3^{\frac{11}{15}-\frac{41}{15}} = 3^{-\frac{30}{15}} = 3^{-2} = \frac{1}{9}$

1.2. Função Exponencial.

Em várias situações práticas, como nos cálculos dos juros de uma aplicação ou financiamento bancário, do crescimento de uma população, da depreciação de um bem, da meia-vida de um isótopo radioativo, dentre outros, aplicam-se o conceito e as propriedades das funções exponenciais.

Figura 1- Representação do crescimento dos juros em uma aplicação financeira.

Fonte: Imagem do estoque do MS Office.

Dentre as inúmeras aplicações práticas, com a rapidez da evolução tecnológica, sobretudo na era das tecnologias digitais, testemunhamos o que alguns chamam de tecnologias exponenciais, dada a sua curva de desenvolvimento.

Para Medeiros Neto (2017, p. 23),

> "uma tecnologia exponencial é aquela que está rapidamente acelerando e modelando pequenas e grandes indústrias e, ainda, influenciando muitos aspectos de nossas vidas. Dentro das tecnologias exponenciais incluem-se a Inteligência Artificial, a Realidade Aumentada (RA) e a Realidade Virtual (RV); a Ciência de Dados, a Biologia Digital e a Biotecnologia e, ainda, a Medicina; a Nanotecnologia e a Fabricação Digital, as Redes e Sistemas Computacionais, a Robótica e a Robótica de Carros."

Consideremos, por exemplo, uma situação na qual se observa em laboratório que uma colônia com quantidade estimada de 100 bactérias dobra a cada minuto de observação. Quantas bactérias terá a colônia após 2 minutos? E após 5 minutos?

Podemos verificar facilmente (observe a tabela abaixo) que o crescimento da quantidade de bactérias ocorre de forma exponencial. Para compreender melhor situações como esta, aprofundaremos o estudo das funções exponenciais.

Tabela 1 - Crescimento do número de bactérias em função do tempo em minutos.

Nº de bactérias	Tempo de observação (em minutos)
$100 = 100 \times 2^0$	0
$200 = 100 \times 2^1$	1
$400 = 100 \times 2^2$	2
$800 = 100 \times 2^3$	3
$1600 = 100 \times 2^4$	4

Fonte: Autoria própria.

1.2.1. Definição de Função Exponencial.

Definição:

Seja $a \in \mathbb{R}_+^*$, com $a \neq 1$ e $x \in \mathbb{R}$, denomina-se **função exponencial** toda função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ que associa a cada x real o número a^x.

Assim, temos:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$$

$$x \to a^x$$

Exemplos de funções exponenciais:

a) $f(x) = 3^x$ b) $g(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x$ c) $h(x) = \left(\sqrt{7}\right)^x$

Observações:

Pela definição dada anteriormente, temos que em uma função exponencial, $f(x) = a^x$, $a > 0$ e $a \neq 1$. Mas afinal, porque a base deve ser positiva e diferente de 1?

Se admitíssemos que $a < 0$, então $f(x) = a^x$ não estaria definida para todo $x \in \mathbb{R}$.

Por exemplo, supondo $a = -5$ e $x = \frac{1}{2}$, teríamos:

$f\left(\frac{1}{2}\right) = (-5)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-5}$ (que não está definida em $\mathbb{R}$).

Por outro lado, admitindo $a = 1$, então $f(x) = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

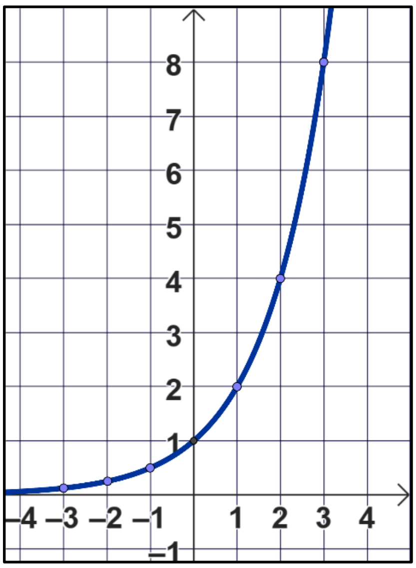
1.2.2. Gráfico da Função Exponencial.

