Funções Exponenciais e Logarítmicas

1. Potenciação e Função Exponencial

1.1. Potenciação: revisitando o conteúdo e recompondo saberes.

Professores:

Anízio Noronha Menezes Neto
Erica Boizan Batista
Valdinês Leite de Sousa Júnior

TÓPICOS

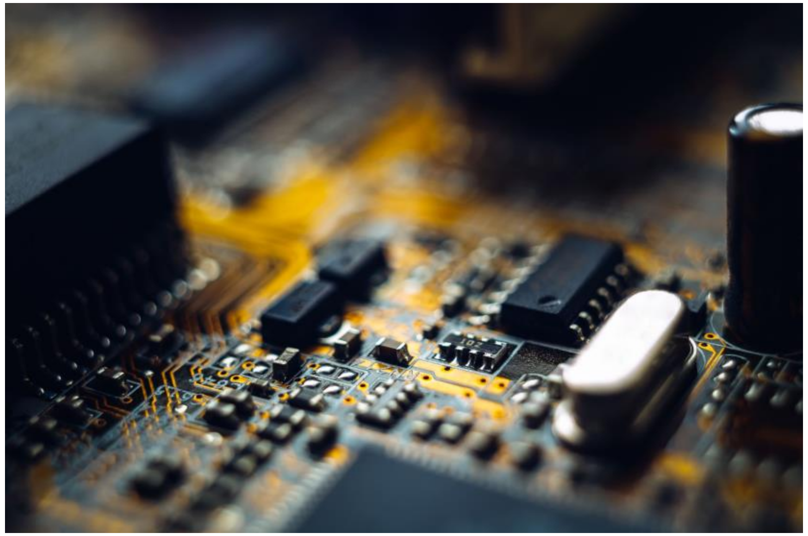
- Potência de expoente natural.
- Potência de expoente inteiro negativo.
- Raiz enésima aritmética.
- Potência de expoente racional.
- Potência de expoente irracional.
- Potência de expoente real.

POTENCIAÇÃO

Em 1965, Gordon Moore fez uma previsão que ficou conhecida como a Lei de Moore, que afirma, em determinada área, que o número de transistores de um microprocessador dobraria a cada dois anos. O avanço das tecnologias da informática têm comprovado essa afirmação.

O conhecimento matemático, nesse caso sobretudo das Funções Exponenciais, permite compreender e projetar a evolução de dispositivos tecnológicos, e diversas outras situações.

Figura 1. Microprocessadores.



Fonte: Imagem do estoque do MS Office.

Potência de expoente natural

Definição:

Sejam $a \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$, e $p \in \mathbb{N}$, denomina-se potência de base a e expoente p, ao número a^p, definido por:

$$\begin{cases} a^0 = 1, \\ a^p = a \cdot a^{p-1}, \forall\, p \geq 1. \end{cases}$$

Assim, temos, em decorrência da definição acima que:

$$a^1 = a \cdot a^0 = a \cdot 1 = a$$
$$a^2 = a \cdot a^1 = a \cdot a$$
$$a^3 = a \cdot a^2 = a \cdot a \cdot a$$
$$\vdots$$
$$a^p = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{\text{p vezes}}$$

Assim sendo, para todo $p \in \mathbb{N}$, com $p \geq 2$, temos que a^p é igual a um produto de p fatores iguais a a.

Exemplos:

a) $(-15)^0 = 1$

b) $3^1 = 3$

c) $5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$

d) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$

Propriedades:

Se $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$, com $p \in \mathbb{N}$ e $q \in \mathbb{N}$, sendo $a \neq 0$ ou $q \neq 0$, então são válidas as propriedades a seguir:

1ª Propriedade: $\boldsymbol{a^p \cdot a^q = a^{p+q}}$.

Exemplos:

a) $2^2 \cdot 2^5 = 2^{2+5} = 2^7 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 128$

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^{3+2} = \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{32}{243}$

2ª Propriedade: $\boldsymbol{\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}}$, com $a \neq 0$ e $p \geq q$.

Exemplos:

a) $\frac{5^7}{5^2} = 5^{7-2} = 5^5 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 3125$

b) $\frac{(-2)^{10}}{(-2)^8} = (-2)^{10-8} = (-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = 4$

3ª Propriedade: $(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{p}} \cdot \boldsymbol{b}^{\boldsymbol{p}}$, com $b \neq 0$ ou $p \neq 0$.

