# APÊNDICE: QUADRATURA GAUSSIANA (GAUSS-LEGENDRE)

A função a integrar é aproximada por um polinômio de grau $n$, ou seja:

$$f(x) \cong p_n(x)$$

Deseja-se então calcular a integral $I$ do polinômio $p_n(x)$ no intervalo $[a,b]$.

$$I = \int_a^b p_n(x)dx$$

Inicialmente realiza-se uma transformação de variável de forma a "normalizar" os limites de integração de $[a,b]$ para $[-1,1]$, ou seja, deve-se achar um $z = g(x)$ tal que para $a \le x \le b$, $-1 \le z \le 1$. Dessa maneira, tem-se:

$$I = \int_a^b p_n(x)dx = \int_{-1}^{1} P_n(z)dz$$

**Objetivo**: determinar a integral $I$ de forma exata através de uma somatória ponderada, do tipo:

$$I = \int_{-1}^{1} P_n(z)dz = \sum_{i=0}^{p} w_i P_n(z_i). \qquad (1)$$

Portanto deve-se determinar os valores de $p$, $w_i$ e $z_i$, com $i = 0,1,...,p$, para que a somatória acima forneça a integral exata do polinômio $P_n$.

Escreve-se então a expressão genérica de $P_n$:

$$P_n = \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \alpha_3 z^3 + \ldots + \alpha_n z^n$$

A sua integral exata vale:

$$I = \int_{-1}^{1} P_n(z)dz = \int_{-1}^{1} \left(\alpha_0 + \alpha_1 z + \ldots + \alpha_n z^n\right)dz,$$

$$\boxed{I = 2\alpha_0 + \frac{2}{3}\alpha_2 + \ldots + \frac{\alpha_n}{n+1}\left[1-(-1)^{n+1}\right]}. \qquad (2)$$

Mas deseja-se calcular a integral por (1), ou seja:

$$I = \int_{-1}^{1} P_n(z)dz = \sum_{i=0}^{p} w_i P_n(z_i) = w_0 P_n(z_0) + w_1 P_n(z_1) + \ldots + w_p P_n(z_p),$$

ou ainda,

$$\boxed{I = w_0\left(\alpha_0 + \alpha_1 z_0 + \alpha_2 {z_0}^2 + \ldots + \alpha_n {z_0}^n\right) + w_1\left(\alpha_0 + \alpha_1 z_1 + \ldots + \alpha_n {z_1}^n\right) + \ldots + w_p\left(\alpha_0 + \alpha_1 z_p + \ldots + \alpha_n {z_p}^n\right)} \qquad (3)$$

Igualando-se (2) e (3), tem-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} w_0 + w_1 + w_2 + \ldots + w_p = 2 \\ w_0 z_0 + w_1 z_1 + \ldots + w_p z_p = 0 \\ \vdots \\ w_0 z_0^n + w_1 z_1^n + \ldots + w_p z_p^n = \dfrac{1}{n+1}\left[1 - (-1)^{n+1}\right] \end{cases}$$

O sistema acima possui ($n$+1) equações e 2($p$+1) incógnitas: $w_i$ e $z_i$, para $i$ = 0,1,...,$p$.

Ele só apresentará solução se ($n$+$1$) = 2($p$+1), ou seja, $n$ = 2$p$+1. Portanto são necessários ***p*+1** termos na somatória dada por (1) para que ela represente a integral exata de um polinômio de grau até ***n***, ou seja:

$\boxed{n \leq 2p+1}$,

que pode ser representado pela tabela abaixo:

| No. de termos (***p*+1**) | Máximo grau do polinômio integrado exatamente (***n***) |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 2 | 3 |
| 3 | 5 |
| 4 | 7 |

Dessa maneira, pode-se determinar as coordenadas dos pontos de amostragem (ou de integração) e os pesos para valores particulares de $p$.

Exemplos:

1) ***p*=0**

$$\begin{cases} w_0 = 2 \\ w_0 z_0 = 0 \end{cases}$$

A solução fornece: $w_0$ = 2, e $z_0$ = 0, ou seja, com apenas um ponto de amostragem, localizado no centro do intervalo, integra-se exatamente um polinômio de grau 1.