Esboçaremos a seguir gráficos de funções exponenciais no plano cartesiano e examinaremos o comportamento dessas funções a partir desses gráficos.

1° Caso: Tomemos uma função $f(x) = a^x$, com $a > 1$.

Por exemplo, seja a função $f(x) = 2^x$, logo, temos:

x	$f(x)$
-3	0,125
-2	0,25
-1	0,5
0	1
1	2
2	4
3	8



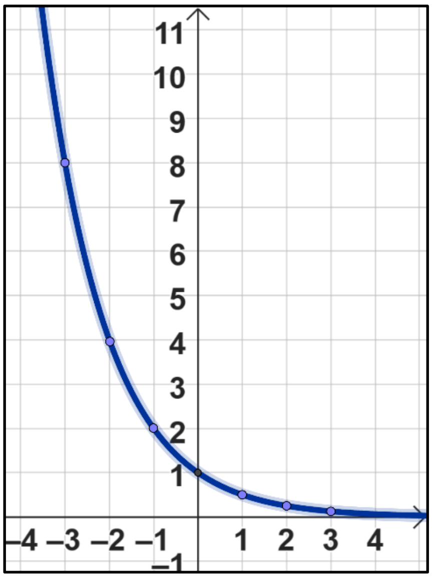
Observe que, quanto **maior** o valor do expoente x, **maior** o valor de $f(x)$, ou seja, se $a > 1$, a função $f(x) = a^x$ é **crescente**, pois $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$, $\forall\ x_2$ e x_1 reais.

Vale lembrar que $D(f) = \mathbb{R}, Im(f) = \mathbb{R}_+^*$ e que f é crescente em todo o seu domínio.

2° Caso: Consideremos a função $g(x) = a^x$, com $0 < a < 1$.

Esboçamos, por exemplo, o gráfico da função $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, logo, temos:

x	$g(x)$
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	0,5
2	0,25
3	0,125



Nesse caso, quanto **maior** o valor do expoente x, **menor** o valor de $g(x)$, ou seja, se $0 < a < 1$, a função $g(x) = a^x$ é **decrescente**, pois $x_2 > x_1 \Rightarrow g(x_2) < g(x_1)$, $\forall\ x_2$ e x_1 reais.

Ressalta-se que $D(g) = \mathbb{R}$, $Im(g) = \mathbb{R}_+^*$ e g é decrescente em todo o seu domínio.

1.2.3. Propriedades da Função Exponencial.

1ª Propriedade. Dada a função exponencial $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = a^x$, temos:

$x = 0 \Rightarrow a^0 = 1 \Rightarrow f(0) = 1$, $\forall\ a \in \mathbb{R}_+^*$, onde $a \neq 1$.

Ou seja, o par ordenado (0,1) pertence a f, $\forall a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$. Portanto, como pudemos observar nos gráficos anteriores, em toda função exponencial, o gráfico intersecta o eixo y ponto de ordenada 1.

2ª Propriedade. A função $f(x) = a^x$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ é:

a) Crescente se $a > 1$, ou seja, $f(x_2) = a^{x_2} > f(x_1) = a^{x_1} \Leftrightarrow x_2 > x_1$;

b) Decrescente se $0 < a < 1$, ou seja, $f(x_2) = a^{x_2} < f(x_1) = a^{x_1} \Leftrightarrow x_2 > x_1$.

3ª Propriedade. A função $f(x) = a^x$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, é injetiva. Verificamos facilmente esta propriedade, observando que, de acordo com a propriedade anterior:

$f(x_2) = f(x_1) \Leftrightarrow x_2 = x_1$.

1.2.4. Equação Exponencial.

Define-se como Equação Exponencial, toda equação que apresenta a incógnita no expoente de pelo menos uma base real e diferente de 1. Desse modo, são exemplos de equações exponenciais:

A) $3^x = 729$;

B) $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x+1} = 0{,}008$;

C) $3^{4x} + 9^x = 27$;

D) $5^{-x+1} - \left(\frac{1}{25}\right)^{2x+4} = 0$.

Há basicamente dois métodos utilizados para resolver equações exponenciais.

A seguir veremos o primeiro método, enquanto o segundo iremos abordar após o estudo de logaritmos.

Aplicaremos o método da redução a uma base comum, que consiste em reduzir ambos os membros da igualdade a uma potência de mesma base.