Exemplos:

a) $(3\sqrt{5})^2 = 3^2 \cdot \sqrt{5}^2 = 9 \cdot 5 = 45$

b) $[(-2) \cdot 0{,}5]^3 = (-2)^3 \cdot 0{,}5^3 = -8 \cdot 0{,}125 = -1$

4ª Propriedade: $\left(\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}\right)^{\boldsymbol{p}} = \frac{\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{p}}}{\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{p}}}$, com $b \neq 0$.

Exemplos:

a) $\left(\frac{3}{7}\right)^2 = \frac{3^2}{7^2} = \frac{9}{49}$

b) $\left(\frac{-4}{5}\right)^3 = \frac{(-4)^3}{5^3} = \frac{-64}{125} = -\frac{64}{125}$

5ª Propriedade: $(\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{p}})^{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{q}}$.

Exemplos:

a) $(2^3)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6 = 64$

b) $\left((-10)^2\right)^5 = (-10)^{10} = 10.000.000.000$

Exercício resolvido:

Considerando $a.b \neq 0$, simplifique as expressões a seguir.

a) $(a^2 \cdot b^5)^2 \cdot (a^3 \cdot b^7)^3$

b) $[(a^3 \cdot b^4)^2]^3$

c) $\left(\frac{\boldsymbol{a^3 \cdot b^4}}{\boldsymbol{a^2 \cdot b^2}}\right)^{\boldsymbol{3}}$

d) $\frac{(a^2 \cdot b^5)^3 \cdot (a^{12} \cdot b^{10})}{a^{14} \cdot b^8}$

Resolução:

a) $(a^2 \cdot b^5)^2 \cdot (a^3 \cdot b^7)^3 = (a^{2\cdot 2} \cdot b^{5\cdot 2}) \cdot (a^{3\cdot 3} \cdot b^{7\cdot 3}) = a^4 \cdot b^{10} \cdot a^9 \cdot b^{21} = a^{4+9} \cdot b^{10+21} = a^{13} \cdot b^{31}$

b) $[(a^3 \cdot b^4)^2]^3 = (a^3 \cdot b^4)^{2.3} = (a^3 \cdot b^4)^6 = a^{3.6} \cdot b^{4.6} = a^{18} \cdot b^{24}$

c) $\left(\frac{a^3 b^4}{a^2 b^2}\right)^3 = (a^{3-2} \cdot b^{4-2})^3 = (a \cdot b^2)^3 = a^{1\cdot 3} \cdot b^{2\cdot 3} = a^3 \cdot b^6$

d) $\frac{(a^2 b^5)^3 \cdot (a^{12} b^{10})}{a^{14} b^8} = \frac{(a^{2.3} b^{5.3}) \cdot (a^{12} b^{10})}{a^{14} b^8} = \frac{a^6 b^{15} a^{12} b^{10}}{a^{14} b^8} = \frac{a^{6+12} b^{15+10}}{a^{14} b^8} = \frac{a^{18} b^{25}}{a^{14} b^8} = a^{18-14} b^{25-8} = a^4 b^{17}$

Observação:

Pela definição da potência a^p, como $a \in \mathbb{R}$, há as seguintes possibilidades: $a > 0$, $a = 0$, ou, $a < 0$.

Portanto, vamos considerar a seguir o que ocorre em cada caso:

1º Caso: $a > 0$**.**
Se $a > 0$, então $a^p > 0, \forall\, p \in \mathbb{N}$.
Ou seja, toda potência de base real positiva e expoente natural é um número real maior que zero.

2º Caso: $a = 0$**.**
Se $a = 0$, então $0^p = 0, \forall\, p \geq 1,\ p \in \mathbb{N}$.
Observe que se $p = 0$, teremos 0^0, o que é uma indeterminação. E, de modo análogo, se p for negativo.

3º Caso: $a < 0$**.**
Se $a < 0$, então $\begin{cases} a^{2p} > 0, \forall\, p \in \mathbb{N} \\ a^{2p+1} < 0, \forall\, p \in \mathbb{N} \end{cases}$.

Ou seja, caso a base seja um real negativo, a potência será um real positivo se o expoente for par, e será um real negativo se o expoente for ímpar.

Potência de expoente inteiro negativo

Definição:

Dados $a \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$, e $n \in \mathbb{N}$, define-se a potência de base a e expoente inteiro negativo $-n$ como o inverso da potência a^n. Ou seja, é válida a relação:

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$$

Exemplos:

a) $5^{-1} = \frac{1}{5}$

b) $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

c) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{4}{9}} = \frac{9}{4}$

Propriedades:

Dada a definição anterior, de potência com expoente inteiro negativo, é importante observar que, se $a = 0$ e $n \in \mathbb{N}$, não se define 0^{-n}.