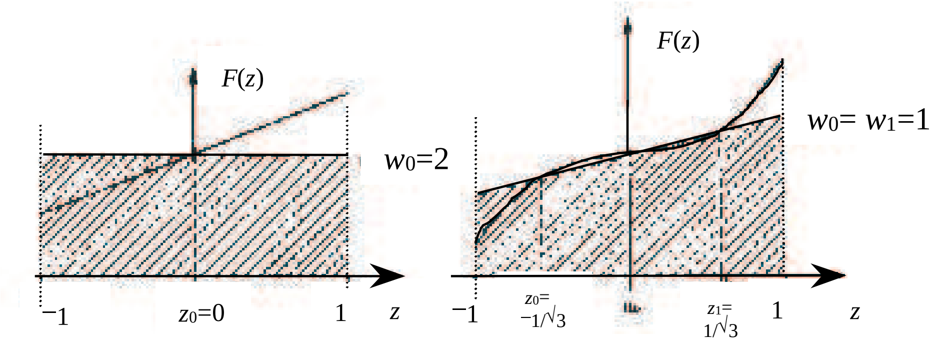
2) ***p*=1**

$$\begin{cases} w_0 + w_1 = 2 \\ w_0 z_0 + w_1 z_1 = 0 \\ w_0 z_0^2 + w_1 z_1^2 = \dfrac{2}{3} \\ w_0 z_0^3 + w_1 z_1^3 = 0 \end{cases}$$

O sistema de equações não linear acima é difícil de ser resolvido, mas através de "*back substitution*" pode-se verificar que a solução é:

$w_0 = w_1 = 1,\ z_1 = -z_0 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$,

e o método pode ser usado para integrar exatamente um polinômio de grau 3 ou inferior. Os dois casos acima são ilustrados na figura abaixo.




Os pontos de integração (ou amostragem) $z_i$'s, assim como os pesos $w_i$'s, são fornecidos em forma de tabela e são encontrados em diversos textos de métodos numéricos.

A quadratura de Gauss-Legendre requer um número reduzido de operações para avaliar exatamente integrais envolvendo polinômios.

Se os limites de integração forem diferentes deve-se realizar uma mudança de variáveis para mudar os limites. Para calcular a integral $\int_a^b f(x)dx$ deve-se transformar a função $f(x)$, $a \le x \le b$, para o intervalo $-1 \le z \le 1$ onde $z$ está linearmente relacionado com $x$:

$$x = a_0 + a_1 z$$

para $x = a \to z = -1 \Rightarrow a_0 - a_1 = a$

para $x = b \to z = 1 \Rightarrow a_0 + a_1 = b$

então: $a_0 = \dfrac{b+a}{2}$ e $a_1 = \dfrac{b-a}{2}$ $\therefore x = \dfrac{(b+a)+(b-a)z}{2} \Rightarrow dx = \dfrac{b-a}{2}dz$

logo: $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \frac{(b-a)}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{z(b-a)+b+a}{2}\right)dz$

Portanto, a fórmula geral de Gauss-Legendre é:

$$I \cong c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) + \cdots + c_{n-1} f(x_{n-1}) \text{ onde } n \text{ é o número de pontos}$$

Os valores de $c$ e $x$ estão na tabela abaixo

| pontos | coeficientes | argumentos da função | erro de truncamento |
|---|---|---|---|
| 2 | $c_0 = 1.000000$<br>$c_1 = 1.000000$ | $x_0 = -0.577350$<br>$x_1 = 0.577350$ | $f^{(4)}(\xi)$ |
| 3 | $c_0 = 0.555556$<br>$c_1 = 0.888889$<br>$c_2 = 0.555556$ | $x_0 = -0.774597$<br>$x_1 = 0.000000$<br>$x_2 = 0.774597$ | $f^{(6)}(\xi)$ |
| 4 | $c_0 = 0.347854$<br>$c_1 = 0.652145$<br>$c_2 = 0.652145$<br>$c_3 = 0.347854$ | $x_0 = -0.861136$<br>$x_1 = -0.339981$<br>$x_2 = 0.339981$<br>$x_3 = 0.861136$ | $f^{(8)}(\xi)$ |
| 5 | $c_0 = 0.236926$<br>$c_1 = 0.478628$<br>$c_2 = 0.568889$<br>$c_3 = 0.478628$<br>$c_4 = 0.236926$ | $x_0 = -0.906179$<br>$x_1 = -0.538469$<br>$x_2 = 0.000000$<br>$x_3 = 0.538469$<br>$x_4 = 0.906179$ | $f^{(10)}(\xi)$ |

**Exemplo:** integrar a função $f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$ de $x = 0$ a $x = 0.8$ utilizando a fórmula de Gauss-Legendre de 2 pontos. O valor exato da integral é 1,64053334.

mudança de variável: $x = 0.4 + 0.4z \Rightarrow dx = 0.4dz$

$$I = 0.4\int_{-1}^{1}[0.2 + 25(0.4 + 0.4z) - 200(0.4 + 0.4z)^2 + 675(0.4 + 0.4z)^3 - 900(0.4 + 0.4z)^4 + 400(0.4 + 0.4z)^5 dz$$

$$I \cong f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$I \cong 0.51674 + 1.30583 = 1.82257 \Rightarrow \varepsilon_t = -11.1\%$$