Como uma função exponencial, $f(x) = a^x$, é injetiva, com $a > 0$ e $a \neq 1$, vale a seguinte propriedade:

$$a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

Vamos então, resolver algumas equações.

Exemplos:

A) $3^x = 81$

Resolução:

$$3^x = 81 \Leftrightarrow 3^x = 3^4 \Rightarrow x = 4$$

Portanto, $S = \{4\}$.

B) $\frac{1}{32} = 8^x$

Resolução:

$$8^x = \frac{1}{32} \Leftrightarrow (2^3)^x = \frac{1}{2^5} \Leftrightarrow 2^{3x} = 2^{-5} \Rightarrow 3x = -5 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{3}$$

Portanto, $S = \left\{-\frac{5}{3}\right\}$.

C) $8^{2x+1} = \sqrt[3]{4^{x+1}}$

Resolução:

$$8^{2x+1} = \sqrt[3]{4^{x+1}}$$

$$\Leftrightarrow (2^3)^{2x+1} = ((2^2)^{x+1})^{\frac{1}{3}}$$

$$\Leftrightarrow 2^{6x+3} = 2^{\frac{2x+2}{3}}$$

$$\Rightarrow 6x + 3 = \frac{2x+2}{3}$$

$$\Leftrightarrow (6x+3).3 = \frac{2x+2}{3}.3$$

$$\Leftrightarrow 18x + 9 = 2x + 2$$

$$\Leftrightarrow 18 - 2x = 2 - 9$$

$$\Leftrightarrow 16x = -7$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{7}{16}.$$

Portanto, $S = \left\{-\frac{7}{16}\right\}$.

D) $5^{2x+4}.25^{4x+5} = 125^{2x+10}$

Resolução:

$$5^{2x+4}.25^{4x+5} = 125^{2x+10}$$

$$\Leftrightarrow 5^{2x+4}.(5^2)^{4x+5} = (5^3)^{2x+10}$$

$$\Leftrightarrow 5^{2x+4}.5^{8x+10} = 5^{6x+30}$$

$$\Leftrightarrow 5^{2x+8x+4+10} = 5^{6x+30}$$

$$\Leftrightarrow 5^{10x+14} = 5^{6x+30}$$

$$\Rightarrow 10x + 14 = 6x + 30$$

$$\Leftrightarrow 10x - 6x = 30 - 14$$

$$\Leftrightarrow 4x = 16$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{16}{4} = 4$$

Portanto, $S = \{4\}$.

1.2.5. Inequação Exponencial.

Define-se como Inequação Exponencial, toda inequação que apresenta a incógnita no expoente de pelo menos uma base real, positiva e diferente de 1. Desse modo, são exemplos de inequações exponenciais:

A) $3^x < 2$;

B) $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x+1} > 1$;

C) $3^{4x} \geq 27$;

D) $5^{x+1}.\left(\frac{1}{25}\right)^{3x} \leq 0$.

Do mesmo modo que nas equações exponenciais, há dois métodos utilizados para resolver inequações exponenciais.

A seguir veremos o primeiro método, enquanto o segundo iremos abordar após o estudo de logaritmos.

Este método será aplicado quando ambos os membros da desigualdade puderem ser representados como potências de uma mesma base a, com $a > 0$ e $a \neq 1$.

Como uma função exponencial, $f(x) = a^x$ é crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$, temos que:

para $a > 1$; $a^{x_1} > a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2, \forall\, x_1 \; e \; x_2 \in \mathbb{R}$;

para $0 < a < 1;\ a^{x_1} > a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2, \forall\, x_1\ e\ x_2\ \in \mathbb{R}$.

Exemplos:

A) $3^x > 729$

Resolução:

$$3^x > 729 \Leftrightarrow 3^x >\ 3^6$$

Como a base é maior que 1, temos que $x > 7$.

$S\ =\ \{x \in \mathbb{R}|\ x > 7\}$.

B) $\left(\frac{2}{5}\right)^{2x} \leq \frac{625}{16}$

Resolução:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{2x} \leq \frac{625}{16} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{2x} \leq \left(\frac{2}{5}\right)^{-4}$$

Como a base é menor que 1, temos que $2x\ \geq\ -4\ \Leftrightarrow\ x\ \geq -2$.