Se $a \in \mathbb{R}^*$ e $b \in \mathbb{R}^*$, com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}$, então são válidas as propriedades a seguir:

1ª Propriedade: $\boldsymbol{a^p \cdot a^q = a^{p+q}}$**;**

Exemplo:

$$3^{-1} \cdot 3^{-2} = 3^{-1+(-2)} = 3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$$

2ª Propriedade: $\boldsymbol{\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}}$ **;**

Exemplo:

$$\frac{2^3}{2^{-2}} = 2^{3-(-2)} = 2^{3+2} = 2^5 = 32$$

3ª Propriedade: $(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{p}} \cdot \boldsymbol{b}^{\boldsymbol{p}};$

Exemplo:

$$(3\sqrt{5})^{-2} = 3^{-2} \cdot (\sqrt{5})^{-2} = \frac{1}{3^2} \cdot \frac{1}{(\sqrt{5})^2} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{45}$$

4ª Propriedade: $\left(\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}\right)^{\boldsymbol{p}} = \frac{\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{p}}}{\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{p}}};$

Exemplo:

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{-2} = \frac{4^{-2}}{5^{-2}} = \frac{1}{4^2} : \frac{1}{5^2} = \frac{1}{16} : \frac{1}{25} = \frac{1}{16} \cdot \frac{25}{1} = \frac{25}{16}$$

5ª Propriedade: $(\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{p}})^{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{q}}$**.**

Exemplo:

$$(10^2)^{-2} = 10^{2\cdot(-2)} = 10^{-4} = \frac{1}{10^4} = \frac{1}{10000}$$

Raiz enésima aritmética

Definição:

Consideremos um número real $a \geq 0$ e um natural n, com $n \geq 1$, existe um único real positivo ou nulo b tal que $b^n = a$.
Chamaremos o número b de raiz enésima aritmética de a, ou simplesmente, de raiz enésima de a, e representaremos por:

$$\boxed{b = \sqrt[n]{a}}$$

Em $b = \sqrt[n]{a}$, a é chamado de radicando, n de índice, b de raiz e o símbolo $\sqrt{}$ de radical.

Exemplos:

a) $\sqrt[3]{1000} = 10$, pois $10^3 = 1000$;

b) $\sqrt{25} = 5$, pois $5^2 = 25$.

Consequências da definição

1. Decorre que $(\sqrt[n]{a})^n = a$, para todo $a \geq 0$.

2. Temos, por definição, que $\sqrt[n]{a} = b$. Sendo assim, vale ressaltar que a raiz quadrada de um natural p será dada por $\sqrt{p} = q$, o que difere de $\sqrt{p} = \pm q$. Desse modo, por exemplo, temos que:

I - $\sqrt{9} = 3$ → Expressa de forma correta a raiz quadrada de 9.

II - $\sqrt{9} = \pm 3$ → Não expressa a raiz quadrada de 9.

Entretanto, são verdadeiras as sentenças a seguir, nas quais o radical não interfere no sinal que antecede à raiz:

a) $-\sqrt{25} = -5$;
b) $-\sqrt[3]{27} = -3$;
c) $\pm\sqrt{16} = \pm 4$.

3. Notemos que no cálculo da raiz quadrada de um quadrado perfeito ocorre que:

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

Verdadeiramente, $\sqrt{a^2}$ é, por definição, o número real positivo ou nulo que elevado ao quadrado resulta em a^2, e como $a^2 = |a|^2$ e $|a| \geq 0$, segue que $\sqrt{a^2} = |a|$.
Por exemplo, temos que:

I - $\sqrt{(-11)^2} = |-11| = 11$ → Expressa de forma correta a raiz quadrada de $(-11)^2$.

II - $\sqrt{(-11)^2} = -11$. → Não expressa a raiz quadrada de $(-11)^2$.

Propriedades:

Se $a \in \mathbb{R}_+$, $b \in \mathbb{R}_+$, com $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$ e $p \in \mathbb{N}^*$, então são válidas as seguintes propriedades:

1ª Propriedade: $\sqrt[n]{\boldsymbol{a^m}} = \sqrt[np]{\boldsymbol{a^{mp}}}$**,** com $a \neq 0$ ou $\mathrm{m} \neq 0$**.**

*Exemplo***:**

$$\sqrt[2]{2^3} = \sqrt[2.6]{2^{3\cdot 6}} = \sqrt[12]{2^{18}}$$

2ª Propriedade: $\sqrt[n]{\boldsymbol{a \cdot b}} = \sqrt[n]{\boldsymbol{a}} \cdot \sqrt[n]{\boldsymbol{b}}$**.**

*Exemplo***:**

$$\sqrt[3]{2 \cdot 7} = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{7}$$

3ª Propriedade: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $b \neq 0$.

Exemplo:

$$\sqrt[4]{\frac{625}{10000}} = \frac{\sqrt[4]{625}}{\sqrt[4]{10000}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

4ª Propriedade: $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$.

Exemplo:

$$\sqrt[3]{\sqrt{5}} = \sqrt[3\cdot 2]{5} = \sqrt[6]{5}$$

5ª Propriedade: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$.

Exemplo:

$$\left(\sqrt[5]{3}\right)^2 = \sqrt[5]{3^2}$$

Potência de expoente racional

Definição:

Dados $a \in \mathbb{R}_+^*$, e $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ $(p \in \mathbb{Z}\ e\ q \in \mathbb{N}^*)$ define-se potência de base a e expoente $\frac{p}{q}$ pela relação:

$$\boxed{a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}}$$

Se $a = 0$ e $\frac{p}{q} > 0$, então, consideramos $0^{\frac{p}{q}} = 0$.

Exemplos:

a) $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$;

b) $3^{\frac{-3}{4}} = \sqrt[4]{3^{-3}} = \sqrt[4]{\frac{1}{3^3}} = \sqrt[4]{\frac{1}{27}}$.

Propriedades:

Se $a \in \mathbb{R}_+^*$, $b \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ e $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, então são válidas as seguintes propriedades:

1ª Propriedade: $\boldsymbol{a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}}$;

Exemplo: $10^{\frac{2}{3}} \cdot 10^{\frac{14}{6}} = 10^{\frac{2}{3}+\frac{14}{6}} = 10^{\frac{4+14}{6}} = 10^{\frac{18}{6}} = 10^3 = 1000.$

2ª Propriedade: $\boldsymbol{\frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{q}}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}}$;

Exemplo: $\frac{3^{\frac{8}{9}}}{3^{\frac{4}{9}}} = 3^{\frac{8}{9}-\frac{4}{9}} = 3^{\frac{4}{9}} = \sqrt[9]{3^4}$

3ª Propriedade: $\boldsymbol{(a \cdot b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}}}$;

Exemplo: $(3\sqrt{3})^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{2}{3}} \cdot \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}} = 3^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}} = 3^{\frac{3}{3}} = 3.$

4ª Propriedade: $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}$;

Exemplo: $\left(\frac{2\sqrt{2}}{5\sqrt{5}}\right)^{\frac{4}{3}} = \frac{(2\sqrt{2})^{\frac{4}{3}}}{(5\sqrt{5})^{\frac{4}{3}}} = \frac{2^{\frac{4}{3}}.\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{4}{3}}}{5^{\frac{4}{3}}.\left(5^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{4}{3}}}$.

5ª Propriedade: $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}}$.

Exemplo: $\frac{2^{\frac{4}{3}}.\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{4}{3}}}{5^{\frac{4}{3}}.\left(5^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{4}{3}}} = \frac{2^{\frac{4}{3}}.2^{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}}}{5^{\frac{4}{3}}.5^{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}}} = \frac{2^{\frac{4}{3}}.2^{\frac{2}{3}}}{5^{\frac{4}{3}}.5^{\frac{2}{3}}} = \frac{2^{\frac{4}{3}+\frac{2}{3}}}{5^{\frac{4}{3}+\frac{2}{3}}} = \frac{2^{\frac{6}{3}}}{5^{\frac{6}{3}}} = \frac{2^2}{5^2} = \frac{4}{25}$.

Você poderá encontrar algumas demonstrações no material de apoio. Outras poderão ser realizadas como forma de exercício.

Potência de expoente irracional

Podemos encontrar, baseado nas potências com expoentes racionais, um único número real positivo a^r, com $a > 0$ e r pertencente ao conjunto dos números irracionais.

Tomemos, por exemplo, a potência $2^{\sqrt{2}}$. Identificando os racionais aproximados por falta (R1) e por excesso (R2) de $\sqrt{2}$, podemos obter equivalentemente os valores por falta (V1) ou por excesso (V2) para a potência $2^{\sqrt{2}}$.

R1	R2	V1	V2
1	2	2^1	2^2
1,4	1,5	$2^{1,4}$	$2^{1,5}$
1,41	1,42	$2^{1,41}$	$2^{1,42}$
1,414	1,415	$2^{1,414}$	$2^{1,415}$
$< \sqrt{2} <$		$< 2^{\sqrt{2}} <$	

Definição:

Seja $a \in \mathbb{R}$, com $a > 0$ e r um número irracional, consideremos os conjuntos $R1 = \{m \in \mathbb{Q} \mid m < r\}$ (dos racionais que se aproximam por falta de r) e $R2 = \{n \in \mathbb{Q} \mid r < n\}$ (dos racionais que se aproximam por excesso de r).