$S\ =\ \{x \in \mathbb{R}|\ x\ \geq -2\}$.

C) $(2^x)^{3x+8} < \frac{1}{32}$

Resolução:

$$(2^x)^{3x+8} < \frac{1}{32} \Leftrightarrow\ 2^{3x^2+8x} < 2^{-5}$$

Como a base é maior que 1, temos que: $3x^2 + 8x\ < -5\ \Leftrightarrow 3x^2 + 8x + 5 < 0$.

Tomando a função $f(x) = 3x^2 + 8x + 5$:

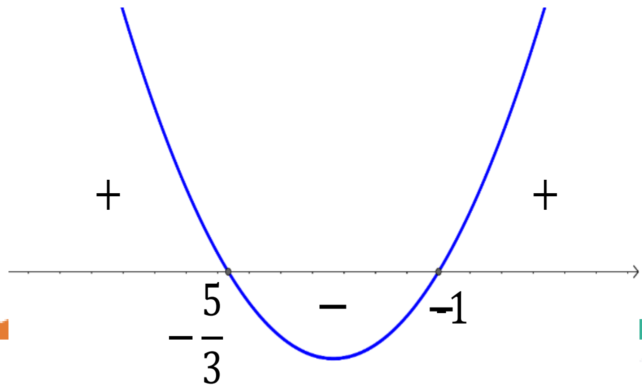
I. Encontremos as suas raízes;

$3x^2 + 8x + 5$ =0

$x\ = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4.3.5}}{2.3} = \frac{-8 \pm \sqrt{4}}{6} = \frac{-8 \pm 2}{6}$.

Logo $x'\ = -1$ e $x''\ = -\frac{5}{3}$.

II. Em seguida façamos o estudo do sinal da função:



Logo conclui-se que $-\frac{5}{3} < x < -1$.

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| -\frac{5}{3} < x < -1\right\}$.

Exemplo:

Um automóvel foi comprado por R$ 160.000,00 e sabe-se que ele conta com uma provável desvalorização de 5% ao ano, ou seja, o seu valor de mercado em t anos é dado pela função $V(t) = 160000.(0{,}95)^t$. Em quanto tempo o valor de mercado desse automóvel será menor que R$ 137.180,00?

Resolução:

Do enunciado, devemos encontrar t de modo que:

$$V(t) < 137.180 \Leftrightarrow 160000.(0{,}95)^t < 137.180$$

$$\Rightarrow 160000.(0{,}95)^t < 137.180$$

$$\Leftrightarrow (0{,}95)^t < \frac{137.180}{160.000} \Leftrightarrow (0{,}95)^t < 0{,}857375$$

$$\Leftrightarrow (0{,}95)^t < (0{,}95)^3$$

Como a base é menor que 1, temos que $t > 3$. Portanto, após 3 anos, o valor do automóvel será inferior a R$ 137.180,00.

Referências.

BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI JR. José Ruy; SOUSA, Paulo Roberto Câmara de. Matemática Completa 1º Ano. 4. ed. São Paulo: FTD, 2016.

DANTE, Luiz Roberto. Matemática – Contextos e Aplicações, Volume 1. 2. ed. São Paulo: Ática, 2013.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MURAKAMI, Carlos. Fundamentos de matemática elementar, 2: logaritmos: 20. ed. São Paulo: Atual, 2013.

LIMA, Elon Lages. Números e Funções. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

MEDEIROS NETO, Benedito. O Cidadão Contemporâneo Frente às Tecnologias da Informação e Comunicação. 2. ed. Brasília: FAC-UnB, 2017.

PAIVA, Manoel Rodrigues. Matemática: Paiva, 1º ano. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2010.

SILVA, Claúdio Xavier da; BARRETO FILHO, Benigno. Matemática Aula por Aula, 1ª Série. 2. ed. São Paulo: FTD, 2005.

SMOLE, Kátia Cristina Stocco; DINIZ, Maria Ignez de Souza Vieira. Matemática - Ensino Médio - 1º Ano. 5. ed. São Paulo: Saraiva, 2005.

SOUZA, Joamir; GARCIA, Jacqueline. #Contato matemática, 1º ano. 1. ed. São Paulo: FTD, 2016.

http://poca.ufscar.br/

ar.br/