Notemos que:

1. Todo elemento de $R1$ é menor qualquer elemento de $R2$.
2. Existem dois racionais m e n tais que $m < r < n$ e a diferença $(n - r)$ é menor que qualquer número positivo e arbitrário.

R1	R2
1	2
1,4	1,5
1,41	1,42
1,414	1,415

$< \sqrt{2} <$

Em função dos conjuntos $R1$ e $R2$, temos como imagem os conjuntos $V1 = \{a^m |\, m \in R1\}$ e $V2 = \{a^n |\, n \in R2\}$.

V1	V2
2^1	2^2
$2^{1,4}$	$2^{1,5}$
$2^{1,41}$	$2^{1,42}$
$2^{1,414}$	$2^{1,415}$
$< 2^{\sqrt{2}} <$	

Se $a > 0$, então, temos que:

1. Todo racional $m \in R1$ é menor que qualquer racional $n \in R2$;
2. Há dois números a^m e a^n, tais que a sua diferença $(a^m - a^n)$ é menor que qualquer número positivo e arbitrário.

Assim sendo, a^m e a^n são, respectivamente, aproximações por falta e excesso de a^r, e que $V1$ e $V2$ tendem para a^r.

Se $0 < a < 1$, então, $V1$ e $V2$, de forma análoga, tendem para a^r.

Potência de expoente real

Como já estão definidas todas as potências de a^b, com $a \in \mathbb{R}_+^*$ e expoente b (racional ou irracional), está definida a potência a^b com $b \in \mathbb{R}$.
Observamos que:

1. Toda potência de base real positiva e de expoente real, é um número real positivo;

$$a > 0 \Rightarrow a^b > 0, \forall\, b \in \mathbb{R}.$$

2. Para as potências de expoente real, valem as propriedades:

1ª Propriedade: $\boldsymbol{a^p \cdot a^q = a^{p+q}}$**,** com $(a \in \mathbb{R}_+^*, p \in \mathbb{R}$ e $q \in \mathbb{R})$;

Potência de expoente real

2ª Propriedade: $\boldsymbol{\frac{a^q}{a^p} = a^{q-p}}$**,** com $(a \in \mathbb{R}_+^*\,, p \in \mathbb{R}$ e $q \in \mathbb{R})$;

3ª Propriedade: $(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{a^p} \cdot \boldsymbol{b^p}$, com $(a \in \mathbb{R}_+^*\,, b \in \mathbb{R}_+^*$ e $q \in \mathbb{R})$;

4ª Propriedade: $\boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}}$**,** com $(a \in \mathbb{R}_+^*\,, b \in \mathbb{R}_+^*$ e $q \in \mathbb{R})$;

5ª Propriedade: $(\boldsymbol{a^p})^{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{a^{p \cdot q}}$**,** com $(a \in \mathbb{R}_+^*\,, p \in \mathbb{R}$ e $q \in \mathbb{R})$.

Funções Exponenciais e Logarítmicas

Potenciação: revisitando o conteúdo e recompondo saberes

Resumo da apresentação

Nesta apresentação abordou-se a operação de potenciação e suas propriedades, o que propiciará uma melhor compreensão da Função Exponencial, dos Logaritmos e da Função Logarítmica.

CRÉDITOS

Autor

Anízio Noronha Menezes Neto
Licenciado em Matemática.
Graduado em Administração.
Especialista em Docência de Matemática.

Autora

Erica Boizan Batista
Graduada em Matemática
Mestre em Matemática
Doutora em Matemática

Autor

Valdinês Leite de Sousa Júnior
Graduado em Matemática
Mestre em Matemática
Doutor em Matemática

PoCA
Portal de Cursos Abertos
SEaD
UFSCar
1970 - 2020
ANOS
TRANSFORMANDO VIDAS

REFERÊNCIAS

BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI JR. José Ruy; SOUSA, Paulo Roberto Câmara de. Matemática Completa 1º Ano. 4. ed. São Paulo: FTD, 2016.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MURAKAMI, Carlos. Fundamentos de matemática elementar, 2: logaritmos: 20. ed. São Paulo: Atual, 2013.

LIMA, Elon Lages. Números e Funções. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

SOUZA, Joamir; GARCIA, Jacqueline. #Contato matemática, 1º ano. 1. ed. São Paulo: FTD, 2016.